西北工业大学《材料力学》考研全套视频，真题、考点、典型题、命题规律独家视频讲解！
详见：网学天地（www.e-studysky.com）；咨询QQ：2696670126

8. 西北工业大学 2006 年硕士研究生入学考试 材料力学试题

（满分 150 分）

8.1　图 8.1(a)所示结构，$ABCD$ 为刚性块，在 A 处为铰链固定，同时与钢杆 1、2 相连接。已知许用应力$[\sigma]=160\text{MPa}$，$F=160\text{kN}$。杆 1、2 的横截面面积相等，求各杆所需最小横截面面积。（25 分）

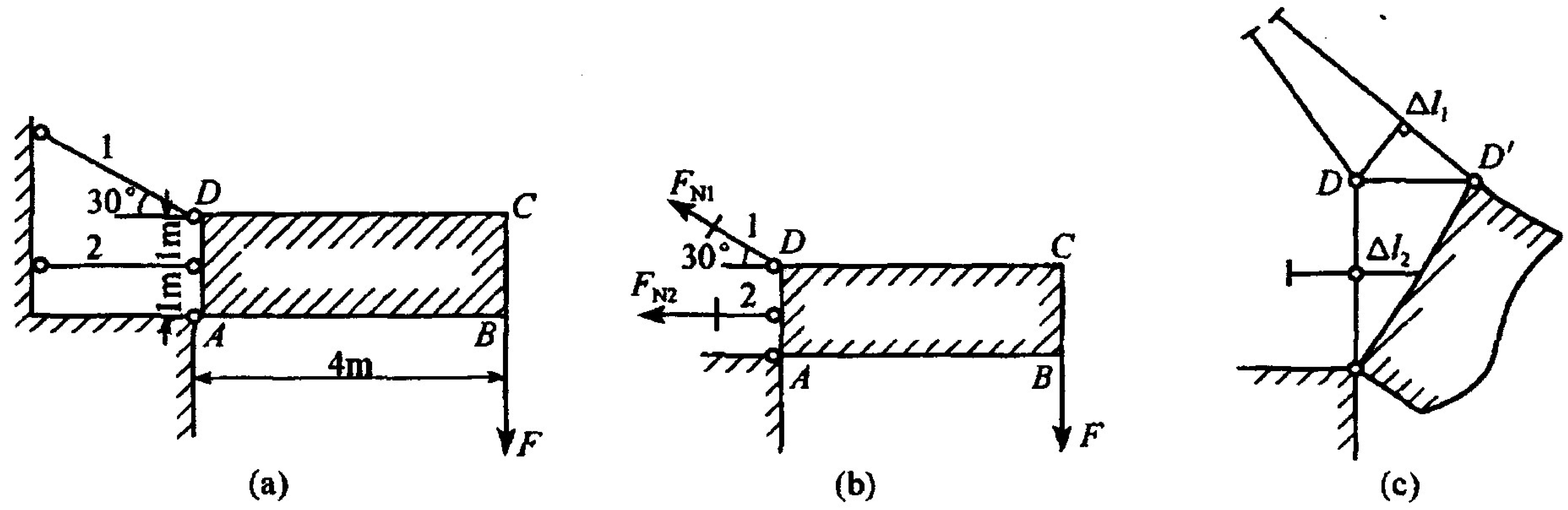


图 8.1

解　这是拉(压)超静定方面的题目。题目要求设计两杆面积，因此必须知道两杆的内力。但对 A 点取矩，仅有一个有效静力平衡方程，但有两个未知量 F_{N1}、F_{N2}，故为一次超静定问题。

(1) 求各杆的内力。用截面法将 1、2 杆截开，设其轴力分别为 F_{N1}、F_{N2}(图 8.1(b))，由 $\sum M_A=0$ 得

$$F_{N1}\cos30^\circ\times2+F_{N2}\times1=4F \tag{1}$$

由图 8.1(c)图知两杆变形几何关系为

$$DD'=\Delta l_1/\cos30^\circ=\frac{2}{\sqrt{3}}\Delta l_1$$

而

$$\Delta l_2=\frac{1}{2}DD'=\frac{1}{\sqrt{3}}\Delta l_1$$

代入胡克定律 $\Delta l_i=\dfrac{F_{Ni}l_i}{EA}$，并化简得

$$2F_{N1}=3F_{N2} \tag{2}$$

联立式(1)、式(2)两式解得

$$F_{N1}=\frac{12F}{2+3\sqrt{3}}=1.67\times160=267(\text{kN})$$

西北工业大学《材料力学》考研全套视频，真题、考点、典型题、命题规律独家视频讲解！
详见：网学天地（www.e-studysky.com）；咨询QQ：2696670126

$$F_{N2}=\frac{2}{3}F_{N1}=178\text{kN}$$

(2) 确定各杆横截面面积。题中要求两杆横截面面积相等，而许用应力相同，故选用最大轴力设计所需最小横截面面积。即

$$A\geqslant\frac{F_{N1}}{[\sigma]}=\frac{267\times10^3}{160\times10^6}=16.69\times10^{-4}(\text{m}^2)=1669(\text{mm}^2)$$

点评 ①截面设计，当要求诸杆面积(直径)相同时，像本例一样，选内力最大者进行设计，或用不同内力设计出各杆面积，最终选最大者。②注意超静定问题的判断，以免走错路径。③当已知各杆面积，而要求 B 点位移时，可用几何法，但用功能原理更为简单。

8.2 图 8.2 所示传动轴长 $l=510\text{mm}$，直径 $D=50\text{mm}$。现将轴的一段钻空为内径 $d_1=38\text{mm}$ 的内孔，另一段钻为 $d_2=25\text{mm}$ 的内孔，材料的许用切应力 $[\tau]=80\text{MPa}$，求：(1) 轴所能承受的最大扭矩；(2) 如要求两段轴长度内的扭转角相等，l_1 和 l_2 应满足什么关系？(25 分)

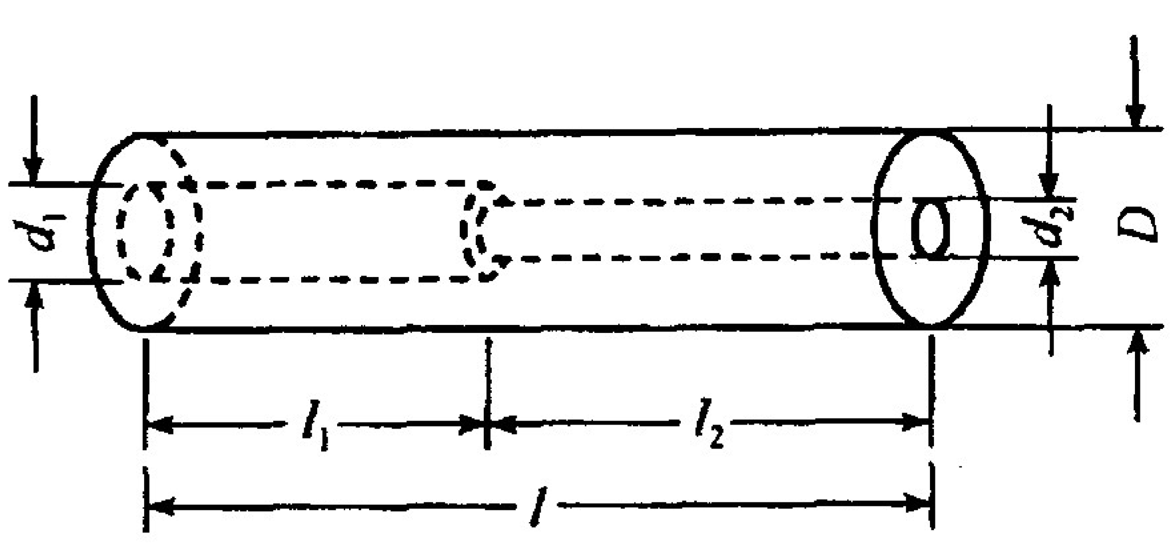


图 8.2

解 这是圆轴扭转强度、刚度问题。首先，圆轴所能承受的最大扭矩应是两段所能承受最大扭矩中最小的，由其强度条件 $\tau=\frac{T}{W_p}\leqslant[\tau]$知，相同外径下，内孔越大，$W_p$ 越小，故 l_1 段的极限扭矩即为该轴能承受的最大扭矩。

(1) 轴承受的最大扭矩 $T_{\max}$。由题知 $\alpha_1=\frac{d_1}{D}=0.76$，代入空心轴扭转强度条件中，即

$$\tau_{1,\max}=\frac{16\times T_{1,\max}}{\pi D^3(1-\alpha_1^4)}\leqslant[\tau]$$

得

$$T_{1,\max}=\frac{[\tau]\pi D^3(1-\alpha_1^4)}{16}=\frac{80\times10^6\times\pi\times5^3\times10^{-6}(1-0.76^4)}{16}$$
$$=1308(\text{N}\cdot\text{m})=T_{\max}$$

(2) 当两段扭转角相等时，即变形几何关系为

$\varphi_1=\varphi_2$，而 $\varphi_1=\frac{Tl_1}{GI_{p1}}$，$\varphi_2=\frac{Tl_2}{GI_{p2}}$，$\alpha_2=\frac{1}{2}$，代入变形几何关系，得

$$\frac{32Tl_1}{G\pi D^4(1-\alpha_1^4)}=\frac{32Tl_2}{G\pi D^4(1-\alpha_2^4)}$$

化简得

$$l_1(1-\alpha_2^4)=l_2(1-\alpha_1^4)$$

故

$$l_1/l_2=\frac{1-\alpha_1^4}{1-\alpha_2^4}=\frac{0.666}{0.938}=0.71$$

点评 ①最大载荷估计中，可以根据以上分析直接确定，亦可分别把两段承受的最大载荷求出，取最大值的最小值即可。②圆轴扭转时，通常包含强度问题和刚度问题，如果题目中给出$[\tau]$、$[\varphi']$，不论校核，截面设计、载荷估计、均要求强度、刚度综合考虑。

西北工业大学《材料力学》考研全套视频，真题、考点、典型题、命题规律独家视频讲解！
详见：网学天地（www.e-studysky.com）；咨询QQ：2696670126

8.3　图 8.3(a)所示结构，分布载荷 $q=20\text{kN/m}$，梁的截面为矩形，$b=90\text{mm}$，$h=130\text{mm}$，柱的截面为圆形，直径 $d=80\text{mm}$。梁和柱的材料均为 Q235 钢，$E=200\text{GPa}$，$[\sigma]=160\text{MPa}$，$\sigma_p=200\text{MPa}$，规定稳定安全因数 $n_{st}=3$。试校核结构的安全性。(25 分)

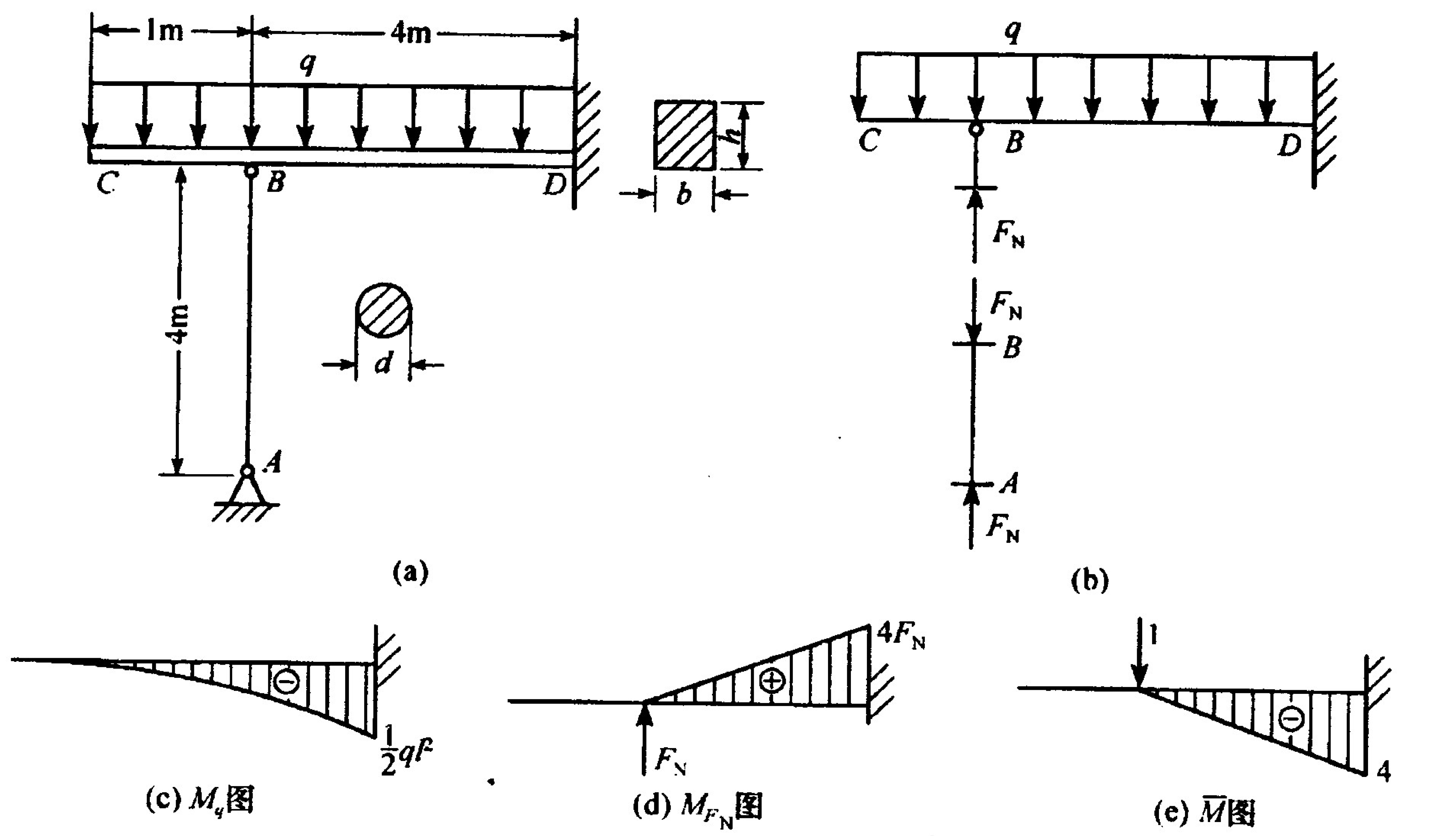


图 8.3

解　题目要求校核结构安全性。结构的安全性包括梁 CBD 的强度，压杆 BA 的稳定性。要进行强度，稳定性校核，必须已知各部分的内力，而结构为悬臂梁下由一个二力杆支撑，故为一次超静定结构。

(1) 求 AB 杆的轴力 F_N。取相当系统如图 8.3(b)所示，其变形几何关系为在 q、F_N 作用下梁在 B 点的挠度应等于 AB 的缩短，即 $\Delta_{By}=\Delta_{Bq}+\Delta_{BF_N}=\Delta l_{AB}$

选用图乘法求 Δ_{By}，作 M_q、M_{F_N}、$\overline{M}$ 图如图 8.3(c)～(e)所示。图 8.3(c)、(e)相乘得

$$\Delta_{Bq}=\frac{1}{EI}\frac{1}{3}\times 5\times\frac{25}{2}q\times\frac{11}{4}=\frac{1375}{24EI}q(\downarrow)$$

$$\Delta_{BF_N}=\frac{-1}{EI}\frac{1}{2}\times 4\times 4F_N\times\frac{2}{3}\times 4=-\frac{64}{3}F_N(\uparrow)$$

故 B 点的总位移

$$\Delta_B=\Delta_{Bq}+\Delta_{BF_N}=\frac{1375q-512F_N}{24EI}$$

AB 杆的缩短量为

$$\Delta l_{AB}=\frac{F_N l_{AB}}{EA_{AB}}$$

代入变形协调条件，即

$$\frac{1375q-512F_N}{24EI}=\frac{4\times F_N}{EA_{AB}}$$

其中 $I=\frac{bh^3}{12}$，$A_{AB}=\frac{\pi}{4}d^2$，代入数值解得 $F_N=53.7\text{kN}$。

西北工业大学《材料力学》考研全套视频，真题、考点、典型题、命题规律独家视频讲解！
详见：网学天地（www.e-studysky.com）；咨询QQ：2696670126

（2）校核梁的强度。写出梁 CBD 的弯矩方程（坐标圆点选在 C 端），即

$$M(x)=-\frac{1}{2}qx^2+F_N(x-1)$$

令 $M'(x)=-qx+F_N=0$ 得

$$x=\frac{F_N}{q}=\frac{53.7}{20}=2.685(\mathrm{m})$$

代人弯矩方程得最大弯矩为

$$M_{\max}=-\frac{1}{2}q(2.685)^2+53.7\times1.685=18.4(\mathrm{kN\cdot m})$$

梁中最大应力为

$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{W_z}=\frac{6M_{\max}}{bh^2}=\frac{6\times18.4\times10^3}{90\times130^2\times10^{-9}}=72.6\times10^6(\mathrm{Pa})=72.6(\mathrm{MPa})<[\sigma]$$

（3）校核杆 AB 的稳定性。杆 AB 的柔度为

$$\lambda=\frac{\mu l_{AB}}{i}=\frac{4\mu l_{AB}}{d}=200>\lambda_p\quad\left(\lambda_p=\sqrt{\frac{\pi^2E}{\sigma_p}}=99.3\right)$$

杆 AB 系大柔度杆，代入欧拉公式得

$$F_{AB,cr}=\frac{\pi^2EI}{(\mu l)^2}=\frac{\pi^2\times200\times10^9\times\pi\times80^4\times10^{-12}}{64\times(1\times4)^2}=248\times10^3(\mathrm{N})=248(\mathrm{kN})$$

其稳定安全因数为

$$n_{st}=\frac{F_{AB,cr}}{F_N}=\frac{248}{53.7}=4.62>n_{st}=3$$

杆 AB 稳定。结构的安全性满足。

点评 ①结构是否超静定的判断，对于解题是否正确是至关重要的。②在列出变形协调条件后，各部分变形可任意选择合适、简捷的方法确定。③在内力（弯矩）分布中最大内力不易确定时，最好写出内力方程，求极值确定。④压杆中以失稳失效优先考虑，用压杆的柔度判断选用临界载荷（应力）公式。

8.4 图 8.4(a)所示两相同梁 AB、CD，当重为 W 的物体突加于 AB 梁的 B 点时，求 CD 梁 C 点的挠度 $\Delta_{C,d}$。（25 分）

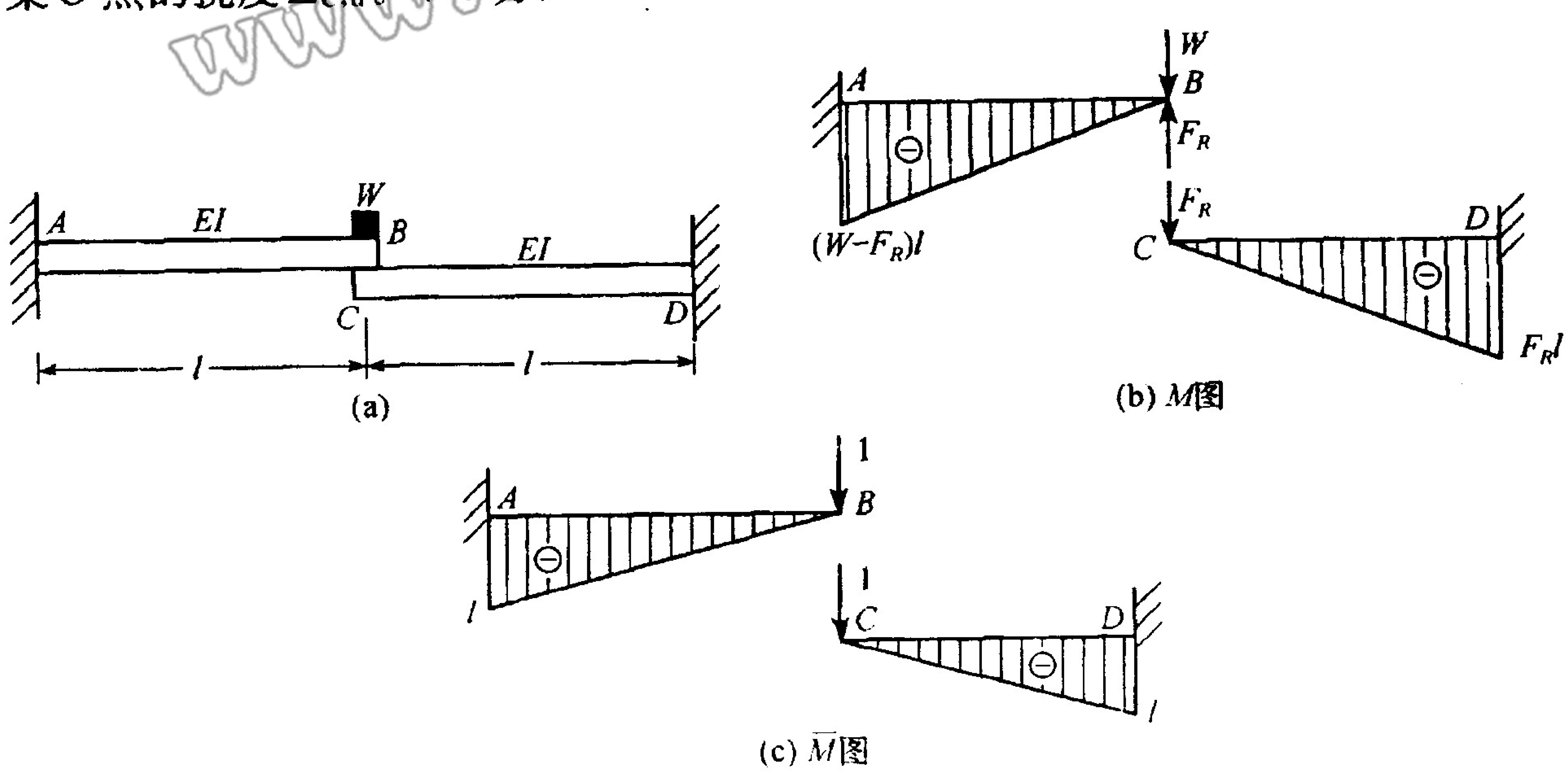


图 8.4

解 这是一个动荷方面的题目。AB 悬臂梁下又有一相同悬臂梁 CD 支撑，支撑点仅传递垂直方向反力，故为一次超静定结构，因此首先要求解超静定问题。同时要应用到梁的变形计算。

(1) 求解超静定问题。设 C、B 点两梁间的作用力为 F_R，作弯矩图如图 8.4(b)所示，其变形协调条件为 B、C 不脱开，即 $\Delta_{By}=\Delta_{Cy}$，故在 B、C 点各加单位力，作单位力弯矩图如图 8.4(c)所示。选用图乘法求 B、C 点位移，两图相乘(AB 和 AB，CD 与 CD)，得两点的静位移为

$$\Delta_{By}=\frac{1}{EI}\frac{1}{2}l^2(W-F_R)\times\frac{2}{3}l=\frac{(W-F_R)l^3}{3EI}$$

$$\Delta_{Cy}=\frac{1}{EI}\frac{1}{2}l^2F_R\frac{2}{3}l=\frac{F_Rl^3}{3EI}$$

代入变形协调条件即$(W-F_R)=F_R$

故解得

$$F_R=\frac{W}{2}$$

(2) 求动荷因数 K_d。对于突加载荷，其动荷因数 $K_d=2$。

(3) C 点的动挠度

$$\Delta_{C,d}=K_d\cdot\Delta_{Cy}=2\cdot\frac{\frac{W}{2}l^3}{3EI}=\frac{Wl^3}{3EI}(\downarrow)$$

点评 ①对于突加载荷，应熟记其动荷因数 $K_d=2$，亦可代入初速度为零的自由落体冲击中动荷因数 $K_d=1+\sqrt{1+\frac{2h}{\Delta_{st}}}$，因 $h=0$，故 $K_d=2$。②题目若无明确要求，梁的变形可直接套用熟知的变形公式，如本题中悬臂梁自由端受集中力 F，则自由端的挠度为 $f=\frac{Fl^3}{3EI}$，使得解题简化。③如果两悬臂端 B、C 冲击前不接触，冲击后接触，则在冲击前后系统状态发生了变化，则应从能量原理出发讨论，不能贸然用 $K_d=2$，详见例 14.2.9。

8.5 求图 8.5(a)所示刚架的支座反力。(25 分)

解 这是求解超静定刚架问题。刚架 A、B 端均为固定铰支座，固有 4 个约束反力，因此为一次超静定结构。取相当系统如图 8.5(b)所示，作载荷弯矩图 M_q 和单位力图 $\overline{M}$ 如图 8.5(c)、(d)所示。

(1) 不利用对称性解超静定。

根据变形协调条件，B 点的水平位移为零，故力法正则方程为

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1q}=0$$

从 $\overline{M}$ 图中可以看出，各段弯矩均为直线，故选择图乘法求得正则方程中各系数为

$$\Delta_{1q}=\frac{1}{EI}\left[\frac{2}{3}\times 2l\times\frac{1}{2}ql^2\times(-2l)\right]=\frac{-4ql^4}{3EI}$$

$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}\left(2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2l\cdot 2l\cdot\frac{2}{3}\cdot 2l+2l\cdot 2l\cdot 2l\right)=\frac{40l^3}{3EI}$$

代入正则方程解得

西北工业大学《材料力学》考研全套视频，真题、考点、典型题、命题规律独家视频讲解！
详见：网学天地（www.e-studysky.com）；咨询QQ：2696670126

$$X_1=-\frac{\Delta_{1q}}{\delta_{11}}=\frac{ql}{10}(\leftarrow)$$

两支座处的支反力为

$$F_{Ay}=F_{By}=ql(\uparrow),\quad F_{Ax}=-F_{Bx}=\frac{ql}{10}$$

(2) 利用对称性解超静定。

根据结构对称、外力对称条件可知，刚架的变形亦对称，故中面 C 处转角为零。根据对称性可知 $F_{Ay}=F_{By}=ql$，且 $F_{Ax}=-F_{Bx}$。因此可选取相当系统如图 8.5(e)所示，作外载内力图及单位力图分别如图 8.5(f)、(g)所示。在此相当系统下，变形协调条件为铰支处 A 的水平位移为零。力法正则方程为

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1q'}=0$$

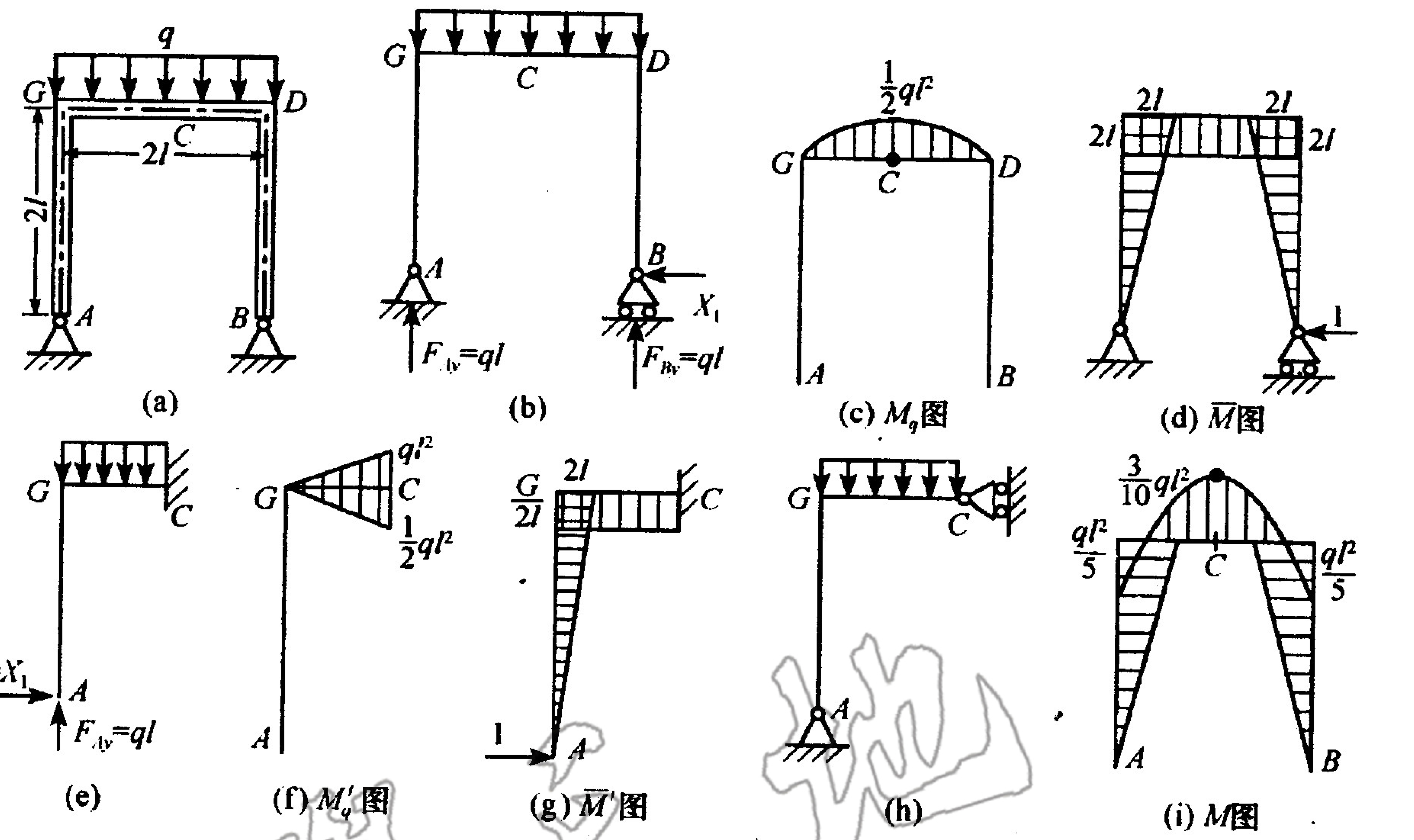


图 8.5

利用图乘法求得正则方程中各系数为

$$\Delta_{1q'}=\frac{1}{EI}\left[-\frac{1}{2}l\cdot ql^2\cdot 2l+\frac{1}{3}l\cdot\frac{1}{2}ql^2\cdot 2l\right]=-\frac{2ql^4}{3EI}$$

$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}2l\cdot 2l\cdot\frac{2}{3}\cdot 2l+l\cdot 2l\cdot 2l\right)=\frac{20l^3}{3EI}$$

代入力法正则方程，解得

$$X_1=-\frac{-\Delta_{1q'}}{\delta_{11}}=\frac{ql}{10}$$

当然，同样可取图 8.5(a)中面 C 处加中间铰作为静定基，继而取相当系统如图 8.5(h)所示，此种方法相对于前两种方法要烦琐一些，有兴趣的读者不妨一试。

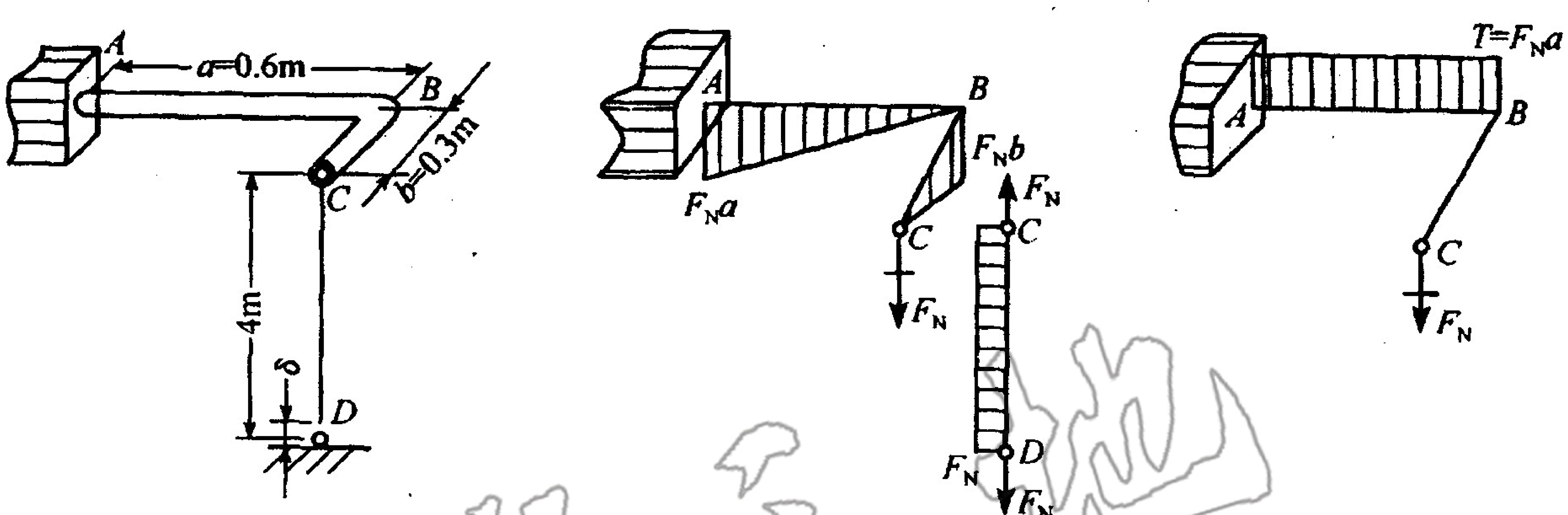
求出多余内力 X_1 后，根据平衡条件求出所有支反力。如果进一步要求，还可作刚架弯矩图如图 8.5(i)所示。

点评 ①静定基的选择可以多样化，但必须遵从一条原则，静定基必须是静定的，而

西北工业大学《材料力学》考研全套视频，真题、考点、典型题、命题规律独家视频讲解！
详见：网学天地（www.e-studysky.com）；咨询QQ：2696670126

不应是可动机构或其他。如果利用结构及外力的对称性，贸然从 C 截面处截开，去其一半作为静定基，则所取静定基是无法稳定的机构，故请读者注意。②用变形比较法可直接将方法一中的变形协调条件写为 $\Delta_{Bq}+\Delta_{BF_{Bx}}=0$，即由外载荷 q 及多余约束力 F_{Bx} 在 B 截面引起的水平位移为零，物理概念清晰。故低次超静定结构，用力法正则方程还易引起物理意义上的混淆。③方程中各分量的求法，方法灵活多样，直杆且内力图线性的条件下，图乘法更为简单明了。

8.6　图 8.6(a)所示，钢杆 AB 的直径为 $d=20\text{mm}$，CB 可视为刚性杆，C 端与直径 10mm 的圆杆在 D 点固定相连，但加工时 CD 杆短了 $\delta=25\times10^{-4}\times4\text{m}$。钢杆和圆杆为同一材料，$E=200\text{GPa}$，$G=80\text{GPa}$，$AB$ 杆的$[\sigma]=160\text{MPa}$，当杆 CD 在 D 点连接时，试用第四强度理论校核 AB 杆的强度。（10 分）



(a)　(b) M、F_N图　(c) T图

图 8.6

网学天地 www.e-studysky.com

解　这是一个装配问题，涉及圆杆 AB 的弯、扭引起刚性杆 CB 的位移，CD 杆的拉伸以及强度理论等内容。装配问题是一个超静定问题，首先应根据变形协调关系求解超静定问题。

(1) 求 CD 杆的内力 F_N。设 CD 杆的拉伸轴力为 F_N，D 点连接时 C 点产生 $\delta=10\text{mm}$ 的位移应由三部分组成。题知 CB 为刚性杆，故 δ 应包括 AB 杆的弯曲，AB 杆的扭转引起 C 点的下降及 CD 杆的拉伸。其中，AB 杆的弯曲引起 C 点的下降为

$$\Delta_{C1}=\Delta_{BM}=\frac{F_Na^3}{3EI}=\frac{0.6^3\times F_N\times64}{3\times200\times10^9\times\pi\times20^4\times10^{-12}}=4.58\times10^{-5}F_N$$

AB 杆的扭转角 φ_{AB} 引起 C 点的下降为

$$\Delta_{C2}=\varphi_{AB}\times b=\frac{Ta}{GI_p}\times b=\frac{ab^3F_N}{GI_p}$$

$$=\frac{0.6\times0.3^2F_N\times32}{80\times10^9\times\pi\times20^4\times10^{-12}}=4.30\times10^{-5}F_N$$

CD 杆的拉伸伸长量为

$$\Delta_{C3}=\Delta l_{CD}=\frac{F_N4}{EA}\ \frac{4\times4F_N}{200\times10^9\times\pi\times20^2\times10^{-6}}=2.55\times10^{-7}F_N$$

代入变形协调条件

$$\delta=\Delta_{C1}+\Delta_{C2}+\Delta_{C3}=(4.58+4.30+0.0255)\times10^{-5}F_N=10\times10^{-3}$$

解得

西北工业大学《材料力学》考研全套视频，真题、考点、典型题、命题规律独家视频讲解！
详见：网学天地（www.e-studysky.com）；咨询QQ：2696670126

$$F_N = 112.2\text{N}$$

(2) AB 杆的强度校核。AB 杆的危险截面在 A 端，$M_{max} = F_N a = 6732\text{N}\cdot\text{m}$，$T_{max} = F_N b = 33.66\text{N}\cdot\text{m}$。因为 AB 为圆形截面，故直接代入 M、T 表述的第四强度理论中，得

$$\sigma_{r,4} = \frac{1}{W}\sqrt{M^2 + 0.75T^2} = \frac{32}{\pi \times 20^3 \times 10^{-9}}\sqrt{67.32^2 + 0.75 \times 33.66^2}$$
$$= 93.4 \times 10^6(\text{Pa}) = 93.4(\text{MPa}) < [\sigma]$$

AB 杆的强度满足。

点评 ①涉及装配应力，一定是超静定结构，首先从变形协调关系、物理关系、静力平衡关系解超静定问题。②在计算 C 点因装配由 F_N 引起的位移时，一般包括 CB 段弯曲、AB 段弯曲、AB 段扭转引起的 C 点下降三部分，本题中已知 CB 为刚性杆，故 CB 段弯曲不计，但不能忽略 CD 杆的伸长变形。③第三、第四强度理论在不同应力状态下有不同的衍生表达式，包括圆轴的弯、扭组合，圆轴的拉、弯、扭组合，以及不同平面内的弯曲组合，应熟练掌握、直接运用，不必先求出正应力 σ，切应力 τ 再代入原始表达式。

8.7 图 8.7(a)所示带中间铰 C 的梁，在 C 处允许梁转角不连续，试求铰 C 两边转角的大小。梁的抗弯刚度为 EI。(15 分)

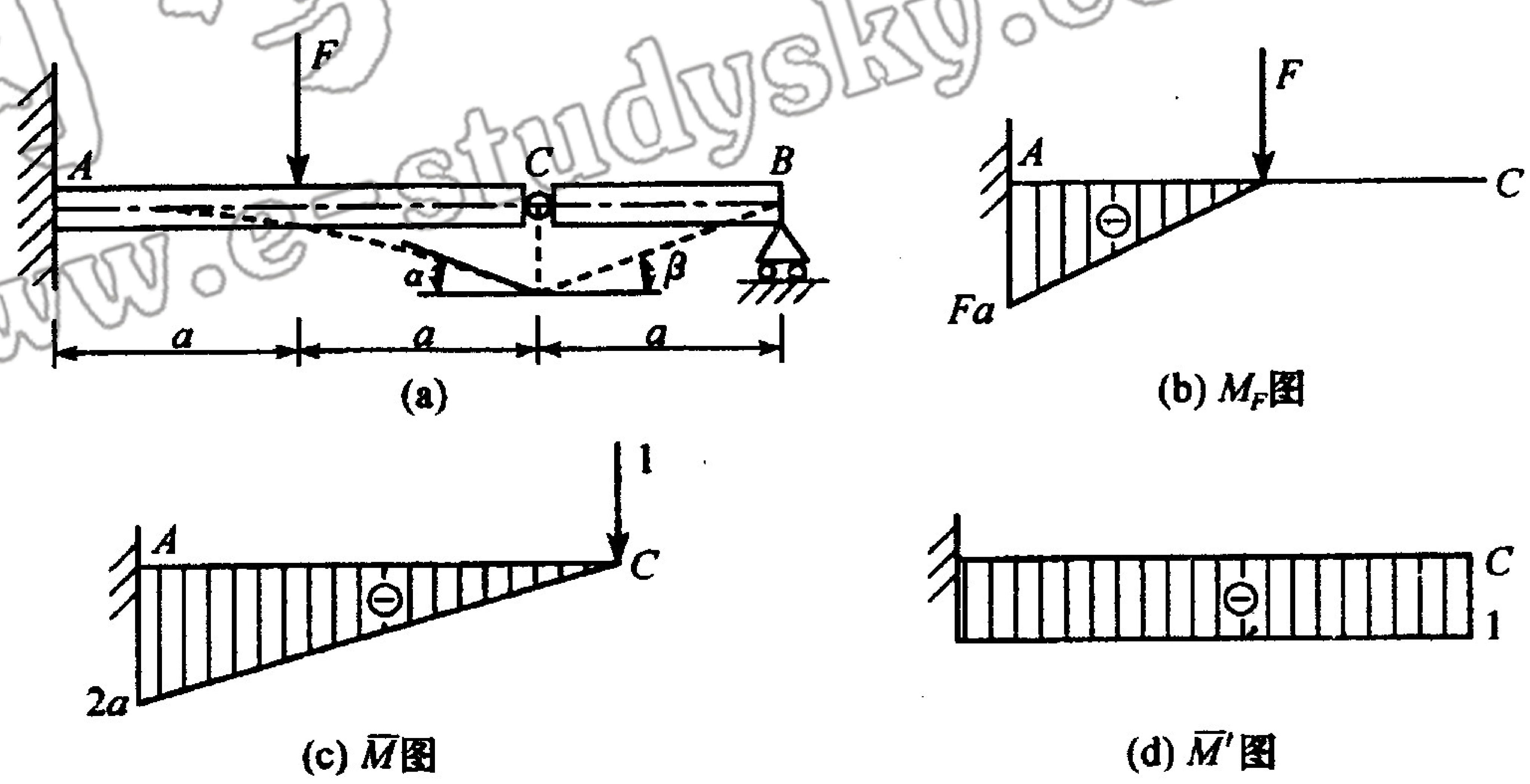


图 8.7

解 这是一个弯曲变形方面的题目。第一眼接触，以为是一个超静定问题，仔细分析，虽然多出一个活动铰，但又增加一个中间铰，结构是静定的。取 CB 段分析，可知该段从力学意义上讲形同虚设，铰 C 处无剪力传递，问题等同一悬臂梁在中面处受集中力作用，其端部的转角 $\theta_C = \alpha$ 和挠度 Δ_{Cy}，而 $\beta = \dfrac{\Delta_{Cy}}{a}$。

(1) 求 C 点的位移及转角。作 M_F、$\overline{M}$、$\overline{M}'$ 图如图 8.7(b)、(c)、(d)所示，图 8.7(b)、(c)相乘，得

$$\Delta_{Cy} = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}a \cdot Fa \cdot \frac{5}{3}a\right) = \frac{5Fa^3}{6EI}(\downarrow)$$

图 8.7(b)、(d)相乘，得 C 截面的转角，即题中所求 α

$$\theta_C = \alpha = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}a \cdot Fa \cdot 1\right) = \frac{Fa^2}{2EI}(\curvearrowright)$$

西北工业大学《材料力学》考研全套视频，真题、考点、典型题、命题规律独家视频讲解！
详见：网学天地（www.e-studysky.com）；咨询QQ：2696670126

(2) 求β　求出Δ_{Cy}后，在小变形条件下，近似认为$\beta=\frac{\Delta_{Cy}}{a}$，即

$$\beta=\frac{5Fa^2}{6EI}$$

点评　①对结构作出正确判定，以免被一些假象所迷惑。②梁变形可用能量法，积分法等求解，在题目未具体要求时，可根据熟知结果直接写出。如本题中$\theta_D=\frac{Fa^2}{2EI}$，$\Delta_{Dy}=\frac{Fa^3}{3EI}$，则$\theta_C=\theta_D$，$\Delta_{Cy}=\Delta_{Dy}+\theta_D a$ 即可求得。

网学天地 www.e-studysky.com