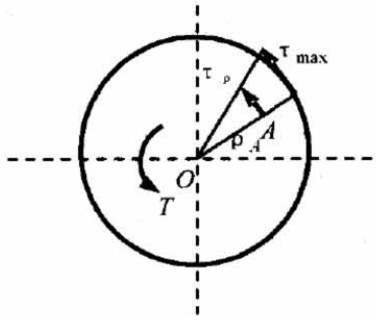
西北工业大学

2009 年硕士研究生入学考试试题

试题名称：材料力学（A 卷）　　试题编号：841

一、(30 分) 直径 $d=50\text{mm}$ 的圆轴，两端受 $M_e=1\text{kN}\cdot\text{m}$ 的外力偶作用而扭转，材料的剪切弹性模量 $G=80\text{GPa}$，试求：(1) 横截面上半径 $\rho_A=\dfrac{d}{3}$ 处的切应力和切应变；(2) 最大切应力和单位长度扭转角。



解　(1) 求 A 处切应力、切应变。相关参数代入圆轴扭转时横截面上距圆心为 ρ 处的切应力、切应变公式，得

$$\tau_A=\frac{T\rho}{I_P}=\frac{1\times10^3}{\dfrac{\pi\times(50\times10^{-3})^4}{32}}\times\frac{50\times10^{-3}}{3}=27.2\text{MPa}$$

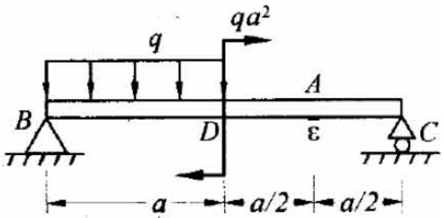
$$\gamma_A=\frac{\tau_A}{G}=\frac{27.2\times10^6}{8\times10^{10}}=3.4\times10^{-4}$$

(2) 求最大切应力和单位长度扭转角。相关参数代入圆轴扭转时的强度条件、刚度条件

$$\tau_{\max}=\frac{T}{W_P}=\frac{1\times10^3}{\dfrac{\pi\times(50\times10^{-3})^3}{16}}=40.8\text{MPa}$$

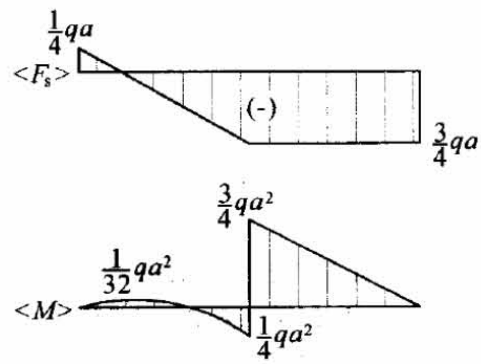
$$\varphi'=\frac{T}{GI_P}\times\frac{180^\circ}{\pi}=\frac{1\times10^3}{8\times10^{10}\times\dfrac{\pi\times(50\times10^{-3})^4}{32}}\times\frac{180^\circ}{\pi}=1.17^\circ/\text{m}$$

二、(25 分) 图示简支梁，由 No.18 工字钢制成，在外载荷作用下，测得横截面 A 处梁底面的纵向正应变 $\varepsilon=3.0\times10^{-4}$，绘制剪力图、弯矩图，并计算梁的最大弯曲正应力 $\sigma_{\max}$。已知钢的弹性模量 $E=200\text{GPa}$，$a=1\text{m}$。



解　(1) 静力平衡方程确定支座反力。

由 $\sum M_B=0$，得 $F_{Cy}=\dfrac{3}{4}qa(\uparrow)$。由 $\sum F_y=0$，得 $F_{By}=\dfrac{1}{4}qa(\uparrow)$。



(2) 绘制剪力图、弯矩图如图所示。

(3) 计算梁的最大弯曲正应力 $\sigma_{\max}$。由应变确定应力，由正应力计算公式确定梁的抗弯截面模量，即

$$M_A = \sigma_A W_z = E\varepsilon W_z = \frac{3}{8}qa^2$$

得

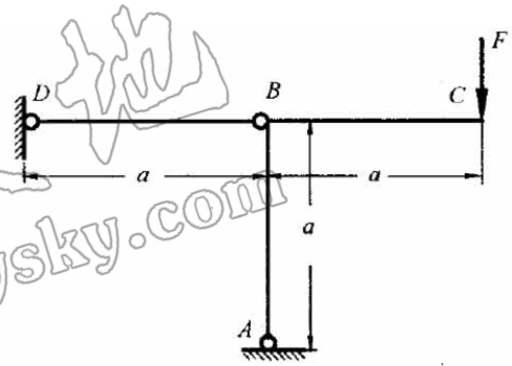
$$W_z = \frac{3qa^2}{8E\varepsilon}$$

从弯矩图看出，梁中最大弯矩为 $M_{\max} = \frac{3}{4}qa^2$。代入最大正应力公式，即

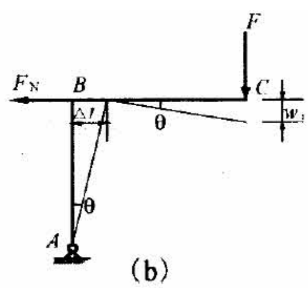
$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{\frac{3}{4}qa^2}{\frac{3qa^2}{8E\varepsilon}} = 2E\varepsilon$$

$$= 2 \times 200 \times 10^9 \times 3 \times 10^{-4} = 120\text{MPa}$$

三、(20 分) 如图所示刚架 ABC 的 EI = 常量；拉杆 BD 的横截面面积为 A，弹性模量为 E。试求 C 点的位移。



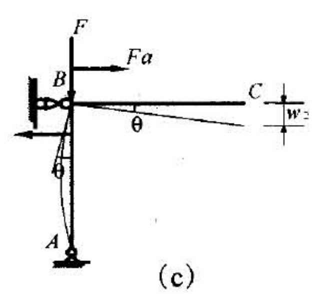
解 BD 杆受拉力作用引起 C 点位移为 w_1，AB 简支梁受集中力偶(将 F 移至 B 点所致)，B 截面转角引起 C 点位移为 w_2，BC 段弯曲引起 C 点位移为 w_3。



(b)

(1) 由图(b)，静力平衡方程 $\sum M_A = 0$ 得 $F_N = F$，则 BD 杆的伸长

$$\Delta l_{DB} = \frac{F_N l}{EA} = \frac{Fa}{EA}, \quad w_1 = -\theta a = -\frac{\Delta l}{a}a = -\Delta l = -\frac{Fa}{EA}(\downarrow)$$



(c)

(2) 由图(c)，将 C 点力向 B 点等效平移，由 $M_B = Fa$ 引起 B 截面转角 θ_B。

$$\theta_B = -\frac{Ma}{3EI} = -\frac{Fa^2}{3EI}$$

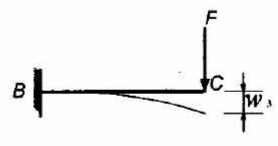
故 M_B 引起 C 端位移为 $w_2 = \theta_B a = -\frac{Fa^3}{3EI}(\downarrow)$

(3) 轴力引起 BA 杆的压缩，即

$$w_3 = \Delta l_{AB} = -\frac{Fa}{EA}(\downarrow)$$

(4) 由图(d)，悬臂梁 BC 自由端的位移为

$$w_4 = -\frac{Fa^3}{3EI}$$



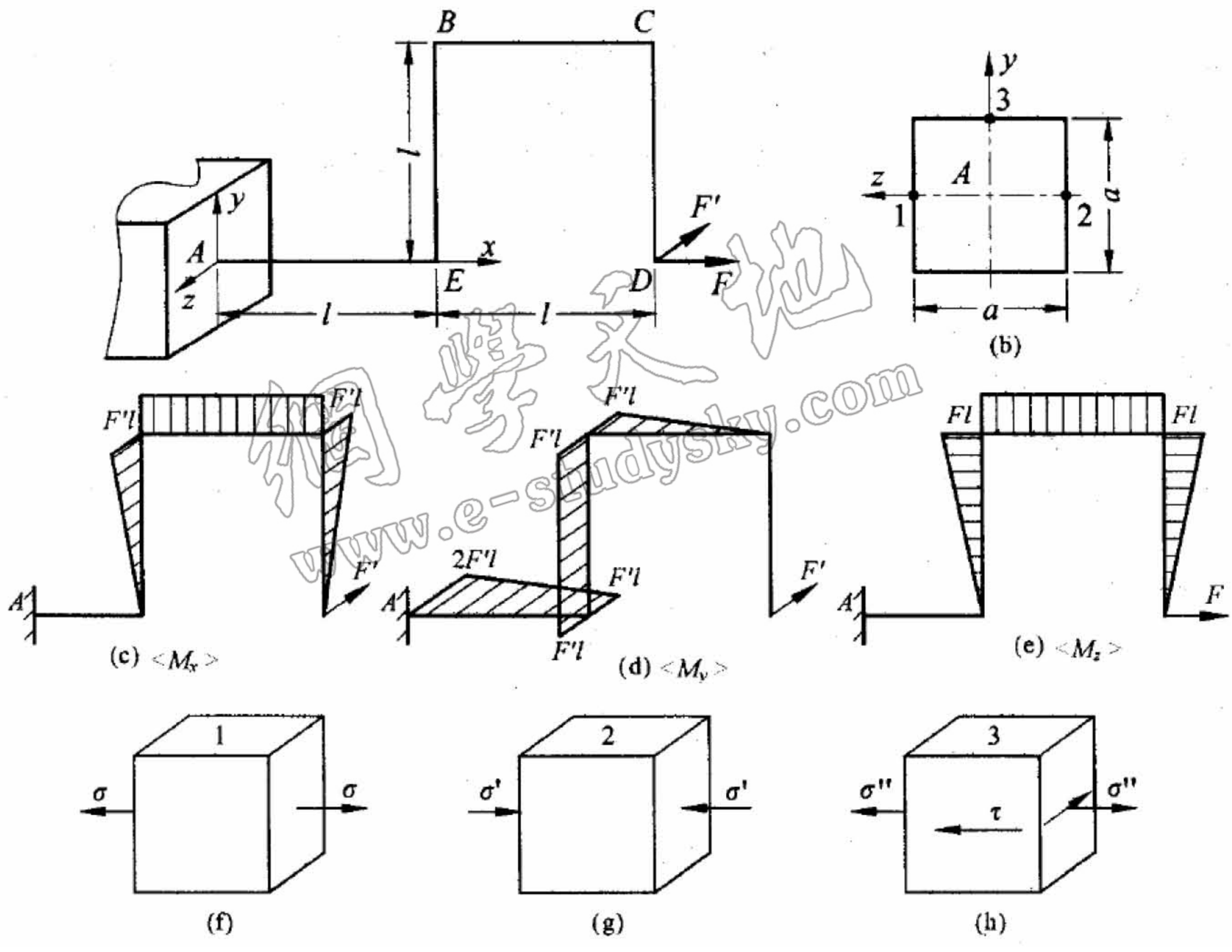
(d)

故 C 端的垂直位移为

$$w = w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = -\left(\frac{2Fa}{EA} + \frac{2Fa^3}{3EI}\right)$$

$$= -\frac{2Fa}{E}\left(\frac{1}{A} + \frac{a^2}{3I}\right)$$

四、(25 分) 图示等截面刚架，受载荷 F 与 F' 作用，且 $F' = 2F$，试根据第三强度理论确定 F 的许可值[F]。材料的许用应力为[σ]，截面为正方形，边长为 a，且 $a = l/10$。



解 作刚架的内力图如图(c)(d)(e)所示，危险截面在固定端 A 处，其内力分量为

$$F_N = F,\quad F_s = F' = 2F,\quad M_y = 2F'l = 4Fl$$

危险点可能在固定端 A 处的 1,2,3 处(见题 9.3.5 图(b))，作出三点的应力状态如图(f)(g)(h)所示。其中

1 点：

$$\sigma = \frac{F_N}{A} + \frac{M_y}{W} = \frac{F}{a^2} + \frac{6 \times 4Fl}{a^3} = \frac{241F}{a^2} \leqslant [\sigma]$$

即

$$[F] \leqslant 4.15 \times 10^{-3}[\sigma]a^2$$

2 点：

$$|\sigma'| = \left|\frac{F_N}{A} - \frac{M_y}{W}\right| = \left|\frac{F}{a^2} - \frac{6 \times 4Fl}{a^3}\right| = \frac{239F}{a^2} \leqslant [\sigma]$$

即

$$[F] \leqslant 4.18 \times 10^{-3}[\sigma]a^2$$

3 点：

$$\sigma'' = \frac{F_N}{A} = \frac{F}{a^2}, \quad \tau = \frac{3F_s}{2A} = \frac{3 \times 2F}{2a^2} = \frac{3F}{a^2} \leqslant [\tau]$$

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{\max} \\ \sigma_{\min}\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{\sigma''}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma''}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

故主应力为 $\sigma_1 = \frac{\sigma''}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma''}{2}\right)^2 + \tau^2}$，$\sigma_2 = 0$，$\sigma_3 = \frac{\sigma''}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma''}{2}\right)^2 + \tau^2}$

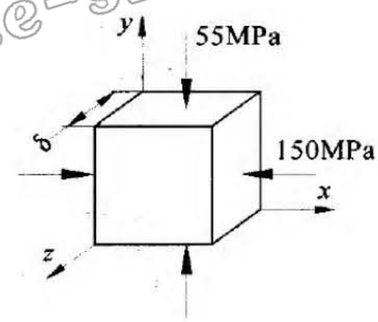
代入第三强度理论，得

$$\sigma_{r,3} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{(\sigma'')^2 + 4\tau^2} = \frac{2F}{a^2} \leqslant [\sigma]$$

即$[F] \leqslant 0.5[\sigma]a^2$。

综上所述，许可载荷为$[F] \leqslant 4.15 \times 10^{-3}[\sigma]a^2$。

五、(30 分) 钢板的厚度$\delta = 6$mm，在两个垂直方向受压缩作用，应力如图所示。已知钢板的弹性模量$E = 210$GPa，$\mu = 0.25$。求钢板厚度的增加量。



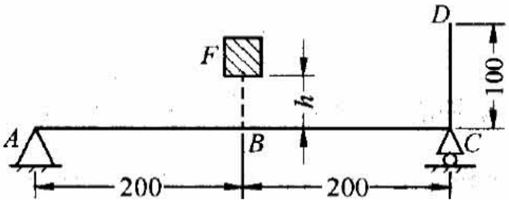
解 由题知$\varepsilon_x = -150$MPa，$\varepsilon_y = -55$MPa，$\varepsilon_z = 0$，代入广义胡克定律得

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] = \frac{1}{210 \times 10^9} \times [0 + 0.25 \times (150 + 55) \times 10^6] = 0.244 \times 10^{-3}$$

故钢板的厚度增加量为

$$\Delta = \delta\varepsilon_z = 6 \times 0.244 \times 10^{-3} = 1.464 \times 10^{-3}\,\text{mm}$$

六、(20分) 图示等截面折杆在 B 点受到重力为 $F = 1.5\text{kN}$ 的自由落体的冲击，已知 $h = 50\text{mm}$，折杆的抗弯刚度 $EI = 5 \times 10^4 \text{N} \cdot \text{m}^2$。求 D 点在冲击载荷下的水平位移。

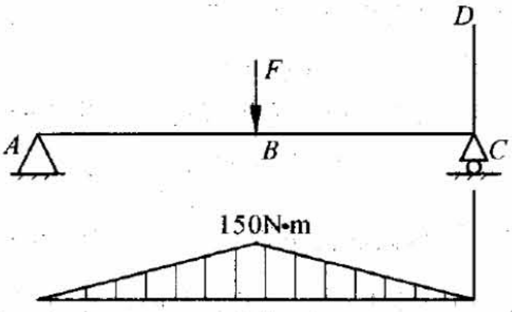


解 由题意知，CD 段不受力，其位移仅为牵连运动。问题转化为求冲击下 C 截面的转角 θ_{cd}，而 D 点的水平位移为 $\Delta_{DX} = \theta_{cd} h$。冲击为初速度为零的自由落体冲击，故可直接求动荷因数。

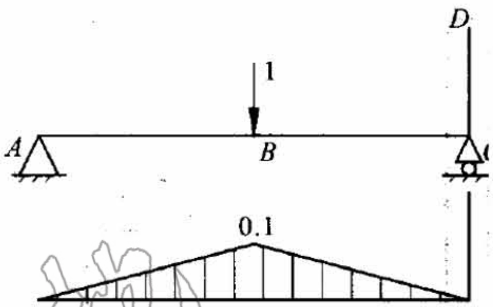
(1) 求出冲击点静位移 $\Delta_{B,\text{st}}$。分别作出 B 点单独作用力 F 和单位力 1 的弯矩图(图(b)，(c) 图所示)，由图乘法可得

$$\Delta_{B,\text{st}} = \frac{2}{EI}\left(\frac{1}{2} \times 150 \times 0.2 \times \frac{2}{3} \times 0.1\right) = 0.04 \times 10^{-3}\,\text{m} = 0.04\text{mm}$$

一般可直接由 $\Delta = \dfrac{F l^3}{48EI}$ 写出 B 点的静位移。



(b)



(c)

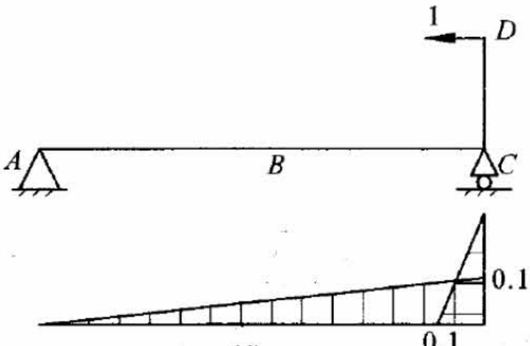
(2) 代入自由落体冲击时的动荷因数公式得

$$K_\text{d} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_\text{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 50}{0.04}} = 51$$

(3) 求 D 点水平静位移。作出 D 点作用单位力 1 的弯矩图(见图(d))，由图乘法可得

$$\Delta_{D,\text{st}} = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2} \times 150 \times 0.4 \times \frac{1}{2} \times 0.1\right)$$
$$= 0.03 \times 10^{-3}\,\text{m} = 0.03\text{mm}$$

或直接套用 $\theta_C = Fl^2/(16EI)$。



(d)

(4) 冲击载荷下 D 点水平动位移

$$\Delta_{Dd} = K_\text{d}\Delta_{D,\text{st}} = 51 \times 0.03 = 1.53\text{mm}$$

本题也可根据刚架 CD 段不受力，直接取 AC 梁分析，然后由 C 截面动转角，确定 D 点水平动位移。