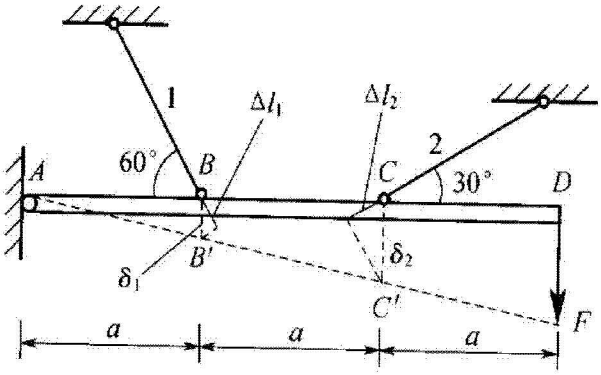
拉压静不定

如图所示结构由刚性横梁 *AD*、弹性杆 1 和 2 组成，梁的一端作用铅垂载荷 *F*，两弹性杆均长 *l*，拉压刚度为 *EA*，试求 *D* 点的垂直位移。（图上有提示）



解：在力 F 作用下，刚性梁 AD 发生微小转动，设点 B 和 C 的铅垂位移分别为δ_1和δ_2，则

$$\delta_1 = \delta_2$$

设杆1和杆2的伸长量分别为$\triangle l_1$和$\triangle l_2$，根据节点 B 和 C 处的变形关系，有

$$\Delta l_1 = \delta_1 \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}\delta_1$$

$$\Delta l_2 = \delta_2 \cos 60° = \frac{1}{2}\delta_2$$

则$\triangle l_1$和$\triangle l_2$的关系为 $\Delta l_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\Delta l_2$ （a）

由平衡条件，对 A 点取矩得 $F_{N1}\sin 60° \bullet a + F_{N2}\sin 30° \bullet 2a = F \bullet 3a$

即 $EA\frac{\Delta l_1}{l}\bullet\frac{\sqrt{3}}{2} + EA\frac{\Delta l_2}{l} = F\bullet 3$ （b）

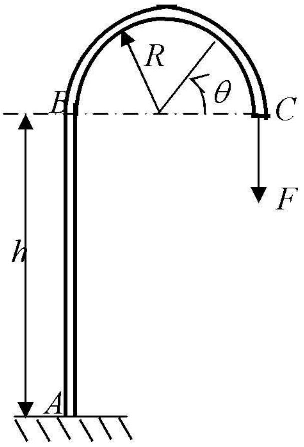
联立方程（a）和（b），解得 $\Delta l_2 = \frac{12Fl}{7EA}$

D 点位移为

$$\Delta_D = \frac{3a}{2a}\delta_2 = \frac{3}{2}\bullet 2\Delta l_2 = \frac{36Fl}{7EA}$$

一．摩尔积分　单位载荷法

直径 $d = 80\text{mm}$ 的圆截面钢杆制成的钢架，在自由端 C 处受到集中力 $F = 1\text{kN}$ 作用，钢杆的弹性模量为 $E = 200\text{GPa}$，$R = 0.8\text{m}$，$h = 2.4\text{m}$，不计剪力和轴力的影响，试求自由端 c 处的水平位移。（提示：可采用莫尔积分方法求解）



题图

解：（1）求梁的内力方程

半圆弧 BC 段： $F_N(\theta)=F\cos\theta$ $(0\le\theta\le\pi)$

$M(\theta)=FR(1-\cos\theta)$ $(0\le\theta\le\pi)$

直杆 AB 段： $F_N(x)=-F$ $(0\le x\le h)$

$M(x)=2FR$ $(0\le x\le h)$

（2）求自由端的水平位移

在自由端水平方向加单位载荷，如图 (b) 所示，由水平单位载荷产生的轴力和弯矩方程分别为：

半圆弧 BC 段： $\overline{F}_N(\theta)=\sin\theta$ $(0\le\theta\le\pi)$

$\overline{M}(\theta)=-R\sin\theta$ $(0\le\theta\le\pi)$

直杆 AB 段： $\overline{F}_N(x)=0$ $(0\le x\le h)$

$\overline{M}(x)=x$ $(0\le x\le h)$

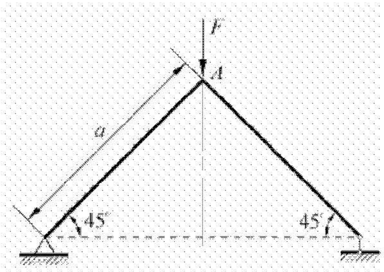
由莫尔积分，可得自由端 c 处的水平位移为：

$$\delta_{Cx}=\sum\int_l\frac{F_N(x)\overline{F}_N(x)}{EA}dx+\sum\int_l\frac{M(x)\overline{M}(x)}{EI}dx$$
$$=\int_0^{\pi}\frac{F\cos\theta\sin\theta}{EA}dx+\int_0^{\pi}\frac{FR^3}{EI}(1-\cos\theta)(-\sin\theta)d\theta+\int_0^{h}\frac{2FR}{EI}xdx$$
$$=0-\frac{2FR^3}{EI}+\frac{FRh^2}{EI}=8.91\text{mm}$$

12-21 图示圆截面刚架，横截面的直径为 d，且 $a=10d$。试按下述原则计算节点 A 的铅垂位移 Δ_A，并进行比较。

（1）同时考虑弯矩与轴力的作用；

（2）只考虑弯矩的作用。



题 12-21 图

解：令 $F=1$ 即为求 Δ_A 的单位状态，坐标 x 自下顺轴线向上取。

（1）考虑 M 与 F_N 同时作用

$$\overline{M}(x)=\frac{\sqrt{2}}{4}x,\qquad M(x)=\frac{\sqrt{2}}{4}Fx$$

$$\overline{F}_N=\frac{\sqrt{2}}{4},\qquad F_N=\frac{\sqrt{2}}{4}F$$

利用对称性，可得

$$\Delta_A=\frac{2}{EI}\int_0^a\left(\frac{\sqrt{2}}{4}x\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{4}Fx\right)\mathrm{d}x+\frac{2}{EA}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{4}F\right)a=\frac{Fa^3}{12EI}+\frac{Fa}{4EA}=\frac{16030F}{3\pi Ed}\quad(\downarrow)$$

（2）只考虑 M 作用

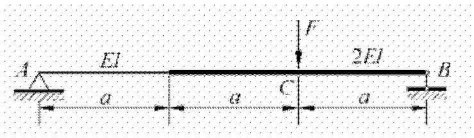
此时，有

$$\Delta_A=\frac{Fa^3}{12EI}=\frac{16000F}{3\pi Ed}\quad(\downarrow)$$

比较可知，后者只比前者小 0.2%。

--下 题有问题，M（x1，2，3）？

12-15 图示阶梯形简支梁，承受载荷 F 作用。试用单位载荷法计算横截面 C 的挠度 Δ_C 与横截面 A 的转角 θ_A 。



题 12-15 图

解：设两种单位状态如下：

1．令 $F=1$；

2．在截面 A 处假想加一顺钟向力偶矩 $M_A=1$，坐标示如图 12-15。

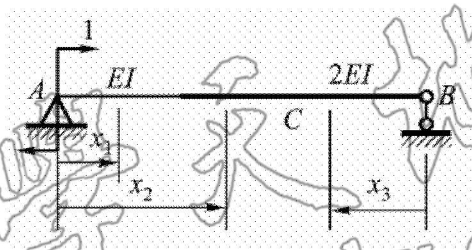


图 12-15

三种弯矩方程为

$$\overline{M}(x_1)=\frac{1}{3}x_1,\quad \widetilde{M}(x_1)=1-\frac{1}{3a}x_1,\quad M(x_1)=\frac{F}{3}x_1$$

$$\overline{M}(x_2)=\frac{1}{3}x_2,\quad \widetilde{M}(x_2)=1-\frac{1}{3a}x_2,\quad M(x_2)=\frac{F}{3}x_2$$

$$\overline{M}(x_3)=\frac{2}{3}x_3,\quad \widetilde{M}(x_3)=\frac{1}{3a}x_3,\quad M(x_3)=\frac{2F}{3}x_3$$

依据单位载荷法，有

$$\Delta_C=\frac{1}{EI}\int_0^a(\frac{1}{3}x_1)(\frac{F}{3}x_1)\mathrm{d}x_1+\frac{1}{2EI}\int_a^{2a}(\frac{x_2}{3})(\frac{F}{3}x_2)\mathrm{d}x_2+\frac{1}{2EI}\int_0^a(\frac{2}{3}x_3)(\frac{2F}{3}x_3)\mathrm{d}x_3$$
$$=\frac{13Fa^3}{54EI}\quad(\downarrow)$$

及

$$\theta_A=\frac{1}{EI}\int_0^a(1-\frac{x_1}{3a})(\frac{F}{3}x_1)\mathrm{d}x_1+\frac{1}{2EI}\int_a^{2a}(1-\frac{x_2}{3a})(\frac{F}{3}x_2)\mathrm{d}x_2+\frac{1}{2EI}\int_0^a(\frac{x_3}{3a})(\frac{2F}{3}x_3)\mathrm{d}x_3$$

$$=\frac{31Fa^2}{108EI}\quad(↻)$$

二．应力应变分析

图 **2** 所示为一矩形截面铸铁梁，受两个横向力作用。

（1）从梁表面的 A，B，C 三点处取出的单元体上，用箭头表示出各个面上的应力。

（2）定性地绘出A，B，C三点的应力圆。

（3）在各点的单元体上，大致画出主应力单元体图。

（4）试根据第一强度理论，说明（画图表示）梁破坏时裂缝在B，C两点处的走向。

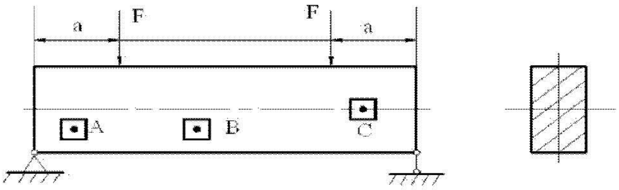


图 2

解：

（1）中间段是纯弯曲，故切应力为零。点C在中性层上，所以正应力为零。单元体受力如图 2.1 所示。

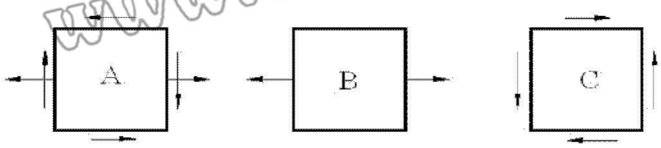


图 2.1

（2）点B应力圆与τ轴相切，点C应力圆以原点为圆心，见图 2.2。

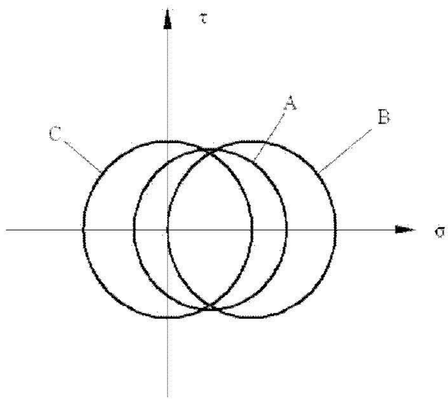


图 2.2

（3）主应力单元体如图 2.3 所示。

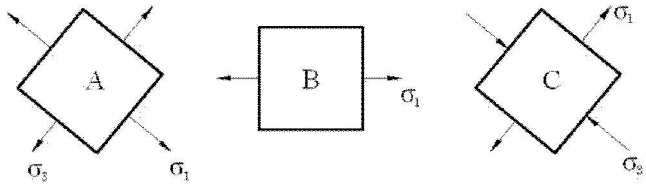


图 2.3

（4）根据第一强度理论，物体是由最大拉应力造成破坏，故裂缝面应垂直于主应力σ_1，如图 2.4 所示。

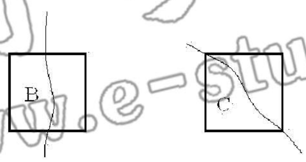
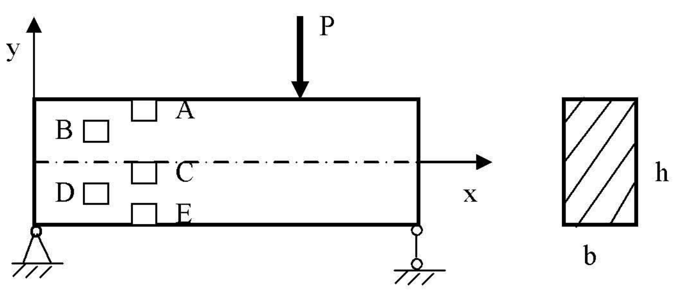


图 2.4

图示矩形截面$b \times h$简支梁在集中载荷 **P** 作用下.

1 在 **y** 方向间距$a = \dfrac{h}{4}$的 **A**、**B**、**C**、**D**、**E** 五点取单元体,定性分析这五点的应力情况， 并指出单元体属于哪种应力状态.**(C** 点位于中性层**)**

2 若测得梁上 **D** 点在 **x** 及 **y** 方向上的正应变为 ε_x=**4.0×10^{-4}** 及 ε_y= **-1.2×10^{-4}.** 已知材料的弹性模量 **E=200GPa,**泊松比 μ **=0.3.**试求 **D** 点 **x** 及 **y** 方向上的正应力.



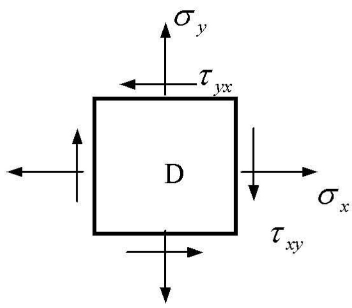
解：1 各点的应力状态[10 分(每个单元体 2 分)]

A、E 点为单向应力状态；C 点为纯剪切应力状态；B、D 点为二向应力状态。

2 求 D 点 x 及 y 方向上的正应力

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x)$$



解得：

$$\sigma_x = 80MPa$$

$$\sigma_y = 0$$

8-21 在构件表面某点 O 处，沿 0°,45° 与 90° 方位，粘贴三个应变片，测得该三方位的正应变分别为 $\varepsilon_{0^\circ}=450\times10^{-6}$，$\varepsilon_{45^\circ}=350\times10^{-6}$ 与 $\varepsilon_{90^\circ}=100\times10^{-6}$，该表面处于平面应力状态，试求该点处的应力 σ_x、σ_y 与 τ_x。已知材料的弹性模量 E= 200GPa，泊松比 μ =0.3。

解：依据平面应变状态任意方位的正应变公式，有

$$\varepsilon_{0^\circ} = \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\cos0^\circ - \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin0^\circ \quad \text{(a)}$$

$$\varepsilon_{45^\circ} = \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\cos90^\circ - \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin90^\circ \quad \text{(b)}$$

$$\varepsilon_{90^\circ} = \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\cos180^\circ - \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin180^\circ \quad \text{(c)}$$

联解方程(a)，(b)和(c)，得

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{0^\circ} = 450\times10^{-6}，\ \varepsilon_y = \varepsilon_{90^\circ} = 100\times10^{-6}$$

$$\gamma_{xy} = \varepsilon_{0^\circ} + \varepsilon_{90^\circ} - 2\varepsilon_{45^\circ} = -150\times10^{-6}$$

根据平面应力状态的广义胡克定律，有

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y)$$

$$= \frac{200\times10^9\ \text{Pa}}{1-0.3^2}\times(450\times10^{-6}+0.3\times100\times10^{-6}) = 1.055\times10^8\ \text{Pa} = 105.5\ \text{MPa}$$

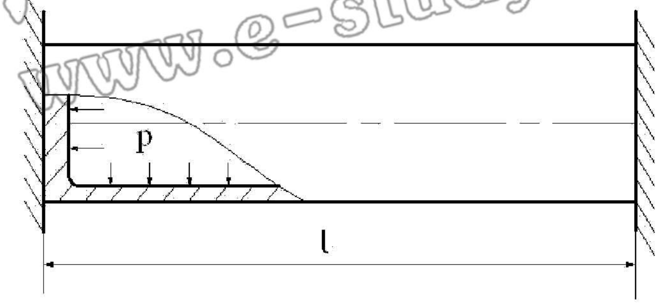
$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x)$$

$$= \frac{200\times10^9\ \text{Pa}}{1-0.3^2}\times(100\times10^{-6}+0.3\times450\times10^{-6}) = 5.16\times10^7\ \text{Pa} = 51.6\ \text{MPa}$$

根据剪切胡克定律，有

$$\tau_x = G\gamma_{xy} = \frac{E\gamma_{xy}}{2(1+\mu)} = \frac{200\times10^9\ \text{Pa}\times(-150\times10^{-6})}{2\times(1+0.3)}$$
$$= -1.154\times10^7\ \text{Pa} = -11.54\ \text{MPa}$$

图所示薄壁圆筒，未受力时两端与固定支座贴合，试问当内压为 p 时筒壁的应力。筒的长度为 l，内径为 D，壁厚为 δ，材料的泊松比为 μ。（$0<\mu<0.5$）



解：首先，解除右端固定支座，并用约束力 F_R 代替其作用。

在内压 p 作用下，筒壁的轴向和周向正应力分别为

$$\sigma_{x,p} = \frac{pD}{4\delta}$$

$$\sigma_{\tau,p} = \frac{pD}{2\delta}$$

根据胡克定律，并考虑到 $0<\mu<0.5$，得到筒体的轴向变形为

$$\Delta l_p = \frac{l}{E}(\sigma_{x,p} - \mu\sigma_{\tau,p}) = \frac{pDl}{4\delta E}(1-2\mu) > 0$$

在约束力 F_R 作用下，筒体的轴向变形则为

$$\Delta l_{F_R} = \frac{(-F_R)l}{EA} = -\frac{F_R l}{E\pi D\delta}$$

利用叠加法，得到筒体的总轴向变形为

$$\Delta l = \Delta l_p + \Delta l_{F_R} = \frac{pDl}{4\delta E}(1-2\mu) - \frac{F_R l}{E\pi D\delta}$$

根据筒的变形协调条件，由上式得补充方程为

$$\Delta l = 0$$

即 $$\frac{pDl}{4\delta E}(1-2\mu) - \frac{F_R l}{E\pi D\delta} = 0$$

由此可得约束力为

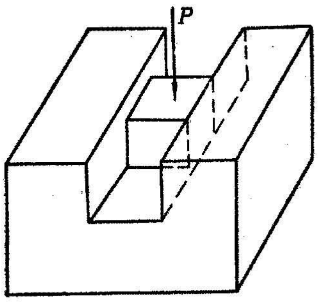
$$F_R = \frac{p\pi D^2(1-2\mu)}{4}$$

由上述分析可以得到筒壁的轴向和周向正应力分别为

$$\sigma_x = \frac{pD}{4\delta} - \frac{F_R}{\pi D\delta} = \frac{\mu pD}{2\delta}$$

$$\sigma_\tau = \frac{pD}{2\delta}$$

在一块厚钢块上挖了一条贯穿的槽，槽的宽度和深度都是**1cm**。在此槽内紧密无隙地嵌入了一铝质立方块，其尺寸是**1×1×1cm**，并受***P***＝**6kN**压缩力如图示，试求铝立方块的三个主应力。假定厚钢块是不变形的，铝的***E*=71GPa**，μ ＝**0.33**。



题 8-10 图

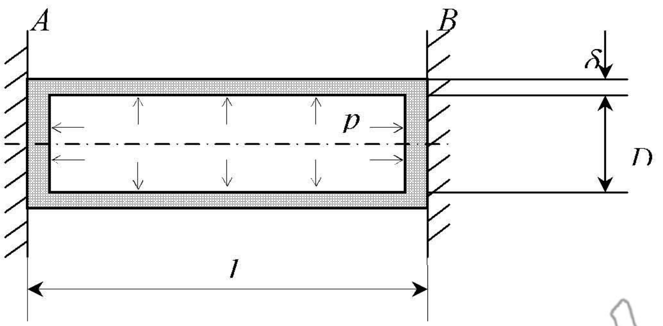
解

$$\sigma_3 = \frac{-6\times1000}{1\times1\times10^{-4}} = -60MPa$$

$$\sigma_1 = 0$$

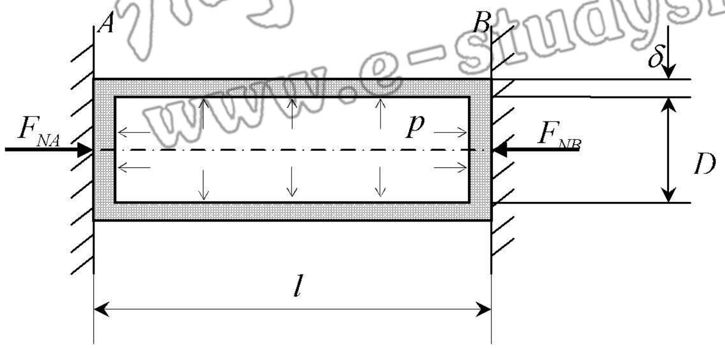
$$\sigma_2 = \mu(\sigma_3+\sigma_1) = -0.33\times60\times10^6 = -19.8\mu Pa$$

两端封闭的薄壁圆筒，长度为l，内径为D，壁厚为δ，如图所示。已知材料的弹性模量为E，泊松比为ν。筒内无内压时，两端用刚性壁夹住。筒内承受内压为p时，求此时圆筒作用于刚性壁上的力。



解：（1）静力关系

当圆筒受内压p时，圆筒受刚性支座的约束力F_{NA}和F_{NB}作用，由水平方向的平衡关系可知： $F_{NA}=F_{NB}=F_N$ 是一次静不定问题



（2）几何关系

取圆筒的轴向、环向和径向分别为x，y和z向。 由约束条件可得： $\varepsilon_x=0$

（3）物理关系

由广义 Hooke 定律 $$\varepsilon_x=\frac{1}{E}\left[\sigma_x-\nu(\sigma_y+\sigma_z)\right]$$

其中，$\sigma_x=\dfrac{pD}{4\delta}-\dfrac{F_N}{\pi D\delta}$

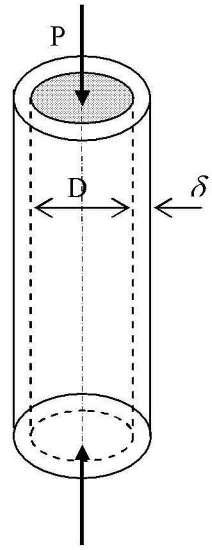
$$\sigma_y=\frac{pD}{2\delta}$$

$$\sigma_z=0$$

故，$\varepsilon_x=\dfrac{1}{E}\left[\sigma_x-\nu(\sigma_y+\sigma_z)\right]=\dfrac{1}{E}\left[\qquad\qquad\right]=0$ 可得

$$F_N=(1-2\nu)\frac{\pi D^2}{4}p$$

直径$D=40\text{mm}$的铝圆柱，放在厚度为$\delta=2\text{mm}$的钢套筒内，且两者之间没有间隙。作用于圆柱上的轴向压力为$P=40\text{kN}$。铝的弹性模量及泊松比分别为$E_1=70\text{GPa}$，$\nu_1=0.35$；钢的弹性模量及泊松比分别为$E=210\text{GPa}$，求套筒内的环向应力。



题图

解答：　对柱与套筒任意接触两点做应力状态分析（如图所示）

铝圆柱的轴向压应力为：

$$\sigma_3'=\frac{P}{A}=\frac{4P}{\pi d^2}=\frac{4\times40\times10^3}{\pi\times\left(40\times10^{-3}\right)^2}\text{Pa}=31.8\text{MPa}$$

铝圆柱的环向应力和径向应力分别为：$\sigma_1'=\sigma_2'$

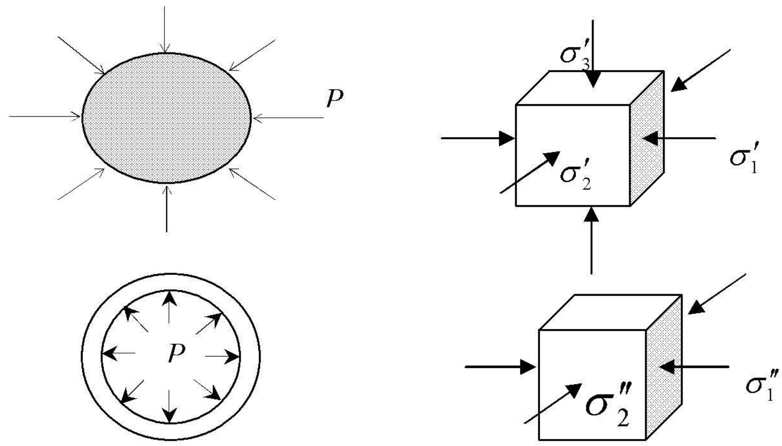
并设 $\sigma_1'=\sigma_2'=p$

钢套筒的受力和薄壁圆筒受内压作用相识，所以环向应力为：

$$\sigma_1''=\frac{pD}{2\delta}=\frac{p\times40\times10^{-3}}{2\times2\times10^{-3}}=10p$$

径向应力和环向应力分别为：

$\sigma_2''\approx0$ ，　$\sigma_3''=0$



由于铝圆柱与钢套筒无间隙，因此两者在接触的任意点处的环向应变相等

$\varepsilon_1' = \varepsilon_1''$ （几何关系）

由广义 Hooke 定律：

$$\varepsilon_1' = \frac{1}{E_1}\left[\sigma_1' - \nu_1\left(\sigma_2' + \sigma_3'\right)\right]$$

$$\varepsilon_1'' = \frac{1}{E}\left[\sigma_1'' - \nu\left(\sigma_2'' + \sigma_3''\right)\right]$$

所以 $\frac{1}{E_1}\left[\sigma_1' - \nu_1\left(\sigma_2' + \sigma_3'\right)\right] = \frac{\sigma_1''}{E}$

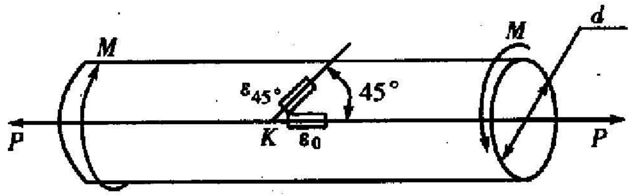
解之，得：$p = 2.8MPa$

所以，钢套筒的环向应力为：

$\sigma_1'' = 10p = 28\text{MPa}$

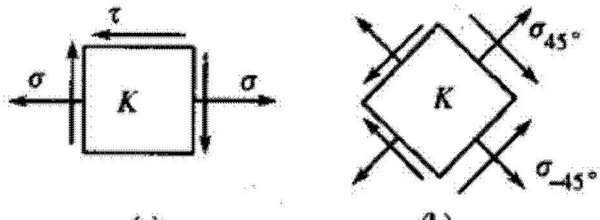
直径 d＝10cm 的等截面圆轴的受力情况如图所示。试验中在轴向拉力和扭转力偶矩共同作用下，测得轴表面 K 点处沿轴线方向的线应变 $=300\times10^{-6}$，沿与轴线成 45° 方向的线应变 $_{45°}$ ＝－140×10^{-6}。已知轴材料的弹性模量 ＝200GPa，泊松比 ＝0.29，许用应力[σ]＝120 MPa，试求：

1、 扭矩 M 和轴力 T。
2、 用第四强度理论校核轴的强度。（17 分）



（提示：$\sigma_{1,3} = \left(\sigma_x + \sigma_y\right)/2 \pm \sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2/4 + \tau_{xy}^{\ 2}}$ ）

解：在 K 点取出单元体如图所示：再围绕 K 点取与轴线成 45° 的单元体，其受力情况如图所示，通过斜截面应力公式有，



(a)　　　　(b)

$$\sigma_{45°}=\frac{\sigma}{2}+\frac{\sigma}{2}\cos(2\times45°)-\tau\sin90°=\frac{\sigma}{2}-\tau$$

$$\sigma_{-45°}=\frac{\sigma}{2}+\frac{\sigma}{2}\cos2(-45°)-\tau\sin2(-45°)=\frac{\sigma}{2}+\tau$$

由广义胡克定律可得

$$\varepsilon_{45°}=\frac{1}{E}(\sigma_{45°}-\mu\sigma_{-45°})=\frac{1}{E}\left[\frac{\sigma}{2}-\tau-\mu\left(\frac{\sigma}{2}+\tau\right)\right]$$

故
$$\tau=\frac{-E\varepsilon_{45°}+\frac{\sigma}{2}(1-\mu)}{1+\mu}$$

式中
$$\sigma=E\varepsilon_0=200\times10^9\times300\times10^{-6}=60\text{MPa}$$

三、压杆稳定

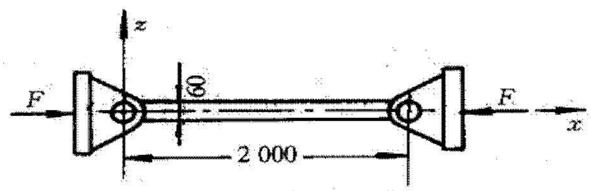
代入式①得　　　　见为

$$\tau=\frac{200\times10^9\times140\times10^{-6}+0.5\times60\times10^6(1-0.29)}{1+0.29}=38.2\text{MPa}$$ 干的

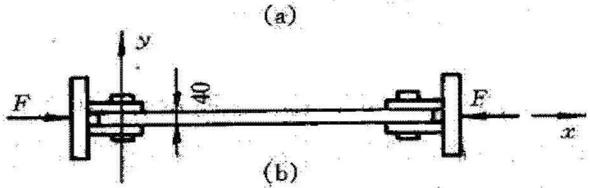
按第四强度理论校核，即

$$\sigma_{r4}=\sqrt{\sigma^2+3\tau^2}=\sqrt{60^2+3\times38.2^2}=89.3\text{MPa}<[\sigma]$$

根据上述强度理论计算，圆轴的强度都能满足.



(a)



(b)

解 因杆在两个平面的约束情况不同，因此需研究两个平面内的柔度。

在 xz 平面内：

$$I_y=\frac{1}{12}\times4\times6^3\times10^{-8}=72\times10^{-8}\ \text{m}^4$$

$$i_y=\sqrt{\frac{I_y}{A}}=\sqrt{\frac{72\times10^{-8}}{24\times10^{-4}}}=\sqrt{3}\times10^{-2}\ \text{m}$$

$$\lambda_y=\frac{\mu l}{i_y}=\frac{1\times2\,000\times10^{-3}}{\sqrt{3}\times10^{-2}}=115.5>100,$$

故是大柔度杆。

所以 $F_{cr}=\frac{\pi^2EI}{(\mu l)^2}=\frac{\pi^2\times2.0\times10^{11}}{(1\times2\,000\times10^{-3})^2}\times72\times10^{-8}=355.31\ \text{kN}$

在 xy 平面内：$I_z=\frac{1}{12}\times6\times4^3\times10^{-8}=32\times10^{-8}\ \text{m}^4$， $i_z=\sqrt{\frac{32\times10^{-8}}{24\times10^{-4}}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\ \text{mm}$

$\lambda_z=\frac{0.5\times2\,000}{\frac{2}{\sqrt{3}}}=86.6<100$，故是中柔度杆。

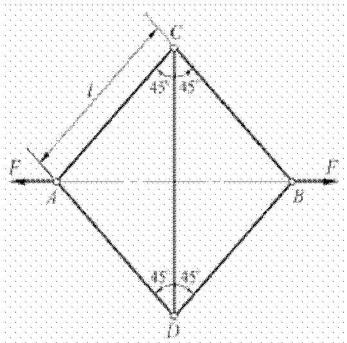
所以 $F_{cr}=(a-b\lambda)A=(310\times10^6-1.14\times10^6\times86.6)\times24\times10^{-4}=507.06\ \text{kN}$

故此杆的临界载荷为 $F_{cr}=355.31\ \text{kN}$。

-- 下 一 题

1.Fcr=?

10-8 图示正方形桁架，各杆各截面的弯曲刚度均为 EI，且均为细长杆。试问当载荷 F 为何值时结构中的个别杆件将失稳？如果将载荷 F 的方向改为向内，则使杆件失稳的载荷 F 又为何值？



题 10-8 图

解：1. 当 F 向外时

竖向杆 CD 受压，其余四根杆受拉。

设杆 CD 编号为 5，则有

$$F_{N5}=F$$

由此得

$$F_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{(\sqrt{2}l)^2}=\frac{\pi^2 EI}{2l^2}$$

2. 当 F 向内时

此时杆 5 受拉，其余各杆（编号 1，2，3，4）受压。且

$$F_{N1}=F_{N2}=F_{N3}=F_{N4}=\frac{F}{\sqrt{2}}$$

由此得

$$F_{cr}=\sqrt{2}\left(\frac{\pi^2 EI}{l^2}\right)=\frac{\sqrt{2}\pi^2 EI}{l^2}$$

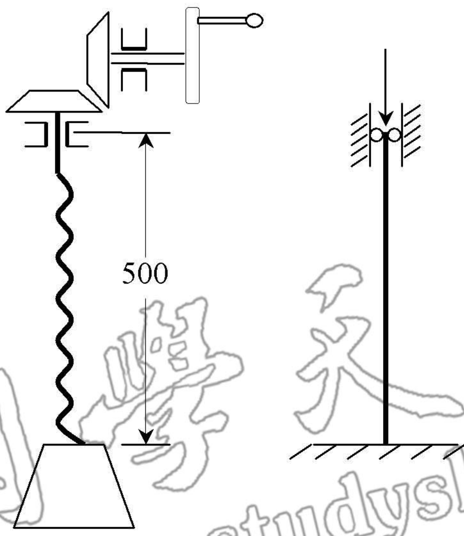
万能铣床工作台升降丝杆内径为 22mm，螺距 $s=5\text{mm}$。丝杆钢材的 $E=210\text{GPa}$，$\sigma_s=300\text{MPa}$，$\sigma_p=260\text{MPa}$，$a=461\text{MPa}$，$b=2.568\text{MPa}$。

工作台升至最高位置时，$l=500\text{mm}$。

若齿轮的传动比为1/2，即手轮旋转一周丝杆旋转半周，且手轮半径为10cm，手轮上作用的最大圆周力为200N。

试求丝杆的工作安全系数。

（提示：丝杆可简化为一端固定，一端铰支的压杆，$\mu=0.7$）



题五图

解　手动轮旋转一周，工作台上升的距离为

$$\delta=\frac{1}{2}s=2.5\text{mm} \qquad (1\text{分})$$

丝杆压力 P 上升 δ 所做的功应等于手动轮旋转一周切向力所做的功，即

$$P\delta=F_t\times 2\pi R \Longrightarrow P=50.3\text{kN} \qquad (2\text{分})$$

由丝杆材料性质决定的参数为

$$\lambda_P=\sqrt{\frac{\pi^2E}{\sigma_P}}=\sqrt{\frac{\pi^2\times 210\times 10^9}{260\times 10^6}}=89.3 \qquad (2\text{分})$$

$$\lambda_s=\frac{a-\sigma_s}{b}=\frac{461-300}{2.568}=62.7 \qquad (2\text{分})$$

因丝杆下端固定，上端铰支，取 $\mu=0.7$，所以丝杆的柔度为：

$$\lambda=\frac{\mu l}{i}=\frac{0.7\times 0.5}{0.022/4}=63.6 \qquad (2\text{分})$$

Because $\lambda_s < \lambda < \lambda_p$ （2 分）

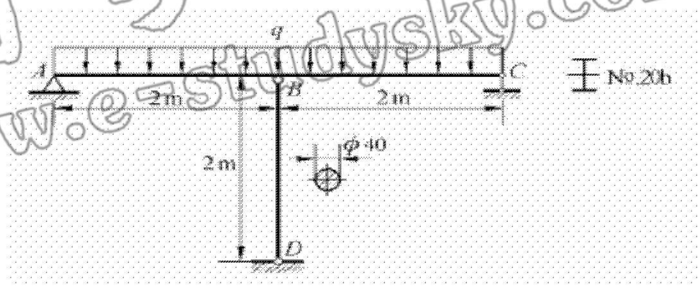
So，应用经验公式计算丝杆的临界载荷

$$P_{cr} = (a - b\lambda)A = 113\text{kN} \quad （2 分）$$

丝杆的工作安全系数为：

$$n = \frac{P_{cr}}{P} = \frac{113}{50.3} = 2.25 \quad （2 分）$$

10-13 图示结构，由横梁 AC 与立柱 BD 组成，试问当载荷集度 q =20 N/mm 与 q =26 N/mm 时，截面 B 的挠度分别为何值。横梁与立柱均用低碳钢制成，弹性模量 E = 200 GPa，比例极限 σ_p =200 MPa。



题 10-13 图

解：1. 求立柱 BD 的临界载荷 F_{cr}

给立柱和梁编号分别为 1 和 2，我们有

$$\lambda_p = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} = \pi\sqrt{\frac{200\times10^9}{200\times10^6}} = 99.3$$

$$i = \sqrt{\frac{I_1}{A_1}} = \frac{d}{4} = 10\text{mm} = 0.010\text{m}$$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1\times2.00}{0.010} = 200 > \lambda_p$$

立柱 BD 为大柔度杆，其临界载荷为

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_1}{l_1^2} = \frac{\pi^2\times200\times10^9}{2.00^2}\times\frac{\pi\times0.040^4}{64}\text{N} = 6.2013\times10^4\text{N} = 62.013\text{kN}$$

2. 计算 q_{cr}

这里的 q_{cr} 系指使立柱刚刚到达 F_{cr} 时的 q 值，立柱 BD 还处在直线平衡状态。B 处的变形协调条件为

$$w_B = \Delta l_1$$

引入物理关系

$$w_B = \frac{5q_{cr}l_2^4}{384EI_2} - \frac{F_{cr}l_2^3}{48EI_2},\quad \Delta l_1 = \frac{F_{cr}l_1}{EA_1}$$

并代入 l_1, l_2, E, F_{cr} 的已知数据及

$$I_2 = 2500\text{cm}^4 = 2.500\times10^{-5}\text{m}^4,\ A_1 = \frac{\pi}{4}0.040^2\text{m}^2 = 1.2566\times10^{-3}\text{m}^2$$

计算可得

$$q_{cr} = 2.555\times10^4\text{N/m} = 25.55\text{N/mm}$$

3. 计算 $q = 20\text{N/mm}$ 时的挠度

由于 $q < q_{cr}$，立柱中 $F_N < F_{cr}$，直线平衡状态是稳定的。

由变形协调条件

$$w_B = \Delta l_1$$

得

$$\frac{5ql_2^4}{384EI_2} - \frac{F_Nl_2^3}{48EI_2} = \frac{F_Nl_1}{EA_1}$$

代入已知数据后，算得

$$F_N = 4.8554\times10^4\text{N} = 48.554\text{kN}$$

进而可得截面 B 的挠度为

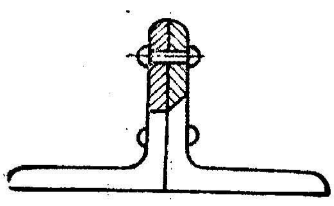
$$w_B = \Delta l_1 = \frac{F_Nl_1}{EA_1} = 3.86\times10^{-4}\text{m} = 0.386\text{mm}$$

4. 计算 $q = 26\text{N/mm}$ 时的挠度

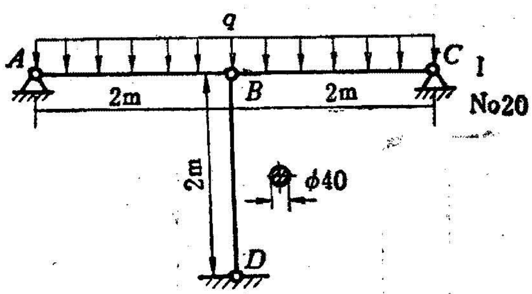
此时 $q > q_{cr}$，立柱处于微弯状态，$F_N = F_{cr}$，截面 B 的挠度由梁变形确定，即

$$\begin{aligned} w_B' &= \frac{5ql_2^4}{384EI_2} - \frac{F_{cr}l_2^3}{48EI_2} \\ &= \frac{5\times2.60\times10^4\times4.00^4\text{m}}{384\times200\times10^9\times2.500\times10^{-5}} - \frac{62013\times4.00^3\text{m}}{48\times200\times10^9\times2.500\times10^{-5}} \\ &= 7.97\times10^{-4}\text{m} = 0.797\text{mm} \end{aligned}$$

图示结构，用**A3**钢制成，**E**＝**200GPa**，σ_P ＝**200MPa**，试问当**q**＝**20N/mm**和**q=40N/mm**时，横梁截面**B**的挠度分别为多少？**BD**杆长**2m**，截面为圆形，直径**d=40mm**。



题 15-13 图



题 15-14 图

解：首先考虑 q 不同时，BD 杆的轴力的变化。

$$\Delta l_{BD}=y_B=\frac{N_{BD}l^3}{48EJ}-\frac{5ql^4}{384EJ}=-\frac{N_{BD}\bullet\frac{l}{2}}{EA}$$

$$\therefore N_{BD}=\frac{\frac{5}{384}ql^3\bullet\frac{A}{J}}{\frac{l^2}{48}\bullet\frac{A}{J}+\frac{1}{2}}$$

$$\frac{J}{A}=\frac{d^2}{16},l=4m$$

（1）$q=20N/mm$ 时：$\therefore N_{BD}=\dfrac{\frac{5}{384}\times 20\times 10^3\times 4^3\times\frac{16}{0.04^2}}{\frac{4^2}{48}\times\frac{16}{0.04^2}+\frac{1}{2}}=50KN$

（2）$q=40N/mm$ 时：$\therefore N_{BD}=\dfrac{\frac{5}{384}\times 40\times 10^3\times 4^3\times\frac{16}{0.04^2}}{\frac{4^2}{48}\times\frac{16}{0.04^2}+\frac{1}{2}}=100KN$

$$\lambda=\frac{\mu l}{i}=\frac{1\times 2}{\frac{0.04}{4}}=200>\lambda_p$$

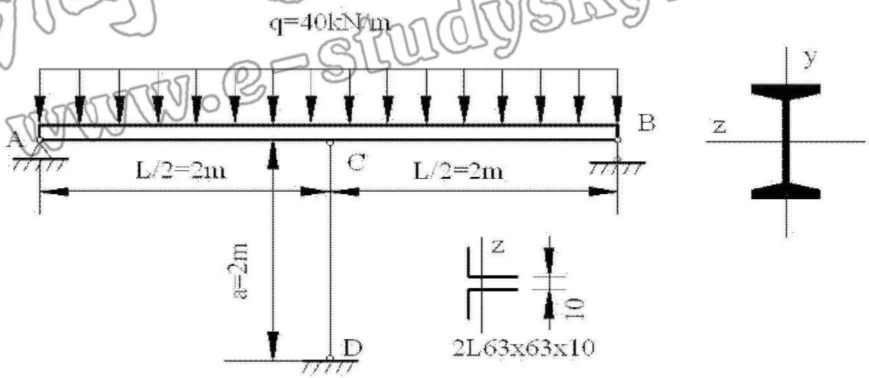
$$\therefore N_{cr}=A\bullet\frac{\pi^2E}{\lambda^2}=\frac{\pi}{4}\times 0.04^2\times\frac{\pi^2\times 200\times 10^9}{200^2}=61.9KN$$

$\therefore$　　当 $q=20N/mm$ 时：$N_{BD}<N_{cr}$

$$\therefore\quad y_B=\frac{N_{BD}}{EA}\frac{l}{2}=\frac{50\times 10^3\times 4}{200\times 10^9\times\frac{\pi}{4}\times 0.04^2\times 2}=3.98\times 10^{-4}m$$

当 $q = 40N/mm$ 时：$N_{BD} > N_{cr}$ 所以杆件失稳破坏。

平面梁柱结构如图 4 所示，梁采用 16 号工字钢，柱用两根 $63mm \times 63mm \times 10mm$ 的角钢组成。已知：均布载荷为 $q = 40KN/m$，梁和柱的材料均为低碳钢，弹性模量为 $E = 200GPa$，比例极限为 $\sigma_p = 200GPa$，屈服极限为 $\sigma_s = 240MPa$，若强度安全因数为 $n = 1.4$，稳定安全因数为 $n_{st} = 3$，试校核结构的强度和稳定性。（提示：1、查表可得型钢截面几何性质，对 16 号工字钢有：$I_z = 1134cm^4$，$W_z = 141cm^3$。对 $63 \times 63 \times 10$ 等边角钢有：$A = 11.657cm^2$，$I_z = 41.09cm^4$，$i_z = 1.88cm$。2、简支梁中点受集中力 F 作用产生的最大挠度为：$\omega_{\max} = -\dfrac{Fl^3}{48EI}$，简支梁受均布载荷 q 作用产生的最大挠度为：$\omega_{\max} = -\dfrac{5ql^4}{384EI}$。3、不考虑梁的中间截面 C 的腹板和翼缘交界处点的应力强度）



解：

设柱所受压力为 F，梁的支座 A 和 B 处的约束力分别为 F_A 和 F_B。取梁 AB 为研究对象，由静力平衡方程可得

$$\sum M_C = 0, \quad F_A = F_B$$

$$\sum F_Y = 0, \quad F_A = F_B = \frac{ql - F}{2}$$

梁柱结构为一次静不定。分析变形可知，梁在截面 C 处的挠度应等于柱的压缩量，应此几

何方程为

$$\omega_C = \omega_C^q - \omega_C^F = \Delta l$$

将物理方程代入可得

$$\frac{5ql^4}{384EI} - \frac{Fl^3}{48EI} = \frac{Fa}{EA}$$

因此柱的压力为

$$F = \frac{Al^3}{Al^3 + 48aI_z} \times \frac{5ql}{8}$$

将已知数据代入解得

$$F = 98.6KN$$

所以梁的支座反力为

$$F_A = F_B = 30.7KN$$

（1）梁的强度校核

距支座 A 为 x 的任意截面上的弯矩为

$$M(x) = F_A x - \frac{qx^2}{2}$$

由 $\frac{dM(x)}{dx} = F_A - qx = 0$，可知当 $x = \frac{F_A}{q} = 0.77m$ 时，弯矩有极大值为

$$M_{\max} = 11.8kN \cdot m$$

截面 C 处的弯矩为

$$M_C = -18.6kN \cdot m$$

梁的许用应力为

$$[\sigma] = \frac{\sigma_s}{n} = \frac{240MPa}{1.4} = 171MPa$$

梁的危险截面为截面 C，梁内最大的正应力为

$$\sigma_{\max} = \frac{|M|_{\max}}{W_z} = \frac{18.6 \times 10^3 N \cdot m}{141 \times 10^{-6} m^3} = 132MPa < 171MPa$$

因此，梁 AB 满足强度要求。

（2）柱的稳定校核

柱 CD 的横截面绕 z 轴的形心主惯性矩最小，其柔度为

$$\lambda = \frac{\mu l_{CD}}{i_z} = \frac{1 \times 2m}{1.88 \times 10^{-2} m} = 106 > \lambda_p \approx 100$$

柱的临界压力可由欧拉公式计算，可得

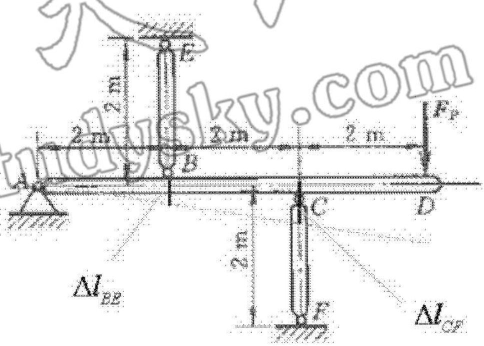
$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = 405.5\text{k}N$$

柱的工作稳定安全因数为

$$n = \frac{F_{cr}}{F} = \frac{405.5kN}{98.6kN} = 4.11 > n_{st} = 3$$

因此，柱CD满足稳定性要求。

10－15 图示刚性杆 AD 在 A 端铰支；点 B 与直径 $d_1 = 50\text{mm}$ 的钢圆杆铰接，钢杆材料为 Q235 钢，$E_1 = 200\text{GPa}$，$[\sigma]_1 = 160\text{MPa}$；点 C 与直径 $d_2 = 100\text{mm}$ 的铸铁圆柱铰接，铸铁的 $E_2 = 120\text{GPa}$，$[\sigma]_2 = 120\text{MPa}$。试求结构的许可载荷。



解：横梁 AD 为刚性，因为有 4 个约束力，3 个平衡方程，故为一次静不定结构。，BD 受拉力 F_B，CF 受压力 F_C。

1、平衡方程

$$\sum M_A = 0,\quad 2F_B + 4F_C - 6F_P = 0 \qquad \text{(a)}$$

2、变形变形协调方程

加载后，结构的变形如图中虚线所示，于是，得到二杆的变形关系

$$\Delta l_{BE} = \frac{1}{2}\Delta l_{CF} \qquad \text{(b)}$$

3、物理方程

应用胡克定律，有：

$$\Delta l_{BE} = \frac{F_B l_{BE}}{E_1 A_1},\quad \Delta l_{CF} = \frac{F_C l_{CF}}{E_2 A_2} \qquad \text{(c)}$$

4、求解静不定的补充方程

将式（c）代入式（b），得到求解静不定的补充方程

$$\frac{F_B l_{BE}}{E_1 A_1} = \frac{F_C l_{CF}}{2E_2 A_2}$$

即：

$$\frac{F_B}{200 \times \frac{\pi}{4} \times 50^2} = \frac{F_C}{2 \times 120 \times \frac{\pi}{4} \times 100^2} \qquad \text{(d)}$$

5、联立求解

将方程（a）和（d）联立，解出：

$$F_C = 4.8F_B$$

$F_B = 0.283F_{\mathrm{P}}$（拉）

$F_C = 1.3585F_{\mathrm{P}}$（压）

6、对 BE 杆进行强度计算

$$[F_B] = [\sigma]_1 A_1 = 160\times10^6\times\frac{\pi}{4}\times50^2\times10^{-6} = 314\ \mathrm{kN}$$

因此得到

$$[F_{\mathrm{P}}] = \frac{F_B}{0.283} = 1110\ \mathrm{kN} \qquad \text{(e)}$$

7、对 CF 杆进行稳定计算

压杆的长细比

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1\times2}{\frac{0.1}{4}} = 80$$

采用折减系数法，查压杆的折减系数 φ 表得：$\varphi = 0.26$

$$\begin{aligned}[F_C] &= [\sigma]_{\mathrm{st}} A_2 = \varphi[\sigma]_2 A_2 \\ &= 0.26\times120\times10^6\times\frac{\pi}{4}\times100^2\times10^{-6} \\ &= 245\ \mathrm{kN}\end{aligned}$$

据此算得

$$[F_{\mathrm{P}}] = \frac{[F_C]}{1.3585} = 180\ \mathrm{kN} \qquad \text{(f)}$$

8、结构的许可载荷

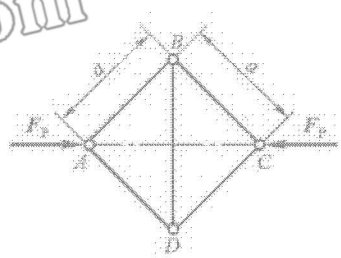
比较式（e）、（f），最终得到结构的许可载荷：

$$[F_{\mathrm{P}}] = 180\ \mathrm{kN}$$

10－13 图示正方形桁架结构，由五根圆截面钢杆组成，连接处均为铰链，各杆直径均为 d＝40 mm，a＝1 m。材料均为 Q23S 钢，$[n]_{\mathrm{st}}$＝1.8。试：

1. 求结构的许可载荷；

2. 若 F_{P} 力的方向与 1 中相反，问：许可载荷是否改变，若有改变应为多少？



习题 10－13 图

解：

1、确定结构的许可载荷

根据平衡条件，得到：

$$F_{AB}=F_{AD}=F_{BC}=F_{CD}=\frac{\sqrt{2}}{2}F_{\mathrm{P}}\text{（压）}$$

$$F_{DB}=F_{\mathrm{P}}\text{（拉）}$$

对于拉杆 BC，由强度条件，有

$$F_{\mathrm{P}}=F_{BD}=[\sigma]A=160\times10^{6}\times\frac{\pi d^{2}}{4}=160\times\frac{\pi}{4}\times40^{2}=201\ \mathrm{kN}$$

对于 AB 等压杆，需进行稳定计算：

$$\lambda=\frac{\mu l}{i}=\frac{1\times1000}{\frac{40}{4}}=100<\lambda_{\mathrm{p}}=101$$

于是，有

$$F_{AB\mathrm{cr}}=(a-b\lambda)A=(304-1.14\times100)\times\frac{\pi}{4}\times40^{2}\times10^{-6}=0.2387\ \mathrm{MN}=238.7\ \mathrm{kN}$$

$$F_{\mathrm{Pcr}}=\sqrt{2}F_{AB}=\sqrt{2}\times238.7\mathrm{kN}=337.6\ \mathrm{kN}$$

结构的许可载荷

$$[F_{\mathrm{P}}]=\frac{F_{\mathrm{Pcr}}}{[n]_{\mathrm{st}}}=\frac{337.6}{1.8}=187.6\mathrm{kN}$$

2．力 F_{P} 方向向外时结构的许可载荷

这时各杆的受力

$$F_{AB}=F_{AD}=F_{BC}=F_{CD}=\frac{\sqrt{2}}{2}F_{\mathrm{P}}\text{（拉）}$$

$$F_{BD}=F_{\mathrm{P}}\text{（压）}$$

由于此时受压杆 BD 的长度比前一种情形下的长，所以只要进行稳定计算：

$$\lambda=\frac{\mu l}{i}=\frac{1\times\sqrt{2}\times1000}{10}=141.4>\lambda_{\mathrm{p}}=100$$

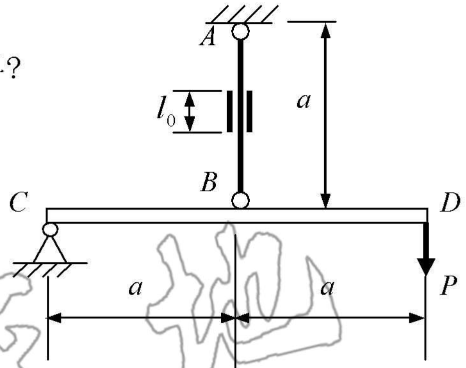
采用欧拉公式计算临界力

$$
\begin{aligned}
[F_{\mathrm{P}}]&=\frac{F_{\mathrm{Pcr}}}{[n]_{\mathrm{st}}}=\frac{F_{BD\mathrm{cr}}}{[n]_{\mathrm{st}}}\\
&=\frac{\sigma_{BD\mathrm{cr}}A}{[n]_{\mathrm{st}}}=\frac{1}{[n]_{\mathrm{st}}}\times\frac{\pi^{2}E}{\lambda^{2}}\times\frac{\pi}{4}\times40^{2}\times10^{-6}=68.9\\
&=\frac{1}{1.8}\times\frac{\pi^{3}E}{141.4^{2}}\times\frac{1}{4}\times40^{2}\times10^{-6}\\
&=68.9\times10^{-3}\ \mathrm{MN}=68.9\ \mathrm{kN}
\end{aligned}
$$

已知:图示结构.CD 梁的刚度很大,可忽略其变形,AB 杆为某种材料,直径 d=30mm, a=1m.

求:1 若在AB杆上装有双侧电子引伸仪，双侧电子引伸仪刀口间距了 l_0=50mm, 加力后在弹性阶段测得 a 点变形为 50.5×10^{-6}mm,受力为 280kN，b 点变形为 13.0×10^{-6}mm 受力为 174kN,试问 AB 杆的弹性模量为多少? AB 杆是什么材料?

2 若 AB 杆材料的许用应力〔σ〕=160MPa,试求结构的许用载荷 P 及此时 D 点的位移.



解：1 AB 杆的弹性模量为多少? AB 杆是什么材料?

$$\Delta l = 50.5\times10^{-6} - 13.0\times10^{-6} = 37.5\times10^{-6}$$

$$\Delta P = 280 - 174 = 106kN - m$$

$$E = \frac{\Delta P l_0}{\Delta l A}$$

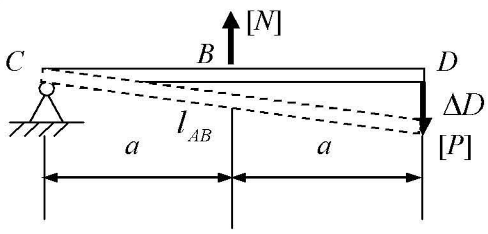
$$= \frac{106\times10^3\times50\times10^{-3}\times4}{37.5\times10^{-6}\times\pi\times30^2\times10^{-6}} = 200GPa$$

材料是钢

2 求结构的许用载荷 P 及此时 D 点的位移.

[N]=[σ]A=113kN

$$[P] = \frac{[N]}{2} = 56.5kN$$



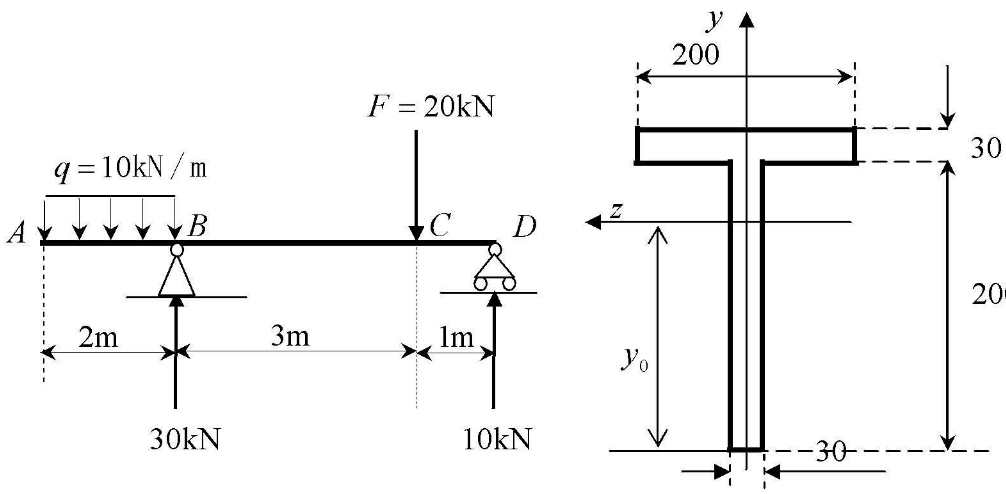
$$\Delta B = \Delta l_{AB} = \frac{[N]a}{EA} = 0.761mm$$

$$\Delta D = 2\Delta B = 1.522mmm$$

==============　　　　==================

四．弯曲应力 强度理论

铸铁梁的受载情况和截面尺寸如图所示。已知材料的许用拉应力$[\sigma_t] = 40\text{MPa}$，许用压应力$[\sigma_c] = 100\text{MPa}$，试校核梁的强度。



题二图

解（1）计算截面几何性质　（2 分）

$$y_0 = 0.1575\text{m}$$

$$I_Z = 6.013\times10^{-5}\text{m}^4$$

（2）根据载荷，画出梁的弯矩图　（3 分）

（3）校核

由于梁的横截面上下不对称，截面 B 和截面 C 为可能的危险截面，因此都有校核　（1 分）

截面 B 的最大拉、压应力为：

$$\sigma_{t,\max} = \frac{M_B(H-y_0)}{I_z} = 24.1\text{MPa} < [\sigma_t] \qquad （2 分）$$

$$\sigma_{c,\max} = \frac{M_B y_0}{I_z} = 52.4\text{MPa} < [\sigma_c] \qquad （2 分）$$

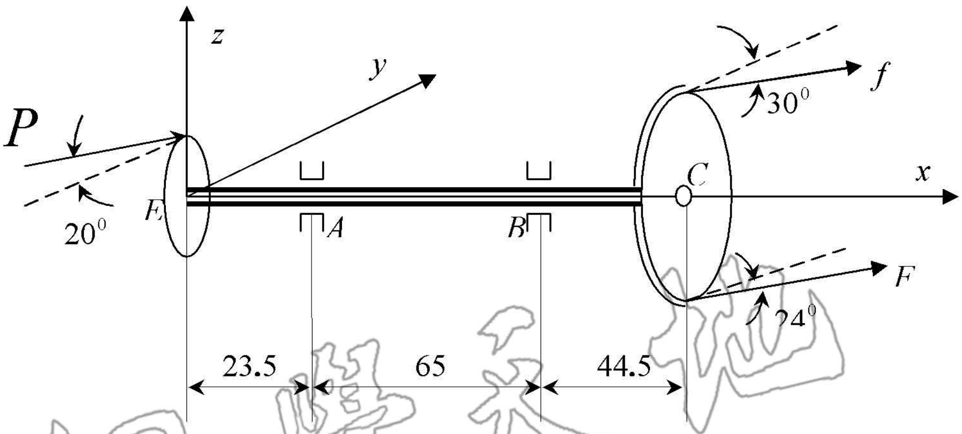
截面 C 的最大拉、压应力为：

$$\sigma_{t,\max} = \frac{M_C y_0}{I_z} = 26.2\text{MPa} < [\sigma_t] \qquad （2 分）$$

$$\sigma_{c,\max} = \frac{M_C(H-y_0)}{I_z} = 12.1\text{MPa} < [\sigma_c] \qquad （2 分）$$

结论：满足强度条件。　（1 分）

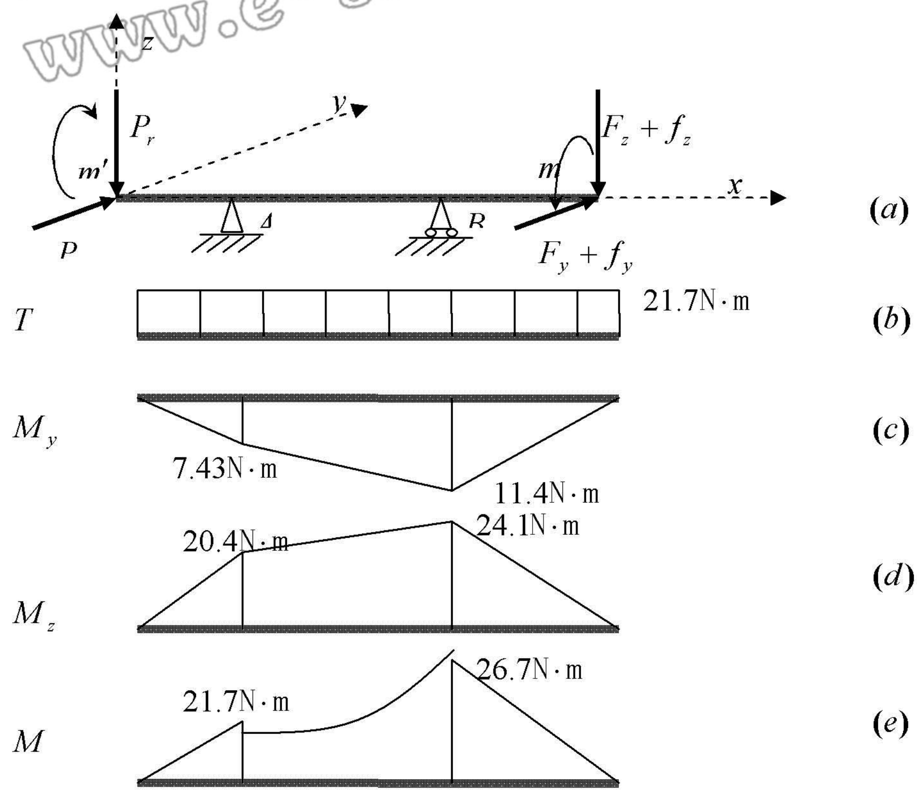
一齿轮传动轴由 $N=2.2\text{kW}$ 的电动机通过皮带轮 C 带动，转速为 $n=966\text{r/min}$。传动轴的直径为 **35** mm，材料为 **45** 钢，许用应力 $[\sigma]=85\text{MPa}$。皮带轮的直径 $D=132\text{mm}$，齿轮 E 的直径为 $d=50\text{mm}$。作用在齿轮 E 上的力 P 在 yEz 平面内。皮带的拉力 $F=465\text{N}$，$f=135\text{N}$，两力都在过点 **C** 的、与 yEz 平行的平面内，与水平线的夹角分别为 24^0 和 30^0。试用第四强度理论校核传动轴的强度。



题三图

解：皮带轮传递的扭矩为 $m=9549\dfrac{N}{n}=9549\times\dfrac{2.2}{966}=21.7\text{N}\cdot\text{m}$ （1 分）

对传动轴做受力分析，如图



由平衡方程，齿轮上法向力P_n对轴线的力矩m'与皮带上的m相等，即

$$m' = P_n \cos 20^0 \cdot \frac{d_1}{2} = m \quad \Longrightarrow \quad P_n = 925\text{N} \quad （1\ 分）$$

将齿轮上的法向力P_n和皮带拉力F, f向轴线x轴简化，如图（a）所示。

$$P = P_n \cos 20^0 = 870\text{N} \qquad （1 分）$$

$$P_r = P_n \sin 20^0 = 316\text{N} \qquad （1 分）$$

$$F_y + f_y = F\cos 24^0 + f\cos 30^0 = 542\text{N} \qquad （1 分）$$

$$F_z + f_z = F\sin 24^0 + f\sin 30^0 = 257\text{N} \qquad （1 分）$$

作扭矩T图（b），xz平面内的弯矩M_y图（c）和xy弯矩M_z图（d），可以判定 B 截面为危险截面，其上的$M_{y\max} = 11.4\text{N}\cdot\text{m}$，$M_{z\max} = 24.1\text{N}\cdot\text{m}$ （2 分）

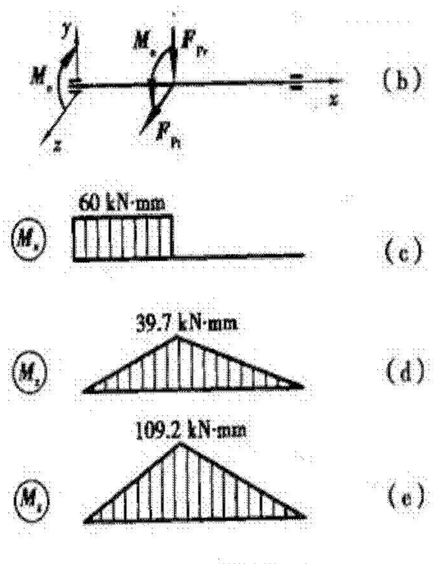
合成弯矩M为：

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = 26.7\text{N}\cdot\text{m} \qquad （3 分）$$

按照第四强度理论

$$\frac{1}{W}\sqrt{M^2 + 0.75\times T^2} = \frac{32}{\pi(35\times10^{-3})^3}\sqrt{26.7^2 + 0.75\times 21.7^2} = 7.76 \quad MPa \prec [\sigma]$$

如图所示齿轮传动轴由电机带动，作用在齿轮上的径向力 P_r＝0.546kN，圆周力 P_t＝1.5kN，已知齿轮节圆直径 D＝80mm，若轴的许用应力[σ]＝60 MPa，试用



解　把作用在齿轮上的力向轴线简化，得铅垂力，水平力和力偶矩 M_e，如图(b)所示，其中

$$M_e = F_{Pt}\cdot\frac{D}{2} = 1.5\ \text{kN}\times\frac{80\ \text{mm}}{2} = 60\ \text{kN}\cdot\text{mm} = 60\ \text{N}\cdot\text{m}$$

分别做出扭矩图M_x、弯矩图M_y、M_z，如图(c),(d),(e)所示。由内力图可知危险截面在齿轮 C 处，其中

扭矩　$M_x = M_e = 60\ \text{N}\cdot\text{m}$

弯矩

xz 平面　$$M_{y\max} = \frac{0.546\ \text{kN}\times 0.120\ \text{m}\times 0.185\ \text{m}}{0.120\ \text{m} + 0.185\ \text{m}} = 39.7\times10^{-3}\ \text{kN}\cdot\text{m} = 39.7\ \text{N}\cdot\text{m}$$

第三强度理论设计轴的直径。

xy 平面

$$M_{z\max}=\frac{1.5\ \text{kN}\times 0.120\ \text{m}\times 0.185\ \text{m}}{0.120\ \text{m}+0.185\ \text{m}}$$
$$=109.2\times 10^{-3}\ \text{kN}\cdot\text{m}=109.2\ \text{N}\cdot\text{m}$$

对于圆截面，可用矢量和的方法求出 C 截面的合成弯矩，其值为

$$M=\sqrt{M_{y\max}^2+M_{z\max}^2}$$
$$=\sqrt{(39.7\ \text{N}\cdot\text{m})^2+(109.2\ \text{N}\cdot\text{m})^2}=116\ \text{N}\cdot\text{m}$$

按第三强度理论

$$\frac{1}{W}\sqrt{M^2+M_x^2}\leqslant[\sigma]$$

把 $W=\dfrac{\pi d^3}{32}$ 代入上式得

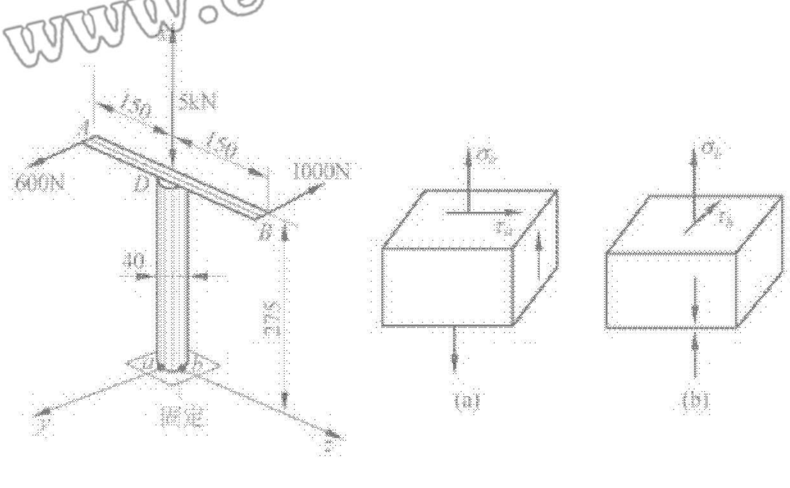
$$d\geqslant\sqrt[3]{\frac{32\sqrt{M^2+M_x^2}}{\pi[\sigma]}}$$
$$=\sqrt[3]{\frac{32\sqrt{(116\ \text{N}\cdot\text{m})^2+(60\ \text{N}\cdot\text{m})^2}}{\pi\times 60\times 10^6\ \text{Pa}}}$$
$$=0.028\ \text{m}=28\ \text{mm}$$

因此轴的直径 $d=28$ mm。

9－18 直杆 AB 与直径 d=40 mm 的圆柱焊成一体，结构受力如图所示。试确定点 a 和点 b 的应力状态，并计算 σ_{r4}。

解：

1、确定横截面上的内力



a、b 两点所在的下段固定截面

$$F_{Nx}=-5\text{ kN},\quad F_{Qy}=-400\text{ N}$$

$$M_x=(1000+600)\times0.150=240\text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_z=-(1000-600)\times0.275=-110\text{ N}\cdot\text{m}$$

2、a 点的应力与应力状态

$$\sigma_a=\frac{F_{Nx}}{A}+\frac{M_z}{W_z}=\frac{-5\times10^3}{\frac{\pi\times40^2}{4}\times10^{-6}}+\frac{110}{\frac{\pi\times40^3}{32}\times10^{-9}}=13.53\text{ MPa}$$

$$\tau_a=\frac{M_x}{W_P}=19.1\text{ MPa}$$

$$\sigma_{r4}=\sqrt{\sigma_a^2+3\tau_a^2}=\sqrt{13.53^2+3\times19.1^2}=35.74\text{ MPa}$$

a 点的应力状态如图（a）所示。

3、b 点的应力与应力状态

$$\sigma_b=\frac{F_{Nx}}{A}=-\frac{5\times10^3}{\frac{\pi\times40^2}{4}\times10^{-6}}=-3.979\text{ MPa}$$

$$\tau_b=\frac{M_x}{W_P}+\frac{4}{3}\frac{F_{Qy}}{A}$$

$$=\frac{240}{\frac{\pi\times40^3}{16}\times10^{-9}}+\frac{4}{3}\cdot\frac{400}{\frac{\pi\times40^2}{4}\times10^{-6}}$$

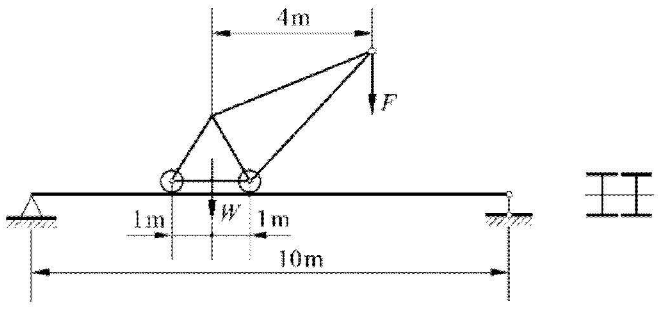
$$=19.52\text{MPa}$$

$$\sigma_{r4}=\sqrt{\sigma_b^2+3\tau_b^2}=34.0\text{ MPa}$$

b 点应力状态如图（b）所示。

6-21 图示四轮吊车起重机的导轨为两根工字形截面梁，设吊车自重 $W=50\text{kN}$，最大起重量 $F=10\text{kN}$，许用应用$[\sigma]=160\text{MPa}$，许用切应力$[\tau]=80\text{MPa}$。试选择工字钢型号。由于梁较长，需考虑梁自重的影响。

提示：首先按载荷 W 与 F 选择工字钢型号，然后根据载荷 W 与 F 以及工字钢的自重校核梁的强度，并根据需要进一步修改设计。



解：1. 求最大弯矩

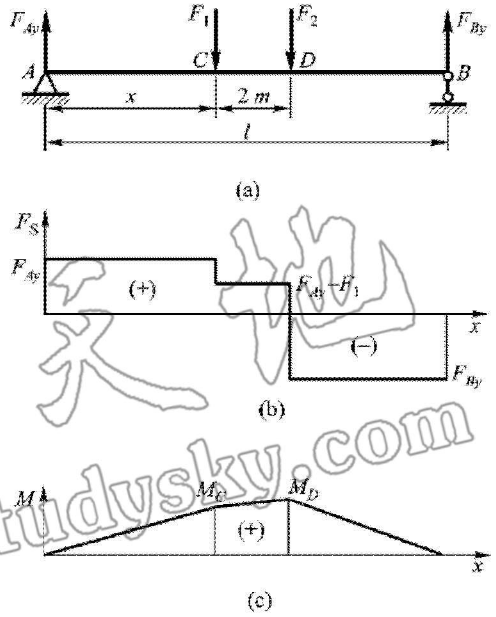
设左、右轮给梁的压力分别为 F_1和F_2，不难求得

$$F_1 = 10\text{kN}，\ F_2 = 50\text{kN}$$

由图 6-21a 所示梁的受力图及坐标，可得支反力

$$F_{Ay} = \frac{1}{l}[F_1(l-x)+F_2(l-x-2)] = 50-6x \qquad (0<x<8)$$

$$F_{By} = \frac{1}{l}[F_1 x+F_2(x+2)] = 6x+10 \qquad (0<x<8)$$



该梁的剪力、弯矩图示如图 b 和 c。图中，

$$M_C = F_{Ay}x = (50-6x)x \qquad (0 \le x \le 8)$$

$$M_D = F_{By}(l-x-2) = (6x+10)(8-x) \qquad (0 \le x \le 8)$$

由

$$\frac{\mathrm{d}M_C}{\mathrm{d}x} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}M_D}{\mathrm{d}x} = 0$$

得极值位置依次为

$$x = \frac{25}{6}\text{m}，\ x = \frac{19}{6}\text{m}$$

两个弯矩极值依次为

$$M_{C\max} = (50-25)\times\frac{25}{6}\text{kN}\cdot\text{m} = 104.2\text{kN}\cdot\text{m}$$

和

$$M_{D\max} = (19+10)(8-\frac{19}{6})\text{kN}\cdot\text{m} = 140.2\text{kN}\cdot\text{m}$$

比较可知，单梁的最大弯矩值为

$$M_{\max} = \frac{1}{2} M_{D\max} = 70.1\text{kN} \cdot \text{m}$$

2．初选工字钢型号

先不计梁的自重，由弯曲正应力强度要求

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \le [\sigma]$$

得

$$W_z \ge \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{70.1 \times 10^3 \text{m}^3}{160 \times 10^6} = 4.38 \times 10^{-4} \text{m}^3 = 438\text{cm}^3$$

由附录 F 表 4 初选№28a 工字钢，有关数据为

$$W_z = 508\text{cm}^3,\ q = 43.492\text{kg/m},\ \delta = 8.5\text{mm},\ I_z / S_z = 24.6\text{cm}$$

3．检查和修改

考虑梁自重的影响，检查弯曲正应力强度是否满足。

梁中点处弯矩增量为

$$\Delta M_{\max} = \frac{ql^2}{8} = \frac{43.492 \times 9.81 \times 10^2}{8} \text{N} \cdot \text{m} = 5.33 \times 10^3 \text{N} \cdot \text{m}$$

上面分析的最大弯矩作用面在跨中以右 0.167m 处，二者相距很近，检查正应力强度时可将二者加在一起计算（计算的 $\sigma_{\max}$ 比真实的略大一点，偏于安全），即

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} + \Delta M_{\max}}{W_z} = \frac{(70.1 \times 10^3 + 5.33 \times 10^3)\text{N}}{508 \times 10^{-6} \text{m}^2}$$
$$= (1.380 \times 10^8 + 1.049 \times 10^7)\text{Pa} = 148.5\text{MPa} < [\sigma]$$

最后，再检查弯曲切应力强度是否满足。

$$F_{\text{S.max}} = [\frac{1}{2}(6 \times 8 + 10) + \frac{1}{2} \times 43.492 \times 9.81 \times 10^{-3} \times 10]\text{kN} = 31.13\text{kN}$$

$$\tau_{\max} = \frac{F_{\text{S.max}}}{(\frac{I_z}{S_z})\delta} = \frac{31.13 \times 10^3 \text{N}}{24.6 \times 10^{-2} \times 8.5 \times 10^{-3} \text{m}^2}$$
$$= 1.489 \times 10^7 \text{Pa} = 14.89\text{MPa} < [\tau]$$

结论：检查的结果表明，考虑梁自重影响后，弯曲正应力和切应力强度均能满足要求，故无需修改设计，最后选择的工字钢型号为№28a。

概念题　下一题？

10－8 根据压杆稳定设计准则，压杆的许可载荷 $[F_{\text{P}}] = \frac{\sigma_{\text{cr}} A}{[n]_{\text{st}}}$。当横截面面积 A 增加一倍时，试分析压杆的许可载荷将按下列四种规律中的哪一种变化？

（A）增加 1 倍；

（B）增加 2 倍；

（C）增加 1/2 倍；

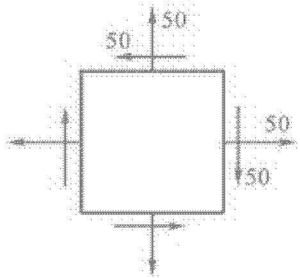
（D）压杆的许可载荷随着 A 的增加呈非线性变化。

解：由于 $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$，长细比 $\lambda = \frac{\mu l}{i}$，而临界应力 $\sigma_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$ 或 $\sigma_{\text{cr}} = a - b\lambda$

所以，$\sigma_{\text{cr}} - A$ 不存在线性关系，$[F_{\text{P}}] = \frac{\sigma_{\text{cr}}}{[n]_{\text{st}}} A$ 与面积 A 之间为非线性关系。所以，正确答案是 D。

9－10 微元受力如图所示，图中应力单位为 MPa。根据不为零主应力的数目判断它是：

（A）二向应力状态；
（B）单向应力状态；
（C）三向应力状态；
（D）纯剪应力状态。



习题 9－10 图

正确答案是 B。

解：应用主应力的解析式或者应力圆方法，可以确定这一应力状态中，有两个主应力等于零

$$\sigma_1=\frac{50+50}{2}+\sqrt{(\frac{50-50}{2})^2+50^2}=100\ \text{MPa}$$

$$\sigma_2=\frac{50+50}{2}-\sqrt{(\frac{50-50}{2})^2+50^2}=0\ \text{MPa}$$

$$\sigma_3=0,$$

所以，这是一个单向应力状态。

9－11 关于弹性体受力后某一方向的应力与应变关系，有如下论述，试判断哪一种是正确的。

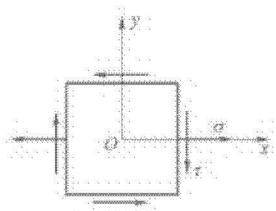
（A）有应力一定有应变，有应变不一定有应力；
（B）有应力不一定有应变，有应变不一定有应力；
（C）有应力不一定有应变，有应变一定有应力；
（D）有应力一定有应变，有应变一定有应力。

正确答案是 B。

9－12 对于图示的应力状态，若测出 x、y 方向的正应变 ε_x、ε_y，可以确定的材料弹性常数有：

（A）E 和 ν；
（B）E 和 G；
（C）ν 和 G；
（D）E、G 和 ν。

正确答案是 D。

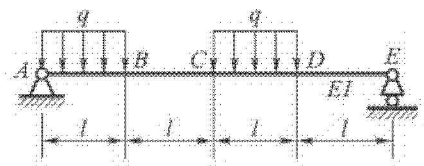


习题 9－12 图

解：$E=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_x}$，$\nu=-\dfrac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}$，$G=\dfrac{E}{2(1+\nu)}=\dfrac{\sigma}{2(\varepsilon_x-\varepsilon_y)}$

所以正确答案是 D。

8—2 简支梁承受间断性分布荷载，如图所示。试说明需要分几段建立微分方程，积分常数有几个，确定积分常数的条件是什么？（不要求详细解答）



解：

1。分 4 段积分，共有 8 个积分常数

2。确定积分常数的条件是：

$x=0, w_1=0;$

$x=l, w_1=w_2;\ \theta_1=\theta_2;$

$x=2l, w_2=w_3;\ \theta_2=\theta_3;$

$x=3l, w_3=w_4;\ \theta_3=\theta_4;$

$x=4l, w_4=0.$

2－12 韧性材料应变硬化后卸载，然后再加载，直至发生破坏，发现材料的力学性能发生了变化。试判断以下结论哪一个是正确的：

（A） 屈服应力提高，弹性模量降低；

（B） 屈服应力提高，韧性降低；

（C） 屈服应力不变，弹性模量不变；

（D） 屈服应力不变，韧性不变。

解：韧性材料应变硬化后，如果再加载，材料的屈服应力提高，韧性即延伸率降低。所以正确答案是**(B)**。

2－13 关于材料的力学一般性能，有如下结论，请判断哪一个是正确的：

（A） 脆性材料的抗拉能力低于其抗压能力；

（B） 脆性材料的抗拉能力高于其抗压能力；

（C） 韧性材料的抗拉能力高于其抗压能力；

（D） 脆性材料的抗拉能力等于其抗压能力。

解：大多数脆性材料的抗拉强度低于抗压强度。所以答案**(A)**是正确的。

2－14 低碳钢材料在拉伸实验过程中，不发生明显的塑性变形时，承受的最大应力应当小于的数值，有以下 **4** 种答案，请判断哪一个是正确的：

（A）比例极限；

（B）屈服强度；

（C）强度极限；

（D）许用应力。

解：低碳钢拉伸时，当应力大于或等于屈服强度时才会出现明显的塑性变形。所以正确的答案应该是(B)。

2－16 关于低碳钢试样拉伸至屈服时，有以下结论，请判断哪一个是正确的：

（A） 应力和塑性变形很快增加，因而认为材料失效；

（B） 应力和塑性变形虽然很快增加，但不意味着材料失效；

（C） 应力不增加，塑性变形很快增加，因而认为材料失效；

（D） 应力不增加，塑性变形很快增加，但不意味着材料失效。

解：屈服的特征是应力不增加，而塑性变形很快增加，这时，材料已经丧失承载能力，即失效。所以正确答案是 C。

2－17 关于条件屈服强度有如下四种论述，请判断哪一种是正确的：

（A） 弹性应变为 0．2%时的应力值；

（B） 总应变为 0．2%时的应力值；

（C） 塑性应变为 0．2%时的应力值；

（D） 塑性应变为 0．2 时的应力值。

解：条件屈服强度是人为规定的。规定：产生 0．2%塑性应变时的应力值，称为材料的条件屈服强度。所以正确答案是 C。

4－1 扭转剪应力公式 $\tau(\rho)=M_x\rho/I_p$ 的应用范围有以下几种，试判断哪一种是正确的。

（A）等截面圆轴，弹性范围内加载；
（B）等截面圆轴；
（C）等截面圆轴与椭圆轴；
（D）等截面圆轴与椭圆轴，弹性范围内加载。

解：推导公式 $\tau(\rho)=M_x\rho/I_p$ 时利用了等截面圆轴受扭后，其横截面保持平面的假定，同时推导过程中还应用了剪切胡克定律，要求在线弹性范围加载。所以正确答案是（A）。

4－2 两根长度相等、直径不等的圆轴承受相同的扭矩受扭后，轴表面上母线转过相同的角度。设直径大的轴和直径小的轴的横截面上的最大剪应力分别为 $\tau_{1\max}$ 和 $\tau_{2\max}$，剪切弹性模量分别为 G_1 和 G_2。试判断下列结论的正确性。

（A）$\tau_{1\max}>\tau_{2\max}$；
（B）$\tau_{1\max}<\tau_{2\max}$；
（C）若 $G_1>G_2$，则有 $\tau_{1\max}>\tau_{2\max}$；
（D）若 $G_1>G_2$，则有 $\tau_{1\max}<\tau_{2\max}$。

解：因两圆轴等长，轴表面上母线转过相同角度，指切应变相同，即 $\gamma_1=\gamma_2=\gamma$ 由剪切胡克定律 $\tau=G\gamma$ 知 $G_1>G_2$ 时，$\tau_{1\max}>\tau_{2\max}$。因此，正确答案是(C)。
