重庆大学

08笔记

材料力学

一、绪论

1、三大要求：强度、刚度、稳定性

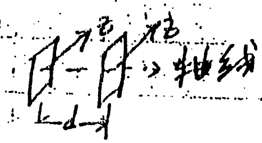
2、变形固体

3、基本假设：连续性、均匀性、各向同性

工作假设：线性弹性，小变形 $\sin\theta=\theta$ ⇒ 可叠加

4、基本变形形式

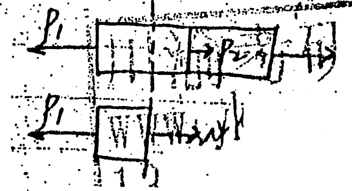
截面的变化：
- 拉伸、压缩：截面距离的变化
- 剪切：上下移动
- 扭转：绕轴转动
- 弯曲：横截面方向的变化



二、轴向拉压

1、轴力N：轴力图（书上概念、符号），截面法

截面法：①切 ②代替 ③平衡 （多向看其形）



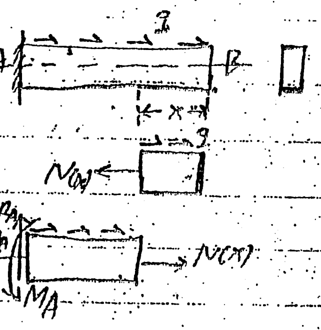
直接法：$N=P_1$

亦可四步：切、取、画、平

正负号约定：拉力正，压力负

计算时：定性，宜按正号

03年考题: a) A … B



b) $N(x)$ … $N(x)$

M_A

2, 应力.

横截面上正应力 σ

斜截面 σ_α, τ_α

定义: 在一点处的某一个微面上分布的内力的集度

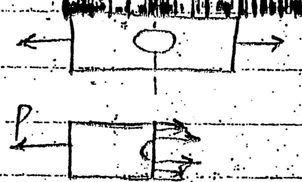
点: 数学上, 无穷小, 单元体

形式上: 无穷多, 单元体形状

单位: $1N/mm^2 = 1MPa$

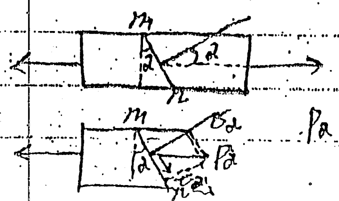
力 — N, 长 — mm, 应力 — MPa

3, 应力集中



孔(的形)状影响应力集中, 而圆孔的影响最小.

4, 斜截面上 σ_α, τ_α



$p_\alpha = \frac{P}{A_\alpha} = \frac{P}{\frac{A}{\cos\alpha}} = \sigma\cos\alpha$

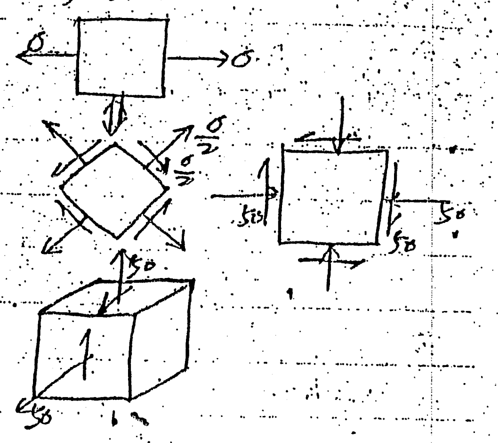
$$\begin{cases} \sigma_\alpha = \sigma\cos^2\alpha = \frac{\sigma}{2}(1+\cos2\alpha) \\ \tau_\alpha = \frac{\sigma}{2}\sin2\alpha \end{cases}$$

$\sigma_{max} = \sigma_{0°} = \sigma$

$\tau_{max} = \tau_{45°} = \frac{\sigma}{2}$

$\sigma_{45°} = \frac{\sigma}{2}$

03-2.2

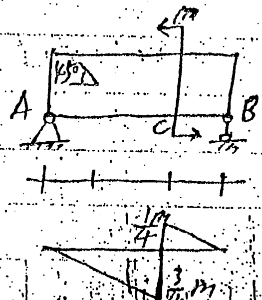


04-2.2…

~~02-1.1~~

06-7

04-2.2



求 1) N

2) $|\sigma|_{max}$

3) $\tau_{max} = \frac{\sigma}{2}$

4) 纵截面的剪应力

真正应力 … 是用 … 应变

5, 拉压杆的变形

1) 区分: 位移, 变形, 线变形, 角变形

2) 均匀变形 $\varepsilon = const$ $\Delta l = \frac{Nl}{EA}$

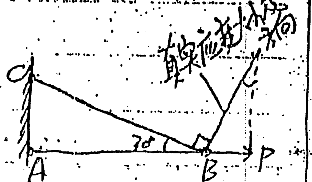
3) 不均匀变形 $\varepsilon = \varepsilon(x)$ $\Delta(dx) = \frac{N(x)}{EA}dx = \varepsilon dx$

$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$ $\Delta l = \int\varepsilon(x)dx$ $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$ 并可求中间纤维变形

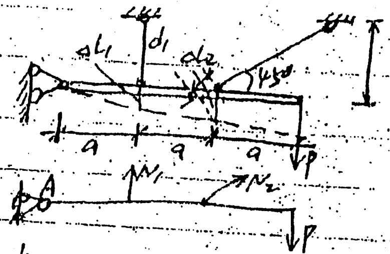
4) 适用条件 $\sigma \le \sigma_p$

5) 横向线应变 $\varepsilon' = -\nu\varepsilon$

题: 01-1.1 03-7 04-2.1 05-1.2

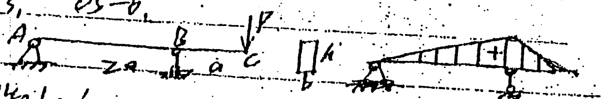


98-1.



已知: $[\sigma]$, 校强度

98-3, 05-6,



已知 $b\times h$, a, E, $[\sigma]$

求: 1) $[P]=$

2) 上边缘伸长 纤维 δ

解: $\sigma=\frac{M}{W}=\frac{M}{W_z}$

$M_{max}=|M_B|=Pa$.

$W_z=\frac{bh^2}{6}$

应变: $\varepsilon_x=\frac{\Delta(dx)}{dx}$ 一点某个应变. } 一点的应变状态.

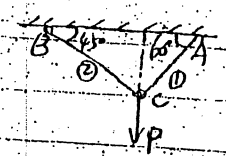
$\gamma_{xy}=$ 正交的 dx 与 dy 间夹角改变量.

6. 拉压杆的强度计算

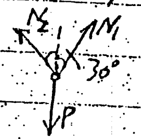
$\sigma_{max}=(\frac{N}{A})_{max}\le[\sigma]$ —— 许用应力.

$[\sigma]=\frac{\sigma_{max}}{n}$ n —安全系数 $[\sigma]$ ╱ $[\sigma_t]$ 抗拉 ╲ $[\sigma_c]$ 抗压

应用 1)校核 2)设计 3)反算承载力



已知, $d_1=d_2=d$ $=57mm$ $[\sigma]=157MPa$



求 $[P]$

解: $[N_1]=[N_2]=A[\sigma]=49.33kN$.

错解: $[P]=[N_1]\times\cos45^\circ+[N_2]\cos30^\circ$.

$$\left.\begin{array}{l}N_1\cos60^\circ-N_2\cos45^\circ=0\\P-N_2\cos45^\circ-N_1\cos30^\circ=0\end{array}\right\}$$

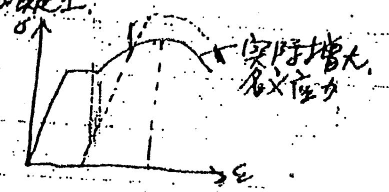
$N_1=0.732P$ $N_2=0.517P$

$[P]=\frac{49.33}{0.732}$

材料力学性质(拉伸为主)

"实例"对象: 低碳钢, 铸铁, 混凝土.

低碳钢, 4阶段



强度指标. σ_y.

$\tau_{45^\circ}=\tau_{max}=\frac{\sigma_y}{2}$, σ_y 破坏本质是 45° 方向的滑移线.

$[\sigma]=\frac{\sigma_y}{n}=\frac{2\tau_y}{n}=2[\tau]$ 注意边缘纤维的抗拉强度.

抗剪强度 < 抗拉强度

当 $\sigma>\sigma_y$, 先卸载, 再加载, 可能重新屈服.

刚度 E.

弹性常数 E, ν, G.

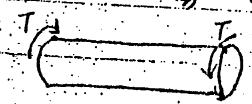
塑性指标. $\delta=\frac{\Delta l}{l}\times100\%$, $\psi=\frac{A-A_1}{A}\times100\%$.

低碳钢抗拉, 压抗压强度等.

铸铁: 脆, 塑料材料界限 $\delta<5\%$. 塑性材料在低温表脆性.

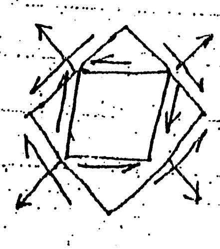
$\sigma_t<<\sigma_c$

抗拉 < 抗剪 << 抗压.



$\tau=\frac{T}{W_t}$

$|\sigma_{45^\circ}|=\tau$



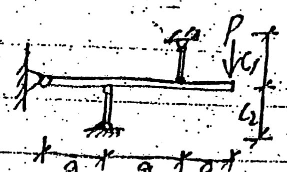
1. 拉压超静定问题　99-4. 01-4

相关念，杆的力个数 n_1

独立方程 n_2

超静定次数 $n = n_1 - n_2$

一般考一二次超静定.



已知 $E = 200GPa$

$d_1 = d_2 = 20mm$

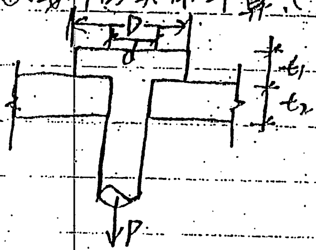
$l_1 = l_2$

又知：杆①应变能 $U_1 = 20N.m$

求：$P = ?$　$2|\Delta l_1| = \Delta l_2$

99-1.2

3. 连接件的实用计算（简单计算）



$A_v = \pi d t_1$

$A_{bc} = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$

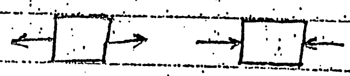
总结：

1. N. Ⓝ. 截面法（不可考）

2. 应力　$\sigma = \frac{N}{A}$　横截面强度

3. 应力集中

4. σ_α, τ_α（拉压）



应力状态

03-5. 04-8. 06-8. 03-2.2 04-2.2

5. 拉压扭(剪切). ε. 定义：一点处沿某方向上微段的伸长量与

应变比. $\varepsilon = \frac{\delta(dx)}{dx}$

γ 定义：一点处任意两互垂方向微段夹角的改变量.

$\Delta l = \frac{Nl}{EA}$　$\delta(dx) = \frac{N(x)dx}{EA}$

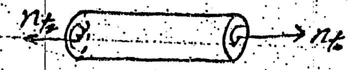
$\Delta l = \int \varepsilon dx$（拉压）　　超静定.

基本内容，小综合，大融合，大综合

75%-80%　　10-15%

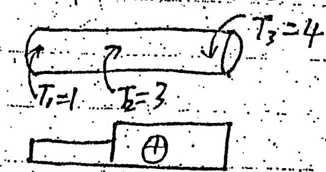
三. 扭转（内力图 10'）

1. 扭矩 M_t



外力偶.　功率 $T = 9.55\frac{P}{n}$

传动轴.



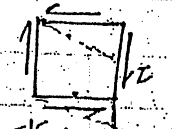
02.

2. 扭转剪应力. 强度条件

1) 薄壁筒. $\frac{t}{r} \le 10$.

$\tau = \frac{M_t}{2\pi r_0^2 t}$

2) 剪应力互等



05-2.4

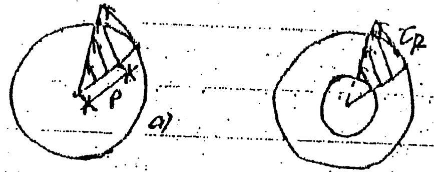
一点处，任意两个互垂面（相交棱）

3) 胡克定律. 此一点处处于纯剪.

$\gamma = \frac{\tau}{G}$　注意符号.　$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

(1) 实心、空心、圆轴扭.

$\tau_\rho = \tau = \frac{M_t \rho}{I_p}$



$W_t = \begin{cases} 实 & \frac{\pi d^3}{16} \\ 空 & \frac{\pi D^3}{16}(1-\alpha^4) \end{cases}$ $\quad \tau_{max} = \frac{M_t}{W_t}$

若图b为实心轴, 挖出 $d=\frac{D}{2}$ 的空心轴.

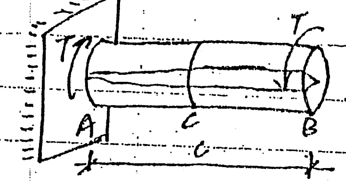
此时. $\frac{\frac{\pi d^2}{4}}{\frac{\pi D^2}{4}}$ $\quad M_t实 = \frac{\pi D^3}{16}\tau_R$

$M_t挖后 = \frac{\pi(\frac{D}{2})^4}{16} \times \frac{\tau_R}{\frac{D}{2}}$

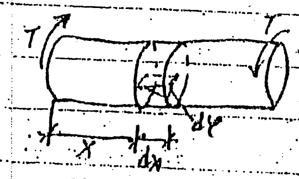
(2) 强度.(横截面)

$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_t} \le [\tau] = \frac{\tau_{gx}}{n}$ $\quad \tau_{gx} \begin{cases} \tau_s \\ 韧性 \end{cases}$

3. 扭转变形, 刚度计算及超静定问题.



03-13



$\theta = \frac{d\varphi}{dx}$ 单位扭转角

$\theta = \frac{M_t}{GI_p} \le [\theta]$

GI_p —— 截面抗扭刚度.

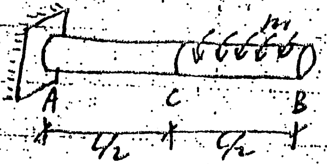
θ 单位 $\quad \theta = \frac{M_t (KN\cdot m) \times 10^6}{G(MPa) I_p (mm^4)} \times \frac{180°}{\pi} \times 10^3 \to °/m$

(N/mm²)

弧度/mm

$\varphi = \int \theta\, dx = \int \frac{M_t}{GI_p} dx$

若 $M_t = const.$ $\quad \varphi = \frac{M_t l}{GI_p}$



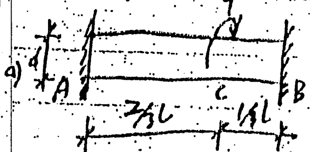
key: $\frac{3ml^2}{8GI_p}$

用卡氏第二定理, 求 $\varphi_{AB}=?$

$\varphi_{AB} = \left\{\frac{\partial}{\partial T}\sum_{i=1}^{2}\int\frac{M_t^2(x)}{2GI_p}dx\right\}_{T=0}$

$= \sum_{i=1}^{2}\frac{1}{GI_p}[M_{t,m}(x)]_{T=0} \cdot \frac{\partial M_t}{\partial T}dx$

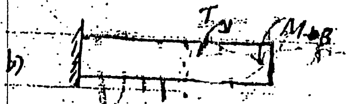
超静定



已知: T. d. l. [τ] $\quad$ 05-4

求: 扭矩图

[T] = ?



解: 画图 b)

① 几何方程

$\varphi_{AB} = \varphi_{AC} + \varphi_{CB} = 0$

或 $\varphi_{AB} = \varphi_{AB \cdot M_B} + \varphi_{AB \cdot T} = 0$

$M_{t1} = \cancel{M_B - T}$

$M_{t2} = M_B$

$\varphi_{AC} = \frac{(M_B - T)\frac{2}{3}l}{GI_p}$ $\quad \varphi_{CB} = \frac{T\,\frac{1}{3}l}{GI_p}$

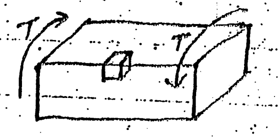
$M_B = \frac{2}{3}T$ $\quad M_{t1} = T/3$

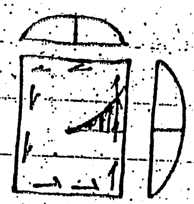
$M_t = W_t[\tau]$

9

10

5. 非圆截面杆件的扭转

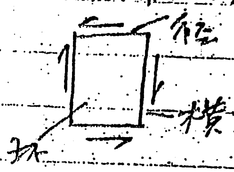




二、薄壁杆

6. 扭转时各点的应力状态及破坏实验

1) 横截面单元体

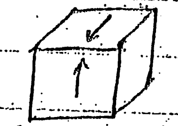


$\tau = \frac{T\rho}{I_p}$

2) $\sigma_\alpha = \tau_{xy}\sin 2\alpha$　　$\sigma_{\alpha max} = \sigma_{-45°} = \sigma_1$

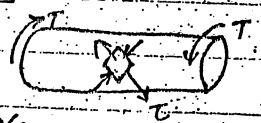
$\tau_\alpha = \tau_{xy}\cos 2\alpha$　　$\tau_{\alpha max} = \tau_{45°} = \sigma_3$

3) 应力状态



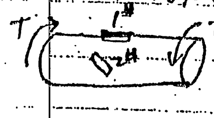
$\sigma_1 = \tau, \ \sigma_2 = 0, \ \sigma_3 = -\tau$

4) 破坏试验



低碳钢：抗剪 < 抗拉 = 抗压

铸铁：抗拉 < 抗剪 < 抗压



已知：扭转

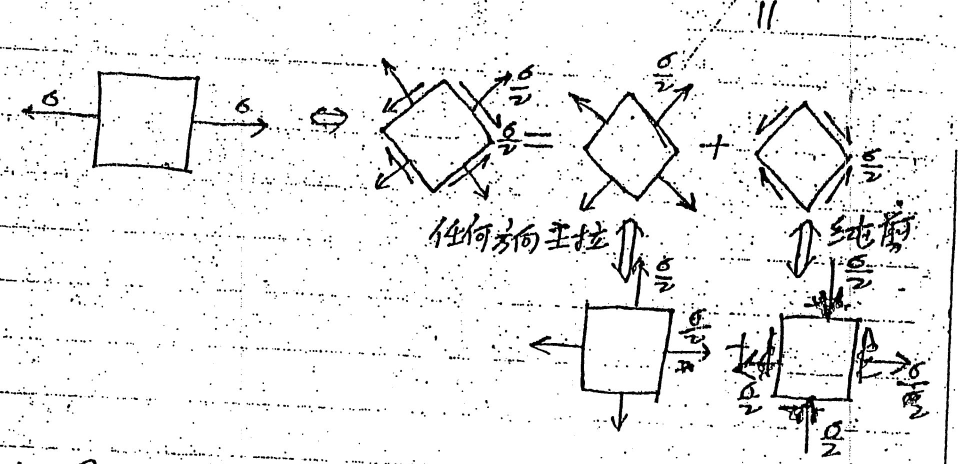
$\varepsilon_{1\#} = 0$

$\varepsilon_{2\#} = \frac{1}{E}(\sigma_{45°} - \nu\sigma_{-45°})$

$= \frac{1}{E}(1+\nu)\tau$

6

11



四、平面图形的几何性质

概述：S，形心，轴的惯性矩 I，一对轴的惯性积 I_{yz}

一点的极惯性矩

目的：1) 形心

2) 形心主轴（平面弯曲条件）稳定临界（屈服状态）

3) I_y, I_z

4) $I_{min} = \{I_y, I_z\}_{min}$

5) i 一回转半径　$i_y = \sqrt{\frac{I_{yo}}{A}}$

1. 静矩（一次矩）静面矩

形心　$S_y = \int_A z\,dA$

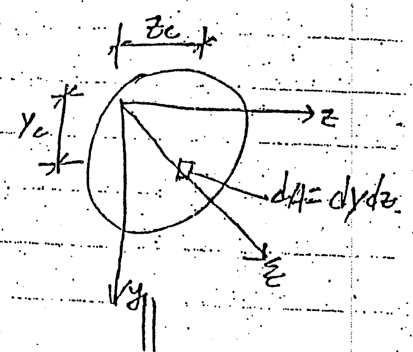
$S_z = \int_A y\,dA$

首先做 y, z 为 指示位置的参考

定 $y_c = \frac{S_z}{A}$　　$z_c = \frac{S_y}{A}$

$S_y = A z_c$　　$S_z = A y_c$

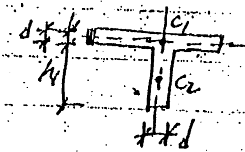
对过形心轴　$S_z = 0$



若已知 $S_z=0$，则 z 轴过形心。

例1) 对称性，形心在对称轴上。

形心与对称轴

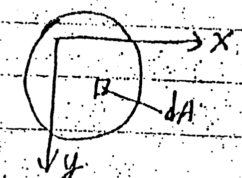


2) 组合图形

$$S_z^{①+②}=\sum_{i=1}^{2}S_{zi}=0+dh_1\left(\frac{h_1}{2}+\frac{d}{2}\right)$$

$$y_c=\frac{S_z}{\sum A_i}=\frac{\sum A_i\bar{y}}{\sum A_i}$$

2. 惯性矩与惯性积　　二次矩



$I_y=\int_A z^2dA$　　反映面积的分布

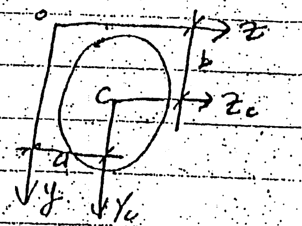
$I_z=\int_A y^2dA$

$I_{yz}=\int_A yz\,dA$

$I_y>0$，$I_z>0$，I_{yz} 符号不定，皆可能。若有一轴对称必为0

$I_y=\sum_{i=1}^{n}\int_{A_i}z^2dA$

3. I_y、I_z、I_{yz} 的平行移轴公式



$I_y=I_{yc}+Aa^2$

$I_z=I_{zc}+Ab^2$

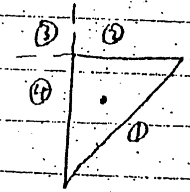
$I_{yz}=I_{yczc}+Aab$

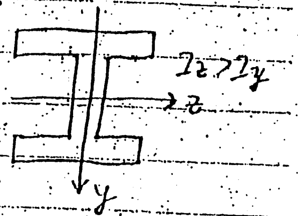
结论：过形心

z_c 轴的平行轴 z_i

$\{I_{zi}\}_{min}=I_{zc}$

扩大到形心的任一轴





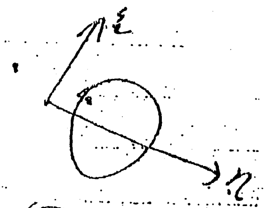
I_{yz} 符号反映所在象限，面积分布，离已轴轴距

4. 转轴公式

若已知过O点，y_{01}、z_{01} 的 I_{y_0}、I_{z01}、$I_{y_{01}z_{01}}$

则 $I_{y_1}=\frac{I_y+I_z}{2}+\frac{I_y-I_z}{2}\cos 2\alpha-I_{yz}\sin 2\alpha$

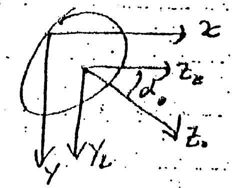
$I_{y_1z_1}=\frac{I_y-I_z}{2}\sin 2\alpha+I_{yz}\cos 2\alpha$



应用①，对于指定的O，找出其主轴。

$I_{y_0z_0}=0$，则 z_0、y_0 轴为主轴

应用②，针对形心坐标系



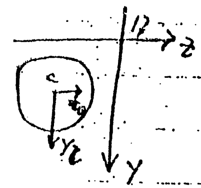
全 y_0、为 z_0（主轴）与 z_c 夹角

$$\tan 2\alpha_0=\frac{-2I_{y_cz_c}}{I_{y_c}-I_{z_c}}$$

$$\left.\begin{matrix}I_{y_0}\\I_{z_0}\end{matrix}\right\}=\frac{I_{y_c}+I_{z_c}}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{I_{y_c}-I_{z_c}}{2}\right)^2+I_{y_cz_c}^2}$$ 任一对主惯性轴二惯性矩相等

$I_{z_0}=\{I_{z_i}\}_{min}$　　主轴

02-2.2　　叠一四



例1. 问 1) I_{yz} 是否可能为0

2) 令 y、z 主轴，旋转时是否存在

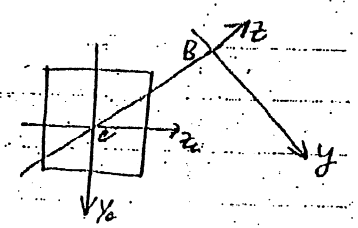
y_0、z_0 使 $I_{z_0y_0}$ 和

3) y_0、z_0 位置

例2. 已知 y 轴为 O 的主轴

B 在图形之外，OB 为 BC 连线

求 $I_{yz}=$

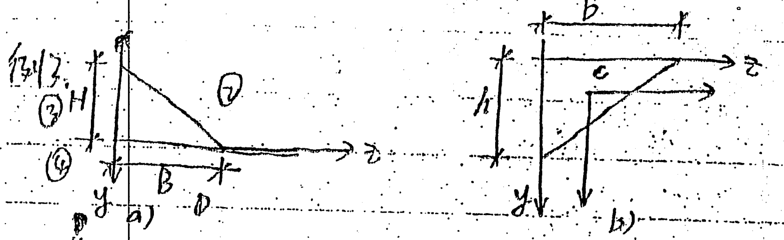


13

7

14

例13.



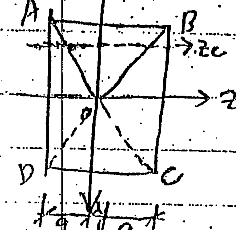
已知：图a) $I_{yz}=-\frac{B^2H^2}{24}$，图中C为形心，

b) 问 $I_{yz}=?$ $+\frac{b^2h^2}{24}$

2) $I_{y_cz_c}=I_{yz}-Aab=-\frac{b^2h^2}{72}$

3) $I_{y_cz_c}=$

例14.



已知：△AOB为正方形图形的1/4，正方形边长2a

又 $I_{yAOB}=I$

C为△AOB的形心

求：1) 利用I、a 表 $I_{z,AOB}=$

2) $I_{zc,AOB}=$

解 $I_{yAOB}=I_{zAOD}$ 对称

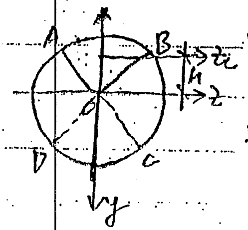
$I_{z,AOB}=\frac{1}{2}[I_{z正方形}-2I]$

$=\frac{1}{2}[\frac{4}{3}a^4-2I]=\frac{2a^4}{3}-I$

$I_{zc,AOB}=I_{z,AOB}-A\cdot(\frac{2}{3}a)^2$

正多边形中过形心的所有轴的惯性矩等。

例15.



已知：图OAB为半圆，y为其对称轴

C为AOB形心，h已知，$z_c // z$

求：1) $I_{z,AOB}=\frac{1}{2}$

2) $I_{zc,AOB}=$

8

15

5) 回转半径

$i_y=\sqrt{\frac{I_y}{A}}$ $i_z=\sqrt{\frac{I_z}{A}}$

实例中 $i_0=\{i_{cy}, i_{cz}\}_{min}$

稳定失稳 偏心受压中性轴为其轴

6. 本章几何性质的应用

1) 外力分布载荷对某点之矩

2) 由S计算形心

由形心面积

3) S的正负号

S=0的情况

S的对称性

4) 形心主轴 I_{min} 与 I_{max}

所谓I_{min}指全截面的最小 中对任何轴的

I_{max}指相对于形心轴而言。

为解决 平面弯曲 | 甚不出

斜弯曲

稳定性

△5) 转轴公式 I_{yz}

b) $I_p=I_y+I_z$ 一定

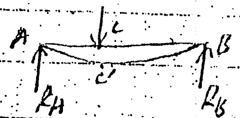
15

—9. 11. 15

五. 弯曲内力

基本变形：截面绕轴转动。

1. 平面弯曲 < 荷载面 / 变形平面

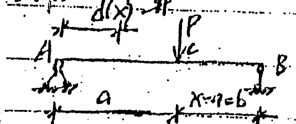


条件：1. 荷载面过弯心(主轴)？

2. 与形心主惯面之一平行(或重合)

正 几何变形截面变形以形心主轴平面弯曲

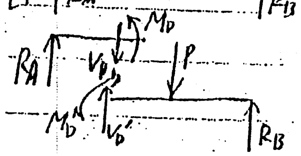
2. 内力计算



a) 截面法。

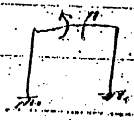
方向

M—下拉，内拉为正。



b)

c)



直截法：V_A：同向的取正，反向取负，代数和。

M_D：$M_D = R_A \cdot d$

3. 内力方程 内力是分布力的合力。

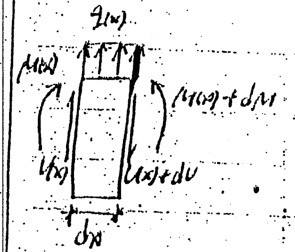
$V = V(x)$ $M = M(x)$

如b) $M(x) = R_A x$ $x \in (0, a)$

c) $M(x) = R_B(l-x) - P(a-x)$

如 x_1、x_2 表两部分 AC、CB 两段

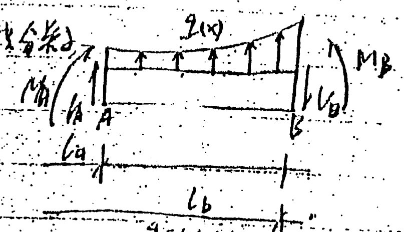
4. 2. V、M 的微分关系。



$\frac{dV}{dx} = q(x)$

$\frac{dM}{dx} = V(x)$

5. 积分关系

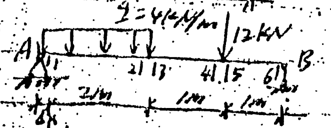


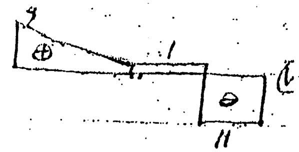
$\int_{V_A}^{V_B} dV = \int_{l_a}^{l_b} q\,dx$ 面积 A

$V_B = V_A + A_{q,AB}$

$M_B = M_A + A_{V,AB}$

05-3.





解：1) 支反力 $R_A = 9kN$ $R_B = 11kN$

2) $V_A = 9kN = V_A$

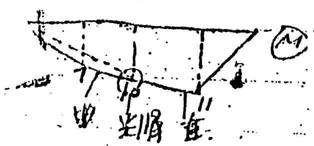
$M_A = 9 \cdot dx = M_{A右} = M_A$

$V_C = V_{C左} = 9 + (-4) \times 2 = 1$

$V_C = V_C$、$V_{左} = V_{右}$、$V_{左} = ...$、$V_{左} = V_{右} = V_{B左}$

Ⓜ. 直线 — 两点决定

曲线 — 三点决定



注：作图要则 ①统一比例：基线

②分段

③形状(曲、直、顶点、尖端)

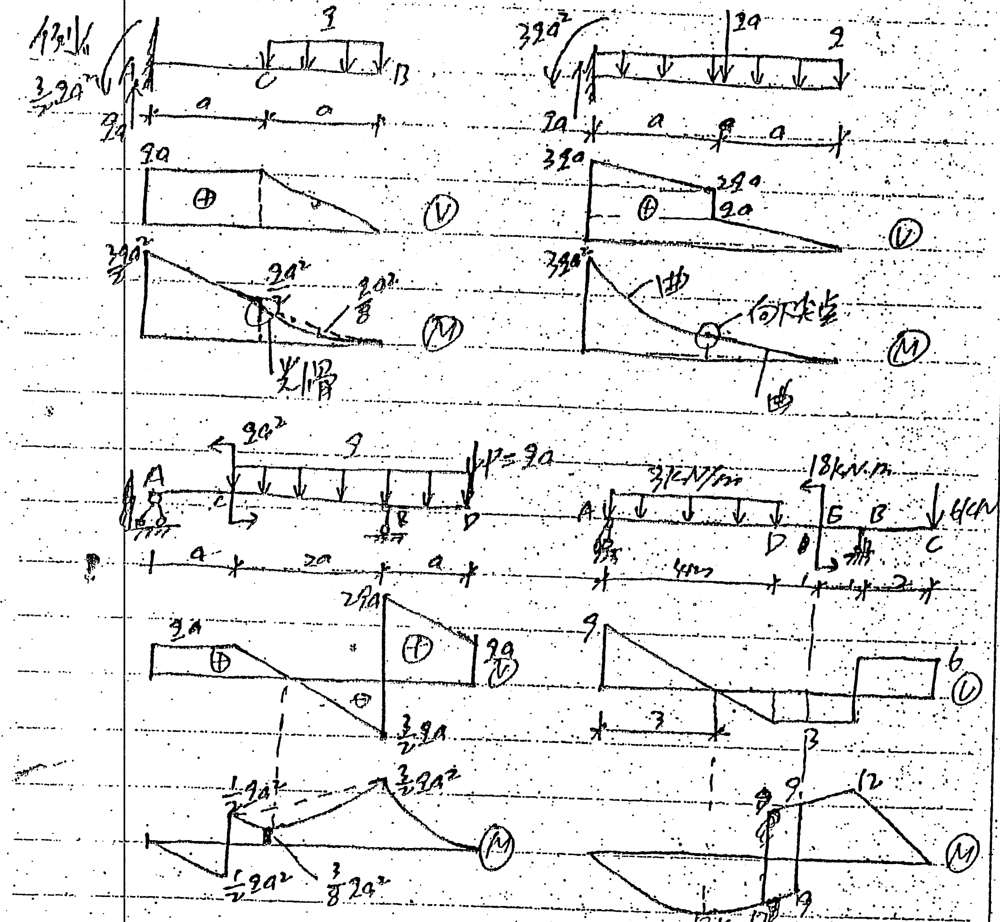
④Ⓥ注明正负

Ⓜ一定给在受拉一侧

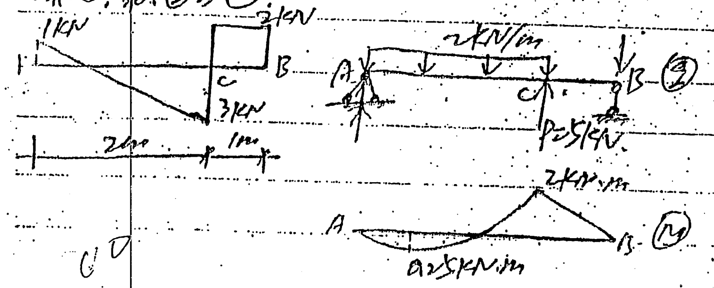
⑤特值

9

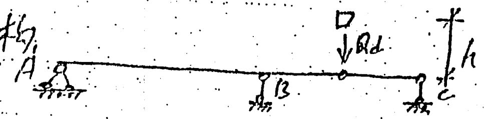
例1

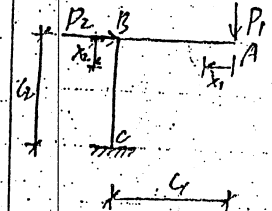


已知Ⓥ,求③与Ⓜ



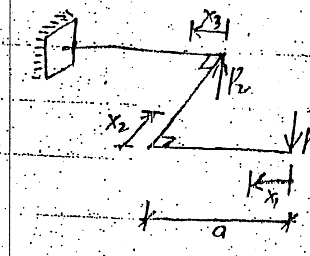
6. 基本结构





$M(x_1) = -P_1 x_1$

$M(x_2) = -P_2 x_2 - P_1 l_1$



$M(x_2) = -P_1 x_2$

$M_e(x_2) = -P_1 a$

六、弯曲应力

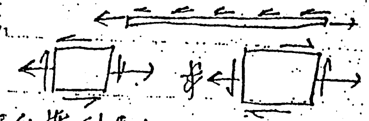
1. 弯曲正应力

1) 纯弯曲 ($V \equiv 0, M \neq 0$ 的区段)

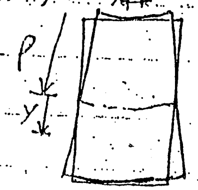
2) 两个假设: 纵向纤维互不挤压, 平截面

3) 横力弯曲 ($V \neq 0, M \neq 0$)

应力状态



4) 微段变形几何关系



推导 $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = \frac{\sigma}{Ey} = \frac{\varepsilon}{y} = \frac{d\theta}{dx}$

$\sigma = \frac{My}{I_z} = \frac{My}{I}$ $\quad \sigma_{max} = \frac{My_{max}}{I} = \frac{M}{W_z}$

最用公式列:

① $\varepsilon = \frac{y}{\rho}$

② $\sigma = E\frac{y}{\rho}$

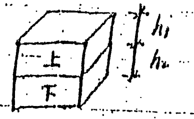
③ $\sigma = \frac{M}{I_z} y$

④ $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}$

20

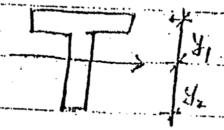
3)分布

(2)



$$\frac{1}{\rho}=\frac{M_上}{EI_1}=\frac{M_下}{EI_2}$$

$$M_上+M_下=M$$



$W_{z_1}=\frac{I}{y_1}$

$W_{z_2}=\frac{I}{y_2}$

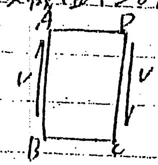
2. 剪应力 τ

不计纵截面翘曲变形

由切块力平衡

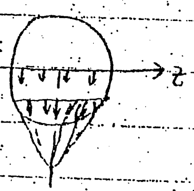
矩形 $\tau=\frac{VS_z}{bI_z}$

(横截面应力及强度，所求如法，约15')

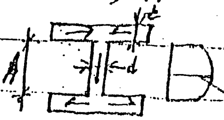


矩形 $\tau_{max}=\frac{3}{2}\tau_{平均}=\frac{3}{2}\frac{V}{A}$

圆截面 $\tau_{max}=\frac{4}{3}\frac{V}{A}$



工字型



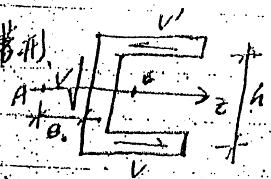
$\tau_{max}=\begin{cases}有表可查 & \tau_{max}=\frac{V}{d(\frac{I}{S_z})}\\ 不表可查 & \tau_{max}=\frac{V}{hd}\end{cases}$

腹板 — τ_y $\tau_{水平}=\frac{VS_z}{tI_z}$

翼板 — τ_z

21

槽形



1) 腹板上 τ_y，合力 V。

2) 上、下翼板合上。

3) 分布的剪应力有关的力 (c.力)

3. 弯心，$e_0=\frac{V'h}{V}$

4. 梁的强度计算

1) 正应力 $\sigma_{max}=\frac{M}{W}\leq[\sigma]$

应用：① $[\sigma_t]=[\sigma_c]$ Z中性轴为对称轴

$\sigma_{max}=\frac{M}{W}\leq[\sigma]$

② $[\sigma_t]\neq[\sigma_c]$ 但Z为对称轴

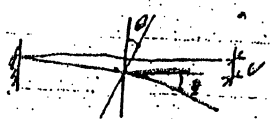
(当有正、负弯矩的峰值)

③ $[\sigma_t]\neq[\sigma_c]$ Z不是对称轴

有正弯负弯矩的有峰值 (常考)

六 弯曲变形

1. 基本概念



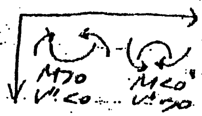
挠曲线 (平面曲线)

挠度 $v=v(x)$

转角 $\theta=\theta(x)$

v向下为正，θ顺时针为正。

$$\frac{1}{\rho}=\frac{d\theta}{dx}=\frac{\varepsilon}{y}=\frac{M}{EI}$$



$EIv''=-M(x)$

00—方)

21

11

1. 重积分求 v, θ.

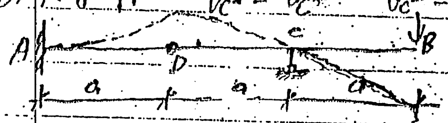
1) $v' = \theta(x) = \int \frac{M}{EI}dx + C$

$v = \iint \frac{M}{EI}dx\,dx + C_1 x + C_2$

定常数

2) 边界条件

3) 连续条件. $v_{C^-} = v_{C^+}$ $\theta_{C^-} = \theta_{C^+}$

例. 

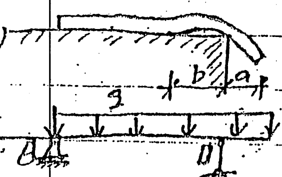
① 分三段 设AD为v_1, DC为v_2, CB为v_3

② 边界条 $v_{1A}=0$, $v'_{1A}=0$, $v_{2C}=0$ (或 $v_{3C}=0$)

③ 连续条件: $v_{1D}=v_{2D}$, $v_{2C}=v_{3C}$, $v'_{2C}=v'_{3C}$

4. 挠曲线大致形状

1、M图为主要参照

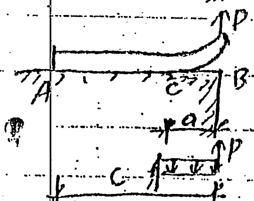
例. 1) 

细钢丝

q (单位长度)

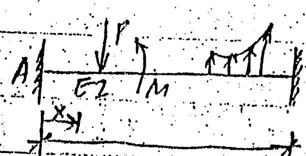
$\theta_B=0$, $v_B=0$, $v_C=0$

$b=\sqrt{2}a$

2) 

$M_A=0$, $M_{Bc}=0$, $M_C=0$

$\Rightarrow a=\frac{2}{3}c$, $v_B=\frac{2qc^4}{243EI}$

 书证: 弯矩图总面积为0.

证: $\frac{d\theta}{dx}=v''=-\frac{M(x)}{EI}$

$\int_{\theta_A}^{\theta_B} d\theta = -\int_0^l \frac{M(x)}{EI}dx \xrightarrow{\theta_A=\theta_B} 0$

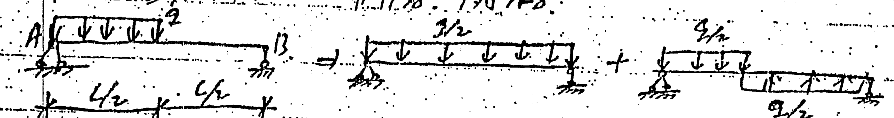
3. 叠加法计算弯曲变形.

前提: ① 线弹性

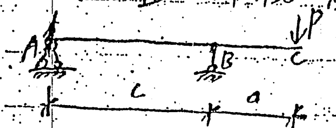
② 小变形

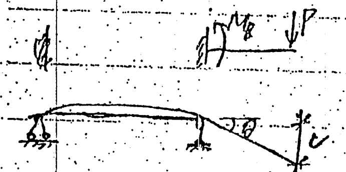
$v = v(P_1, P_2, \dots, P_n) = v_{P_1} + v_{P_2} + \dots + v_{P_n}$

1) 直接(直接)法 书P158. 例7-8.

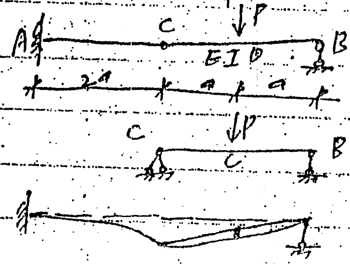


2) 间接叠加 书P158 例7-9

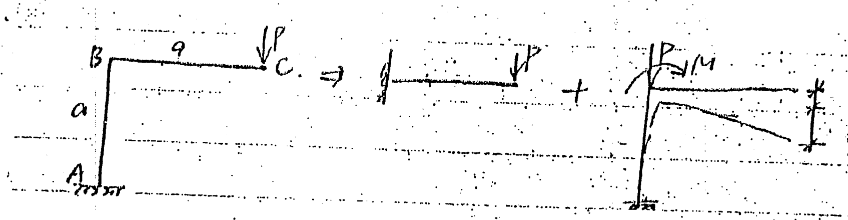




$v=\theta\cdot a$

例. 

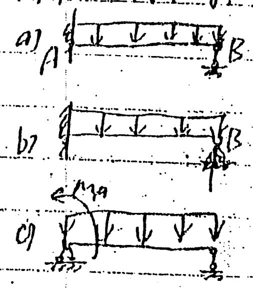
23



4. 梁的刚度条件

$|v_{max}| \le [v]$ $\qquad |\theta_{max}| \le [\theta]$

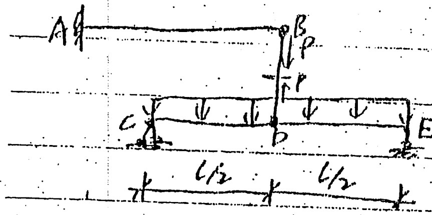
5. 简单超静定梁



n=1

多余约束

变形比较法



解 $\delta_B + \delta_P = 0$

第七章 应力状态及应变状态理论（重点 13'）

重点：① 求主应力

② 相当应力

③ 广义Hook定律及应用

1. 应力状态理论

一点 < 数学上无穷小 / 形状上不考虑

表示点的方法：单元体 / 横截面单元体 / 主单元体 / 斜截面单元体

其他术语：主面、主方向、主应力。

基本规律：一点处任意三个互垂微面上应力分量可充分代表其他所有面上的应力分布

应力状态：统一点所有各个微截面上应力分量的全体（集合）

上述规律：⟺ 应力状态均有6个独立分量

① 一点处于任意应力状态，总存在三个互垂微面，其上剪应力分量恒为0，此三面的法向——主方向，三面均为主面，该面上正应力——主应力（包括0）

讨论：1) 一般应力状态只有三个主方向（主轴）

2) 若各向等拉、各向等压，则任意面均为主面、主轴向

如何代表一个应力状态：1) 由任意三个互垂面上，用6个独立分量

附 一一般应力状态；2) 三个主面 三个主应力充分代表一主单元体。

应力状态（依主应力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 分类）

规定要求：$\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \sigma_3$

1) 二个为0，一个不为0，单向 $\begin{cases} \sigma_1 \neq 0, \ \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \\ \sigma_1 > 0, \ 单拉 \\ \sigma_3 \neq 0, \ 单压 \end{cases}$

轴向拉伸 单拉

压缩 单压

扭转（不涉及）

弯曲.

2) 一个为0，另2个不为0. $(\sigma_1, 0, \sigma_3)$ $(0, \sigma_2, \sigma_3)$ $(\sigma_1, \sigma_2, 0)$

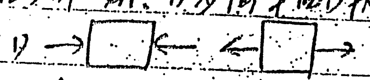
平面二向.

3) 三个均不为0.

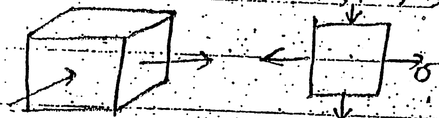
三向应力，空间.

2. 3) 属复杂应力状态，1) 为简单应力状态.

特殊情况：1)

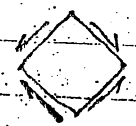


2) 当 $\sigma_1 \neq 0$, ~~$\sigma_2 \neq 0$~~ $\sigma_2 = 0$ $\sigma_3 \neq 0$, 当 $\sigma_1 = -\sigma_3$



纯剪

属二向应力状态.



△ 3) 在 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 中 已知其一，

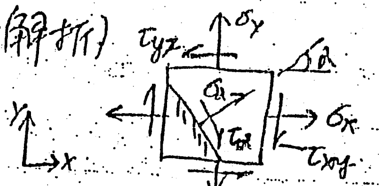
化为平面应力问题 单向应力状态加二向应力状态

已知一个主平面，求另外两个主平面

2. 平面应力状态分析（只要求解析）

1) 符号的约定

已知的状况



前提 $\sigma_z = 0$

斜截面单元体

不一定是横截面单元体

若是，则按实际情况分析.

2) 公式 $\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha$

$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha + \tau_{xy}\sin 2\alpha$

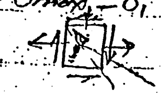
$\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha+90} = \sigma_x + \sigma_y$ （只要 σ_α 不变即成立）

3) σ_{max} σ_{min}

$$\sigma_{\substack{max \\ min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

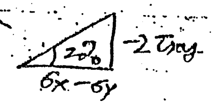
当用于梁内一般点 $\sigma_y = 0$. $\sigma_{max} = \sigma_1$, $\sigma_{min} = \sigma_3$ $\Rightarrow \sigma_2 = 0$

由 σ_{max}. 0. σ_{min} 排序.



4) 主向 $\tan 2\alpha_0 = \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$

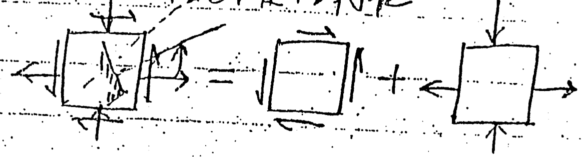
定 $2\alpha_0$ 象限.



法①：$-2\tau_{xy}$ 与 $\sin 2\alpha_0$ 对应.

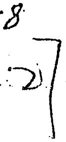
$\sigma_x - \sigma_y$ 与 $\cos 2\alpha_0$ 对应

法②. 定性判定



习题: 04-2.12 03-1.1 03-2.2 03-8 01-2.2

作图解法.



5. 广义胡克定律及应用.

1) 三向

① 已知主单元体，也只有主应变

② 一般单元体

2) 二向一种应力情况

① 主单元体 $\sigma_3=0$

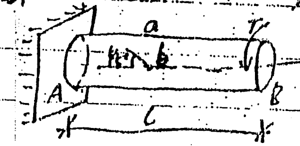
$\varepsilon_1=\frac{1}{E}(\sigma_1-\nu\sigma_2)$

$\varepsilon_2=\frac{1}{E}(\sigma_2-\nu\sigma_1)$

$\varepsilon_3=\frac{-\nu}{E}(\sigma_1+\sigma_2)$ $\gamma_{xy}=\frac{\tau_{xy}}{G}$

② 一般 05-8 $\varepsilon_\alpha=\frac{1}{E}[\sigma_\alpha-\nu\sigma_{\alpha+90}]$

第七章 01-9, 04-8 02-9; $\gamma_\alpha=\frac{\tau_\alpha}{G}=\frac{2(1+\nu)}{E}\tau_\alpha$

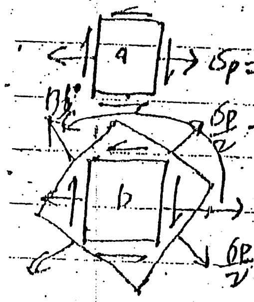


已知: d, $\varepsilon_{\cdot 0^\circ}=\varepsilon$

$\varepsilon_{b,45^\circ}=\varepsilon_b$. E.V.

求P. $\varepsilon_{b,45^\circ}$

解.



$\sigma_p=\frac{4P}{\pi d^2}$ $\varepsilon_a=\frac{1}{E}[\frac{4P}{\pi d^2}-\nu\cdot 0]$

$\frac{\sigma_P}{2}-\tau$ $\varepsilon_b=(\varepsilon_{b,45^\circ})$ a图

$=(\varepsilon_{b,135^\circ})$ b图

$\frac{\sigma_P}{2}+\tau$ $=\frac{1}{E}[(\frac{\sigma_P}{2}+\tau)-\nu(\frac{\sigma_P}{2}-\tau)]$ $\tau=\frac{T}{W_t}$

6. 复杂应力状态下的比能.

7. 强度理论.

1) 概念 —— 复杂应力状态的强度问题.

单拉 / 单压 > 已有试验的实验，强度由实验值确定.

2) 强度理论的建立.

以单向应力状态强度，材料的强度为主要参考.

① 两种形式的破坏 < 脆性 —— 断裂. / 塑性 —— 剪切.

② 用 (X) 三向与 (X) 单向相当

3) 四个强度理论.

① 最大拉应力. (σ_1)三向 $=(\sigma_1)$单向. $\sigma_1>0$.

在 $(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ 中只考虑 σ_1

由不同方向的 σ_{max}, $\sigma_{min}\leq 0$

② 最大拉应变.

结论. 三个主应变方向与三个主方向相对应

$\varepsilon_1=\frac{1}{E}[\sigma_1-\nu(\sigma_2+\sigma_3)]$

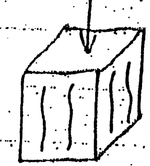
1359

讨论. 1) 第一、二强度理论适用于脆性断裂.

2) 第一强度理论用得最好.

第二强度理论. 若 $\sigma_1>0$, $\sigma_2>0$, $\sigma_3>0$, 则第二强度理论危险.

若 $\sigma_1=\sigma_2=0$ $\sigma_3<0$.



解决此问题，二理适用

29

15

③ τ_{max} 理论.

平面应力, $\frac{\sigma_{max}-\sigma_{min}}{2}=\tau_{max}$ （只有 $\sigma_{min}<0$ 时正确）

中等强度 $\tau_{max}=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}$

$\sigma_1-\sigma_3\le[\sigma]$.

④形状改变比能.

$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2}\le[\sigma]$

17. 相当应力. $\sigma_r\le[\sigma]$

$\sigma_{r1}\le[\sigma]$ $\sigma_1>0$ | 脆性破坏

$\sigma_{r2}=\sigma_1-\nu(\sigma_2+\sigma_3)$ $\sigma_2>0$

$\sigma_{r3}=\sigma_1-\sigma_3$ | 塑性破坏

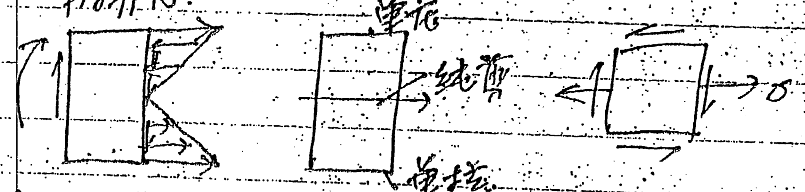
$\sigma_{r4}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2}$

讨论: 3) 各向等拉 用一;

各向等压 均不适用.

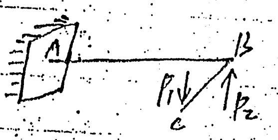
4) 掌握 σ_{r3}, σ_{r4}.

需要分析特别三向 除了知主应力 仍 σ_{max}, σ_{min} 再排序.



$\sigma_{1,3}=\sigma_{max,min}=\frac{\sigma}{2}\pm\sqrt{(\frac{\sigma}{2})^2+\tau^2}$

$\Rightarrow\sigma_{r3}=\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}$ $\sigma_{r4}=\sqrt{\sigma^2+3\tau^2}$

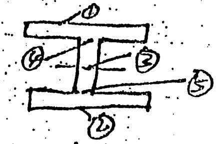


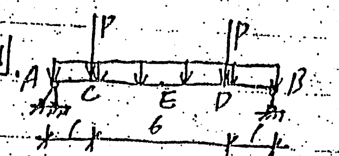
A: 

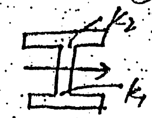
$\sigma_{r3}=\sqrt{(\frac{M}{W})^2+4(\frac{M_n}{2W})^2}=\frac{1}{W}\sqrt{M^2+M_n^2}$

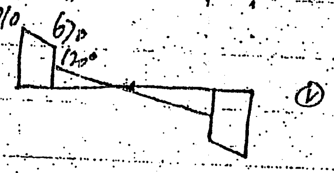
扩 P21. 例10-6.

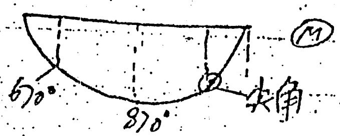
交界处且处于腹板上.



例. 







1) 横截面应力计算及强度.

拉(压) $\sigma=\frac{N}{A}$

扭 $\tau=\frac{M_n}{W_n}$ 圆

平面弯曲 $\sigma=\frac{M}{W}$

危面 — M — E面

V< 危面 A右、B左

危点

2) 主应力强度

危面 C右、D左.

危点 σ_{k1}, τ_{k1}

$\sigma_{r3}=\sqrt{\sigma_{k1}^2+4\tau_{k1}^2}$

1)与2) 结论 全面校核

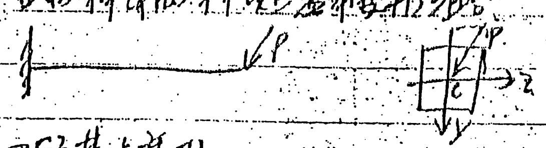
第十一章 组合变形

05年与稳定结合 —10'

04 → 6'　03 → 10'　01—5 → 13'

1. 基本概念

1) 由两种或两种以上基本变形组合



2) 四种基本变形

3) ①斜弯曲：1) 横力过弯心连线
2) 与形心主轴之一斜交

② 弯矩组合（为求合弯矩） $M=\sqrt{M_y^2+M_z^2}$

M_{max} 应逐段由界处

$\sigma_{r3}=\frac{1}{W}\sqrt{M^2+M_T^2}$

③ 拉压与弯曲

④ 偏心拉与压缩

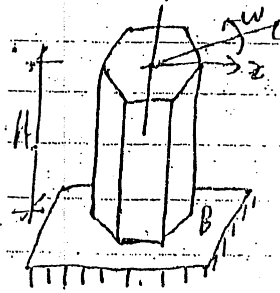
2. 斜弯曲

① 找弯曲中心，找形心主轴

注意是否正n边形

② 采用叠加法，前提：线弹性，小变形

③ 分解两个方向平面弯曲

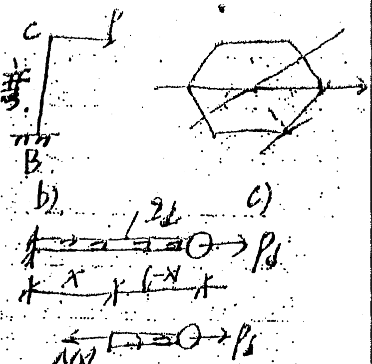


例：正六边形边长为a，金属球质量Q_1，绳长ρ，均匀细杆重Q_2，忽略重力影响，求σ_{max}，水平旋转

解：1) 分析，σ_{max}在B面，图b)

正n边形，$I_z=I_y$，不存在斜弯曲

$\sigma_{max}=\frac{M y_{max}}{I}$，$y_{max}=a$



2) 求P.

$q_x=\left[\left(\frac{Q_2}{\rho}\cdot dx\right)\cdot\frac{1}{g}\cdot x\omega^2\right]\cdot\frac{1}{dx}$

$=\frac{Q_2}{g\rho}\omega^2 x$

$P=(N)_{x=0}=\int_0^{\rho} q_x dx+P_1=\frac{Q_2}{2g}\omega^2\rho+\frac{Q_1}{g}\rho\omega^2$

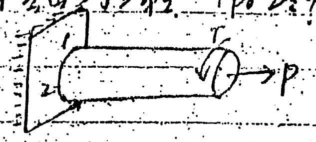
$M=PH$

$\sigma_{max}=\frac{H\omega^2\rho a}{2gI}(Q_2+2Q_1)$

讨论：1) 所有的正n边形截面，形心主轴的特殊性

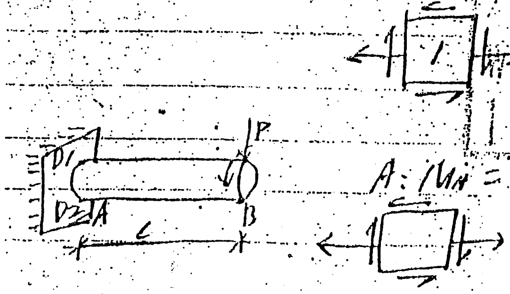
2) 图 M_t M_x

3. 弯曲与拉扭（特点：只涉及圆轴，无斜弯曲，轴载荷合弯矩）



$N=P$　$M=T$

$\sigma=\frac{N}{A}$　$\tau=\frac{M_t}{W}$　$\tau_{max}=\frac{M_t}{W_t}$



A: $M_z=-PL$，$M_t=T$

$\sigma_{D}=\frac{|M_z|}{W_z}$

$\sigma_{D_1}=-\sigma_{D_2}$

$\sigma_{r3}=\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}$　$\sigma_{r4}=\sqrt{\sigma^2+3\tau^2}$

33

以弯扭为例，

$\sigma_{r3} = \sqrt{\left(\frac{M_\omega}{W}\right)^2 + 4\left(\frac{M_e}{2W}\right)^2} = \frac{M_{r3}}{W} \le [\sigma]$

$M_{r3} = \sqrt{M_\omega^2 + M_e^2}$

$\sigma_{r4} = \frac{M_{r4}}{W} = \frac{1}{W}\sqrt{M_\omega^2 + 0.75 M_e^2}$

注：1) 塑材上，负季值动轴不考虑，

2) 强调用来合弯矩。

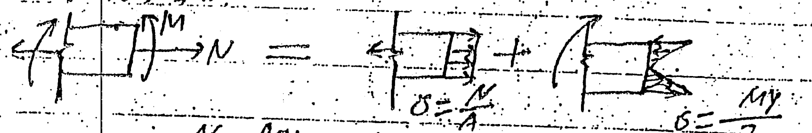
3) 危点应力状态（已知横截面单元体）与梁弯曲一般点相似

4) 传动轴，当 $V \neq 0$ 时，题中未指明，忽略弯曲切力（τ一般较小）

5) 横截面圆体，σ 与 τ_{xy}，σ 与 τ_{xy} 等不精确。

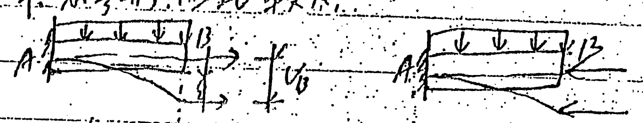
02-10，04-66 转危面。 折杆！

4、拉压与弯曲



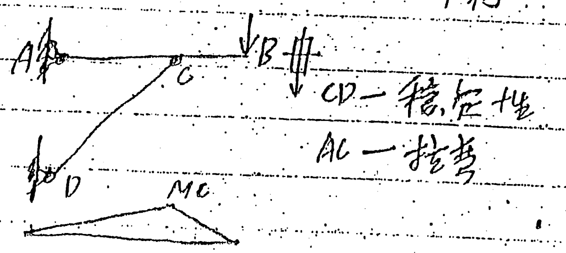
$\sigma_{max/min} = \frac{N}{A} \pm \frac{My}{I}$

注：适用条件，小变形，但比较大。



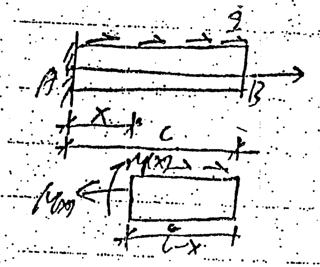
有利 不利

05—5



CD—稳定性

AC—拉弯



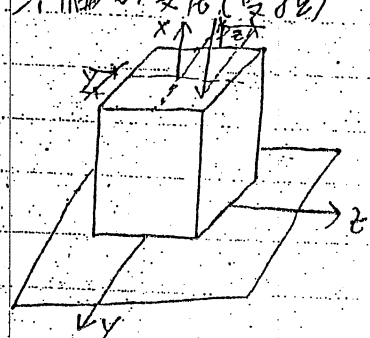
$\Delta_{BH} =$ $\Delta_{BV} =$

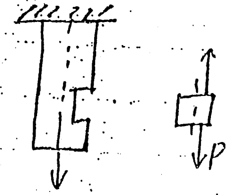
$M(x) = q(l-x)$

$M = -q(l-x)\frac{l}{2}$

积分法，卡氏定理。

5、偏心受压（受拉）





$M_y = P \cdot z_p$，$M_z = P \cdot y_p$

任意点（一象限） $\sigma = -\frac{P}{A} - \frac{P}{I_y} z_p \cdot z - \frac{P}{I_z} y_p y$

$\sigma = -\frac{P}{A}\left(1 + \frac{z_p z}{i_y^2} + \frac{y_p y}{i_z^2}\right)$

讨论 1) 为，须以形心主轴为准

2) 中性轴位置 $\sigma = 0$， $1 + \frac{z_p z}{i_y^2} + \frac{y_p y}{i_z^2} = 0$

3) 中性轴截距 设 y 轴为 a_y

$y_p \cdot a_y = -i_z^2$

$z_p a_z = -i_y^2$

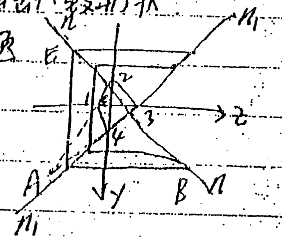
4) 最大应力 $\sigma_{max} = \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z}$

6 截面核心

1)定义：形心附近的一个区域，当压力作用在这个区域内或边界上，则中性轴不会与截面相切。

2)定性绘出大致形状

58 页题



1)同作用点C时，绘中性轴位置，压固
2)若中性轴 n_1—n_1 过D点，求压力作用点

3) ... < ... 大致形状
... = ...

第十三章 压杆稳定（必考）

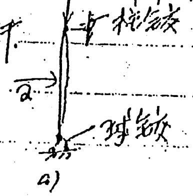
05 — 3'+10'	(21.5)	02 — 13'	(7)
06 — 6'	(6)	01 — 12'+3'	(23.9)
07 — 10'	(8)	00 — 12'	(10)
04 — 3'+10'	(12.5)		
03 — 6'	(5)		

重点 1)理想压杆（欧拉压杆）
P_{cr}, σ_{cr}, λ, μ,

2)工程压杆的稳定计算

1.稳定的基本概念

1)刚球三种平衡状态

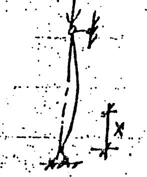


a) Q — 干扰
a) Q撤出，挠曲线可恢复
b) ———不可——
c) 无论Q撤去，δ继续变大，直到破坏

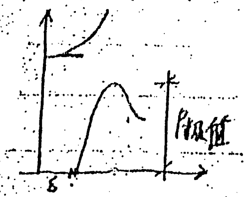
压杆稳定性——保持原有直轴平衡状态能力

$P - P_{cr}$ —稳定——不稳定的临界值

P_{cr} —— 压杆临界状态压力值



3)平衡路径（P—δ 曲线）　分叉点失稳，理论



4)极值点失稳——工程压杆

2.理想压杆的临界力 P_{cr}　$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l_0^2}$

$l_0 = \mu l$.　μ — 长度系数

I — 必须以形心主轴为准. I_y, I_z

l_0 — l_{0y}, l_{0z}（两端约束）

~~例~~ 书P277 例13-3　　05—2.1 整体与局部失稳！

3.临界应力 σ_{cr}

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E}{l_0^2} \cdot \frac{I}{A} = \frac{\pi^2 E}{(\frac{l_0}{i})^2} \qquad \lambda = \frac{l_0}{i} \qquad \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

讨论：1)依形心主轴

2)区分 λ_y, λ_z

3

3) $(\sigma_{cr})_1$, $(\sigma_{cr})_2$

4) $\sigma_{cr} \le \sigma_p$

$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \le \sigma_p$

令 $\lambda = \lambda_p$ 时 $\lambda_p = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}$

λ_p — 细长杆界限

若 $\lambda \ge \lambda_p$ 时，σ_{cr}、P_{cr} 适用

$\lambda < \lambda_p$ 时，不能计算

例13-6、 03—5

4、压杆稳定校核

1) 工程压杆的稳定

2) 规范公式 $\frac{N}{\varphi A} \le f$

f — 抗压强度的设计值

φ — 表、确定 a、b、c

$\varphi = \varphi(\lambda) = \varphi(A, I, l_0)$

A、I、l_0、λ — 均用理想压杆

讨论：1) λ — 按理想压杆

2) 大 φ 给定

3) 理解 $\varphi = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_Y}$ 与压杆强度 $\sigma = \frac{N}{A} \le [\sigma]$ 有区别

4) A — 毛面积

05—5题

动荷载 第十五章

00-9，06-5， 05-7， 04-2,4， 03—2,3， 02—1,3， 01-8

1、概念

1) 区分静荷与动荷

静应力，静变形

动应力，动 —

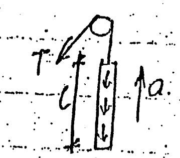
2) 三类动荷载

① 等加速度直线运动，等角速度转动

② 冲击 < 自由落体 / 水平

③ 周期荷载

2、等加速度直线运动



例1、已知 l、γ、A、a。

求：$\sigma_d = ?$ $(\Delta l)_d = ?$

解：1) 动内力 $N_d = K_d N_s$

$q_s = \frac{A\,dx}{dx}\gamma = A\gamma$

$K_d = 1 + \frac{a}{g}$

$N_s = q_s x = A\gamma x$

2) 动应力 $\sigma_d = \frac{N_d}{A} = K_d \sigma_s$

$(\Delta l)_d = K_d (\Delta l)_s$

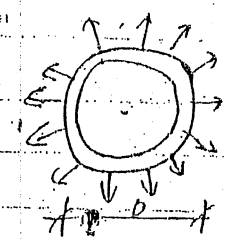
$(\Delta l)_s = \int_0^l \frac{N_s(x)}{EA} dx$

讨论

3、等角速度转动

公式 $a_n = r\omega^2$ $P = m a_n$

40



$q_d = \frac{A\rho r\omega^2}{2g}$

$N_d = q_d \cdot \frac{D}{2}$

$\sigma_d = \frac{N_d}{A}$

§3) 等角速度ω旋转水平杆

书P314: 例15-3.

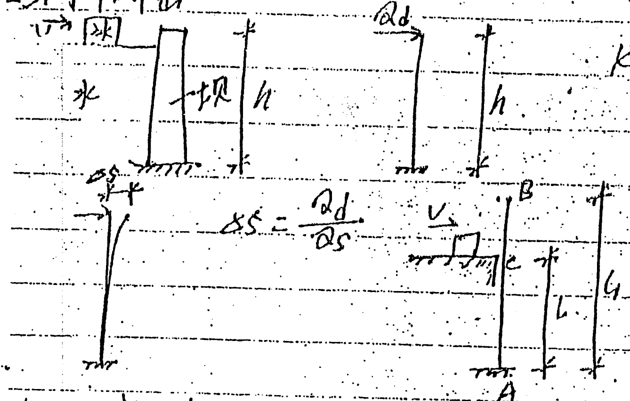
§4) 冲自由落体冲击

公式: $K_d = 1+\sqrt{1+\frac{2h}{\Delta s}}$

Δs —— 重物静荷时的静位移.

00-9. 01-8. 04-2.3 07-6. 06-5. 05-7.

§5) 水平冲击



$K_d = \sqrt{\frac{v^2}{g\delta_s}}$

$\Delta s = \frac{Q_d}{\Delta s}$

$\Delta_s = \Delta_{cs}$

$\Delta_{Bs} = \Delta_{cs} + \theta_{cs}(l_1 - l)$

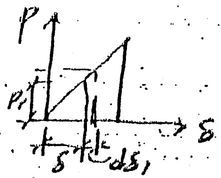
第十四章 杆件的应变能及其应用.

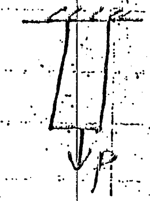
重点: 1) 应变能的计算

2) 卡氏第二定理的应用.

1. 概念.

41





W < 常力作功 —— 刚体; 变力作功 —— 变形体.

变化过程 $dW = P_1 ds_1$.

$W = \int dW = \int P_1 ds_1$.

研究对象 — 保守系统.

功能原理 $U = W = \int P ds$.

P — 广义力. δ — 广义位移.

U — 特点: 1) 按功能原理 U=W.

2) U是体积分布

取 u — 密度. $u = \frac{dU}{dV}$

3) U, u 是唯一确定的.

4) 与加载的次序无关

5) (一点处) 单元体有 du. 微段杆有 dU

与体积相关. 与线位移相关.

6) U是非线性的 $U \neq \sum U_i$.

同类荷载一般不叠加. (能量一般不叠加)

$U \neq U_P + U_m$

不同类 $U = U_P + U_T$

$U = U_q + U_P$

7) 体积分与过程积分. 凡有δ符"∫"表已完成过程.

2. U的计算

21

P42

1) 拉(压)

$dU_{轴向} = \frac{N^2(x)}{2EA}dx$ $u = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon$

$dU = \int_A (\int_\varepsilon u\, dA)dx$

$U = \int \frac{N^2(x)}{2EA}dx$

2) 扭. $U = \int \frac{M_t^2(x)}{2GI_p}dx$ $u = \frac{1}{2}\tau\gamma$

3) 弯. $U = U_b + U_v$

$= \int \frac{M^2(x)}{2EI}dx + \int \frac{kV^2(x)}{2GA}dx = U_M + U_V$ 忽略

4) 组合变形:

$U = U_{拉压} + U_{扭} + U_{弯}$

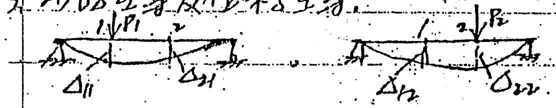
$= \int \frac{N^2(x)}{2EA}dx + \int \frac{M_t^2(x)}{2GI_p}dx + \int \frac{M^2(x)}{2EI}dx$

注意:

① 当内力为常数, 如 $U_N = \frac{N^2 l}{2EA}$

② 当杆段分别为常数 $U_N = \sum \frac{N_i^2 l_i}{2EA_i}$

3. 功的互等及位移互等.



$\Rightarrow$ 则 $P_1\Delta_{12} = P_2\Delta_{21}$

当 $P_1 = P_2$ $\Delta_{12} = \Delta_{21}$

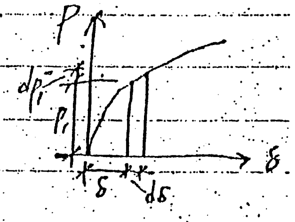
$\bar{P}_1 = \bar{P}_2$ $\delta_{12} = \delta_{21}$

4. 余能能概念与卡氏定理

$U^* = W^*$(余功)

$dU^* = \delta_1 dP_1$

本无物理意义, 有明确几何意义



P43

2) 卡氏第一定理 $\cancel{\delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i}}$ $P_i = \frac{\partial U}{\partial \delta_i}$ $U = W = \int P d\delta$

书P314 例14-16

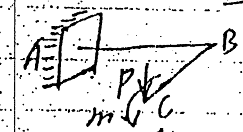
3) 卡氏第二定理 $\delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i}$ 考试理解应

① 1) 当分段 $\delta_i = \sum \frac{\partial U}{\partial P_i}$

2) 具体运算 宜先求导求积分 V

$\delta_i = \frac{\partial}{\partial P_i}(U_N + U_{Mt} + U_M)$

$= \int \frac{N}{EA}\frac{\partial N}{\partial P_i}dx + \int \frac{M_t}{GI_p}\frac{\partial M_t}{\partial P_i}dx + \int \frac{M}{EI}$



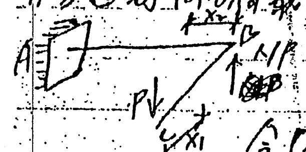
求 V_C. θ_C (BC面内) 设与 θ_C 对应的 m

$\theta_C = (\frac{\partial U}{\partial m})_{m=0}$

$\theta_C = \frac{1}{EA}\int (N)_{m=0} \frac{\partial N}{\partial m}dx + \frac{1}{GI_p}\int (M_t)_{m=0}\frac{\partial M_t}{\partial m}dx$

$+ \frac{1}{EI}\int (M)_{m=0}\frac{\partial M}{\partial m}$

4) 当图如同名荷载



令 C处, $P = Q$

$V_C = (\frac{\partial U}{\partial Q})_{Q=P} = \sum \frac{1}{EI}\int (M)_{Q=P}\frac{\partial M}{\partial Q}dx$

$+ \frac{1}{GI_p}\int (M_t)_{Q=P}\frac{\partial M_t}{\partial Q}dx$

$M(x_1) = -Qx_1$ $\frac{\partial M}{\partial Q} = -x_1$

$M(x_2) = 1.1Pl_{AB} - Qx_2$ $\frac{\partial M(x_2)}{\partial Q} = -x_2$

$M_t(x_2) = Ql_{CB}$ $\frac{\partial M_t}{\partial Q} = l_{CB}$

05-(1) 04-6 03-6 07-7 02-10 4.7,

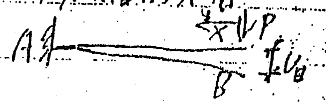
注: 能量法与超静定的结合

6. 利用功能原理求位移

公式：$U=W=\frac{1}{2}P\delta$ $\delta=\frac{2U}{P}$

讨论：1)适用于仅有一个载荷.

2)求对准的不看

例:  $U=\frac{1}{2}Pv_B$

$$U=\int\frac{M^2(x)}{2EI}dx=\frac{1}{2EI}\int_0^l(-Px)^2dx$$

横截面应力计算

基本内容