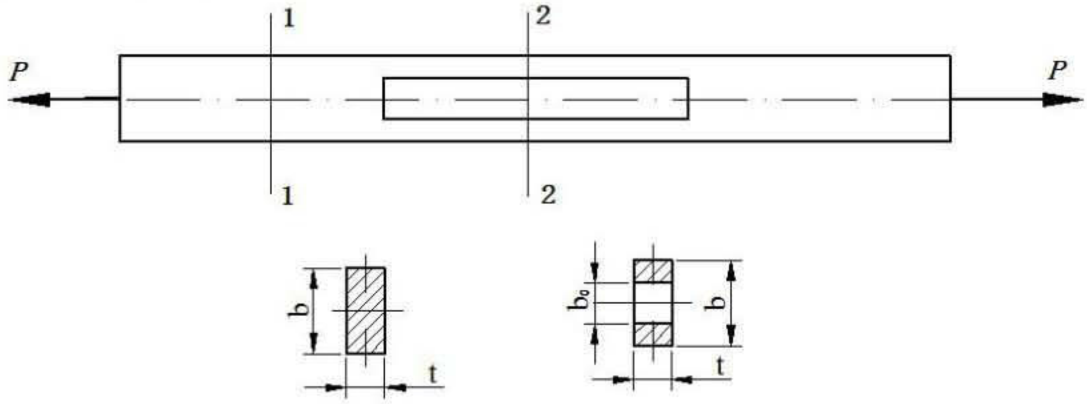
重庆大学材料力学答案

2.9 题图 2.9 所示中段开槽的杆件，两端受轴向载荷 P 的作用，试计算截面 1-1 和 2-2 上的应力。已知：$P=140\text{kN}$，$b=200\text{mm}$，$b_0=100\text{mm}$，$t=4\text{mm}$ 。



题图 2.9

解：(1) 计算杆的轴力

$$N_1=N_2=P=140\ \ \text{kN}$$

(2) 计算横截面的面积

$$A_1=b\times t=200\times 4=800\ \ \text{mm}^2$$

$$A_2=(b-b_0)\times t=(200-100)\times 4=400\ \ \text{mm}^2$$

(3) 计算正应力

$$\sigma_1=\frac{N_1}{A_1}=\frac{140\times 1000}{800}=175\ \ \text{MPa}$$

$$\sigma_2=\frac{N_2}{A_2}=\frac{140\times 1000}{400}=350\ \ \text{MPa}$$

(注：本题的目的是说明在一段轴力相同的杆件内，横截面面积小的截面为该段的危险截面)

2.10 横截面面积 $A=2\text{cm}^2$ 的杆受轴向拉伸，力 $P=10\text{kN}$，求其法线与轴向成 30° 的及 45° 斜截面上的应力 σ_α 及 τ_α，并问 τ_{max} 发生在哪一个截面？

解：(1) 计算杆的轴力

$$N=P=10\ \ \text{kN}$$

(2) 计算横截面上的正应力

$$\sigma=\frac{N}{A}=\frac{10\times 1000}{2\times 100}=50\ \ \text{MPa}$$

(3) 计算斜截面上的应力

$$\sigma_{30^\circ}=\sigma\cos^2 30^\circ=50\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=37.5\ \ \text{MPa}$$

$$\tau_{30^\circ} = \frac{\sigma}{2}\sin(2\times 30^\circ) = \frac{50}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 21.6 \quad \text{MPa}$$

$$\sigma_{45^\circ} = \sigma\cos^2 45^\circ = 50\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 25 \quad \text{MPa}$$

$$\tau_{45^\circ} = \frac{\sigma}{2}\sin(2\times 45^\circ) = \frac{50}{2}\times 1 = 25 \quad \text{MPa}$$

(4) τ_{max} 发生的截面

∵ $\dfrac{d\tau_\alpha}{d\alpha} = \sigma\cos(2\alpha) = 0$ 取得极值

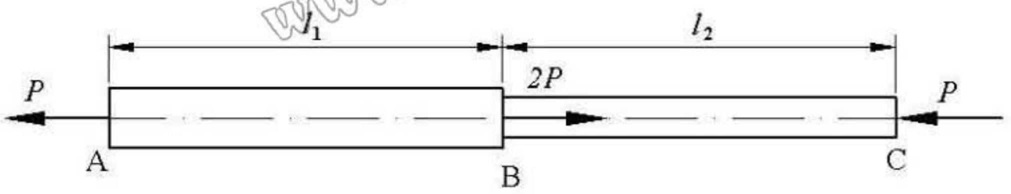
∴ $\cos(2\alpha) = 0$

因此：$2\alpha = \dfrac{\pi}{2}$，　$\alpha = \dfrac{\pi}{4} = 45^\circ$

故：τ_{max} 发生在其法线与轴向成45°的截面上。

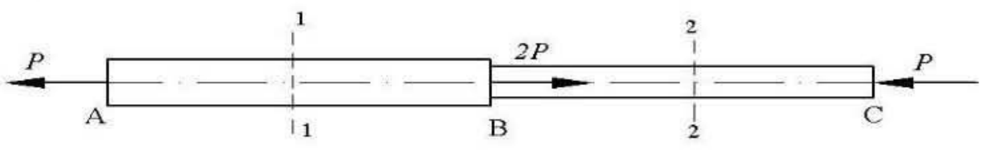
（注：本题的结果告诉我们，如果拉压杆处横截面的正应力，就可以计算该处任意方向截面的正应力和剪应力。对于拉压杆而言，最大剪应力发生在其法线与轴向成45°的截面上，最大正应力发生在横截面上，横截面上剪应力为零）

2.17 题图 2.17 所示阶梯直杆 AC，P=10kN，$l_1=l_2$=400mm，$A_1=2A_2$=100mm^2，E=200GPa。试计算杆 AC 的轴向变形Δl。



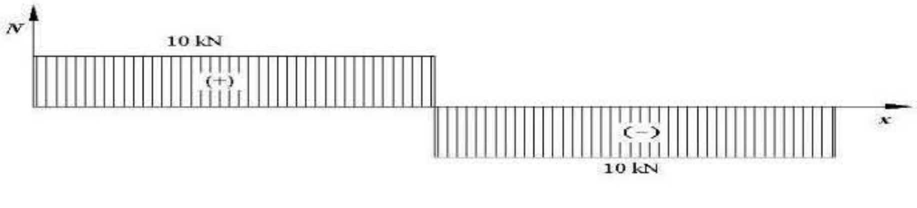
题图 2.17

解：(1) 计算直杆各段的轴力及画轴力图



$$N_1 = P = 10 \quad \text{kN} \qquad （拉）$$

$$N_2 = -P = -10 \quad \text{kN} \qquad （压）$$



(2) 计算直杆各段的轴向变形

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{10\times 1000 \times 400}{200\times 1000\times 100} = 0.2\ \text{mm} \qquad (伸长)$$

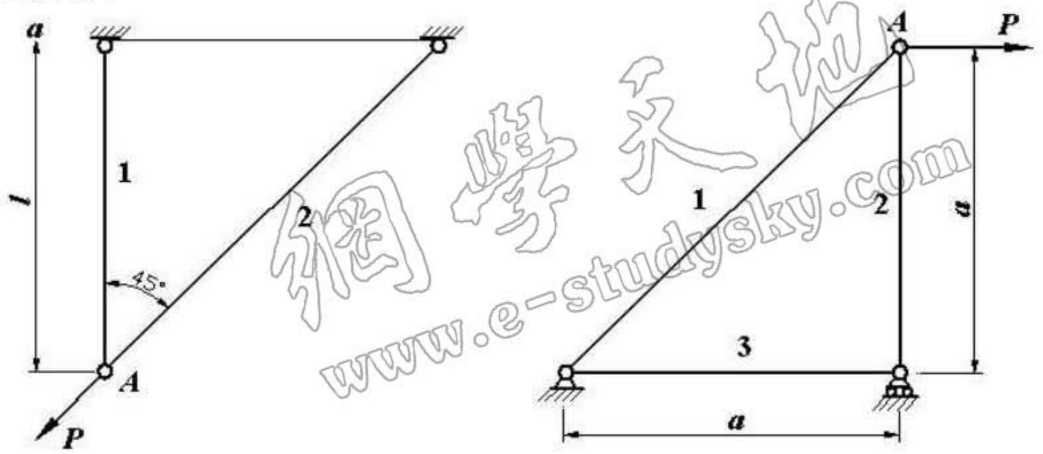
$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2} = \frac{-10\times 1000 \times 400}{200\times 1000\times 50} = -0.4\ \text{mm} \qquad (缩短)$$

(3) 直杆 AC 的轴向变形

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = -0.2\ \text{mm} \qquad (缩短)$$

(注：本题的结果告诉我们，直杆总的轴向变形等于各段轴向变形的代数和)

2.20 题图 2.20 所示结构，各杆抗拉（压）刚度 EA 相同，试求节点 A 的水平和垂直位移。



(a) (b)

题图 2.20

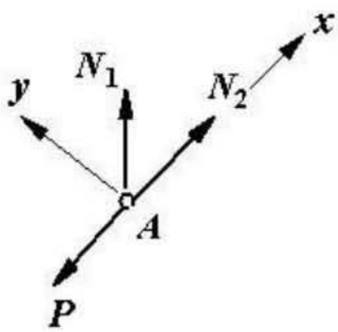
(a) 解：

(1) 计算各杆的轴力

以 A 点为研究对象，如右图所示，由平衡方程可得

$$\sum X = 0,\quad N_2 = P \qquad (拉)$$

$$\sum Y = 0,\quad N_1 = 0$$

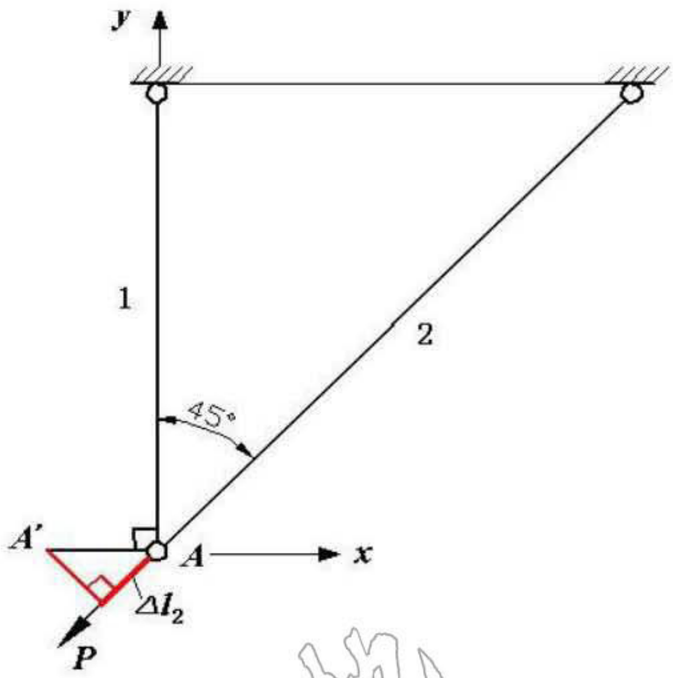


(2) 计算各杆的变形

$$\Delta l_1 = 0$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA} = \frac{Pl/\cos 45^\circ}{EA} = \frac{\sqrt{2}Pl}{EA}$$

(3) 计算 A 点位移



以切线代弧线，A 点的位移为：

$$\Delta x_A = \frac{\Delta l_2}{\cos 45^\circ} = \frac{2Pl}{EA}$$

$$\Delta y_A = 0$$

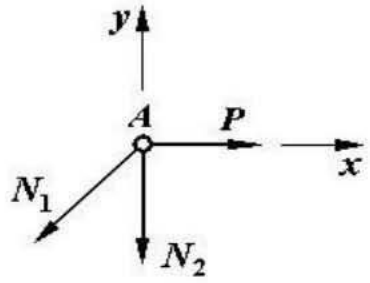
(b) 解:

(1) 计算各杆的轴力

以 A 点为研究对象，如右图所示，由平衡方程可得

$$\sum X = 0, \quad N_1 = \sqrt{2}P \qquad (拉)$$

$$\sum Y = 0, \quad N_2 = -P \qquad (压)$$

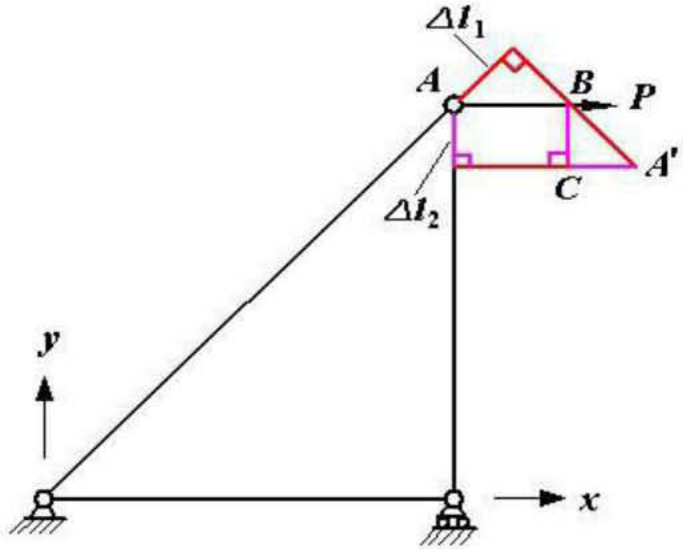


(2) 计算各杆的变形

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA} = \frac{\sqrt{2}P \times \sqrt{2}a}{EA} = \frac{2Pa}{EA} \qquad (伸长)$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA} = \frac{P \times a}{EA} = \frac{Pa}{EA} \qquad (缩短)$$

(3) 计算 A 点位移



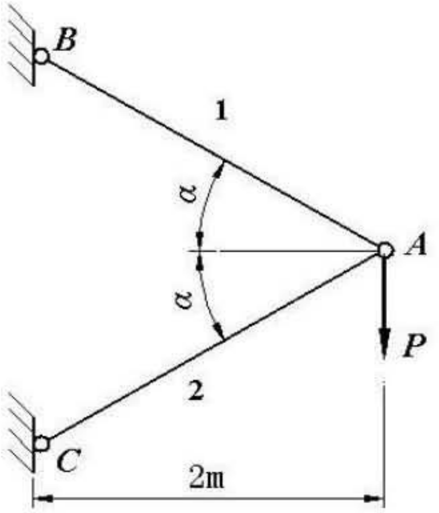
以切线代弧线，A 点的位移为：

$$\Delta x_A = \overline{AB} + \overline{CA'} = \frac{\Delta l_1}{\cos 45^\circ} + \Delta l_2 = \frac{2\sqrt{2}Pa}{EA} + \frac{Pa}{EA} = (2\sqrt{2}+1)\frac{Pa}{EA}$$

$$\Delta y_A = -\Delta l_2 = -\frac{Pa}{EA}$$

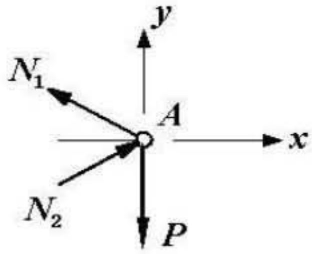
[注：①本题计算是基于小变形假设(材料力学的理论和方法都是基于这个假设)，在此假设下，所有杆件的力和变形都是沿未变形的方向。②计算位移的关键是以切线代弧线。)

2.15 如题图 2.15 所示桁架，$\alpha=30^\circ$，在 A 点受载荷 $P = 350\text{kN}$，杆 AB 由两根槽钢构成，杆 AC 由一根工字钢构成，设钢的许用拉应力 $[\sigma_t] = 160\ \text{MPa}$，许用压应力 $[\sigma_c] = 100\ \text{MPa}$。试为两根杆选择型钢号码。



题图 2.15

解：(1) 计算杆的轴力



以 A 点为研究对象，如上图所示，由平衡方程可得

$$\sum X = 0，\quad N_2\cos\alpha - N_1\cos\alpha = 0$$

$$\sum Y = 0，\quad N_1\sin\alpha + N_2\sin\alpha - P = 0$$

$$\therefore\quad N_1 = P = 350\ \text{kN}\quad (拉)$$

$$N_2 = N_1 = 350\ \text{kN}\quad (压)$$

(2) 计算横截面的面积

根据强度条件：$\sigma_{max} = \dfrac{N}{A} \le [\sigma]$，有

$$2A_1 \ge \frac{N_1}{[\sigma_t]} = \frac{350\times1000}{160} = 2187.5\ \text{mm}^2，\quad A_1 \ge 1093.75\ \text{mm}^2$$

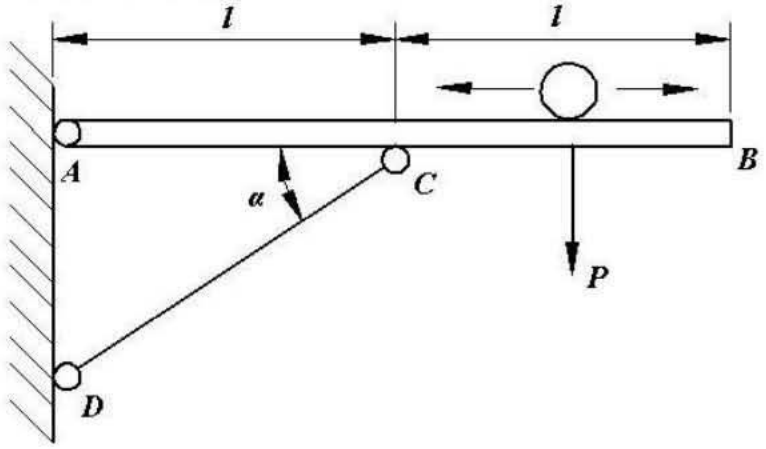
$$A_2 \ge \frac{N_2}{[\sigma_c]} = \frac{350\times1000}{100} = 3500\ \text{mm}^2$$

(3) 选择型钢

通过查表，杆 AB 为 No.10 槽钢，杆 BC 为 No.20a 工字钢。

(注：本题说明，对于某些材料，也许它的拉、压许用应力是不同的，需要根据杆的拉、压状态，使用相应得许用应力)

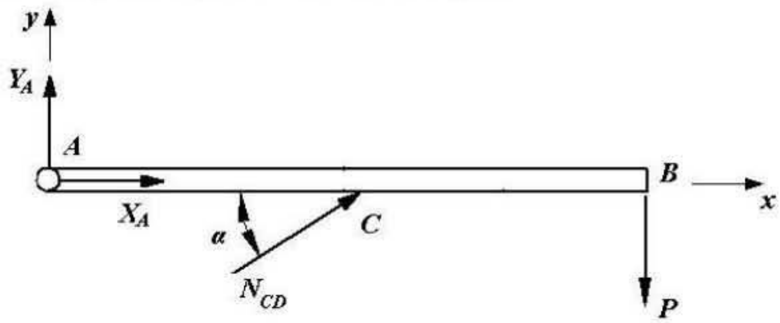
2.25 题图 2.25 所示结构，AB 为刚体，载荷 P 可在其上任意移动。试求使 CD 杆重量最轻时，夹角 α 应取何值？



题图 2.25

解：(1) 计算杆的轴力

载荷 P 在 B 点时为最危险工况，如下图所示。



以刚性杆 AB 为研究对象

$\sum M_A = 0$，　$N_{CD}\sin\alpha \cdot l - P\cdot 2l = 0$

$$N_{CD} = \frac{2P}{\sin\alpha}$$

(2) 计算杆 CD 横截面的面积

设杆 CD 的许用应力为$[\sigma]$，由强度条件，有

$$A = \frac{N}{[\sigma]} = \frac{N_{CD}}{[\sigma]} = \frac{2P}{[\sigma]\sin\alpha}$$

(3) 计算夹角α

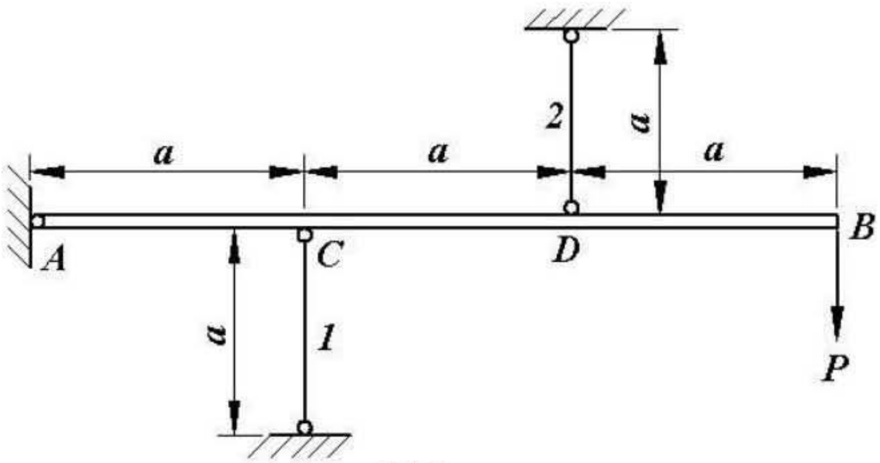
设杆 CD 的密度为ρ，则它的重量为

$$W = \rho V = \rho A\cdot\overline{CD} = \rho A\cdot\frac{l}{\cos\alpha} = \frac{2\rho Pl}{[\sigma]\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\rho Pl}{[\sigma]\cos 2\alpha}$$

从上式可知，当$\alpha = 45^\circ$时，杆 CD 的重量 W 最小。

（注：本题需要注意的是：①载荷 P 在 AB 上可以任意移动，取最危险的工作状况（工况）；② 杆的重量最轻，即体积最小。）

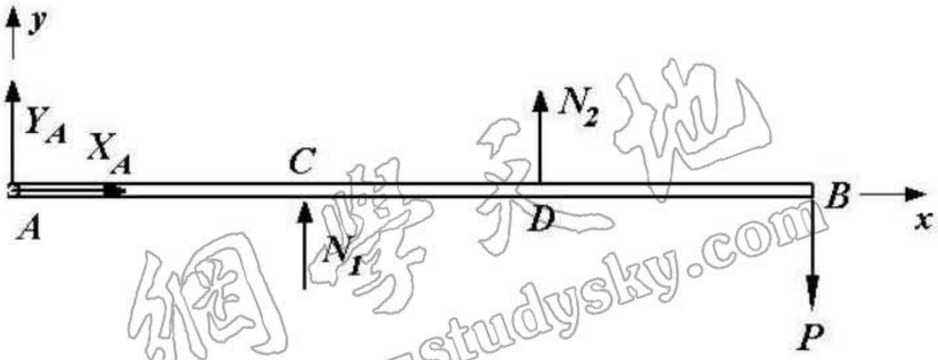
2.34 题图 2.34 所示结构，AB 为刚性梁，1 杆横截面面积 A_1=1cm^2，2 杆 A_2=2cm^2，a=1m，两杆的长度相同，E=200GPa，许用应力$[\sigma_t]$=160MPa，$[\sigma_b]$=100MPa，试确定许可载荷$[P]$。



题图 2.34

解：(1) 计算杆的轴力

以刚性杆 AB 为研究对象，如下图所示。

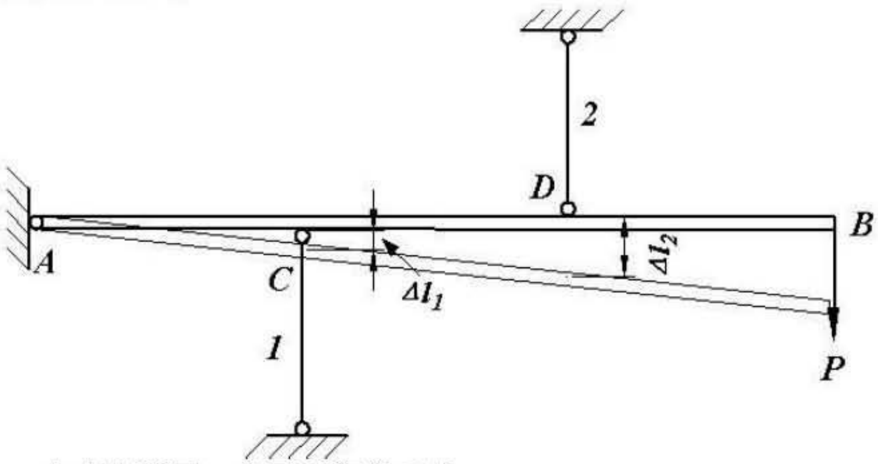


$\sum M_A = 0$， $N_1 \cdot a + N_2 \cdot 2a - P \cdot 3a = 0$

即： $N_1 + 2N_2 = 3P$ (1)

该问题为一次静不定，需要补充一个方程。

(2) 变形协调条件



如上图所示，变形协调关系为

$2\Delta l_1 = \Delta l_2$ (2)

(3) 计算杆的变形

由胡克定理，有

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 a}{EA_1}; \qquad \Delta l_2 = \frac{N_2 a}{EA_2}$$

代入式(2)得：

$$\frac{2N_1 a}{EA_1} = \frac{N_2 a}{EA_2}$$

即：$\frac{2N_1}{A_1} = \frac{N_2}{A_2}$ (3)

(4) 计算载荷与内力之间关系

由式(1)和(3)，解得：

$$P = \frac{A_1 + 4A_2}{3A_1} N_1 \qquad (4)$$

或

$$P = \frac{A_1 + 4A_2}{6A_2} N_2 \qquad (5)$$

(5) 计算许可载荷

如果由许用压应力$[\sigma_b]$决定许可载荷，有：

$$[P_b] = \frac{A_1 + 4A_2}{3A_1}[N_1] = \frac{A_1 + 4A_2}{3A_1}[\sigma_b] \cdot A_1 = \frac{1}{3}(A_1 + 4A_2)[\sigma_b]$$

$$= \frac{1}{3}(100 + 4 \times 200) \times 100 = 30000 \quad (N) = 30 \quad (kN)$$

如果由许用拉应力$[\sigma_t]$决定许可载荷，有：

$$[P_t] = \frac{A_1 + 4A_2}{6A_2}[N_2] = \frac{A_1 + 4A_2}{6A_2}[\sigma_t] \cdot A_2 = \frac{1}{6}(A_1 + 4A_2)[\sigma_t]$$

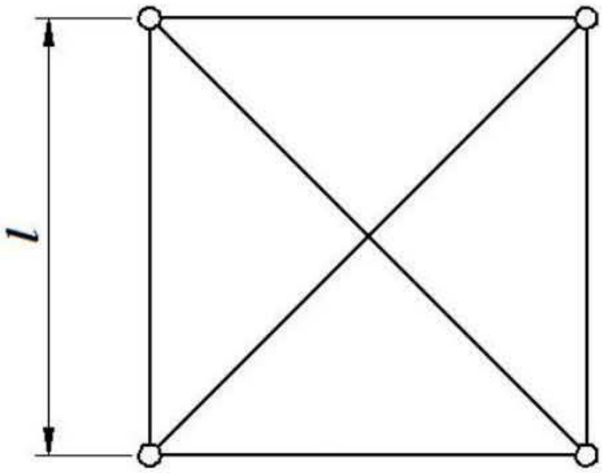
$$= \frac{1}{6}(100 + 4 \times 200) \times 160 = 24000 \quad (N) = 24 \quad (kN)$$

比较两个许可载荷，取较小的值，即

$$[P] = \min\{[P_b],[P_t]\} = 24 \quad (kN)$$

（注：本题需要比较由杆 1 和杆 2 决定的许可载荷，取较小的一个值，即整个结构中，最薄弱的部位决定整个结构的许可载荷。）

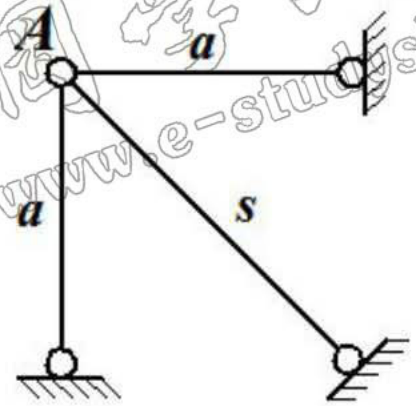
2.42 题图 2.42 所示正方形结构，四周边用铝杆(E_a=70GPa，α_a=21.6×10^{-6} ℃$^{-1}$)；对角线是钢丝(E_s=70GPa，α_s=21.6×10^{-6} ℃$^{-1}$)，铝杆和钢丝的横截面面积之比为 2:1。若温度升高ΔT=45℃时，试求钢丝内的应力。



题图 2.42

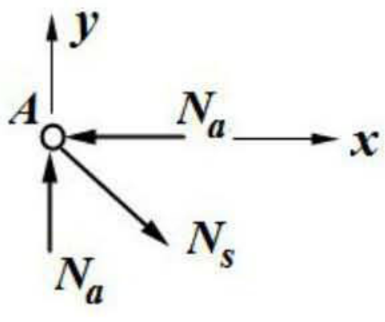
解：(1) 利用对称条件对结构进行简化

由于结构具有横向和纵向对称性，取原结构的 1/4 作为研究的结构如下图所示，



(2) 计算各杆的轴力

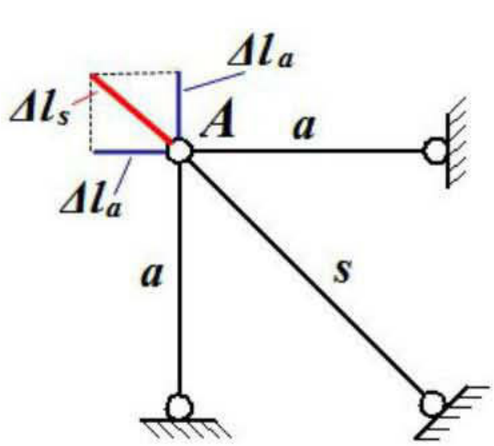
以 A 点为研究对象，如右图所示，由平衡方程可得



$$\sum X = 0，\quad N_s \cos 45^\circ - N_a = 0$$

即：$$N_s = \sqrt{2} N_a \qquad ①$$

(3) 变形协调关系



如上图所示，铝杆与钢丝的变形协调关系为：

$$\Delta l_s = \sqrt{2}\Delta l_a \qquad ②$$

钢丝的伸长量为：(设钢丝的截面积为 A)

$$\Delta l_s = \Delta T\alpha_s l_s + \frac{N_s l_s}{E_s A_s} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\Delta T\alpha_s l + \frac{N_s l}{E_s A}) \qquad ③$$

铝杆的伸长量为：

$$\Delta l_a = \Delta T\alpha_a l_a - \frac{N_a l_a}{E_a A_a} = \frac{1}{4}(2\Delta T\alpha_a l - \frac{N_a l}{E_a A}) \qquad ④$$

由①②③④式，可解得：

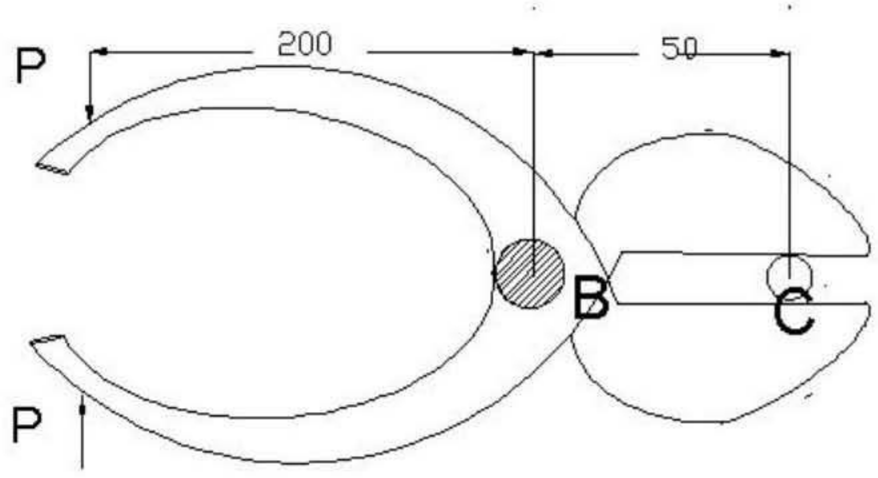
$$N_s = \frac{2\sqrt{2}E_a E_s}{2\sqrt{2}E_a + E_s}(\alpha_a - \alpha_s)\Delta T \cdot A$$

(4) 计算钢丝的应力

$$\sigma = \frac{N_s}{A} = \frac{2\sqrt{2}E_a E_s}{2\sqrt{2}E_a + E_s}(\alpha_a - \alpha_s)\Delta T$$

$$= \frac{2\sqrt{2}\times 70\times 10^3 \times 200\times 10^3}{2\sqrt{2}\times 70\times 10^3 + 200\times 10^3}(21.6\times 10^{-6} - 11.7\times 10^{-6})\times 45 = 44.3\ (MPa)$$

3.8 题图 3.8 所示夹剪，销钉 B 的直径 d=5mm,销钉与被剪钢丝的材料相同，剪切极限应力 τ_u =200Mpa，销钉的安全系数 n=4，试求在 C 处能剪断多大直径的钢丝。



解：设 B,C 两点受力分别为 F_1，F_2。

剪切许用应力为：$[\tau]=\frac{\tau_u}{n}$=50Mpa

对 B 点，有力矩和为零可知：$\sum M_B=0$，即：F_1=4P

由力平衡知：F_1+P=F_2

$\therefore\ F_2=\frac{5}{4}F_1$

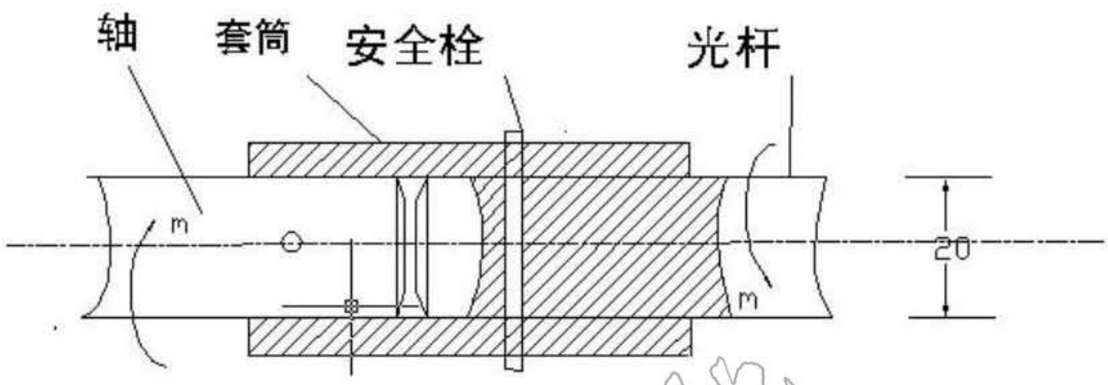
其中：$F_2=[\tau]\cdot A=12.5\pi d^2$

故：　$F_1=10\pi d^2$

又由强度要求可知：$\tau_u \le \frac{F_1}{A_1}$

即：　$d\le \dfrac{F_1}{\frac{1}{4}\pi\tau_u}=\sqrt{5}=2.24\text{mm}$

3.11 车床的转动光杆装有安全联轴器，当超过一定载荷时，安全销即被剪断。已知安全销的平均直径为 5mm，其剪切强度极限 τ_b=370Mpa，求安全联轴器所能传递的力偶矩 m.



解：设安全销承受的最大力为，则：F = $\tau_b \times \frac{1}{4}\pi d^2$

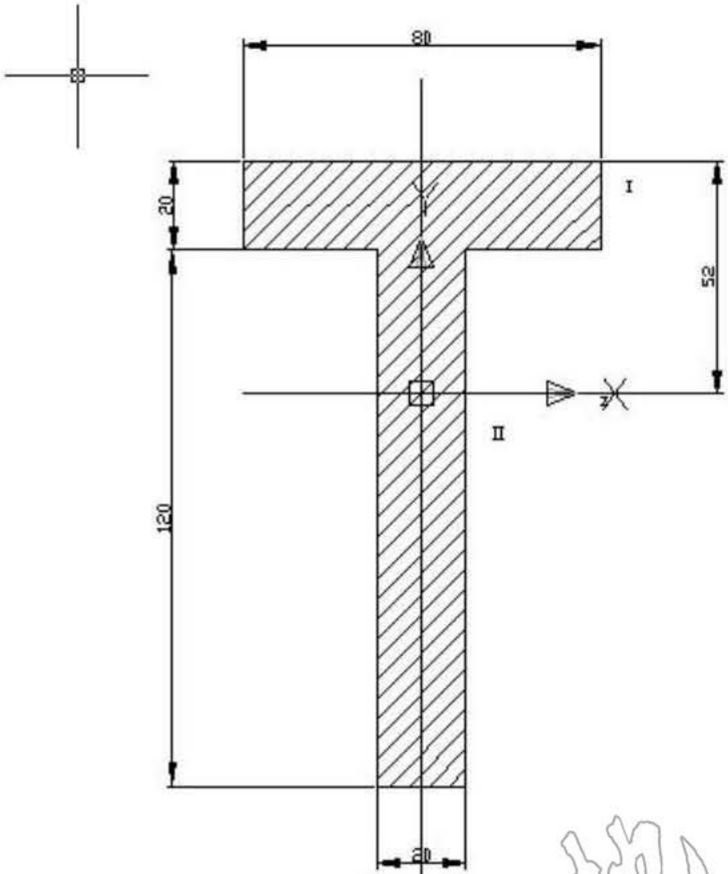
那么安全联轴器所能传递的力偶矩为：m = F·D

其中 τ_b =370Mpa，b=5mm，D=20mm，

代入数据得：

力偶矩 m=145.2 $N \cdot m$

4.7 求题图 4.7 中各个图形对形心轴 z 的惯性矩 I_z。



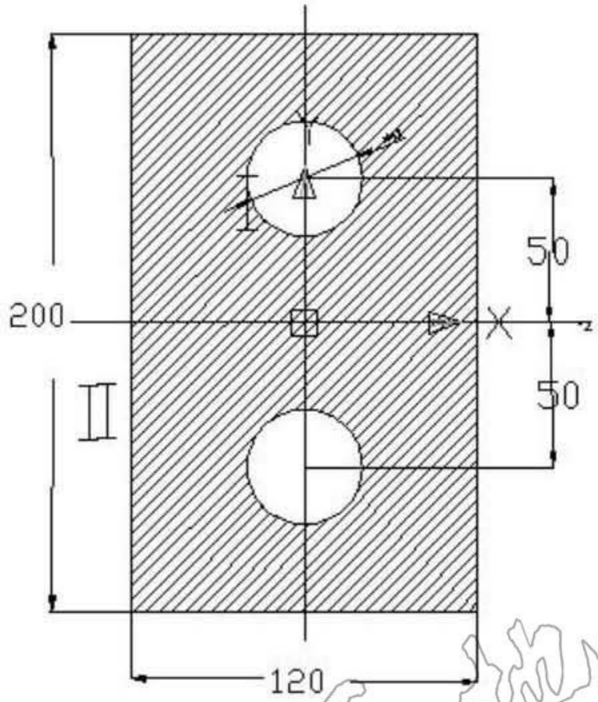
解：（1）对 I 部分：$I_{z_1}=\dfrac{800\times 20^3}{12}\ mm^4$

$$I_{z_I}=I_{z_1}+a^2\mathrm{A}=\frac{800\times 20^3}{12}+\left(50-\frac{20}{2}\right)^2\times 20\times 80\,mm^4=287.57\,cm^4$$

对 II 部分：$I_{z_2}=\dfrac{20\times 120^3}{12}\ mm^4$

$$I_{z_{II}}=I_{z_2}+a^2\mathrm{A}=\frac{20\times 120^3}{12}+\left(\frac{120}{2}+20-52\right)^2\times 20\times 120\,mm^4=476.11\,cm^4$$

所以：$I_z=I_{z_I}+I_{z_{II}}=763.73\,cm^4$



(2)

对完整的矩形：$I_{z_1}=\dfrac{bh^3}{12}=\dfrac{120\times200^3}{12}=8000\,cm^4$

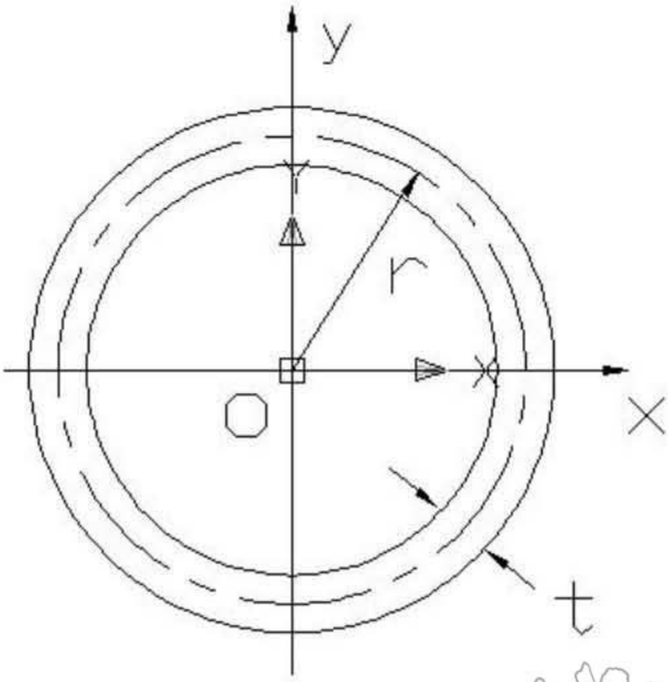
对两个圆：$I_{z_{II}}=2\left(\dfrac{\pi D^4}{64}+a^2A\right)$

$$=2\times\left(\frac{\pi\times40^4}{64}+50^2\times\pi\times20^2\right)$$

$$=653.12\,cm^4$$

所以：$I_z=I_{z_1}-I_{z_{II}}=7346.88\,cm^4$

4.9 题图 4.9 所示薄圆环的平均半径为 r，厚度为 t（r≥ t）.试证薄圆环对任意直径的惯性矩为 $I=\pi r^3 t$，对圆心的极惯性矩 $I_p=2\pi r^3 t$ 。



解：（1）设设圆心在原点，由于是圆环，故惯性矩对任意一直径相等，为：

$$I=\frac{\pi D^4}{64}\left(1-\alpha^4\right) \qquad 其中\ \alpha=\frac{d}{D}$$

所以：$I=\frac{\pi}{64}\times(2r+t)^4\left[1-\left(\frac{2r-t}{2r+t}\right)^4\right]$

$=\frac{\pi}{64}\times\left(8r^2+2t^2\right)\times 8rt$

∵ r ≥ t

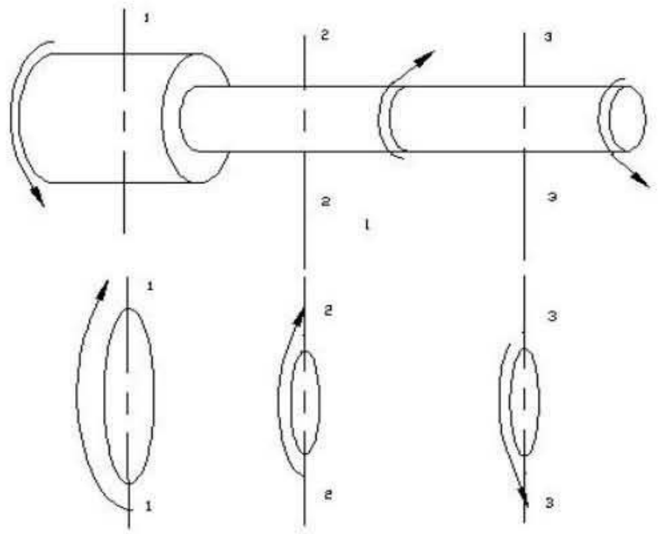
∴ $I=\frac{\pi}{64}\times 8r^2\times 8rt=\pi r^3 t$

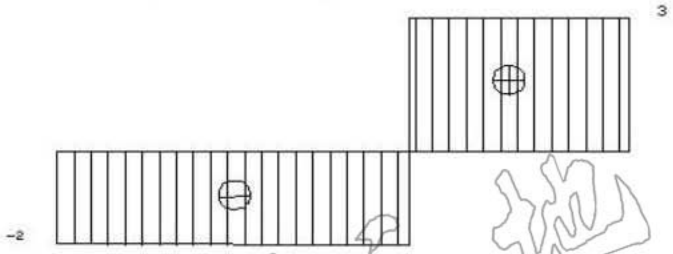
(2) 由一知：极惯性矩 $I_p=2I=2\pi r^3 t$

5.7（1）用截面法分别求题图 5.7 所示各杆的截面 1-1,2-2 和 3-3 上的扭矩，并画出扭矩图的转向;

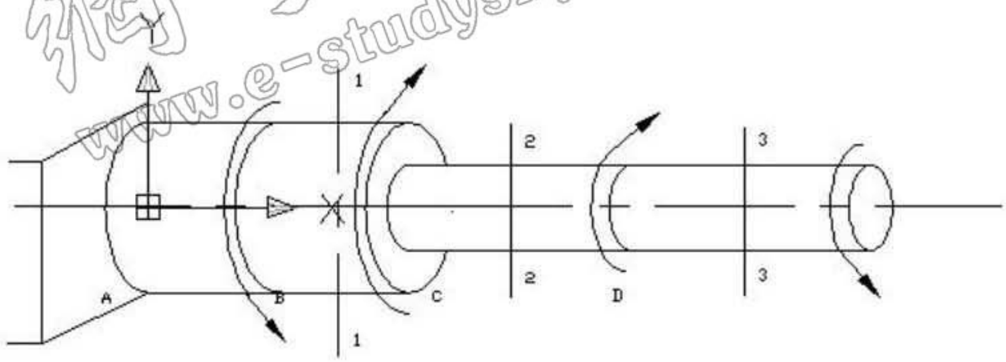
（2）做图示各杆的扭矩图

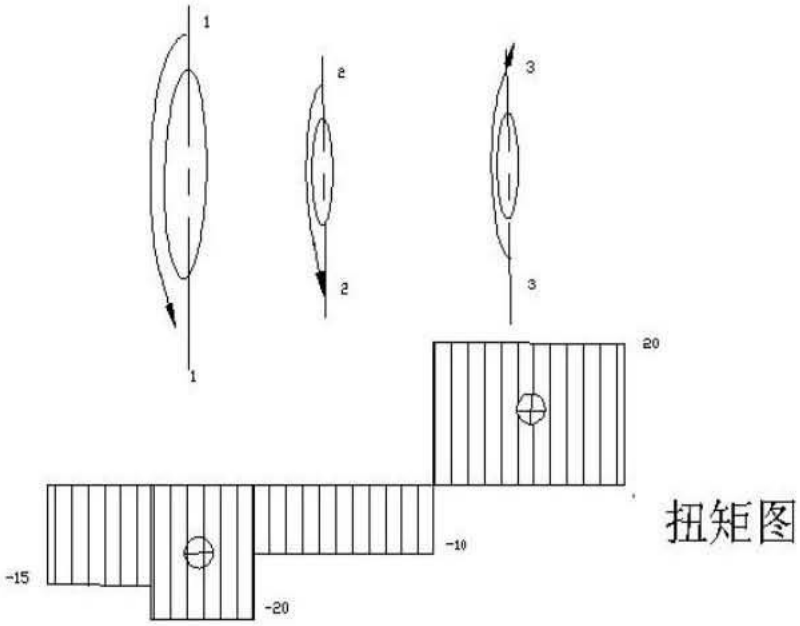
解：（1）$m_1=m_2=-2\,kN\cdot m$，$m_3=3\,kN\cdot m$



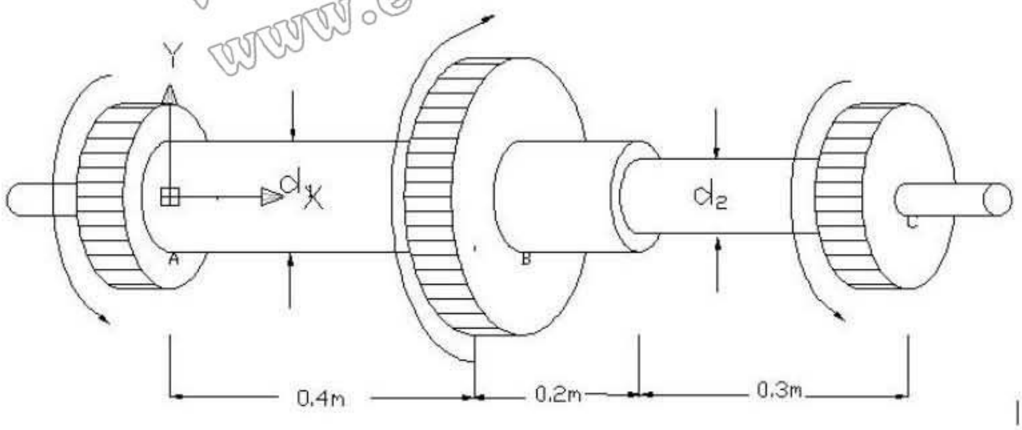


（2）$T_1=-20\,kN\cdot m$，$T_2=-10\,kN\cdot m$，$T_3=20\,kN\cdot m$





5.11 一阶梯形圆轴如题图 5.11 所示。已知轮 B 输入的功率 N_B =45kW，轮 A 和轮 C 输出的功率分别为 N_A =30Kw, N_C =15kW；轴的转速 n=240r/min, d_1 =60mm, d_2 =40mm;许用扭转角 $[\theta]$ =2 (°) /m，材料的 $[\tau]$ =50Mpa,G=80Gpa.试校核轴的强度和刚度。



解：（1）设 AB,BC 段承受的力矩为 T_1,T_2.计算外力偶矩：

$$m_A=9549\frac{N_A}{n}=1193.6\ N\cdot m$$

$$m_C=9549\frac{N_C}{n}=596.8\ N\cdot m$$

那么 AB,BC 段的扭矩分别为：$T_1=-m_A=$—$1193.6\ N\cdot m$

$$T_2.=-m_c=596.8\ N\cdot m$$

（2）检查强度要求

圆轴扭转的强度条件为：$\tau_{max}=\frac{T_{max}}{W_t}\le[\tau]$ 可知：(其中 $W_t=\frac{\pi d^3}{16}$，d_1=60mm,

d_2=40mm)

代入 $\tau_{1max}=\frac{T_{1max}}{W_t}$ 和 $\tau_{2max}=\frac{T_{2max}}{W_t}$ 得：

τ_{1max}=28.2Mpa,　　τ_{2max}=47.5Mpa

故：τ_{max}=47.5Mpa

（3）检查强度要求

圆轴扭转的刚度条件式为：

$$\theta_{max}=\frac{T_{max}}{GI_p}\times\frac{180^\circ}{\pi}=\frac{T_{max}}{G\cdot\frac{\pi}{32}d^4}\times\frac{180^\circ}{\pi}\le[\theta]$$

所以：$\theta_{1max}=\frac{T_{1max}}{G\frac{\pi d_1^{\ 4}}{32}}\cdot\frac{180^\circ}{\pi}$=0.67°/ m

$\theta_{2max}=\frac{T_{1max}}{G\frac{\pi d_1^{\ 4}}{32}}\cdot\frac{180^\circ}{\pi}$=1.7°/ m

故：θ_{max}=1.7°/ m

5.13 题图 5.13 所示，汽车驾驶盘的直径为 520mm，驾驶员作用于盘上的力 P=300N，转向轴的材料的许用剪应力 $[\tau]$=60Mpa。试设计实心转向轴的直径。若改用 $\alpha=\frac{d}{D}$=0.8 的空心轴，则空心轴的内径和外径各位多大？并比较两者的重量。

解：（1）当为实心转向轴时

外力偶矩 m= $p\times l$ =156 $N\cdot m$

则扭矩 T=156 $N\cdot m$

圆轴扭转的强度条件为：

$\tau_{max}=\dfrac{T_{max}}{W_t}\leq[\tau]$ 可知：(其中 $W_t=\dfrac{\pi d^3}{16}$)

$d\geq\sqrt[3]{\dfrac{16T_{max}}{\pi[\tau]}}=23.6N\cdot m$

(2) 当改为 $\alpha=\dfrac{d}{D}=0.8$ 的空心轴时

圆轴扭转的强度条件为：

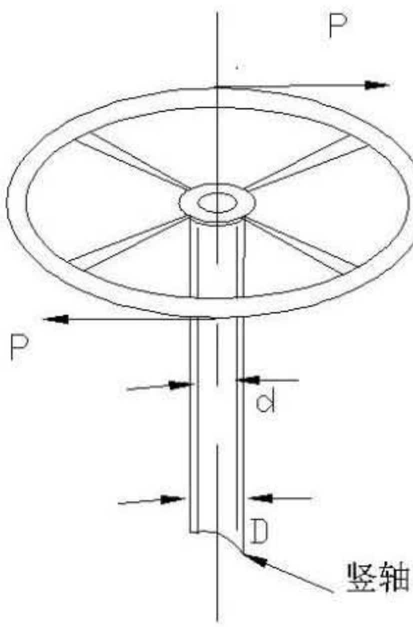
$\tau_{max}=\dfrac{T_{max}}{W_t}\leq[\tau]$ 可知：(其中 $w_t=\dfrac{\pi D^3}{16}\left(1-\alpha^4\right)$)

∴ D≥28.2mm　　d≥22.6mm

故：空心轴 D=28.2mm,d=22.6mm

(3) 实心轴与空心轴的质量之比就应该是两者的横截面积之比，即：

$$\frac{m_{实}}{m_{空}}=\frac{A_{实}}{A_{空}}=\frac{\dfrac{\pi}{4}D^2\left(1-\alpha^2\right)}{\dfrac{\pi}{4}d_1^2}=0.514$$



5.16 题图 5.16 所示钻探机钻杆的外径 D = 60mm，内径 d = 50mm，钻入的深度 l=40m;A 端输入的功率 N_A =15Kw，转速 n=180r/min，B 端钻头所受的扭转力矩 M_B =300 $kN \cdot m$ ；材料的[τ] = 40MPa，G = 80GPa，假设土壤对钻杆的阻力沿杆长度均匀分布，试求：（1）单位长度上土壤对钻杆的阻力距 m。

（2）作钻杆的扭矩图，并校核其扭转强度。

（3）A,B 两端截面的相对扭转角。

（2）圆轴扭转的强度条件为：$\tau_{max} = \frac{T_{max}}{W_t} \le [\tau]$ 得：(其中 $w_t = \frac{\pi D^3}{16}\left(1-\alpha^4\right)$)

$\tau_{max} = 36.2Mpa <$ 40MPa

所以满足强度要求

（3）由两截面之间的相对转角为：$\varphi = \int_0^l \frac{T}{GI_p}dx$

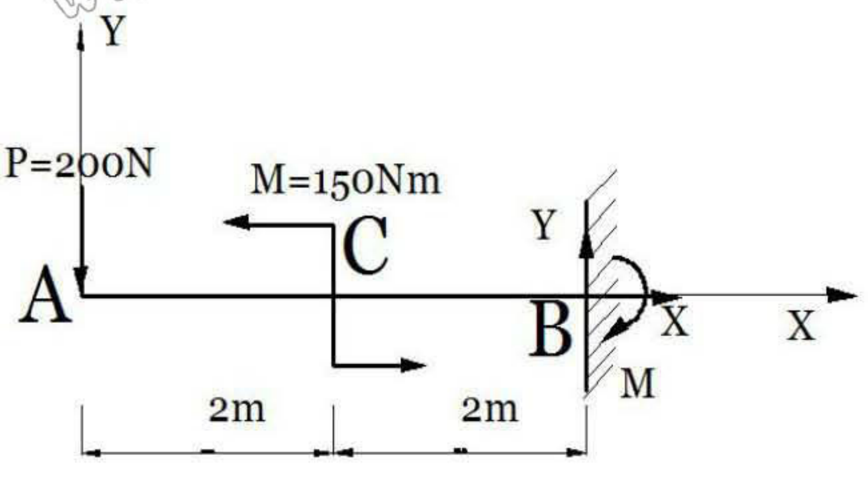
其中 $I_p = \frac{\pi}{32}\left(D^4 - d^4\right)$=$1.59\times10^{-7}m^4$

所以：$\varphi = \int_0^l \frac{T}{GI_p}dx = \int_0^{40} \frac{795.75 - \frac{495.75}{40}x}{GI_p}dx$ = 0.416 rad

A，B 两端截面的相对扭转角为 0.416 rad

6.6 求题图 6.6 中各梁的剪力方程和弯矩方程，作剪力图和弯矩图，并求 $|Q|_{max}$ 和 $|M|_{max}$。

b)



解：

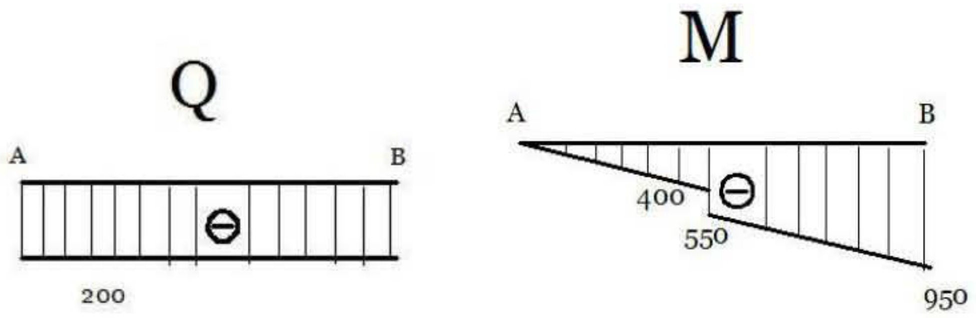
支座反力：X_B=0，Y_B = P = 200N，　M_B=950N，

剪力方程：Q(x) = -200N.

弯矩方程：

AC 段：$M(x) = -PX = -200X_1 \quad (0 \le X \le 2m)$；

CB 段：$M(x) = -PX - M_0 = -(200X + 150) \quad (2m \le X_2 \le 4m)$

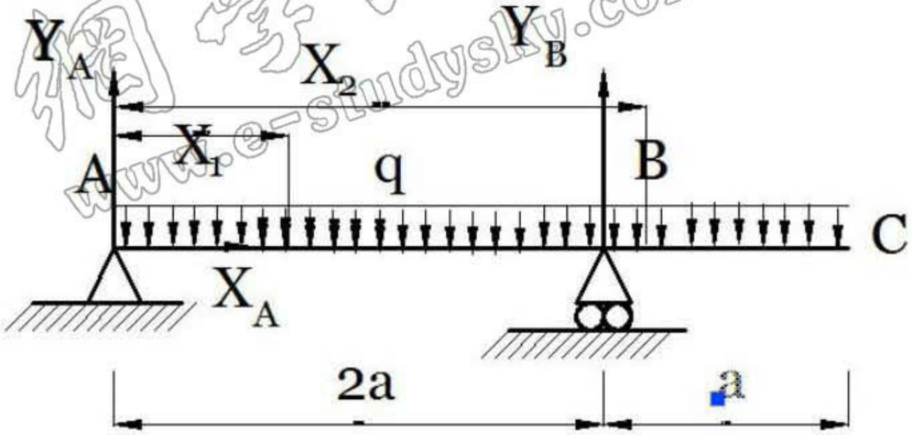


因此：

$|Q|_{max} = 200$ N；

$|M|_{max} = 950$ N • m

(f)



解：

支座反力：

$$X_A = 0, Y_A = \frac{3}{4}qa, Y_B = \frac{9}{4}qa$$

剪力方程：

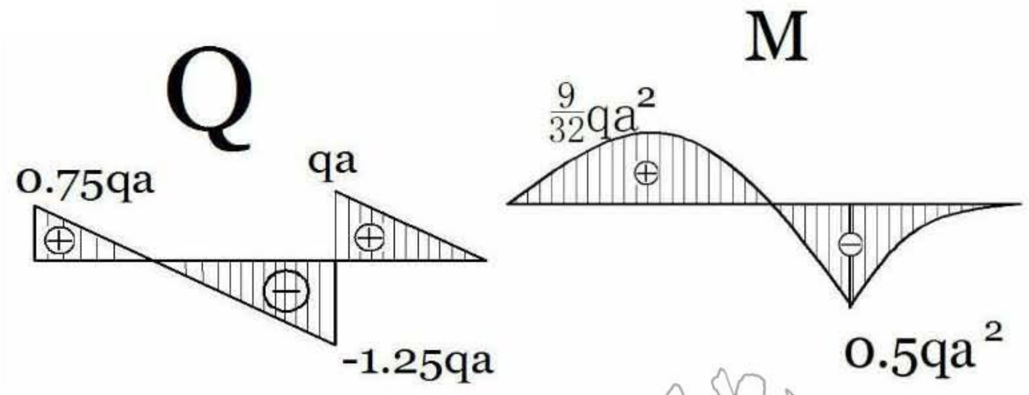
AB 段：$Q(x) = \frac{3}{4}qa - qx$，$(0 \le x \le 2a)$

BC 段：$Q(x) = q(3a - x)$，$(2a \le x \le 3a)$

弯矩方程：

AB 段：$M(x)=\frac{3}{4}qax-\frac{1}{2}qx^2$，$(0\le x\le 2a)$

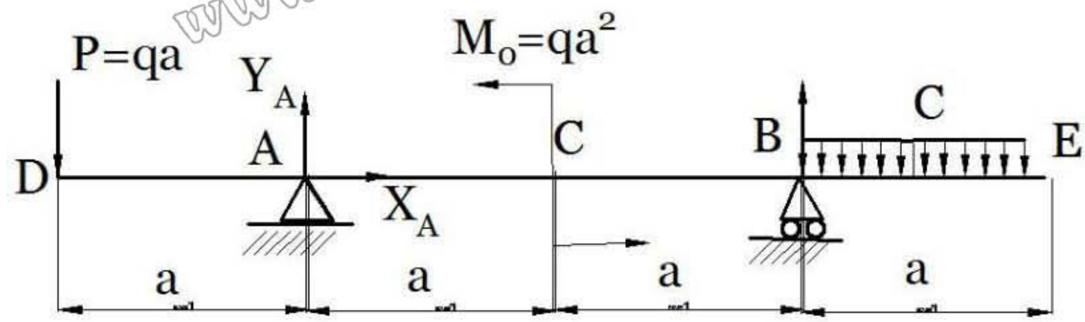
BC 段：$M(x)=-\frac{1}{2}q(3a-x)^2$，$(2a\le x\le 3a)$



因此：$|Q|_{max}=1.25qa$；$|M|_{max}=\frac{9}{32}qa^2$

6.10 不列剪力方程和弯矩方程，作题图 6.10 中各梁的剪力图和弯矩图，并求出 $|Q|_{max}$ 和 $|M|_{max}$。

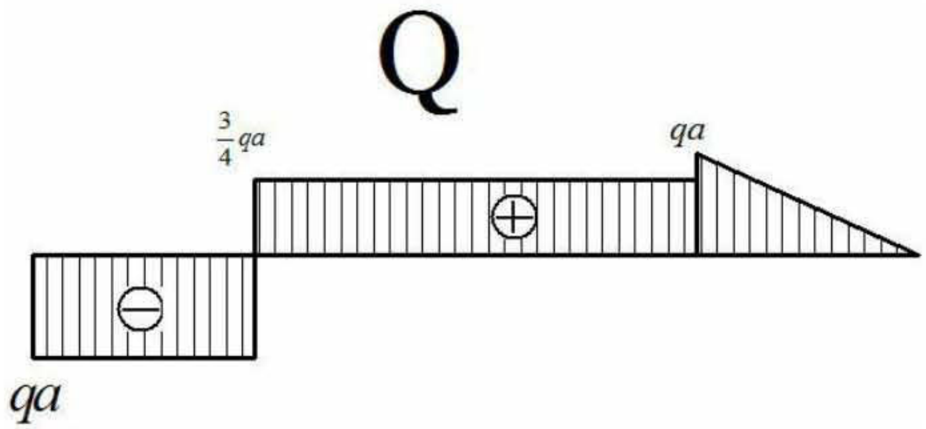
(b)

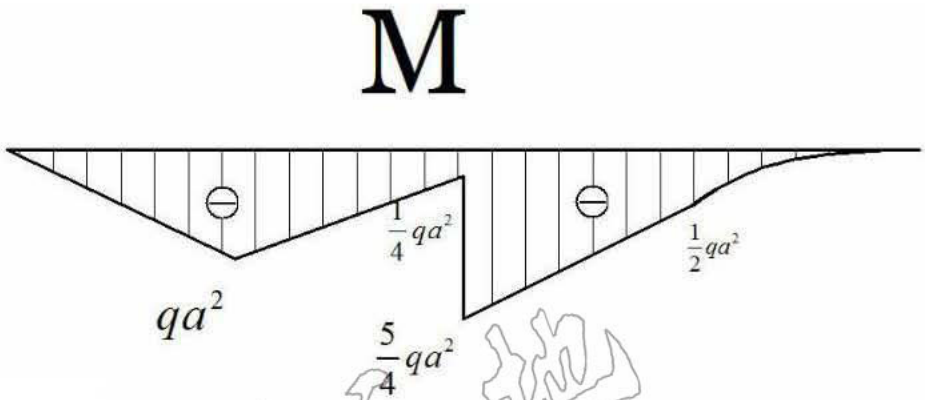


解：

支座反力：

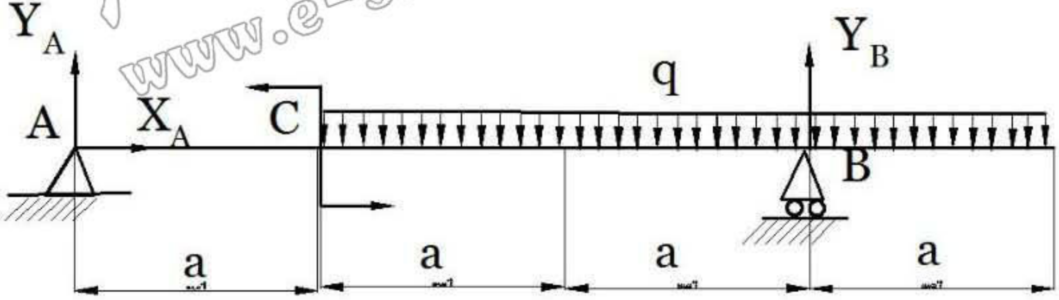
$$Y_A=\frac{7}{4}qa,\qquad Y_B=\frac{1}{4}qa$$





因此：$\left|Q\right|_{\max} = qa$ ；$\left|M\right|_{\max} = \frac{5}{4}qa^2$

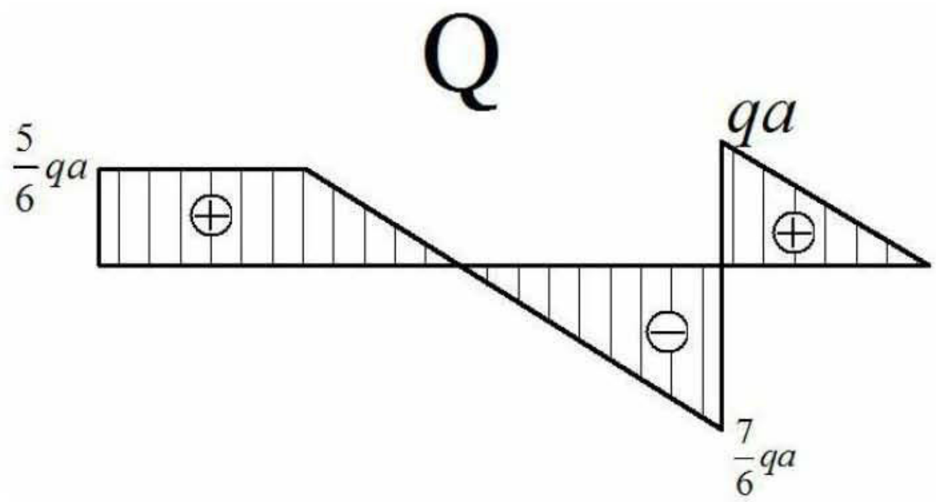
(f)

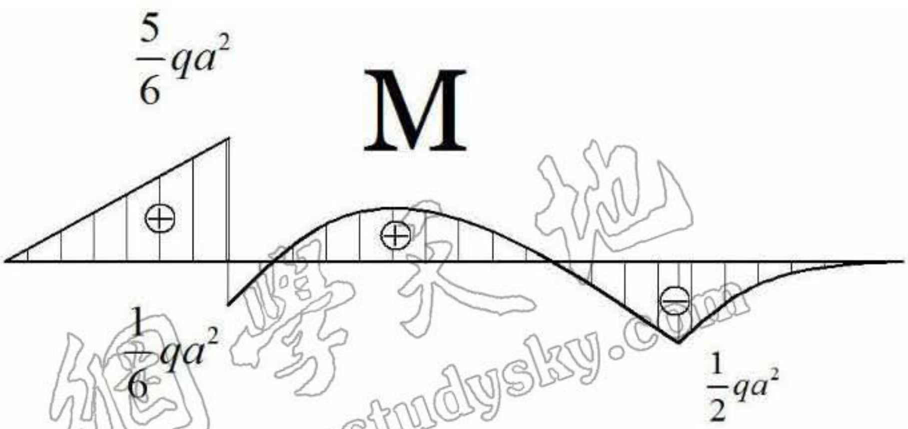


解：

支座反力：

$$Y_A = \frac{5}{6}qa, \qquad Y_B = \frac{13}{6}qa$$

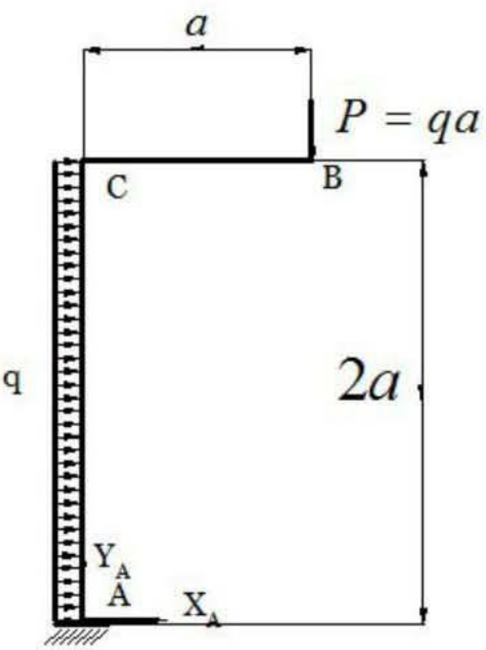




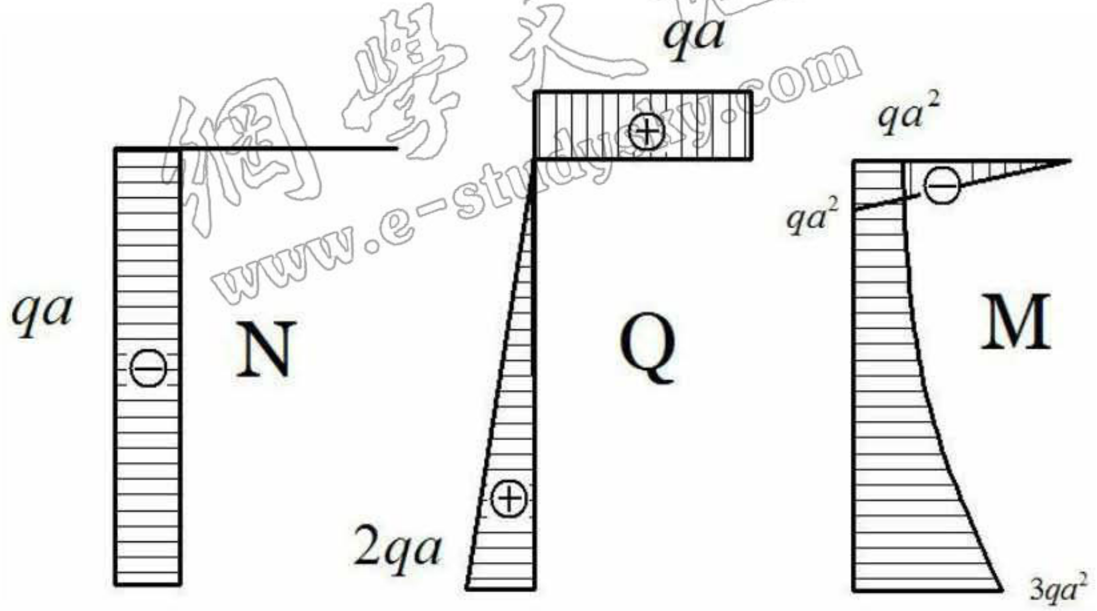
因此：$|Q|_{\max}=\frac{7}{6}qa$；$|M|_{\max}=\frac{5}{6}qa^2$

6.12 作题图 6.12 中各构件的内力图

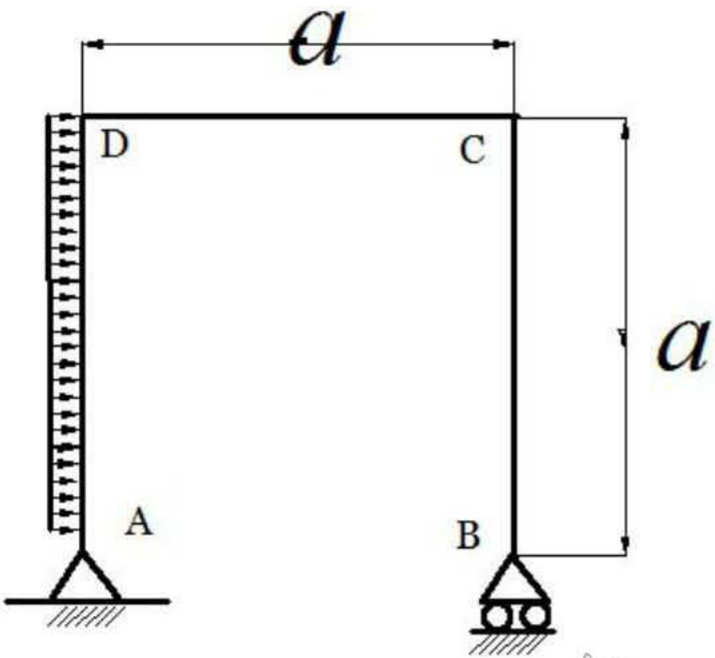
（b）



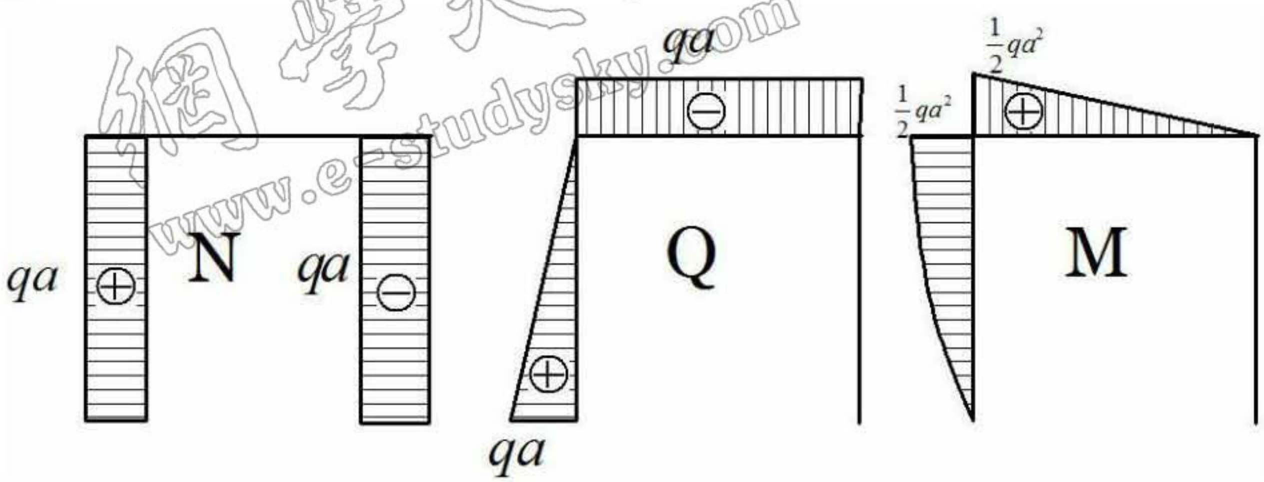
解:



(d)

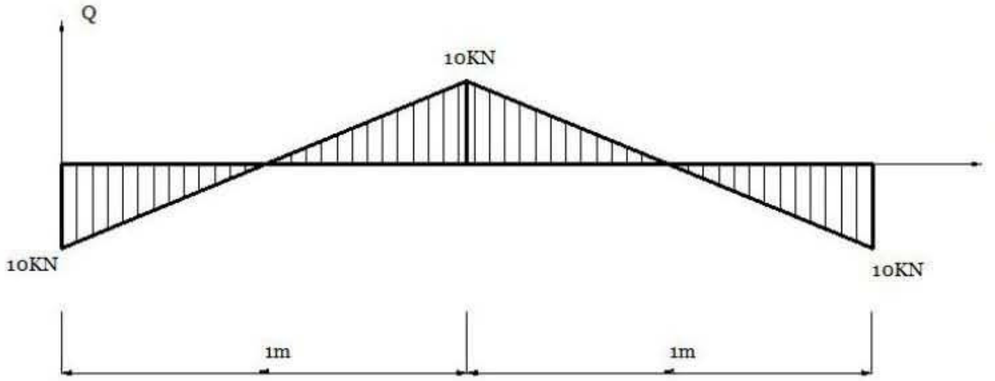


解：

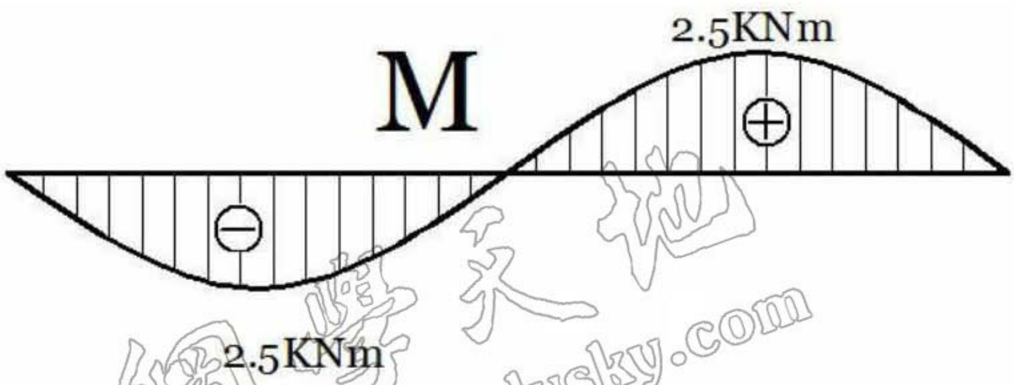


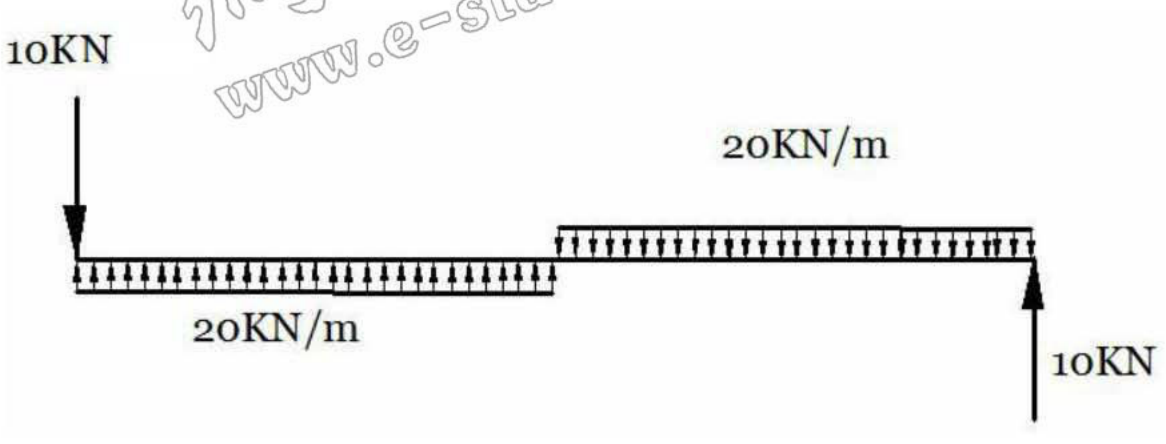
13. 设梁的剪力图如题图 6..13 所示，试做弯矩图和 载荷图，已知梁上没有作用集中力偶。

(b)



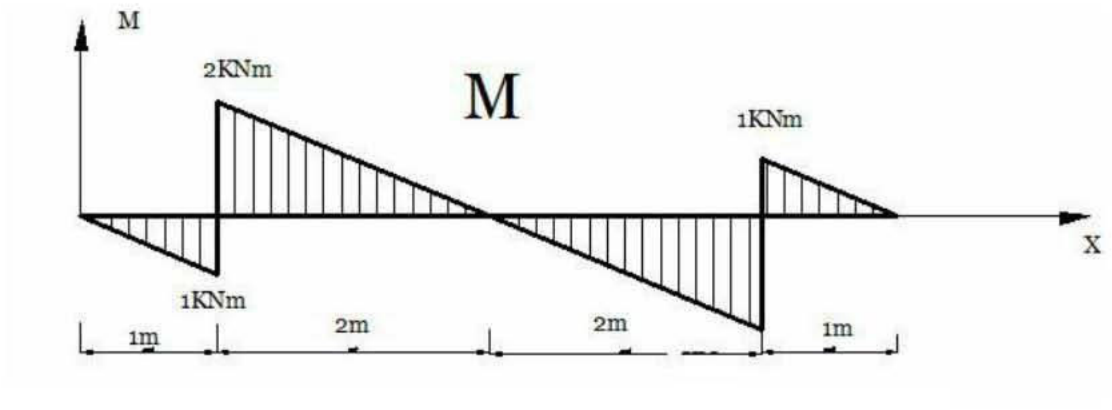
解：



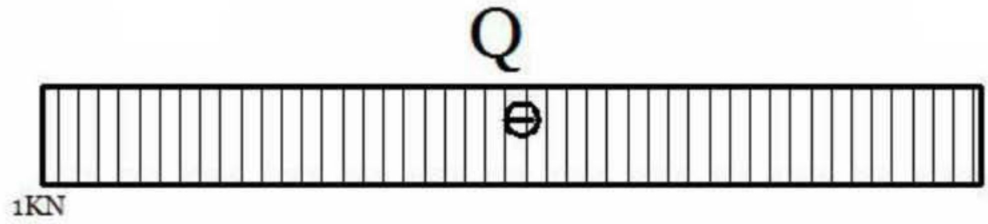


6.14 已知梁的弯矩图如题图 6.14 所示，是做梁的载荷图和剪力图。

(b)



解：



7.9　20a 工字钢梁的支承和受力情况如题图 7.9 所示。若 [σ]=160Mpa，试求许可载荷 P 的值。

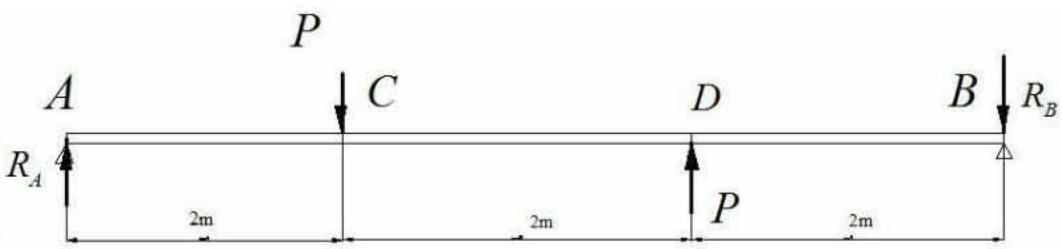


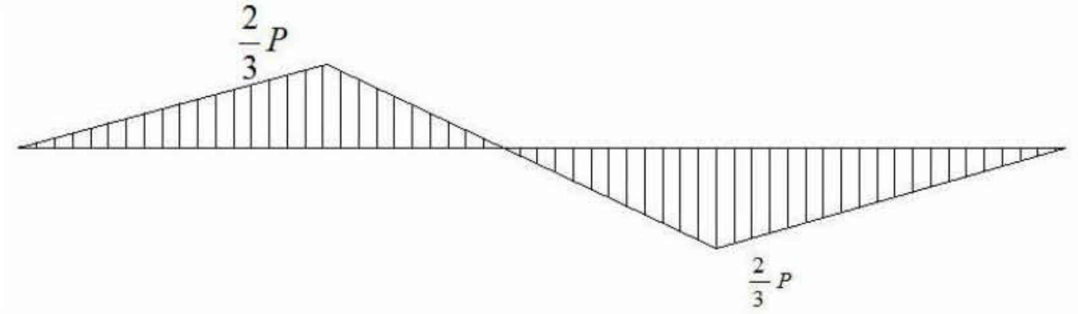
图 7.9

解：

（1）求支座反力

$$R_A = -R_B = \frac{1}{3}P$$

（2）画出弯矩图



$$M_{\max} = \frac{2}{3}P$$

（3）求许可载荷

查表，20a 工字钢的 $W_z = 237 \times 10^3 mm^3$

$$\because \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \le [\sigma]$$

$$\therefore P \le \frac{3}{2}W_z[\sigma] = 56.9kN$$

7.11　题图 7.11 所示一铸造用的钢水包。试按其耳轴的正应力强度确定充满钢水时所允许的总重量。已知材料的许用应力[σ]=100MPa，d=200mm

解：

$$M_{\max} = Pl = \frac{1}{2}Gl$$

$$\because \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \le [\sigma]$$

$$\therefore G \le \frac{2W_z[\sigma]}{l} = \frac{2\times\frac{1}{32}\pi d^3[\sigma]}{l} = 523\ kN$$

7.14 题图 7.14 所示轴直径 D=280mm，跨长 L=1000mm，l=450mm，b=100mm。轴材料的弯曲许用应力[σ]=100NPa,求它能承受的最大轧制力。

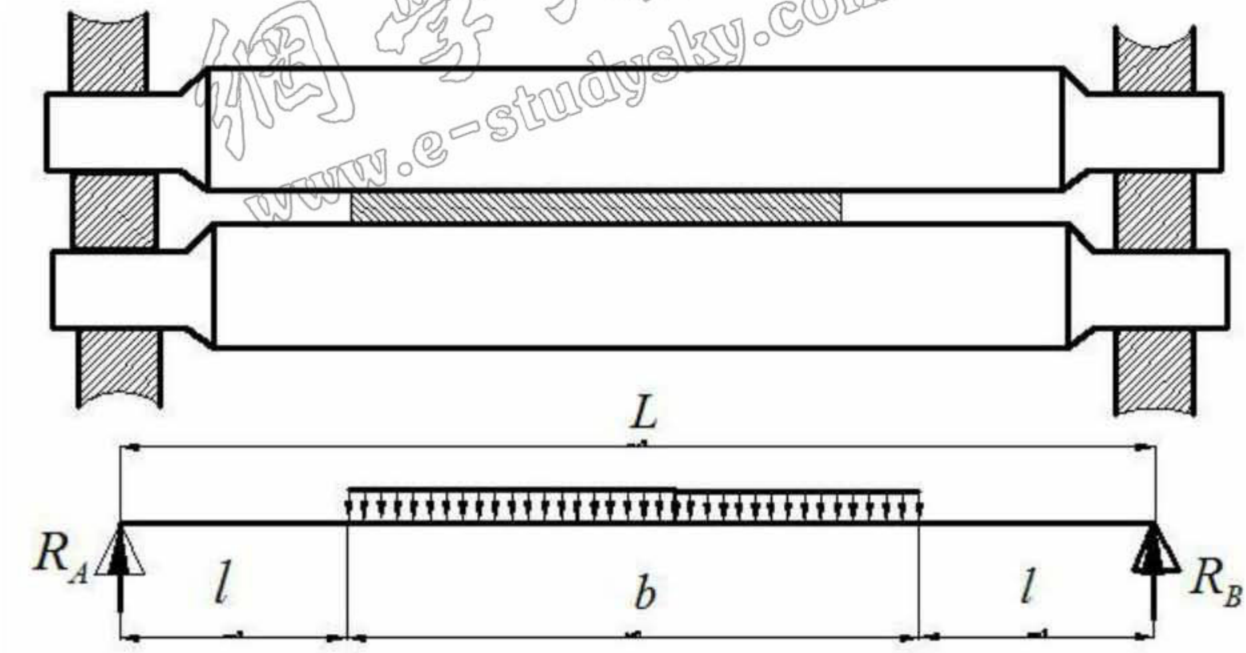


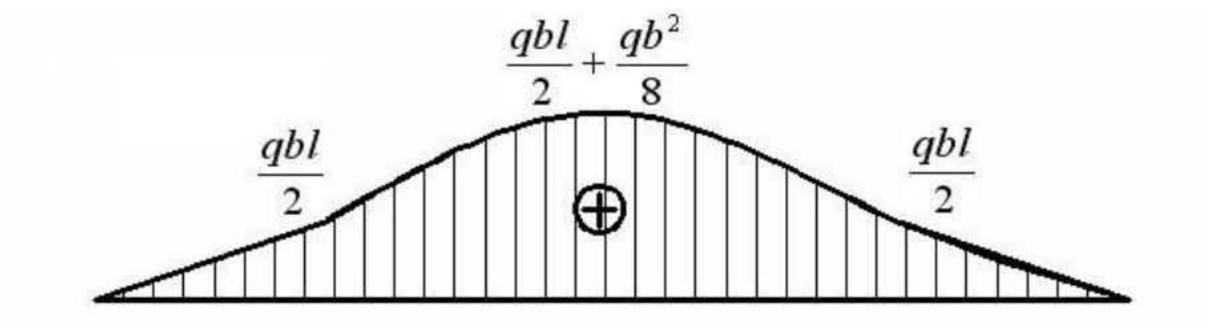
图 7.14

解：

（1）求支座反力

$$R_A = R_B = \frac{ql}{2}$$

（2）画出弯矩图



$$M_{max}=\frac{qbl}{2}+\frac{qb^2}{8}=q(\frac{bl}{2}+\frac{b^2}{8})$$

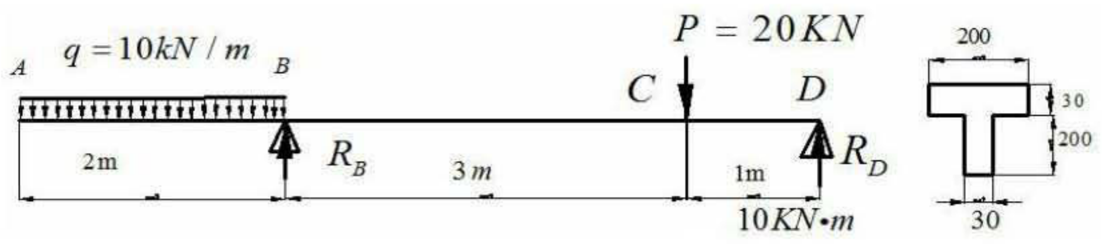
（3）求最大轧制力P_{max}

$$\because \sigma_{max}=\frac{M_{max}}{W_z}\le[\sigma]$$

$$\therefore q\le\frac{W_z[\sigma]}{\frac{bl}{2}+\frac{b^2}{8}}=\frac{\frac{1}{32}\pi D^3[\sigma]}{\frac{bl}{2}+\frac{b^2}{8}}=9069\ N/mm$$

因此：$P_{max}\le qb=906.9kN$

7.15 铸铁梁的载荷及横截面尺寸如题图 7.15 所示。许用拉应力$[\sigma_t]$=40MPa，许用压应力$[\sigma_c]$=160MPa。试按正应力强度条件校核梁的强度。

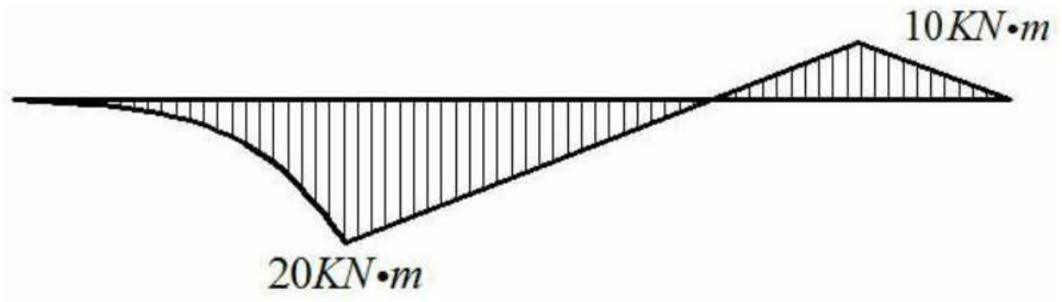


解：

（1）支座反力

$$R_B=30KN, R_D=10KN$$

（2）画弯矩图



由上面弯矩图可知，B,D 两个点可能为危险截面。

$|M_B| = 20\ kNm;\quad M_C = 10kNm$

（3）强度校核

$$y_c = \frac{A_1 y_{c1} + A_2 y_{c2}}{A_1 + A_2} = -157.5mm$$

$$I_Z = I_{Z1} + I_{Z2} = \frac{1}{12} * 20cm * (3cm)^3 + 20cm * 3cm * (20 - 15.75 + 1.5)^2$$

$$+ \frac{1}{12} * 3cm * (30cm)^3 + 3cm * 20cm * (15.75cm - 10cm)^2$$

$$= 6012.5cm^4$$

B 截面下边缘 $\sigma_{BC} = \dfrac{M_B y_c}{I_Z} = 52.4MPa$

B 截面上边缘 $\sigma_{Bt} = \dfrac{M_B (230 - y_c)}{I_Z} = 24.1MPa$

C 截面下边缘 $\sigma_{ct} = \dfrac{M_C y_c}{I_Z} = 26.2MPa$

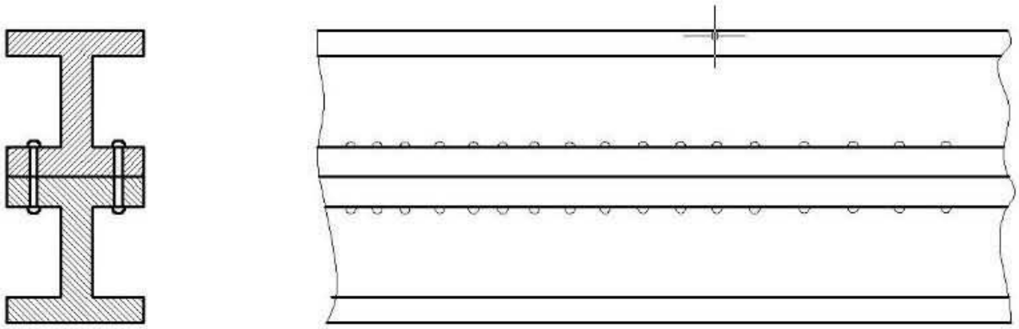
C 截面上边缘 $\sigma_{BC} = \dfrac{M_C (230 - y_C)}{I_Z} = 12.05\ MPa$

所以 $\sigma_{c\max} = 52.4 \le [\sigma_c], \sigma_{t\max} = 26.2 \le [\sigma_t]$

安全

7.19 题图 7.19 所示梁由两根 36a 工字梁铆接而成。铆钉的间距为 s=150mm，直径 d=20mm，许用剪应力[τ]=90MPa。梁横截面上的剪

力 Q=40KN,试校核铆钉的剪切强度。



解:

查表，单个工字梁的截面参数为:

$I_z = 15760\ cm^4$；$A = 76.3 cm^2$；$h = 36 cm$

两个工字梁重叠以后对中性轴的惯性矩

$$I_z = 2\left[I_{z1} + (\frac{h}{2})^2 A\right] = 8096.2 cm^4$$

两个工字梁重叠后对中性轴的静矩

$$S_z^* = \int_A y dA = yA = 1373.4 cm^2$$

设工字梁翼板的宽度为 b，则中性层上的剪应力为

$$\tau' = \frac{QS_z^*}{I_z b}$$

每一对铆钉分担的剪力为

$$Q' = \tau' bs = \frac{QS_z^* s}{I_z} = 10.2 kN$$

铆钉的剪应力为

$$\tau'' = \frac{Q'}{2A} = 16.2 MPa < [\tau] = 90 MPa$$

所以安全

8.5 用积分法求题图 8.5 中各梁的转角方程、挠曲线方程以及指定的转角和挠度。已知抗弯刚度 EI 为常数。

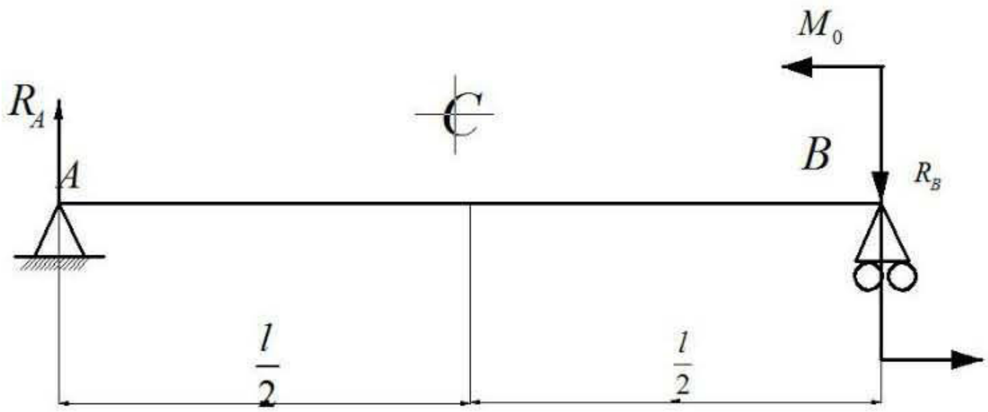


图 8.5

解:

(1) 求支座反力

$R_A = \frac{M_0}{l}$,向上,$R_B = \frac{M_0}{l}$,向下。

(2) 以 A 为原点,写出弯矩方程:

$M(x) = \frac{M_0}{l} x$

(3) 求挠曲线方程

$EIy = \frac{M_0}{6l} x^3 + Cx + D$

带入边界条件 $y_A = y_B = 0$ 得

$C = -\frac{M_0 l}{6}, D = 0$

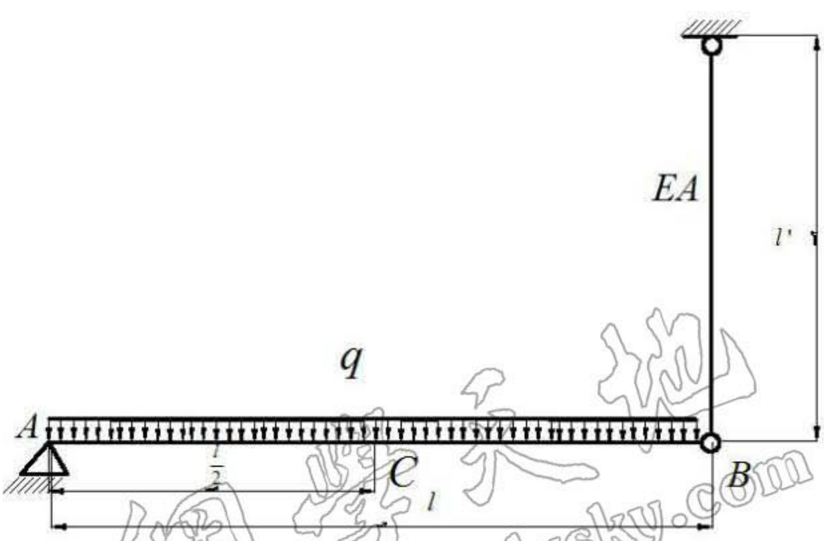
故转角方程和挠曲线方程为

$$\theta=\frac{M_0}{EI}(\frac{x^2}{2l}-\frac{l}{6}),\ y=\frac{M_0x}{6EI}(\frac{x^2}{l}-l)$$

$$\theta_A=-\frac{M_0l}{6EI},\theta_B=\frac{M_0l}{3EI},\ y_C=-\frac{M_0l^2}{16EI}$$

8.7 写出题图 8.7 所示各梁的边界条件。其中(b）图的 k 为弹簧刚度（N/m）。

（a）



题图 8.7

解:

$$y_A=0,R_A=\frac{ql}{2},R_B=\frac{ql}{2}$$

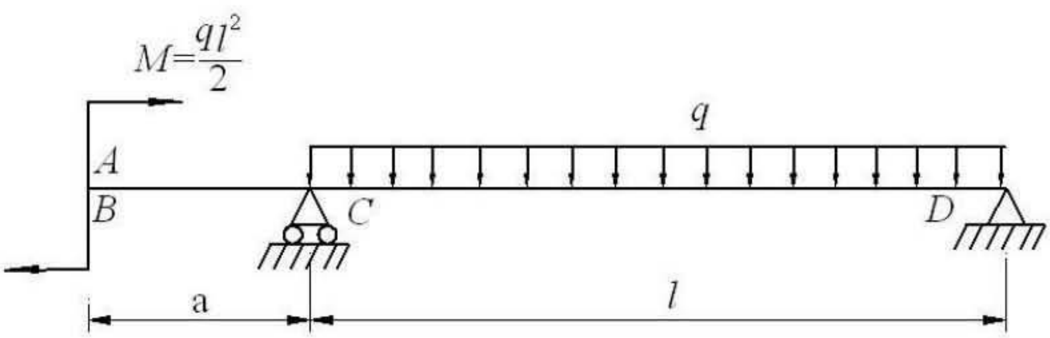
$$\Delta l_1=\frac{R_Bl_1}{EA}=\frac{qll_1}{2EA},$$

当 x=l 时，$y_B=-\frac{qll_1}{2EA}$

边界条件：$y_A=0,\ y_B=-\frac{qll_1}{2EA}$

8.12 用叠加法求题图 8.12 所示各梁截面 A 的挠度和截面 B 的转角。已知 EI 为常数。

（f）



题图 8.12

解：

先假设，CD 段为刚性，则 AC 段可视为在 C 段固定的悬臂梁。

在 $M=\frac{ql^2}{2}$ 作用下，$y_{A1}=\frac{ql^2}{4EI}$；$\theta_{B1}=\frac{qal^2}{2EI}$

再将 AC 视为刚性，则查表可得：

$$\theta_{C1}=-\frac{Ml}{3EI}=-\frac{ql^3}{6EI}\text{；}\quad \theta_{C2}=-\frac{ql^3}{24EI}$$

因此：$\theta_C=\theta_{C1}+\theta_{C2}=-\frac{5ql^3}{24EI}$

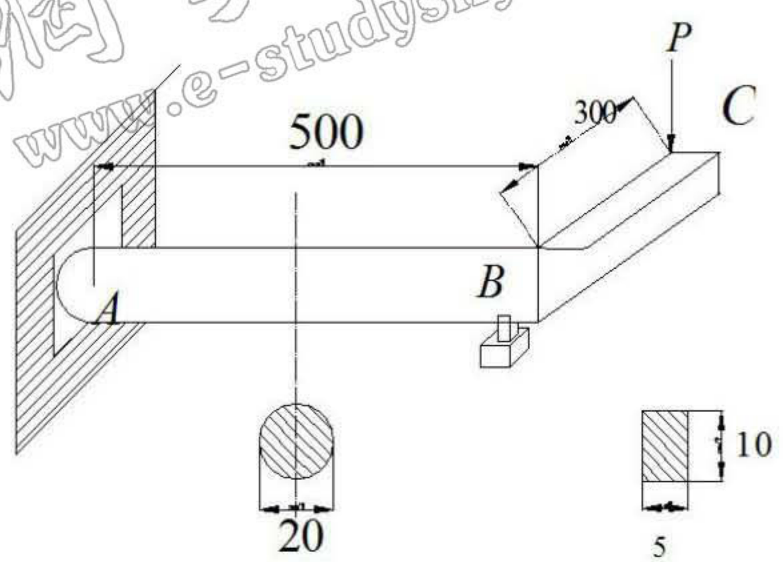
$$\theta_B=\theta_{B1}+\theta_{C1}+\theta_{C2}=-\frac{ql^2}{24EI}(12a+5l)$$

由于截面 C 的转动，使截面 A 有一向上挠度，为：

$$y_{A2} = \left|\theta_{C1} + \theta_{C2}\right| a = \frac{5qal^2}{24EI}$$

因此：$y_A = y_{A1} + y_{A2} = \dfrac{qal^2}{24EI}(6a + 5l)$

8.15 一直角拐如题图 8.15 所示。AB 段横截面为圆形，BC 段为矩形；A 端固定，B 端为滑动轴承，C 端的作用力 P=60N；已知材料的 E=210GPa，G=80GPa。试求 C 端的挠度。



题图 8.15

解：用叠加法，首先 P 在 C 点引起的直接挠度由表查得：

$$y_{C1} == -\frac{Pl_{BC}^2}{3EI}$$

$$\because I = I_Z = -\frac{5 \times 10^3}{12} = \frac{1250}{3} mm^4$$

$$\therefore y_{C1} = -\frac{60 \times 300^3}{3 \times 210000 \times \dfrac{1250}{3}} = -6.17\ mm$$

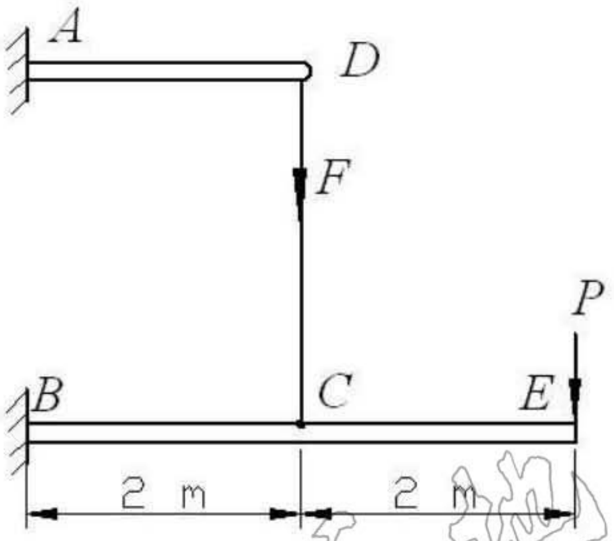
然后 P 在 B 点的等效转矩下引起 AB 杆发生扭角为：

$$\varphi = \frac{T_B l_{AB}}{GI_p} = \frac{Pl_{BC} l_{AB}}{G\frac{\pi D^3}{32}} = 7.16 \quad rad$$

所以,C 点的总挠度为

$$y_C = y_{C1} - \varphi \ l_{BC} = -8.32\,mm$$

8.19 如题图 8.19 所示悬臂梁 *AD* 和 *BE* 的抗弯刚度均为 $EI=24*10^6\text{Nm}^2$，由钢杆 CD 相连接。CD 杆的 l=5m，A=3*20^{-4}，E=200GPa。若 P = 50kN，试求悬臂梁 AD 在 D 点的挠度。



题图 8.19

解：设 CD 杆上的轴力为 F，则由 F 引起 C 和 D 点的挠度分别为：

$$y_D = -\frac{Fl_{AD}^3}{3EI} \quad (1)$$

$$y_{C1} = \frac{Fl_{BC}^3}{3EI} \quad (2)$$

由 P 引起 D 点的挠度为：

$$y_{C2} = -\frac{Pl_{BC}^2(3\times l_{BE} - l_{BC})}{6EI} \quad (3)$$

CD 杆的伸长为：

$$\Delta l_{CD} = \frac{Fl_{CD}}{EA} \qquad (4)$$

几何相容关系为：

$$\Delta l_{CD} = y_{C2} + y_{C1} - y_D \qquad (5)$$

将式（1）—（4）式代入式（5）得：

$$\frac{Fl_{CD}}{EA} = -\frac{Pl_{BC}^2(3\times l_{BE} - l_{BC})}{6EI} + \frac{Fl_{BC}^3}{3EI} + \frac{Fl_{AD}^3}{3EI}$$

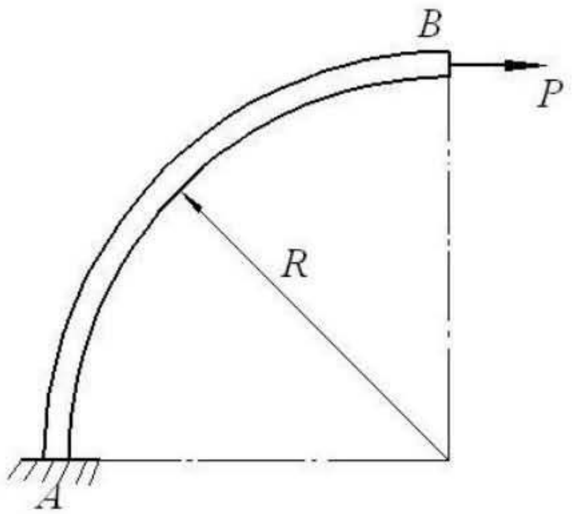
$$\because l_{BC} = l_{AD} = \frac{1}{2} l_{BE}$$

$$\therefore F = \frac{-\dfrac{5Pl_{BC}^2}{6EI}}{\dfrac{l_{CD}}{EA} - \dfrac{2l_{BC}^2}{3EI}} = \frac{-\dfrac{5\times 2^3 P}{6\times 24\times 10^6}}{\dfrac{5}{3\times 10^{-4}\times 2\times 10^9} - \dfrac{2\times 2^3}{3\times 24\times 10^6}} = \frac{P}{11}$$

因此：

$$y_D = -\frac{Fl_{AD}^3}{3EI} = -\frac{Pl_{AD}^3}{33EI} = \frac{50\times 10^3\times 2^3}{33\times 24\times 10^6} = -0.0505\ m = 50.5mm$$

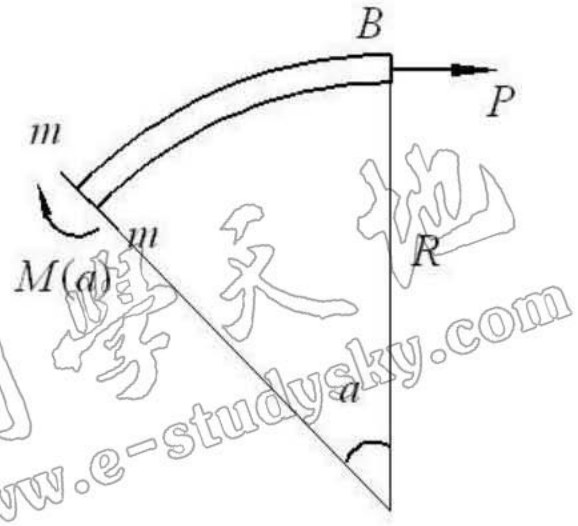
8.21 题图 8.21 所示四分之一圆环，其平均半径为 R，抗弯刚度为 EI。试用用莫尔定理求截面 B 的垂直位移与水平位移。



题图 8.21

解：

（1）求弯矩方程



在四分之一圆环上取一截面 m-m，求截面上的弯矩方程。

在外力作用下：$M(\alpha) = -PR(1 - Cos\ \alpha)$

水平单位力作用下：$\overline{M}_1(\alpha) = -R(1 - Cos\ \alpha)$

水平单位力作用下：$\overline{M}_2(\alpha) = -R\ Sin\ \alpha$

（2）用莫尔积分求位移

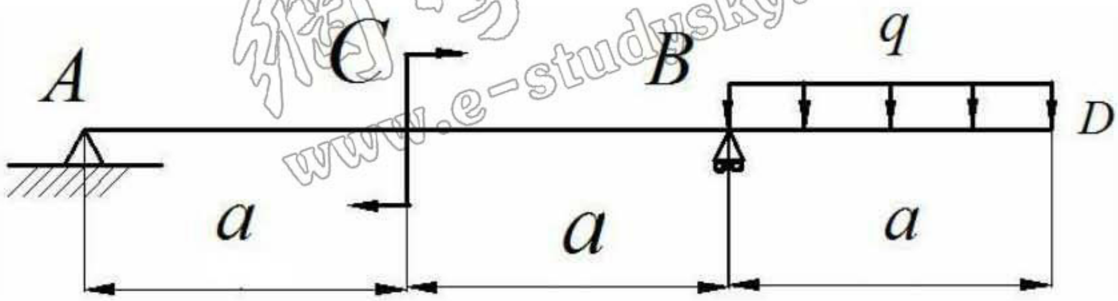
水平位移：

$$x_B = \int_0^l \frac{M(\alpha)\overline{M}_1(\alpha)}{EI} dl = \frac{PR^3}{EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - Cos\ \alpha)^2 d\alpha = 0.356\frac{PR^3}{EI} \text{(向右)}$$

垂直位移:

$$y_B = \int_0^l \frac{M(\alpha)\overline{M}_2(\alpha)}{EI} dl = \frac{PR^3}{EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - Cos\ \alpha)Sin\ \alpha d\alpha = \frac{PR^3}{2EI} \quad \text{(向下)}$$

8.23 外伸梁受力作用如题图 8.23 所示，梁的抗弯刚度为 EI,使用图形互乘法计算外伸端 D 的挠度。



题图 8.23

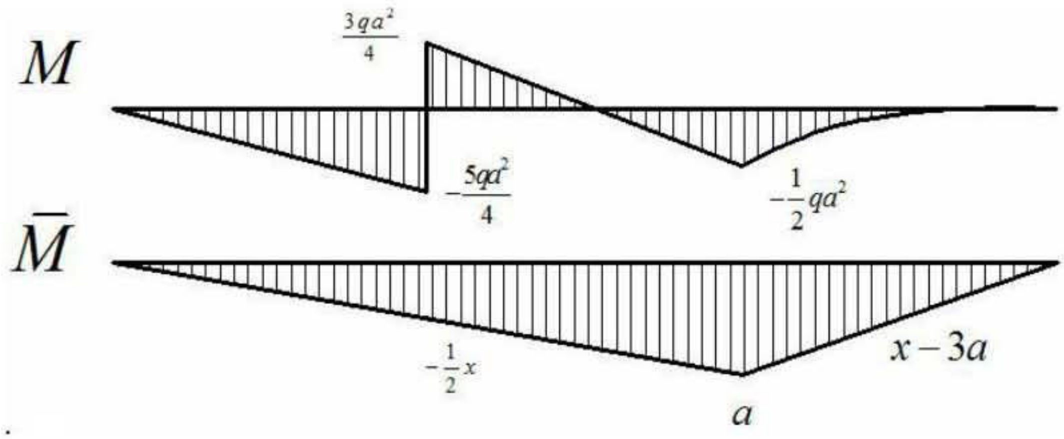
解:

（1）求支座反力

$$\left.\begin{cases} R_A + R_B = qa, \\ \Sigma M(B) = 2aR_A + 2qa^2 + qa\dfrac{a}{2} = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow R_A = -\frac{5}{4}qa, R_B = \frac{9}{4}qa$$

（2）画弯矩图

实际载荷和在 D 点单位力的弯矩图如下所示:



（3）图形互乘法

$$\overline{M}_{c1}=\frac{a}{3},\omega_1=\frac{1}{2}a*\frac{5}{4}qa^2=\frac{5}{8}qa^3$$

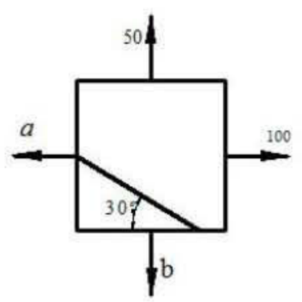
$$\overline{M}_{c2}=\frac{3a}{5},\omega_2=\frac{1}{2}\frac{3a}{5}\frac{3}{4}qa^2=\frac{9}{40}qa^3$$

$$\overline{M}_{C3}=\frac{14}{15}a,\omega_3=\frac{1}{2}\frac{2a}{5}\frac{1}{2}qa^2=\frac{1}{10}qa^3$$

$$\overline{M}_{C4}=\frac{3a}{4},\omega_4=\frac{1}{3}a\frac{1}{2}qa^2=\frac{1}{6}qa^3$$

$$\therefore\ y_D=\frac{1}{EI}\left(\frac{a}{3}\frac{5qa^3}{8}-\frac{3a}{5}\frac{9}{40}qa^3+\frac{3a}{4}\frac{1}{6}qa^3\right)=\frac{7qa^4}{24EI}$$

9.7 在题图 9.7 所示各单元中，使用解析法和图解法求斜截面 ab 上的应力，应力单位为 MPa。



（C）

解：如图所示，$\begin{matrix}\sigma_x = 100MPa, \sigma_y = 50MPa \\ \tau_{xy} = 0, \alpha = 60^o\end{matrix}$

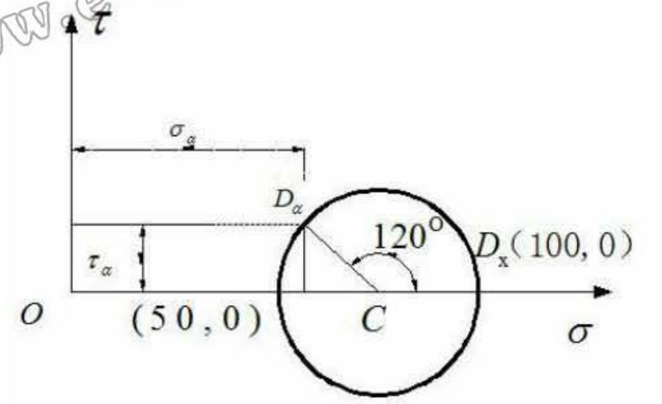
（1）解析法

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha$$
$$= (\frac{100+50}{2} + \frac{100-50}{2}\cos 120^o - 0)MPa = 62.5MPa$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha = (\frac{100-50}{2}\sin 120^o + 0)MPa$$
$$= 21.7MPa$$

（2）图解法

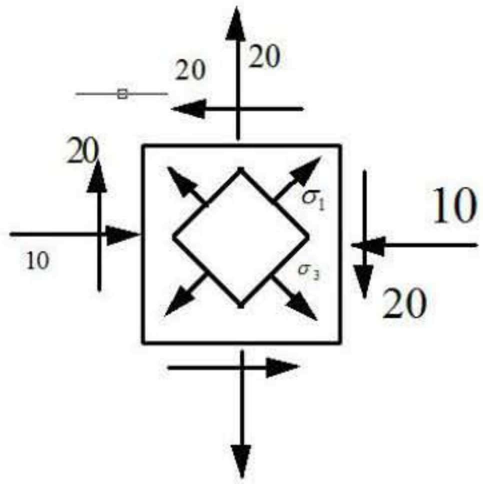
作应力圆如下图所示。从图中可量的D_α点的坐标，此坐标便是σ_α和τ_α的数值。



9.8 已知如题图 9.8 所示各单元的应力状态（应力单位为 MPa)。试求

（1）主应力之值及其方向，并画在单元体上；

（2）最大剪应力之值。



(b)

解:

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{\max}\\ \sigma_{\min}\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}{}^2}$$

$$= \frac{-10+20}{2} \pm \sqrt{(\frac{-10-20}{2})^2 + 20^2}$$

$$= \begin{cases} 30 \\ -20 \end{cases}$$

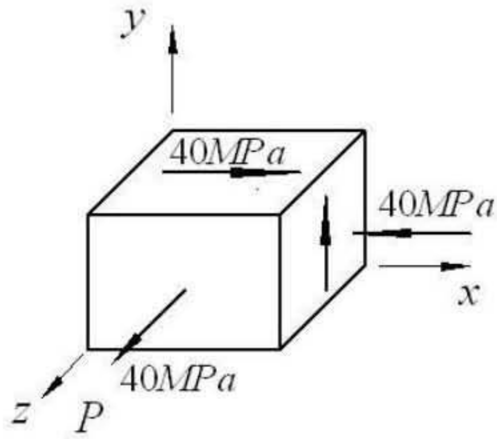
所以$\sigma_1 = 30MPa, \sigma_2 = 0$，$\sigma_3 = -20MPa$，方向如上图所示。

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2*20}{-10-20} = \frac{4}{3}$$

$$2\alpha = \arctan\frac{4}{3}$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{30+20}{2} = 25MPa$$

9.11 钢制受力构件，其危险点应力状态如题图 9.11 所示，已知 $[\sigma]$=160MPa，试用第三强度理论校核其强度。



如题图 9.11

解：

$$\sigma_x = -40MPa, \tau_{xy} = -40MPa$$

$$\sigma_z = 40MPa$$

由图可知，σ_z 是主应力（剪应力为 0）

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{\max} \\ \sigma_{\min}\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

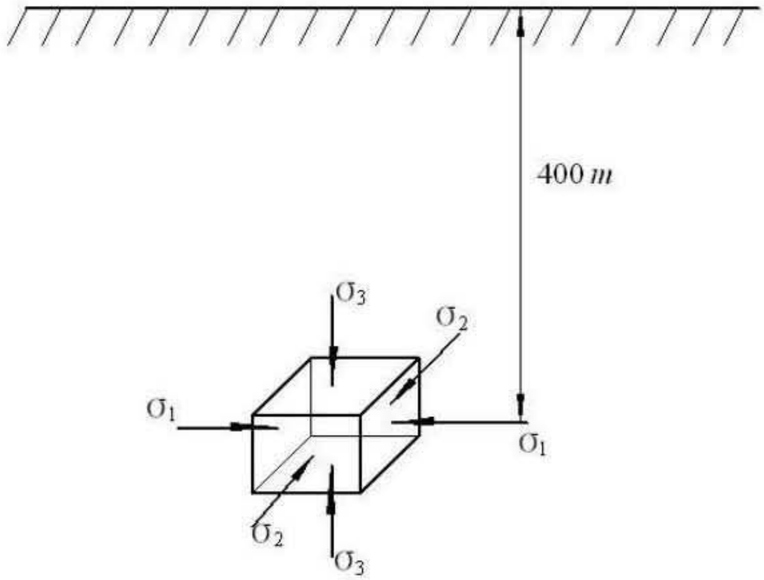
$$= \frac{-40+0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-40-0}{2}\right)^2 + 40^2}$$

$$= \begin{cases} 24.72MPa \\ -64.72MPa \end{cases}$$

所以， $\sigma_1 = 40MPa$， $\sigma_2 = 24.72MPa, \sigma_3 = -64.72MPa$

按照第三强度理论 $\sigma_1 - \sigma_3 = 104.72MPa \le 160MPa$ 合格。

9.14 设地层为石灰岩，如题图 9.14 所示，泊松比μ =0.2，单位体积重γ =25kN/m^3。试计算离地面 400m 深处的主应力。



解:

$$\sigma_3 = -\gamma(kN/m^3)\times 400(m) = -1.0\times 10^7(N/m^2) = -10(MPa)$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 \qquad (1)$$

由于单元体在地下某平面的四周受到均匀压力，所以，

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$$

因此：

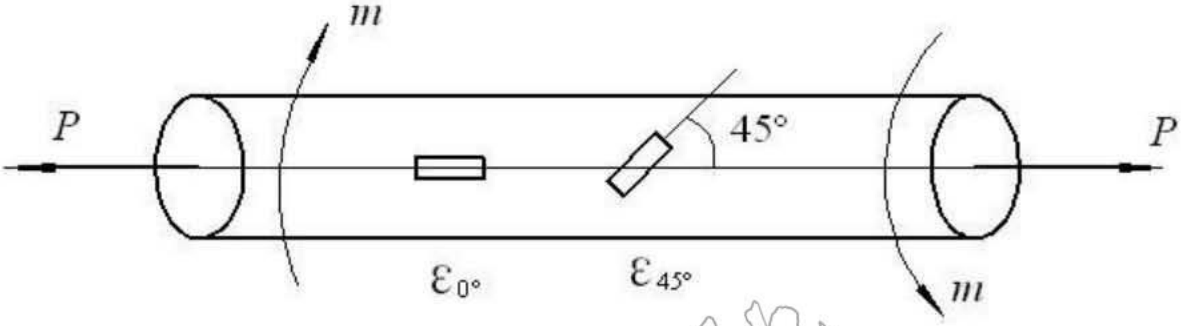
$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = 0 \qquad (2)$$

由式（1）和（2）解得，

$$\sigma_1 = \frac{\mu\sigma_3}{1-\mu} = \frac{0.2\times(-10)}{1-0.2} = -2.5MPa$$

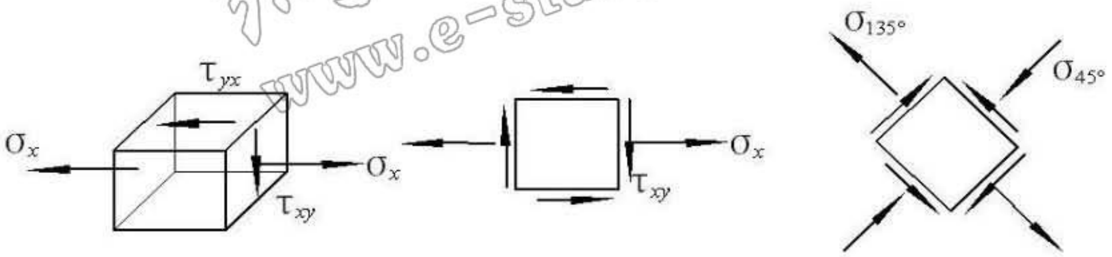
9.17 已知圆直径 d =10cm，受力如题图 9.17 所示，今测得圆轴表面的

轴向应变$\varepsilon_0 = 3\times10^{-4}$，与轴线成$45^{\circ}$方向的应变$\varepsilon_{45} = -1.375\times10^{-4}$，圆轴材料$E = 200GPa$，$\mu$=0.25，许用应力，$[\sigma] = 120GPa$,试用第三强度理论校核轴的强度。



解:

由于是拉伸和扭转的组合变形，横截面上仅有正应力和剪应力。如下图所示



(a)　　　　(b)　　　　(c)

（1）求正应力

在轴向方向放置的单元体上（上图 b）,只有 x 方向上有正应力，

由广义胡克定理:

$$\varepsilon_{0^0} = \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

解得：$\sigma_x = E\varepsilon_{0^0} = 2\times10^5\times3\times10^{-4} = 60\quad MPa$

（2）求剪应力

将单元体旋转 45^0，如上图（c）所示，由斜截面正应力计算公式：

$$\sigma_\alpha = \sigma_x Cos^2\alpha + \sigma_y Sin^2\alpha - 2\tau_{xy} Sin\alpha Cos\alpha$$

有：

$$\sigma_{45^0} = \frac{\sigma_x}{2} - \tau_{xy}$$

$$\sigma_{135^0} = \frac{\sigma_x}{2} + \tau_{xy}$$

由广义胡克定理：

$$\varepsilon_{45^0} = \frac{1}{E}[\sigma_{45^0} - \mu\sigma_{135^0}] = \frac{1}{E}[\frac{1}{2}(1-\mu)\sigma_x - (1+\mu)\tau_{xy}]$$

解得：

$$\tau_{xy} = \frac{1}{(1+\mu)}[-E\varepsilon_{45^0} + \frac{1}{2}(1-\mu)\sigma_x]$$

$$= \frac{1}{(1+2.5)}[-2\times10^5\times(-1.375\times10^{-4}) + \frac{1}{2}(1-0.25)\times60]$$

$$= 40 \quad MPa$$

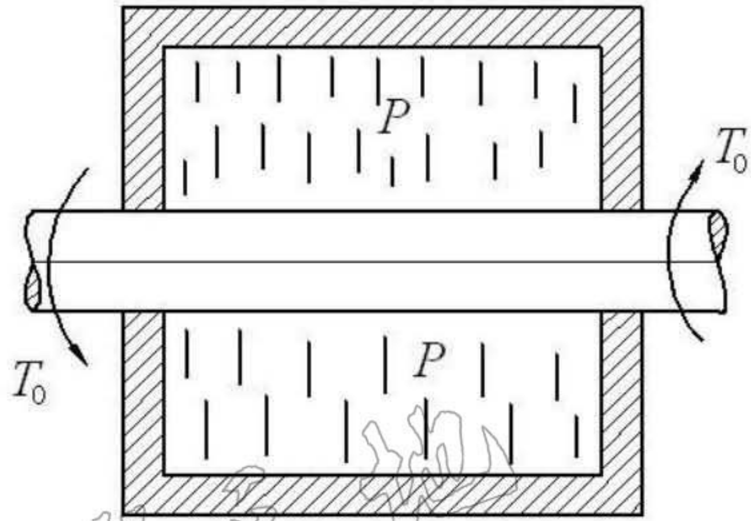
（3）用第三强度理论校核强度

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{60^2 + 4\times40^2} = 100\ MPa < [\sigma] = 120\ MPa$$

强度满足要求。

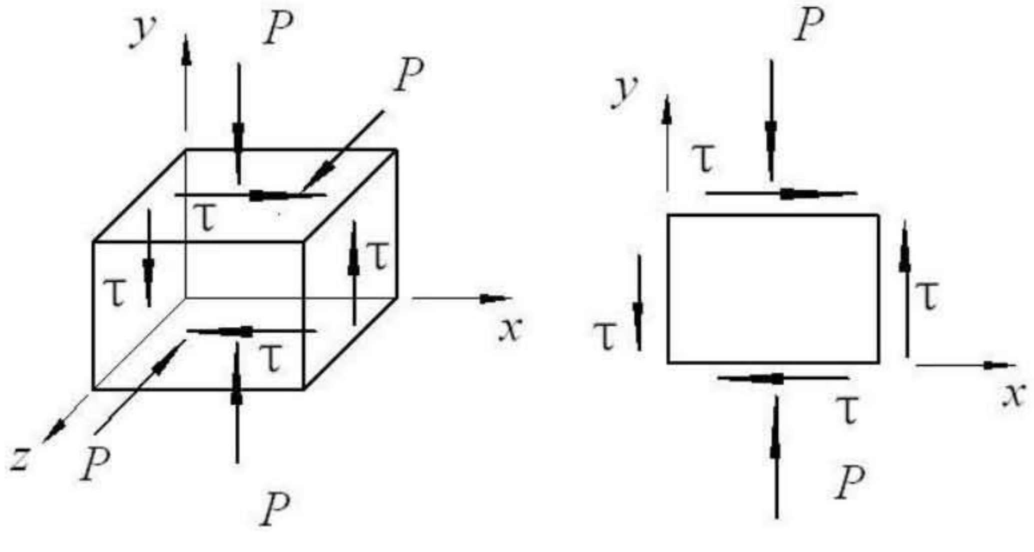
9.21 直径 $d = 10$ mm 的柱塞通过密闭的高压容器（题图 9.21），并承

受扭矩 $T_0 = 80$ N.m，容器内压 $p = 500$ MPa，其材料的拉伸和压缩强度极限为$\sigma_{bt} = 2100$ MPa，$\sigma_{bc} = 5120$ MPa。试按莫尔强度理论计算危险点处的相当应力。



题图 9.21

解：由于柱塞处在压力容器中，径向受到压力 P，所以，柱塞上某一点的应力状态如下图所示，



$$W_{\rho} = \frac{\pi}{16} d^{3}$$

$$\tau_{\max} = \frac{T_0}{W_{\rho}} = \frac{80 \times 10^{3}}{\frac{3.14 \times 10^{3}}{16}} = 407.6 MPa$$

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} + \sqrt{(\frac{\sigma_y - \sigma_z}{2})^2 + \tau_{yz}^2}$$

$$= \frac{-P}{2} + \sqrt{(\frac{-P}{2})^2 + \tau_{yz}^2} = 228.2 MPa$$

$$\sigma_{\min} = \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} - \sqrt{(\frac{\sigma_y - \sigma_z}{2})^2 + \tau_{yz}^2}$$

$$= \frac{-P}{2} - \sqrt{(\frac{-P}{2})^2 + \tau_{yz}^2} = -728.2 MPa$$

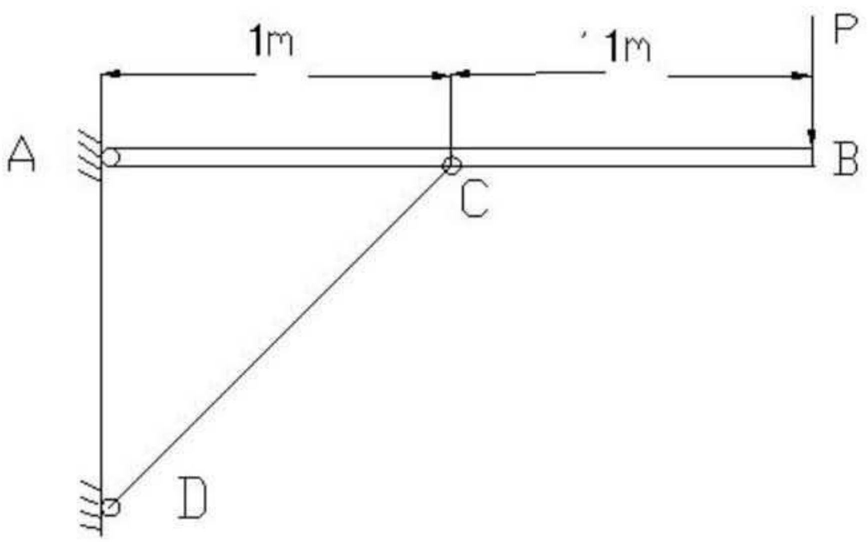
所以主应力为:

$\sigma_1 = 228.2\ MPa$; $\sigma_2 = -500\ MPa$; $\sigma_3 = -728.2\ MPa$

由莫尔强度理论得:

$$\sigma_{Mr} = \sigma_1 - \frac{[\sigma_{bt}]}{[\sigma_{bc}]}\sigma_3 = 228.2 - \frac{2100}{5120}(-728.2) = 526.9\ MPa$$

10.9 题图 10.9 所示 AB 横梁由 No.14 工字钢制成。已知 P=12kN，材料[σ]=160Mpa。试校核该横梁的强度。



题图 10.9

解:

对于 No.14 工字钢，查表有：$W=102\,\mathrm{cm}^3$，$A=21.5\,\mathrm{cm}^2$

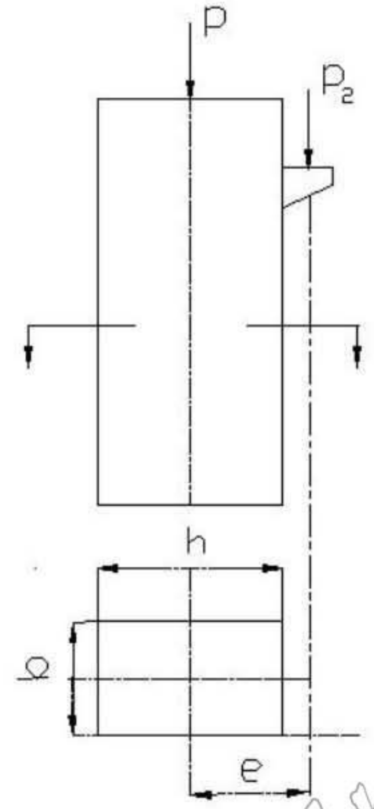
由图易知：$M_{\max}=M=1.2\times10^4\,\mathrm{N}\times1\mathrm{m}=1.2\times10^4\,N\cdot\mathrm{m}$

同时杆 DC 对 AC 段产生拉应力为 2P

$$\therefore \sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{W}+\frac{2P}{A}=\frac{1.2\mathrm{k}N\cdot\mathrm{m}}{102\mathrm{cm}^3}+\frac{2.4\mathrm{k}N}{21.5\mathrm{cm}^2}=129M\mathrm{pa}\le160\mathrm{Mpa}=[\sigma]$$

故：满足强度要求

10.10 题图 10.10 所示短柱子，已知 P_1=100kN，P_2=45kN，b=180mm，h=300mm，试问 P_2 偏心距为多少时截面上仍不会产生拉应力？



题图 10.10

解：设偏心距恰好为 e 时，不产生拉应力，那么由 P_2 产生的弯曲力

$M = P_2 \cdot e$

则产生的弯曲拉应力：

$\sigma_1 = \dfrac{M}{W}$　　(其中 $w = \dfrac{bh^2}{6} = 2.7 \times 10^{-3} m^3$)

由 P 和 P_2 产生的压应力：

$$\sigma_2 = \frac{P + P_2}{A} = \frac{1.45 \times 10^5 N}{5.4 \times 10^{-2} m^2} = 2.68 \times 10^6 N / m$$

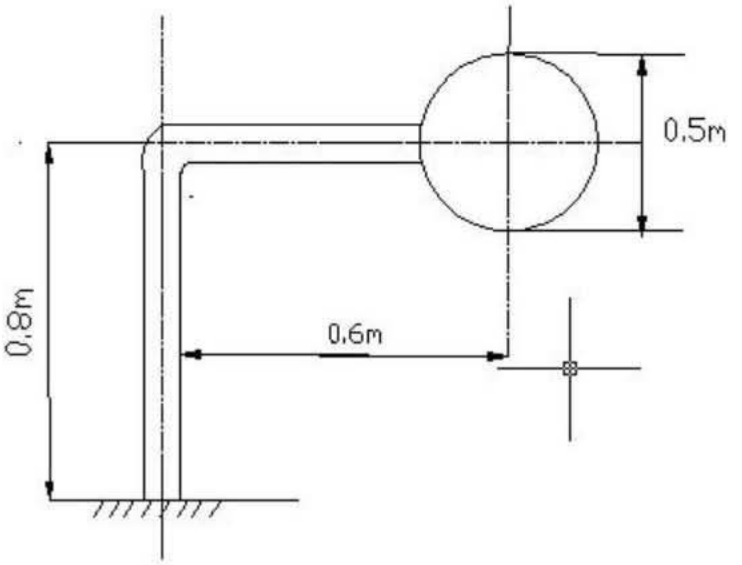
当 $\sigma_1 = \sigma_2$ 时，将不会产生拉应力。即

$$\frac{P_2 \cdot e}{W} = \frac{P + P_2}{A}$$

$\therefore\quad e=\dfrac{W}{P_2}\cdot\sigma_2=161\text{mm}$

故偏心距 e 为 161mm 时将不产生拉应力

10.16 铁道路标圆信号板，装在外径 D=60mm 的空心圆柱上（如题图 10.16 所示），信号板所受的最大风载 p=2kN/m^2，材料的许用应力 [σ]=60Mpa，试按第三强度理论选定空心圆柱的厚度。



题图 10.16

解：本结构属于弯曲与扭转的组合。易知只需判断空心圆柱与地面接触的圆柱是否满足第三强度理论。

设信号盘面积为 A，水平空心圆柱长为 L_1，竖直空心圆柱长为 L_2

在空心圆柱与地面接触处：

扭矩：$T=P\cdot A\cdot L_1=2\times10^3\text{N}/\text{m}\times\pi\left(\dfrac{0.5}{2}\right)^2\text{m}^2\times0.6\text{m}=75\pi\text{N}\cdot\text{m}$

弯曲：$M=P\cdot A\cdot L_2=2\times10^3\text{N}/\text{m}^2\times\pi\left(\dfrac{0.5}{2}\right)^2\text{m}^2\times0.8\text{m}=100\pi\ \ \text{N}\cdot\text{m}$

按照第三强度理论：

$$\frac{1}{W}\sqrt{M^2+T^2}=[\sigma] \quad (\text{其中} W=\frac{\pi D^3}{32}\left(1-\alpha^4\right) \text{和} \alpha=\frac{D-2t}{D})$$

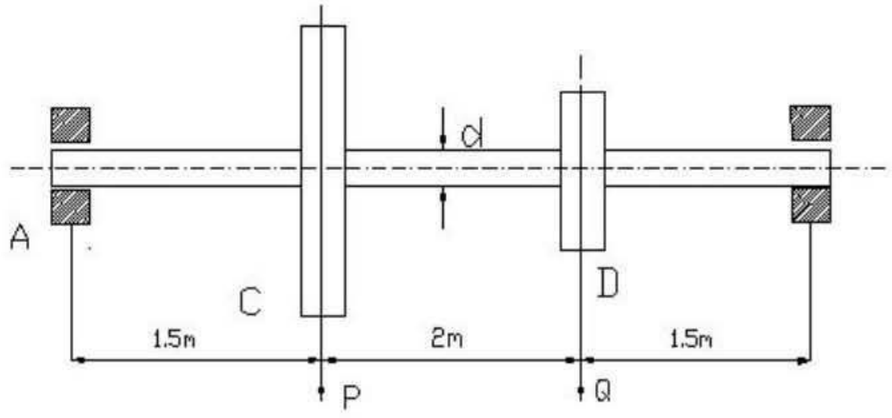
故有：$\alpha \le \sqrt[4]{1-\frac{32\sqrt{M^2+T^2}}{\pi D^3[\sigma]}}$

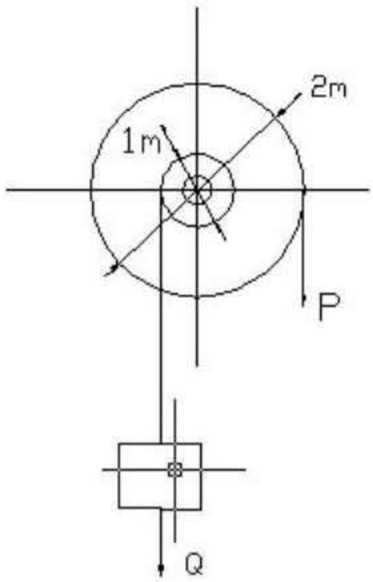
即：$t \ge \left(1-\sqrt[4]{1-\frac{32\sqrt{M^2+T^2}}{\pi D^3[\sigma]}}\right)\frac{D}{2}$

代入数据可得：t≥2.65mm

故选定空心圆柱的厚度为 2.65mm

10.20 轴 AB 上装有两个轮子如图 10.20 所示，作用有 P=3kN 和 Q，处于平衡状态，已知轴的$[\sigma]$=60Mpa，试按第三强度理论选择轴的直径。





题图 10.20

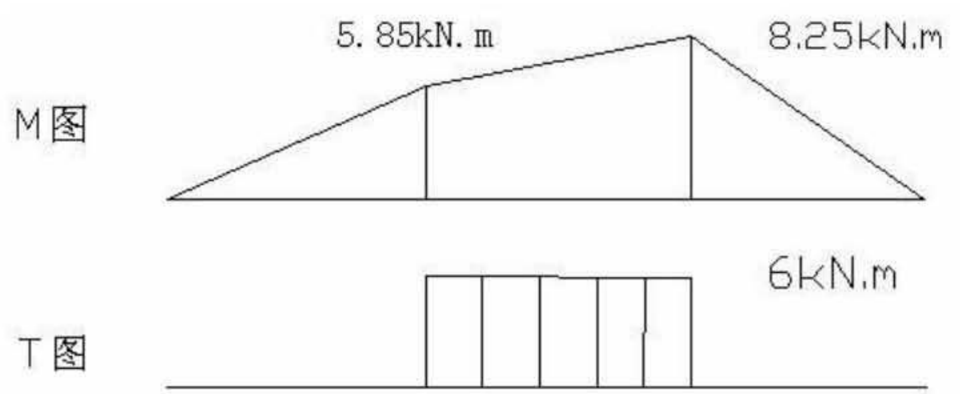
解：由于轴在力 P 和力 Q 的作用下处于平衡状态。则有：Q=2P=6kN

设在 A，B 处的支座反力分别为 RA 和 RB，由平衡条件，有：

$\sum M_B = 0$， $-R_A \times 5 + P \times 3.5 + Q \times 1.5 = 0$，得： $R_A = 3.9kN$

$\sum Y = 0$， $R_A - P - Q + R_B = 0$，得： $R_B = 5.1kN$

分别作出 M 图和 T 图如下图：



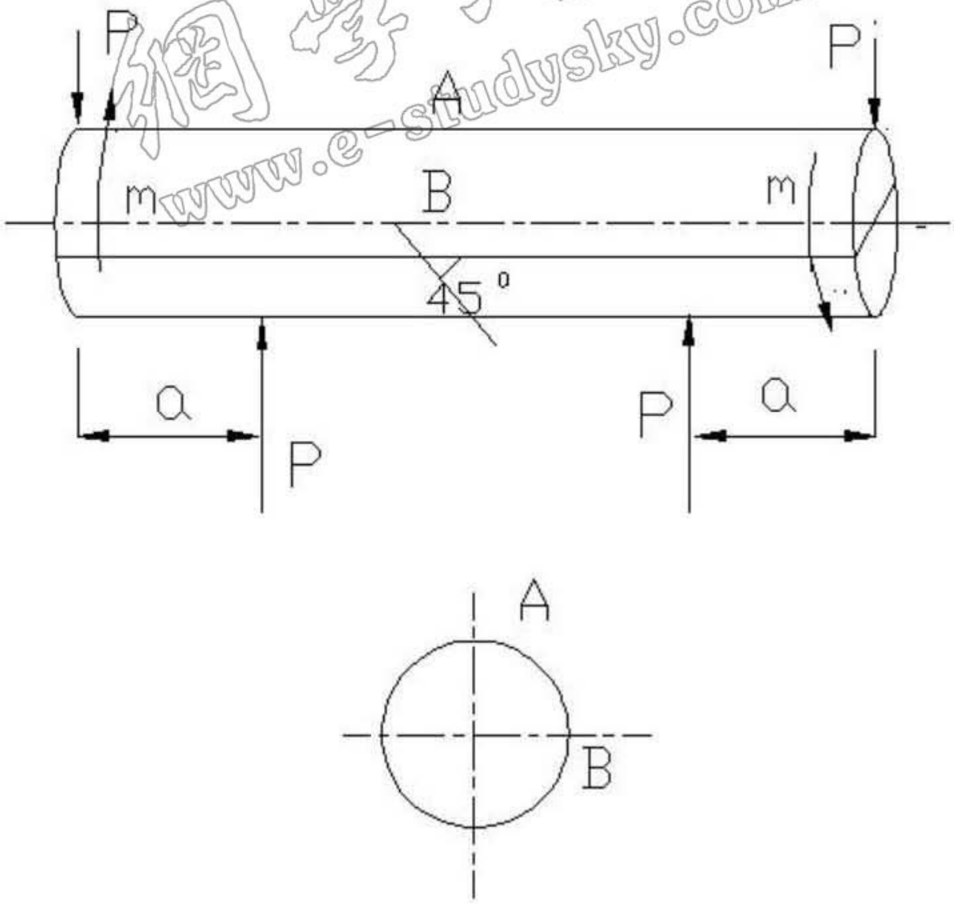
知：M=8.25 $kN \cdot m$； T = 6 $kN \cdot m$

由第三强度理论： $\frac{1}{W}\sqrt{M^2 + T^2} \le [\sigma]$

将$W=\frac{\pi d^3}{32}$代入可得：$d \geq \sqrt[3]{\frac{32\sqrt{M^2+T^2}}{\pi[\sigma]}}$=125.6mm

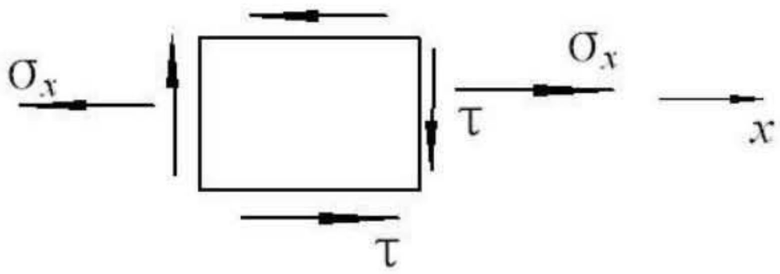
故选择的直径为 126 mm

10.25　题图 10.25 所示圆截面杆受横向力 P 和外力偶矩 m 作用。今测得 A 点轴向应变$\varepsilon_0=4\times10^{-4}$，B 点与母线成$45^\circ$方向应变$\varepsilon_{45^\circ}=3.75\times10^{-4}$。已知杆的抗弯截面模量 W=6000$mm^3$，E=200Gpa，$\mu=0.25$，$[\sigma]$=140Mpa，试按第三强度理论校核杆的强度。



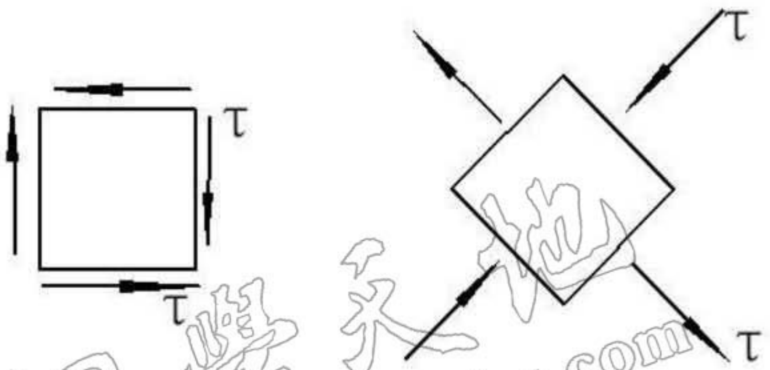
题图 10.25

解：取轴向为 x 轴，A 的应力状态如下图所示，



$$\sigma_x = E\varepsilon_0 = 200\times10^3\times4\times10^{-4} = 80\ MPa$$

B 点是纯剪切状态，其应力状态如下图所示，



由广义胡克定理，有：

$$\varepsilon_{45^0} = \frac{1}{E}[\tau+\mu\tau] = \frac{1+\mu}{E}\tau$$

所以：

$$\tau = \frac{E\varepsilon_{45^0}}{1+\mu} = \frac{200\times10^3\times3.75\times10^{-4}}{1+0.25} = 60\ MPa$$

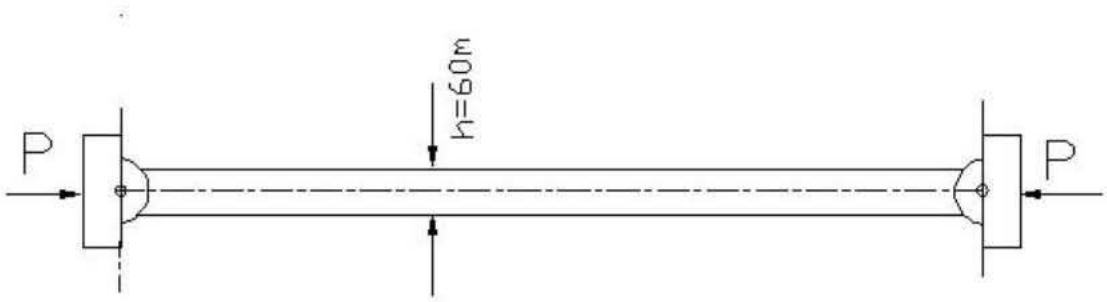
由第三强度理论：

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2+4\tau^2} = \sqrt{80^2+4\times60^2} = 144MPa > [\sigma] = 140MPa$$

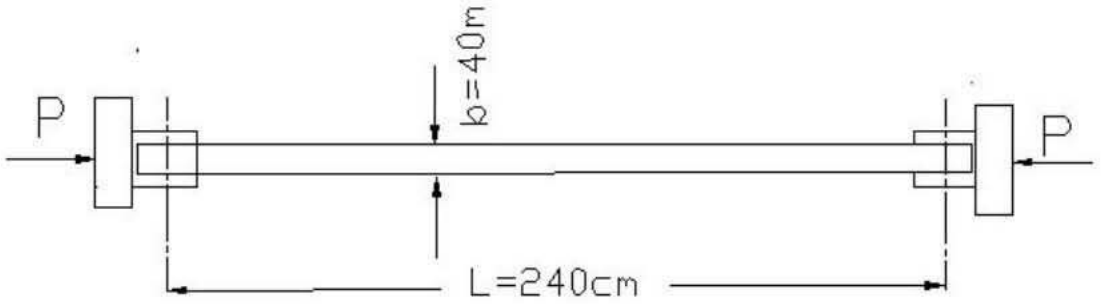
因此，按第三强度理论校核，此杆不满足强度要求

11.10　题图 11.10 所示压杆的材料为 Q235 钢，E=210Gpa，在正视图（a）的平面内，两端为铰支，在俯视图（b）的平面内，两端认为

固定，是求此杆的临界力。



图（a）



图（b）

解：

(a)两端铰支时，故取$\mu=1$

故：$P_{cr_1}=\dfrac{\pi^2 E\cdot I_1}{L^2}$　　其中$I_1=\dfrac{bh^3}{12}=7.2\times10^{-7}m^4$

得：P_{cr_1} =259kN

（b）两端固定时，取μ=0.5

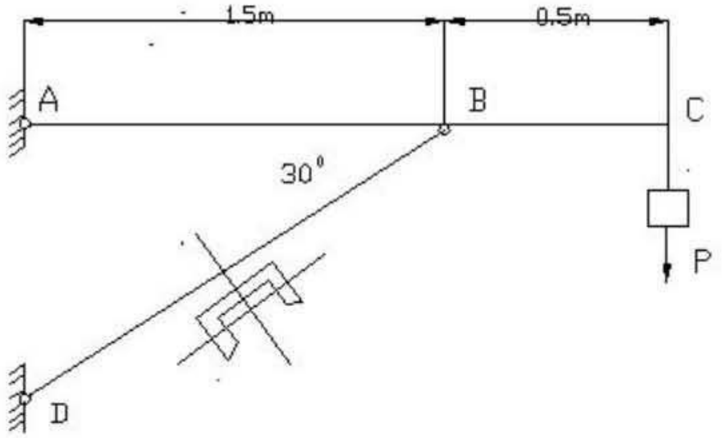
又有：$P_{cr_2}=\dfrac{4\pi E\cdot I_2}{L^2}$　　其中$I_2=\dfrac{hb^3}{12}$=$3.2\times10^{-7}m^4$

得：P_{cr_2} = 460kN

综上此杆的临界力为 259kN

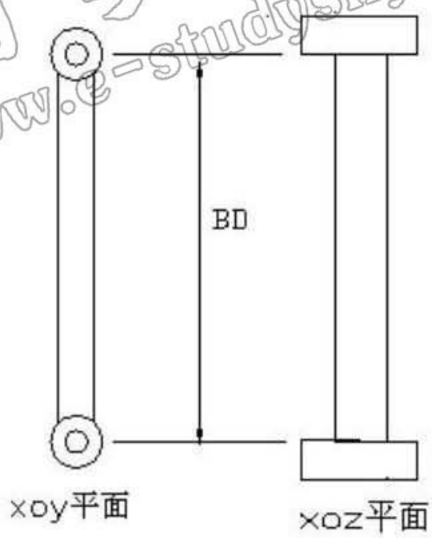
11.15 某厂自制的简易起重机如图 11.15 所示，其压杆 BD 为 20 号槽钢，材料为 Q235 钢。起重机的最大起重量是 P=40kN。若规定的稳

定安全系数为 $n_{st}=5$，试校核 BD 杆的稳定性。



解：1，计算柔度

在 xoy 平面和 xoz 平面压杆的约束情况不同，见下图



（1）在 xoy 平面内，压杆视为两端铰支，故长度系数 $\mu=1$

查表可知：$i_x = 2.09cm$

$$有：\lambda_x = \frac{\mu l}{i_x} = \frac{\frac{1.5}{\cos 30^\circ}}{2.09\times 10^{-2}} = 82.8$$

（2）在 xoz 平面内，压杆视为两端固定，故长度系数μ =0.5

查表知：$i_y = 7.64cm$

有：$\lambda_y = \frac{\mu l}{i_y} = \frac{0.5 \times \sqrt{3}}{7.64 \times 10^{-2}} = 11.4$

故在 xoy 平面内，为中柔度杆，按照直线公式计算临界应力，

查表得：a=304Mpa，b=1.12Mpa。于是

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda = 304Mpa - 1.12Mpa \times 82.8 = 211Mpa$$

在 xoz 平面内，为小柔度杆，有：$\sigma_{cr} = \sigma_s = 235$ Mpa

2，校核稳定性

在 P 的作用下，知杆 BD 受压应力$P_{BD} = \frac{8}{3}P$。查表知横截面积 A=32.83cm

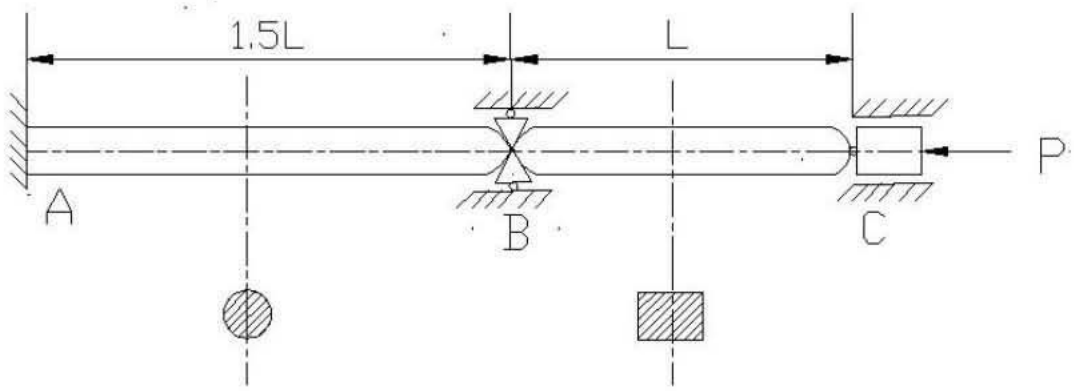
故：$\sigma_{BD} = \frac{P_{BD}}{A} = \frac{\frac{8}{3} \times 4 \times 10^4 N}{32.83 \times 10^{-4} m} = 32.5Mpa$

安全系数：取σ_{cr}=211Mpa

$$n = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma} = 6.5 > 5$$

所以该杆稳定性方面是安全的

11.21　题图 11.21 所示结构，AB 为圆截面，直径 d=80mm；BC 为正方形截面，边长 a=70mm；材料均为 Q235 钢，E=210Gpa，L=3m；稳定安全系数n_{st}=2.5，试求结构的许可压力 P。



解：1，计算柔度

（1）AB 段杆为圆截面，视为一端固定，一端铰支，故取μ =0.7

其中：$i_{z_1}=\sqrt{\dfrac{I_{z_1}}{A}}=\sqrt{\dfrac{\dfrac{\pi d^4}{64}}{\pi\left(\dfrac{d}{2}\right)^2}}=\sqrt{\dfrac{d^2}{16}}=\dfrac{d}{4}$

故：$\lambda_1=\dfrac{\mu l}{i_{z_1}}=\dfrac{0.7\times 4.5}{\dfrac{80\times 10^{-3}}{4}}=157.5$

（2）BC 段杆为正方形截面，视为两端铰支，故取μ =1

其中：$i_{z_2}=\sqrt{\dfrac{I_{z_2}}{A}}=\sqrt{\dfrac{\dfrac{a^4}{12}}{a^2}}=\dfrac{a}{2\sqrt{3}}$

故：$\lambda_2=\dfrac{\mu l}{i_{z_2}}=\dfrac{3}{\dfrac{a}{2\sqrt{3}}}=148$

杆 AB，BC 均为大柔度杆。

（3）取λ =157.5

$\therefore\ \sigma_{cr}=\dfrac{\pi^2 E}{\lambda^2}=83.5Mpa$

又$n_{st}=2.5$知：

$$\sigma<\frac{\sigma_{cr}}{n_{st}}=33.4Mpa$$

那么由$P<\sigma\cdot A$得：P=168kN

所以该杆就稳定性方面的许可应力为 168kN