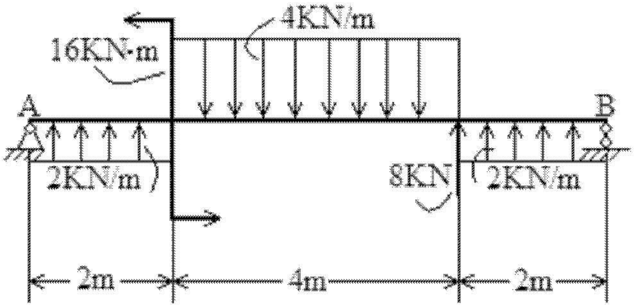
重庆大学 材料力学 课程试题（A 卷）

一、　作简支梁的内力图。（20 分）

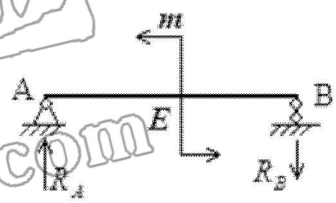


题 1 图

解：1. 计算支座反力.

将梁上的载荷向梁的中点简化，简化结果为一集中力偶：

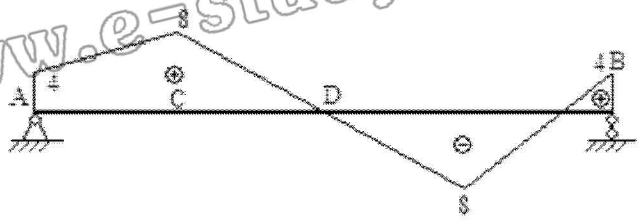
$m = 32KN \cdot m$（逆时针）



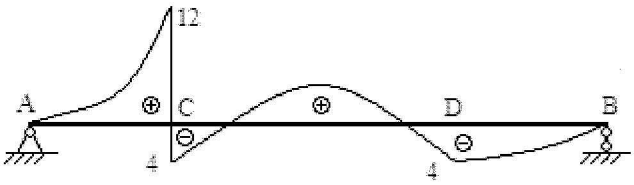
支座反力：$R_A = \frac{32}{8} = 4KN$（↑），$R_B = \frac{32}{8} = 4KN$（↓）

2. 作内力图

根据支座反力及载荷作剪力图及弯矩图。

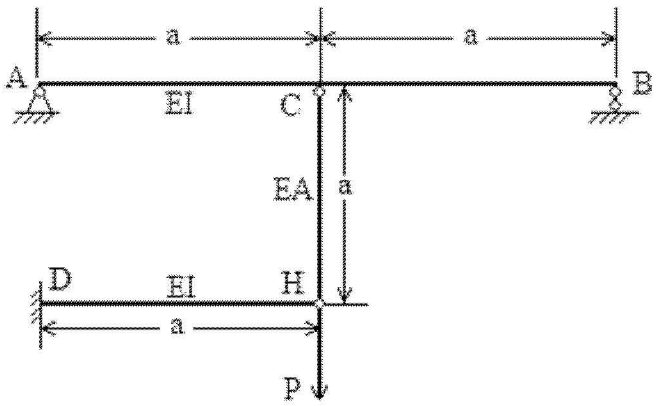


Q (KN)



M (KN•m)

二、　简支梁 AB 和悬臂梁 DH 用直杆 CH 相联。C 点和 H 点均为铰接，H 点承受垂直载荷 P 的作用。已知梁 AB 和 DH 的抗弯刚度为 EI，杆 CH 的抗拉刚度为 EA，试求杆 CH 的轴力及点 H 的垂直位移。（20 分）



题 2 图

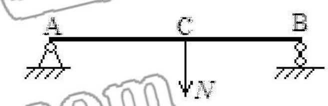
解：1. 静不定次数确定　 $m=3, n=2, r=6$

结构的自由度 $D=3m-2n-r=3\times3-2\times2-6=-1$　　1 次静不定结构

2. 分析计算

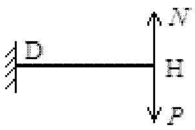
去掉二力杆 CH，即可得到基本结构，设 CH 杆轴向拉力为 N，梁的挠度 δ_C、δ_H 以向下为正，则变形集合条件为：$\delta_H-\delta_C=\Delta l_{CH}$　　　　（1）

$$\delta_H=\frac{(P-N)a^3}{3EI}，\delta_C=\frac{N(2a)^3}{48EI}，\Delta l_{CH}=\frac{Na}{EA}$$



代入式(1)，得：

$$\frac{(P-N)a^3}{3EI}-\frac{N(2a)^3}{48EI}=\frac{Na}{EA}$$

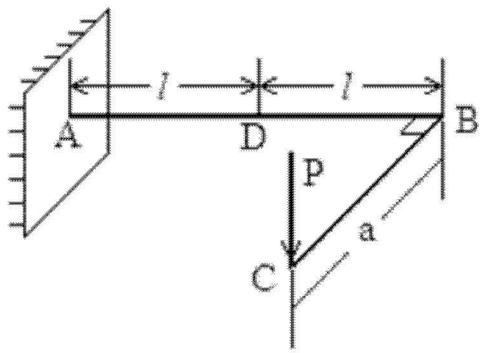


由此式解出：$N=\dfrac{2Pa^2A}{3(2I+a^2A)}$

代入 δ_H，即得 H 点的垂直位移为：

$$\delta_H=\frac{Pa^3}{9EI}\left(\frac{6I+a^2A}{2I+a^2A}\right)$$

三、　直径为 20mm的圆截面平面折杆ADBC在C点受竖向力P的作用，∠ABC=90 度，杆的弹性模量E=200Gpa，泊松比 μ =0.3，现由实验测得D点截面处的顶部表面的主应变 ε_1=508×10^{-6}，　ε_3=−288×10^{-6}，试确定外力P及BC段的长度a的大小。已知l=314mm。（20 分）



题 3 图

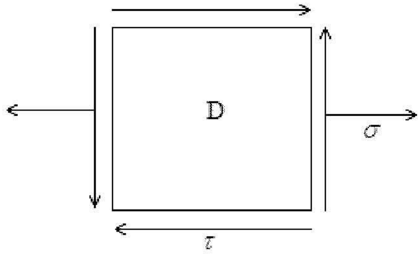
解： 1. 应力状态分析

AB 杆为弯曲和扭转组合变形，D 点所在截面上的弯矩$M = Pa$，D 点为二向应力状态 $\sigma = \dfrac{M}{W}$，$W = \dfrac{\pi d^3}{32}$，$\tau = \dfrac{T}{W_t}$，$W_t = \dfrac{\pi d^3}{16}$

2. 分析计算

D 点的主应力

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{\sigma}{2} + \sqrt{(\frac{\sigma}{2})^2 + \tau} \\ \sigma_1 &= \frac{\sigma}{2} - \sqrt{(\frac{\sigma}{2})^2 + \tau}\end{aligned}\right\} \quad (1)$$



由广义虎克定律：$\varepsilon_1 = \dfrac{1}{E}(\sigma_1 - \mu\sigma_3)$，$\varepsilon_3 = \dfrac{1}{E}(\sigma_3 - \mu\sigma_1)$可以求得：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_3) \\ \sigma_3 &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_3 + \mu\varepsilon_1)\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

联立求解方程(1)，(2)可得：

$$\sigma = \frac{E(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)}{1-\mu} \quad (3)$$

$$\tau = \frac{E}{2}\sqrt{(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{1+\mu})^2 - (\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3}{1-\mu})^2} \quad (4)$$

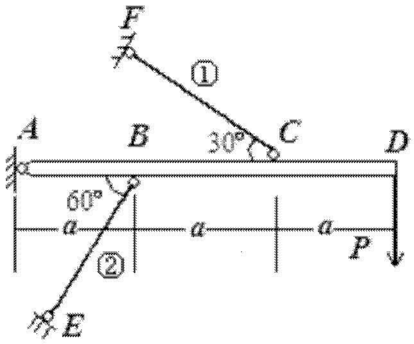
$E = 200GPa$，$\mu = 0.3$，$\varepsilon_1 = 508 \times 10^{-6}$，$\varepsilon_3 = -288 \times 10^{-6}$

代入式（3），（4），得：$\sigma = 62.86MPa$，$\tau = 52.55MPa$

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{Pl}{\pi d^3/32} \qquad \therefore\ P = \frac{\sigma}{l}\cdot\frac{\pi d^3}{32} = \frac{62.86}{314}\times\frac{\pi\times 20^3}{32} = 157.2N$$

$$\tau = \frac{T}{W_t} = \frac{Pa}{\pi d^3/16} \qquad \therefore\ a = \frac{\tau}{P}\cdot\frac{\pi d^3}{16} = \frac{52.55}{157.2}\times\frac{\pi\times 20^3}{16} = 525.1mm$$

四、 水平梁ABCD视为刚性杆，杆BE和CF采用相同材料制成，其比例极限σ_p=200Mpa，许用应力[σ]=140*Mpa*，稳定安全系数n_{st}=2，弹性模量*E*=200*Gpa*，①杆CF直径d_1=10mm，长度l_1 =1000mm；②杆BE直径d_2=20mm，长度l_2=1000mm，试求结构容许承受的最大载荷*P*。（20 分）



题 4 图

解：AD 为刚性杆，此结构为一次静不定结构

1．计算杆 1、2 的轴力

静力平衡方程 $\Sigma m_A = 0$，

$(N_1 Sin30^\circ)2a + (N_2 Sin60^\circ)\cdot a - P\cdot 3a = 0$

$\therefore \quad 2N_1 + \sqrt{3}N_2 = 6P$ （1）

变形几何方程：

$\delta_C = 2\delta_B$，$\Delta l_1 = \delta_C Sin30^\circ \quad \Delta l_2 = \delta_B \sin 60^\circ$，$\therefore \quad \sqrt{3}\Delta l_1 = 2\Delta l_2$

$\Delta l_1 = \dfrac{N_1 l_1}{EA_1}$，$\Delta l_2 = \dfrac{N_2 l_2}{EA_2}$ $\therefore N_2 = N_1\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{A_2 l_1}{A_1 l_2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{d_2}{d_1}\right)^2\dfrac{l_1}{l_2}N_1$

代入数据后得：$N_2 = 2\sqrt{3}N_1$ （2）

联立求解方程(1)，(2) 可得：$N_1 = \dfrac{3}{4}P$，$N_2 = \dfrac{3}{2}\sqrt{3}P$

1．确定结构的许可载荷

由杆①的拉伸强度，杆②的稳定性综合确定结构的许可载荷。

（1）杆①的拉伸强度

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{3P}{4A_1} \le [\sigma]$$

$$\therefore P \le \frac{4}{3}A_1[\sigma] = \frac{4}{3}\cdot\frac{\pi d_1^{\,2}}{4}\cdot[\sigma] = \frac{1}{3}\cdot\pi d_1^{\,2}[\sigma] = \frac{\pi}{3}\times 10^2\times 140\times 10^{-3} = 14.66KN$$

（2） 杆②的稳定性条件

$i_2 = \dfrac{d_2}{4} = \dfrac{20}{4} = 5mm$，$\mu = 1$，$l_2 = 1000mm$，$\lambda = \dfrac{\mu\cdot l_2}{i_2} = 200 > \lambda_P = 100$

$\lambda_P = \sqrt{\dfrac{\pi^2 E}{\sigma_P}} = \sqrt{\dfrac{\pi^2\times 200\times 10^3}{200}} \approx 100$ 杆②为大柔度杆

$\sigma_{cr} = \dfrac{\pi^2 E}{\lambda^2} \qquad P_{cr} = \sigma_{cr}A_2 = \dfrac{\pi^2 E}{\lambda^2}A^2$

工作安全系数 $n_{st} = \dfrac{P_{cr}}{N_2}$

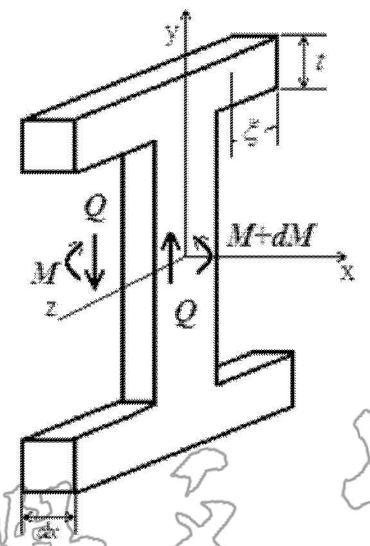
$$n_{st} = \frac{P_{cr}}{N_2} = \frac{\pi^2 EA_2/\lambda^2}{3\sqrt{3}P/2} \ge [n_{st}]$$

網學天地 www.e-studysky.com

$$\therefore P \le \frac{2\pi^2 EA_2}{3\sqrt{3}\lambda^2[n_{st}]} = \frac{\pi^3 E d_2{}^2}{6\sqrt{3}\lambda^2[n_{st}]}$$

$$P \le \frac{\pi^3 \times 200 \times 20^2}{6\sqrt{3} \times 200^2 \times 2} = 2.98KN$$

五、　从工字型截面梁取出微分段 dx，左截面内力为 MQ 右截面内力为 M+DMQ 翼板厚度为 t。求翼板水平（z 方向）剪应力 τ 的表达式。（20 分）



题 5 图

解：在题图所示处取单元体，根据平衡条件及剪应力互等定理，单元体受力如图所示

单元体平衡方程：　$\Sigma X = 0$，$N + \tau' t dx - (N + dN) = 0$

$$\tau' t dx = dN$$

$$dN = \int_{A_1} \frac{dM \cdot y}{I_Z} dA = \frac{dM}{I_Z}\int_{A_1} y dA$$

令 $S_Z^* = \int_{A_1} y dA$

则：$dN = \dfrac{dM}{I_Z} S_Z^*$　$\therefore \tau' t dx = \dfrac{dM}{I_Z} S_Z^*$，$\tau' = \dfrac{dM}{dx} \cdot \dfrac{S_Z^*}{I_Z t}$

$\dfrac{dM}{dx} = Q$，　$\tau' = \tau$　　∴　剪 应 力　$\tau = \dfrac{QS_Z^*}{I_Z t}$

（1）

$S_Z^* = A_1 \cdot y_{c1}$　$A_1 = \xi t$　　$y_{c1} = \dfrac{h}{2} - \dfrac{t}{2} = \dfrac{1}{2}(h - t)$　　∴

$S_Z^* = \dfrac{1}{2}\xi t(h - t)$

代入式(1)，得：

$$\tau = \frac{Q\xi(h-t)}{2I_Z}$$