

西北工业大学

2008 年硕士研究生入学考试试题

试题名称：材料力学（A 卷） 试题编号：841

一、某空心轴外径 $D = 100\text{mm}$ ，内外径之比 $\alpha = d/D = 0.5$ ，轴的转速 $n = 300\text{r/min}$ ，轴所传递功率 $P = 150\text{kW}$ ，材料的切变模量 $G = 80\text{GPa}$ ，许用剪应力 $[\tau] = 40\text{MPa}$ ，单位长度许可扭转角 $[\varphi'] = 0.5^\circ/\text{m}$ ，试校核轴的强度和刚度。

解 (1) 强度校核。已知传递功率、轴的转速，可求得该轴传递的力偶矩为

$$T = M_e = 9549 \frac{P}{n} = 9549 \times \frac{150}{300} = 4775\text{N} \cdot \text{m}$$

轴中最大切应力为

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_P} = \frac{T}{\frac{\pi}{16} D^3 (1 - \alpha^4)} = \frac{9549 \times \frac{150}{300}}{\frac{\pi}{16} \times 0.1^3 \times (1 - 0.5^4)} = 25.94\text{MPa} < [\tau]$$

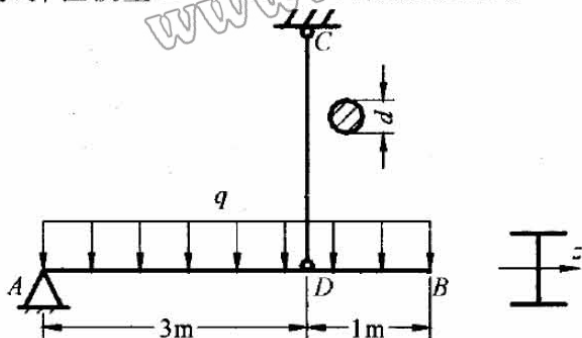
(2) 刚度校核。单位长度最大扭转角

$$\varphi'_{\max} = \frac{T}{GI_P} \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{9549 \times \frac{150}{300}}{80 \times 10^9 \times \frac{\pi}{32} D^4 (1 - \alpha^4)} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 0.37^\circ/\text{m} < [\varphi']$$

该轴强度和刚度均满足。

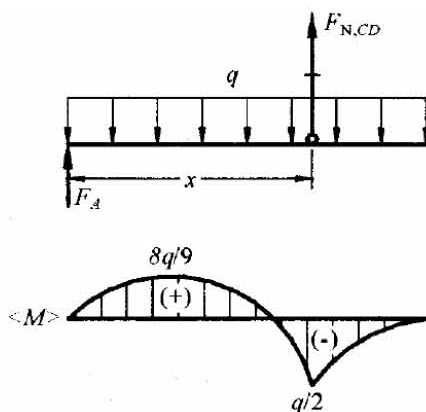
【评注】① 一般圆轴扭转的题目中，均涉及轴的强度和刚度，注意全面校核；② 注意极惯性矩 I_P 和抗扭截面模量 W_P 中的异同，防止低级错误出现；③ 记住传递功率为 kW，轴的转速为 r/m 单位时的公式，如稍作变动（功率用马力，转速用 r/s（每秒转数）），则相应乘以系数 0.735 进行变换。

二、图所示梁 AB 为 No. 14 工字钢，抗弯截面系数 $W_z = 102\text{cm}^3$ ，杆 CD 为圆截面杆，直径 $d = 20\text{mm}$ ，梁及杆的材料相同，弹性模量 $E = 200\text{GPa}$ ，许用应力 $[\sigma] = 160\text{MPa}$ ，试求许可均布载荷 $[q]$ 。



解 (1) 由静力平衡方程求得支反力 $F_{N,CD} = \frac{8}{3}q$, $F_A = \frac{4}{3}q$ 。

(2) 作出梁 AB 的弯矩图如图所示。



(3) 按梁 AB 弯曲正应力强度条件估计。因为

$$\sigma_{AB, \max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{\frac{8}{9}q}{W_z} \leq [\sigma]$$

故 $q \leq \frac{9}{8}W_z[\sigma] = \frac{9}{8} \times 102 \times 160 = 18.36 \text{ kN/m}$

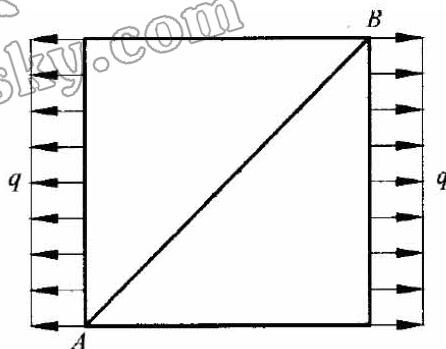
(4) 按杆 CD 拉伸强度条件估计。因为轴力 $F_{N,CD} = \frac{8}{3}q$ ，代入拉伸强度条件

$$\sigma_{CD, \max} = \frac{F_{N,CD}}{A} = \frac{\frac{8}{3}q}{\frac{\pi}{4}d^2} \leq [\sigma]$$

故 $q \leq \frac{3}{21}\pi d^2[\sigma] = \frac{3}{32} \times \pi \times 20^2 \times 160 = 18.85 \text{ kN/m}$

因此，该结构的许可载荷为 $[q] = 18.36 \text{ kN/m}$ 。

三、图示边长为 a 的正方形薄板，两侧面受面力分布集度为 q 的均布拉力作用，已知板材料的 E 和 μ 。试求对角线的伸长。



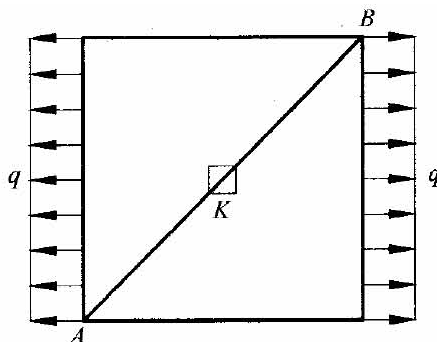
解 这是广义胡克定律应用方面的题目，在薄板对角线 AB 上 K 点取单元体如图，该单元体上应力分布为 $\sigma_x = q$ ， $\sigma_y = 0$ ， $\tau_{xy} = 0$ 。

(1) 确定 AB 为法线的面上正应力 σ_{45° 和与该面垂直的面上正应力 σ_{135° 。因为是单向拉伸，所以可用 $\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha$ 得

$$\sigma_{45^\circ} = \sigma_x \cos^2 45^\circ = \frac{q}{2}, \quad \sigma_{135^\circ} = \sigma_x \cos^2 135^\circ = \frac{q}{2}$$

(2) 求 AB 线上的应变。将 σ_{45° 、 σ_{135° 代入广义胡克定律得

$$\epsilon_{45^\circ} = \frac{1}{E} [\sigma_{45^\circ} - \mu(\sigma_{135^\circ} + 0)] = \frac{(1-\mu)q}{2E}$$

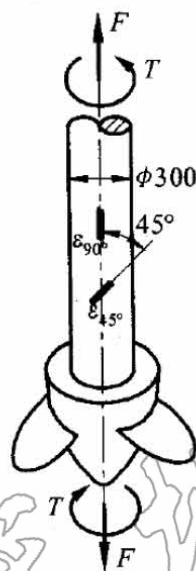


(3) 求 AB 的伸长量。边长为 a , 故 $l_{AB} = \frac{a}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2}a$, 则 AB 的伸长量为

$$\Delta l_{AB} = l_{AB} \epsilon_{45^\circ} = \frac{\sqrt{2}a(1-\mu)q}{2E}$$

【评注】① 熟悉广义胡克定律的表达式及式中每一个符号的含义, 正确确定沿对角线方向的应变; ② 一般情况下, 任意斜截面上的应力应代入任意斜截面 α 上的应力表达式中求出, 亦可用应力圆确定; ③ 注意尽量少用先求出 $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$, 再代入平面应变状态解析式中求出 ϵ_{45° 。

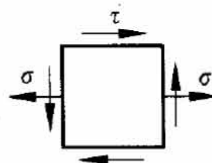
四、一水轮机主轴受拉扭联合作用, 如图所示。在主轴沿轴线方向与轴向夹角 45° 方向各贴一应变片。现测的轴等速转动时, 轴向应变平均值 $\epsilon_{90^\circ} = 26 \times 10^{-6}$, 45° 方向应变平均值 $\epsilon_{45^\circ} = 140 \times 10^{-6}$ 。已知轴的直径 $D = 300\text{mm}$, 材料的 $E = 210\text{GPa}$, $\mu = 0.28$ 。试求拉力 F 和转矩 T 。若许用应力为 $[\sigma] = 120\text{MPa}$, 试用第三强度理论校核轴的强度。



解 题目涉及拉扭组合变形、广义胡克定律、强度理论方面的内容, 首先确定测得应变点的应力状态, 应用广义胡克定律确定施加在主轴上的外力 M_e 和 F 。

(1) 确定应力状态。测应变虽用两个单独应变片, 但两点应力状态完全一样, 测试

时最好用应变花一点测试, 该点的应力状态如图所示。其中 $\sigma = \frac{F}{A}$, $\tau = \frac{M_e}{W_p}$ 。



(2) 确定所测应变方向点应力。根据平面应力状态任意斜截面上的应力分布公式

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

其中 $\sigma_x = 0, \sigma_y = \sigma, \tau_{xy} = -\tau$ 。将 $\alpha = 90^\circ, \alpha = 45^\circ$ 和 $\alpha = -45^\circ$ 分别代入, 得

$$\sigma_{90^\circ} = \sigma, \quad \sigma_{45^\circ} = \frac{\sigma}{2} + \tau, \quad \sigma_{-45^\circ} = \frac{\sigma}{2} - \tau$$

(3) 确定外载。由胡克定律知, 在 90° 方向 $\epsilon_{90^\circ} = \frac{\sigma_{90^\circ}}{E} = \frac{\sigma}{E}$, 故拉力

$$F = \sigma A = \epsilon EA = 26 \times 210 \times \frac{\pi}{4} \times 0.3^2 = 385.94 \times 10^3 \text{ N}$$

即
$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{4 \times 386 \times 10^3}{\pi \times 0.3^2} = 5.46 \times 10^6 \text{ Pa} = 5.46 \text{ MPa}$$

在 45° 方向, 由广义胡克定律知

$$\begin{aligned} \epsilon_{45^\circ} &= \frac{1}{E} [\sigma_{45^\circ} - \mu(\sigma_{-45^\circ} + 0)] = \frac{1}{E} \left[\left(\frac{\sigma}{2} + \tau \right) - \mu \left(\frac{\sigma}{2} - \tau \right) \right] = \\ &= \frac{1}{E} \left[\frac{\sigma}{2} (1 - \mu) + \tau (1 + \mu) \right] = 140 \times 10^{-6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_e &= W_p \tau = \frac{E \epsilon_{45^\circ} - \frac{\sigma}{2} (1 - \mu)}{1 + \mu} \times \frac{\pi}{16} D^3 = \\ &= \frac{210 \times 10^9 \times 140 \times 10^{-6} - \frac{5.46 \times 10^6}{2} \times (1 - 0.28)}{1 + 0.28} \times \frac{\pi \times 0.3^3}{16} = \\ &= 113.6 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m} = 113.6 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

故
$$\tau = \frac{M_e}{W_p} = \frac{16 \times 113.6 \times 10^3}{\pi \times 0.3^3} = 21.4 \times 10^6 \text{ Pa} = 21.4 \text{ MPa}$$

(4) 强度校核。根据第三强度理论

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{5.46^2 + 4 \times 21.4^2} = 43.1 \text{ MPa} < [\sigma]$$

因此强度条件满足。

五、重力为 $Q = 300 \text{ N}$ 的重物自高 $h = 50 \text{ mm}$ 处下落冲击于图示刚架自由端 C 处, 试求刚架内最大正应力与自由端的铅垂位移。若已知刚架的抗弯刚度 EI , 抗弯截面系数 W , 略去轴力影响。

解 (1) 求冲击点静位移。重物直接作用 C 点情况下, 弯矩方程

$$BC: M(x_1) = -Qx_1; \quad AB: M(x_2) = -Qa$$

单位力作用下, 弯矩方程

$$BC: \bar{M}(x_1) = -x_1; \quad AB: \bar{M}(x_2) = -a$$

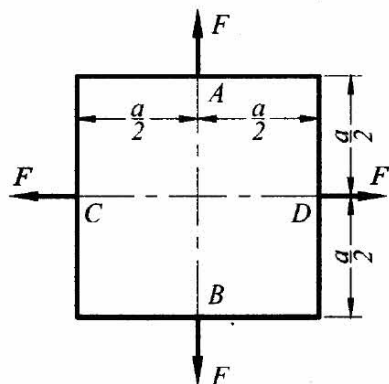
选用莫尔积分法求 C 点静位移

$$\begin{aligned} \Delta_{C, st} &= \int_0^a \frac{M(x_1) \bar{M}(x_1)}{EI} dx_1 + \int_0^a \frac{M(x_2) \bar{M}(x_2)}{EI} dx_2 = \int_0^a \frac{-Qx_1(-x_1)}{EI} dx_1 + \int_0^a \frac{-Qa(-a)}{EI} dx_2 = \\ &= \frac{4Qa^3}{3EI} = \frac{400a^3}{EI} \end{aligned}$$

代入初速度为零的自由落体冲击时动荷系数

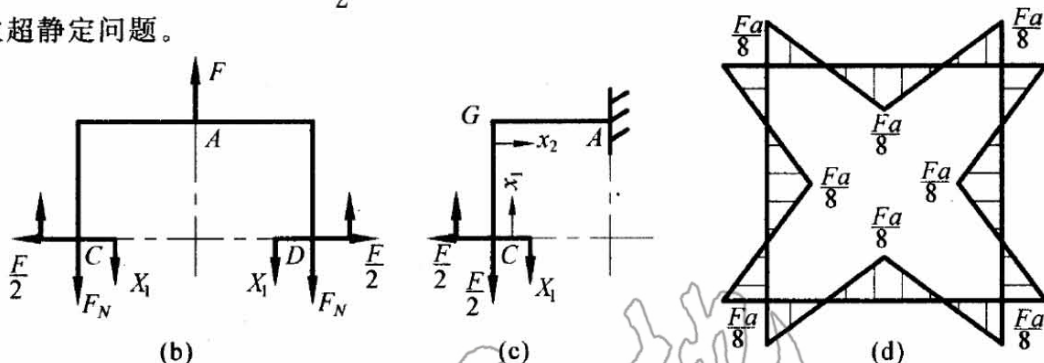
$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{C, st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{EI}{4a^3}}$$

六、封闭刚架受两对集中力 F 作用，如图所示，试作结构弯矩图。



解 (1) 结构为闭合刚架，因此为三次超静定系统。由于结构有两个对称轴，而且载荷也是对称的，因此结构的内力也是对称的。沿对称轴 CD 将结构切开，如图(b)所示。

根据对称性和平衡条件： $F_s = 0, F_N = \frac{F}{2}$ ，因此对称截面上只有弯矩 M ，即多余约束力 X_1 为未知量，故结构简化为一次超静定问题。



(2) 根据结构的对称性，选取相当系统计算模型如图(c)所示。写出结构弯矩方程，利用单位载荷法计算力法正则方程的系数。根据图示坐标系，分别写出外力弯矩 $M(x)$ 和 $X_1 = 1$ 的弯矩 $\bar{M}(x)$ 的表达式，即

CG 段：
$$M(x_1) = \frac{F}{2}x_1, \quad \bar{M}(x_1) = 1, \quad 0 \leq x_1 \leq \frac{a}{2}$$

GA 段：
$$M(x_2) = -\frac{F}{2}x_2 + \frac{Fa}{4}, \quad \bar{M}(x_2) = 1, \quad 0 \leq x_2 \leq \frac{a}{2}$$

应用单位载荷法计算力法正则方程各项系数为

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EI} \left[\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{F}{2}x_1 dx_1 + \int_0^{\frac{a}{2}} \left(-\frac{F}{2}x_2 + \frac{Fa}{4} \right) dx_2 \right] = \frac{Fa^2}{8EI}$$

$$\delta_{11} = \frac{2}{EI} \int_0^{\frac{a}{2}} dx_2 = \frac{a}{EI}$$

因此

$$X_1 = \frac{-\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = -\frac{Fa}{8}$$

由此可以作弯矩图如图(d)所示。

【评注】① 本题为三次内力超静定结构。由于结构具有 2 个对称轴, 结构承受载荷也是对称的, 因此问题简化为一次超静定问题。本题结构共有 4 个对称轴(过中点 $\pm 45^\circ$ 线也是对称轴), 解题中仅使用了其中两个。当然, 对于本结构, 这两个对称轴可以使得图(c) 所示的相当系统进一步简化, 即取 $1/2$ 讨论。

但是不能进一步使得相当系统的超静定降阶。② 如果结构的任意一对外力 F 反向, 受力如图(e) 所示。利用反对称结构性质, 沿通过中点 $\pm 45^\circ$ 对称轴将结构截开, 如图(f) 所示, 则根据平衡关系, $X_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}F$, 结构的所有内力都可以通过平衡关系确定, 系统将简化为静定问题。如果将方形刚架换为圆形曲杆, 同样可以利用其对称性进行简化。

