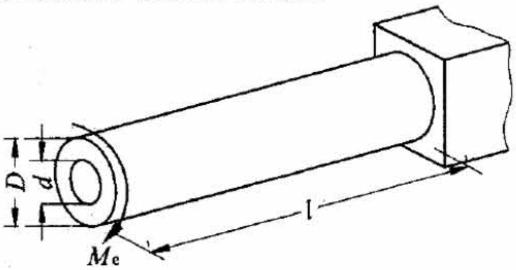
西北工业大学

2010 年硕士研究生入学考试试题

试题名称：材料力学（A 卷）　　试题编号：841

一、（25 分）图示 $D=60\text{mm}$ 实心圆轴，承受外加扭转力偶 $M_e=3\text{kN}\cdot\text{m}$。试求：(1) 轴横截面上的最大切应力；(2) 轴横截面上半径 $d=30\text{mm}$ 以内部分承受扭矩所占全部横截面上扭矩的百分数；(3) 去掉 $d=30\text{mm}$ 以内部分，横截面上最大切应力增加的百分数。



解　(1) 求轴横截面上的最大切应力。代入扭转时最大切应力公式，得

$$\tau_{\max}=\frac{T}{W_P}=\frac{M_e}{\frac{\pi d^3}{16}}=\frac{3\times10^3}{\frac{\pi}{16}\times(60\times10^{-3})^3}=70.7\text{MPa}$$

(2) 由于同一截面上扭转角相等，因而

$$\varphi_{30}=\frac{T_{30}l}{GI_{P30}}=\frac{T_{60}l}{GI_{P60}}=\varphi_{60}$$

则 $d=30\text{mm}$ 以内部分承受的扭矩所占全部横截面上扭矩的百分数为

$$\frac{T_{30}}{T_{60}}=\frac{d^4}{D^4}=\left(\frac{30}{60}\right)^4=0.0625=6.25\%$$

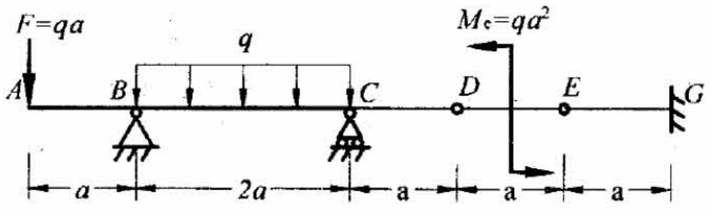
(3) 外径 $D=60\text{mm}$，内径 $d=30\text{mm}$ 的空心圆柱轴横截面上的最大切应力为

$$\tau'=\frac{T}{W'_P}=\frac{M_e}{\frac{\pi D^3}{16}(1-\alpha^4)}=\frac{3\times10^3}{\frac{\pi}{16}\times(60\times10^{-3})^3\times(1-0.5^4)}=75.4\text{MPa}$$

则横截面上最大切应力增加的百分数为

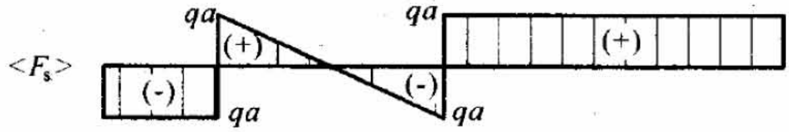
$$\frac{\Delta\tau}{\tau}=\frac{\tau'_{\max}-\tau_{\max}}{\tau}=\frac{75.4-70.7}{70.7}=6.65\%$$

二、（25 分）绘制图示梁的剪力图和弯矩图，并求出 $|F_{s,\max}|$ 和 $|M_{\max}|$。

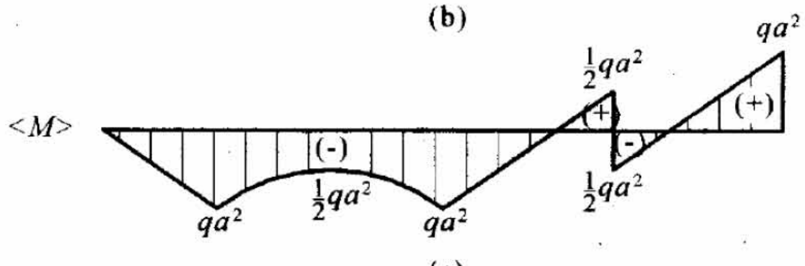


解　连续梁中包含两个中间铰，首先从 D,E 处截开，取 DE 段分析。根据静力平衡方程知 $F_{sD}=F_{sE}=qa$。因为 $ABCD$ 段结构对称，载荷对称，故 $F_{By}=F_{Cy}=2qa(\uparrow)$，且 F_s 图反对称，M 图对称。

在 AB 中面有极值，且 $M=-qa^2/2$。DE 段结构对称，载荷反对称，则 F_s 图对称，M 图反对称。注意 D,E 铰处 $M=0$，中面 M 的突变关系。EG 段相当于悬臂梁作用向上的载荷 qa，其 F_s 为正，且为常数。而 M 为 F_{sE} 的线性函数。作内力图如图(b)(c)。其 $|F_{s.\max}|=qa$，$|M_{\max}|=qa^2$。

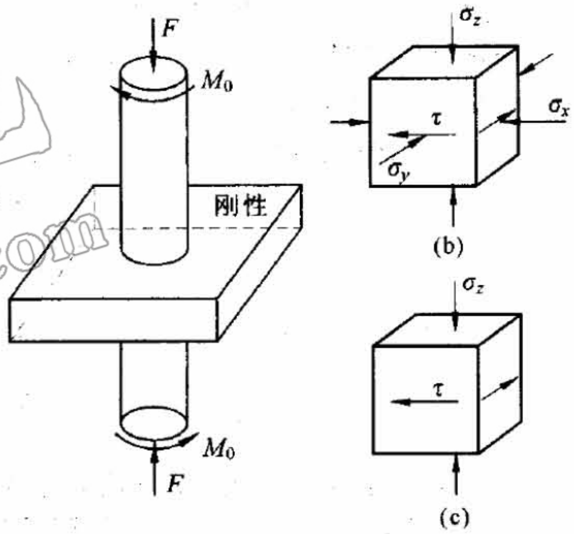


(b)



(c)

三、(25分) 如图所示，一直径 $d=20\text{mm}$ 的圆杆，其中间一段恰好插入直径亦为 20mm 的刚性圆孔中，杆受压力 $F=44\text{kN}$ 和扭转外力偶 $M_0=47\text{N}\cdot\text{m}$ 的作用。已知杆材料的弹性模量 $E=210\text{GPa}$，泊松比 $\mu=0.3$，许用应力 $[\sigma]=160\text{MPa}$。试按第三强度理论校核插入孔内部分和露出孔外部分的强度，设杆与孔壁间为光滑接触，摩擦力可以不计。



解 (1) 插入部分应力状态如图(b)所示，其中

$$\sigma_z=\frac{F}{A}=-\frac{44\ 000}{\dfrac{\pi\times 2^2\times 10^{-4}}{4}}=-140\text{MPa},\quad \sigma_x=\sigma_y$$

由广义胡克定律知，因为圆杆插在刚体中，所以

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}[\sigma_x-\mu(\sigma_y+\sigma_z)]=0$$

解得
$$\sigma_x=\sigma_y=\frac{\mu}{1-\mu}\sigma_z=\frac{0.3}{1-0.3}\times(-140)=-60\text{MPa}$$

扭转引起的切应力

$$\tau=\frac{T}{W_p}=\frac{16M_0}{\pi d^3}=\frac{16\times 47}{\pi\times 2^3\times 10^{-6}}=30\text{MPa}$$

(2) 插入部分强度校核

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{\max}\\ \sigma_{\min}\end{matrix}\right\}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}=\frac{-140-60}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{-140+60}{2}\right)^2+30^2}=\begin{cases}-30\text{MPa}\\ -90\text{MPa}\end{cases}$$

故
$$\sigma_1=-30\text{MPa},\quad \sigma_2=-90\text{MPa},\quad \sigma_3=-140\text{MPa}$$

代入第三强度理论，得

$$\sigma_{r3}=\sigma_1-\sigma_3=-30+140=110\text{MPa}\leqslant[\sigma]$$

故插入部分强度足够。

(3) 露出部分强度校核。露出部分应力状态如图(c) 所示，其中

$$\sigma_x = \frac{F}{A} = -\frac{44\ 000}{\dfrac{\pi \times 2^2 \times 10^{-4}}{4}} = -140\text{MPa}$$

$$\tau = \frac{T}{W_p} = \frac{16M_0}{\pi d^3} = \frac{16 \times 47}{\pi \times 2^3 \times 10^{-6}} = 30\text{MPa}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_{\max}\\ \sigma_{\min}\end{array}\right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 0 \pm \sqrt{0^2 + 30^2} = \begin{cases}30\text{MPa}\\ -30\text{MPa}\end{cases}$$

故

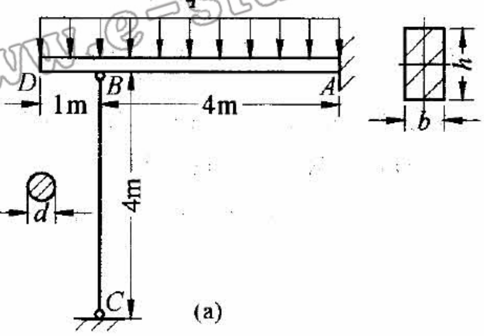
$$\sigma_1 = 30\text{MPa}, \quad \sigma_2 = -30\text{MPa}, \quad \sigma_3 = -140\text{MPa}$$

代入第三强度理论，得

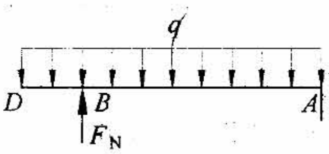
$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = 30 + 140 = 170\text{MPa} > [\sigma]$$

故露出部分强度不满足。

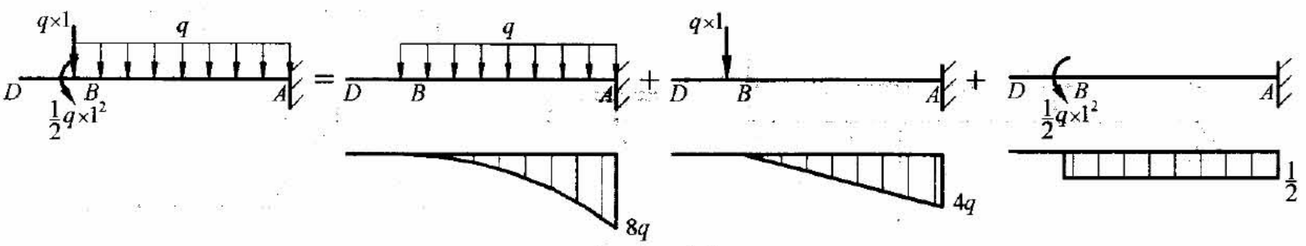
四、(25 分) 图示结构，分布载荷 $q = 20\text{kN/m}$，梁的截面为矩形，$b = 90\text{mm}$，$h = 130\text{mm}$，柱的截面为圆形，直径 $d = 80\text{mm}$。梁和柱的材料均为 A3 钢，$E = 200\text{GPa}$，$\sigma_p = 200\text{MPa}$，$[\sigma] = 160\text{MPa}$，规定稳定安全因数 $n_{st} = 3$。试校核结构的安全性。



(a)



(b)



(c)

解 (1) 结构属于一次超静定。设 BC 杆轴力为 F_N，取图(b) 所示相当系统，则变形协调条件为 $y_B = \Delta l_{BC}$。

为了求出 BC 梁作用均布荷载 q 时，B 处的挠度，采用图(c) 进行等效。由图乘法得

$$y_B = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{3} \times 8q \times 4 \times \frac{3}{4} \times 4 + \frac{1}{2} \times 4q \times 4 \times \frac{2}{3} \times 4 + \frac{q}{2} \times 4 \times \frac{1}{2} \times 4 - \frac{1}{2} \times 4F_N \times 4 \times \frac{2}{3} \times 4\right)$$

$$= \frac{172q - 64F_N}{3EI} \qquad \Delta l_{BC} = \frac{F_N l}{EA}$$

代入变形协调条件 $y_B = \Delta l_{BC}$，解得 $F_N = 53.75\text{kN}$。

【评注】 采用图(c)进行等效，是因为B截面非二次曲线顶点。如果作DA梁均布载荷下的弯矩图，其$A = lh/3$，形心对应的单位力弯矩高度为$h = 11/4$，结果为$1\ 375q/24$，而用图(c)进行等效，结果为$172 \times 8q/24 = 1\ 376q/24$。虽差别不大，但概念不正确。

(2) 校核BC杆的稳定性。BC杆两端铰支，故$\mu = 1$，柔度系数为

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{\mu l}{d/4} = \frac{1 \times 4\ 000}{80/4} = 200$$

而
$$\lambda_p = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \times 200 \times 10^9}{200 \times 10^6}} = 99.3 < \lambda$$

压杆为细长杆，临界压力用欧拉公式计算，即

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \times 200 \times 10^9 \times \pi \times 0.08^4}{64 \times (1 \times 4)^2} = 248.1 \times 10^3 \mathrm{N} = 248.1\mathrm{kN}$$

$$n = \frac{F_{cr}}{F_N} = \frac{248.1}{53.75} = 4.61 > n_{st} = 3$$

故BD杆稳定。

(3) 校核梁DA的强度。作出梁的内力图如图(e)所示。距D端截面$2.684\mathrm{m}$处，$M_{max} = 18.5\mathrm{MPa}$，但固定端$A$截面弯矩最大，即$M_{max} = 35\mathrm{kN \cdot m}$。故

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_z} == \frac{35 \times 10^3 \times 6}{0.09 \times 0.13^2} = 138.1 \times 10^6 \mathrm{Pa} = 138.1\mathrm{MPa} < [\sigma]$$

梁强度足够。因此整个结构安全。

五、(**25分**) 图示简支梁AB的抗弯刚度EI为常数，在B端与刚性杆BC固定连接，C端和杆CD铰支连接，CD杆长为$a/2$，抗拉刚度为EA。(1) 试求杆CD内力；(2) 把作用力F变成在梁上方高度为H，重为W的物体落下的冲击载荷，求CD杆的内力。

解 (1) 求CD杆的轴力F_N。结构为一次超静定，变形协调条件为$\theta_B a = \Delta l_{CD}$。由图(b)(c)(d)图乘法并代入变形协调条件得

$$\theta_B = \frac{1}{EI_z}\left(\frac{l}{2} \times \frac{Fl}{4} \times \frac{1}{2} - \frac{l}{2} \times F_N a \times \frac{2}{3}\right) = \frac{Fl^2}{16EI} - \frac{F_N la}{3EI} = \frac{F_N a}{2EA}$$

解得
$$F_N = \frac{Fl^2/16I}{la/3I + a/2A} = \frac{3Fl^2 A}{8a(2lA + 3I)}$$

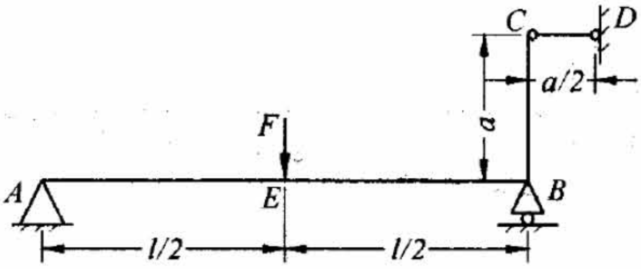
(3) 求系统的动荷因数。初速度为零的自由落体冲击的动荷因数为

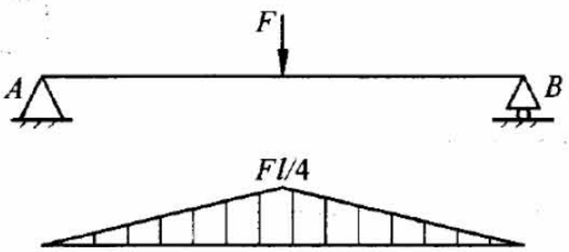
$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{st}}}$$

代入$\Delta_{E,st}$即得。

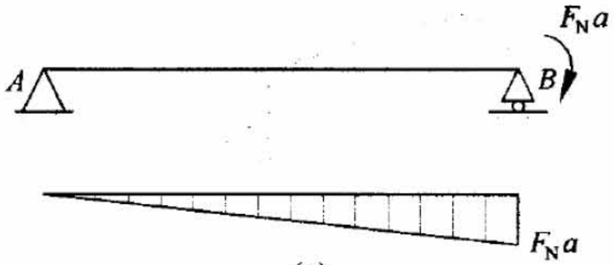
(4) CD杆的动轴力

$$F_{N,d} = K_d F_N = K_d \frac{Fl^2/16I}{la/(3I) + a/(2A)} = K_d \frac{3Fl^2 A}{8a(2lA + 3I)}$$

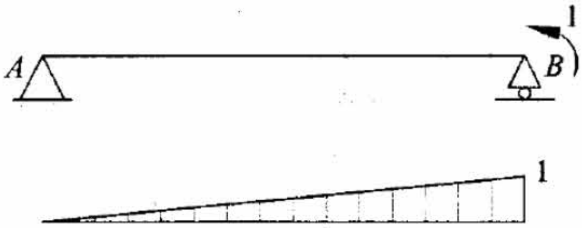




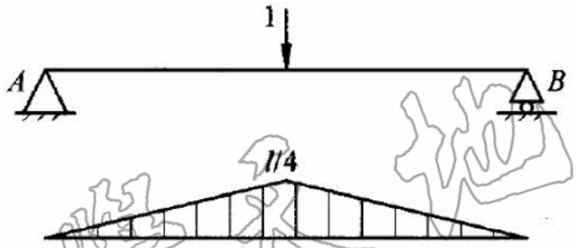
(b)



(c)

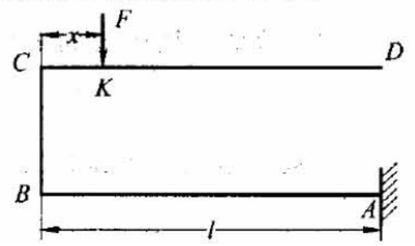


(d)



(e)

六、(25 分)刚架 $ABCD$ 受力如图所示，已知 AB 段和 CD 段长度均为 l，抗弯刚度均为 EI，在 CD 段的 K 点作用有铅垂力 F，BC 段为刚体。试求：使 BC 段不发生转动，F 力应作用在 CD 段的什么位置(即 x 为多少)以及此时 F 力作用点 K 处的铅垂位移。



解 (1) 根据题意知，欲使 BC 段不发生转动，即要求 B 截面转角为零或 C 截面转角为零，作截面弯矩图如图(b) 所示，在 C(或 B) 加单位力偶，如图(c) 所示，(b)(c) 两图相乘得

$$\theta_C = \theta_B = \frac{Fx \times a \times 1}{\infty} + \frac{\frac{1}{2} \times x \times Fx \times 1}{EI} - \frac{\frac{1}{2}(l-x) \times F(l-x) \times 1}{EI} = 0$$

整理得

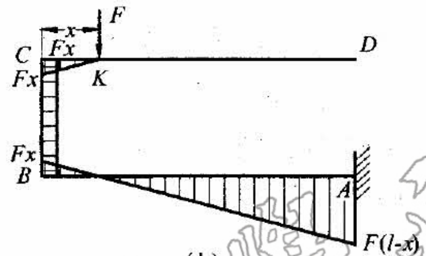
$$\frac{1}{2}Fx^2 - \frac{1}{2}F\,(l-x)^2 = 0$$

解得

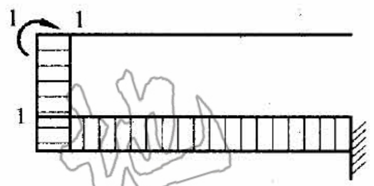
$$x = \frac{l}{2}$$

(2) 求 F 点铅垂位移。在 K 点加单位力弯矩图如图(d) 所示，或令图(b) 中 $F=1$，图(b)(d) 相乘得 F 点铅垂位移

$$y_K=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\times\frac{l}{2}\times F\times\frac{l}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{l}{2}\right)\times 3=\frac{Fl^3}{8EI}(\downarrow)$$



(b)



(c)

(d)