

材料力学（土木类）教案目录

- 第一章 绪 论
- 第二章 轴向拉伸与压缩
- 第三章 扭 转
- 第四章 平面图形的几何性质
- 第五章 弯曲内力
- 第六章 弯曲应力
- 第七章 弯曲变形
- 第八章 弹性地基梁
- 第九章 应力状态
- 第十章 强度理论
- 第十一章 组合变形
- 第十二章 开口薄壁杆件
- 第十三章 压杆稳定
- 第十四章 杆件的应变能及其应用
- 第十五章 动荷载
- 第十六章 循环应力

一、教学目标和教学内容

1. 教学目标

明确材料力学的任务，理解变形体的基本假设，掌握杆件变形的的基本形式。

2. 教学内容

- ① 材料力学的特点
- ② 材料力学的任务
- ③ 材料力学的研究对象
- ④ 变形体的基本假设
- ⑤ 材料力学的基本变形形式

二、重点难点

构件的强度、刚度、稳定性的概念；杆件变形的的基本形式、变形体的基本假设。

三、教学方式

采用启发式教学，通过提问，引导学生思考，让学生回答问题。

四、建议学时

1.5 学时

五、讲课提纲

1、材料力学的任务

材料力学是研究构件强度、刚度和稳定性计算的学科。

工程中各种机械和结构都是由许多构件和零件组成的。为了保证机械和结构能安全正常工作，必须要求全部构件和零件在外力作用时具有一定的承载能力，承载能力表现为

1.1 强度

强度是指构件抵抗破坏的能力。构件在外力作用下不被破坏，表明构件具有足够的强度。

1.2 刚度

刚度是指构件抵抗变形的能力。构件在外力作用下发生的变形不超过某一规定值，表明构件具有足够的刚度。

1.3 稳定性

稳定性是指构件承受在外力作用下，保持原有平衡状态的能力，构件在外力作用下，

能保持原有的平衡形态，表明构件具有足够的稳定性。

- **材料力学的任务：**以最经济为代价，保证构件具有足够的承载能力。通过研究构件的强度、刚度、稳定性，为构件选择合适的材料、确定合理的截面形状和尺寸提供计算理论。

2、材料力学的研究对象

2.1 研究对象的几何特征

构件有各种几何形状，材料力学的主要研究对象是杆件，其几何特征是横向尺寸远小于纵向尺寸，如机器中的轴、连接件中的销钉、房屋中的柱、梁等均可视为杆件，材料力学主要研究等直杆。

2.2 研究对象的材料特征

构件都是由一些固体材料制成，如钢、铁、木材、混凝土等，它们在外力作用下会产生变形，称变形固体。其性质是十分复杂的，为了研究的方便，抓住主要性质，忽略次要性质材料力学中对变形固体作如下假设：

- ◆ **均匀连续性假设：**假设变形固体内连续不断地充满着均匀的物质，且体内各点处的力学性质相同。
- ◆ **各向同性假设：**假设变形固体在各个方向上具有相同的力学性质。
- ◆ **小变形假设：**假设变形固体在外力作用下产生的变形与构件原有尺寸相比是很微小的，称“小变形”。在列平衡方程时，可以不考虑外力作用点处的微小位移，而按变形前的位置和尺寸进行计算。

3、杆件的几何特征

3.1 轴线：截面形心的连线

3.2 横截面：垂直于轴线的截面

3.3 杆的分类：

4、杆件变形的基本形式

杆件在不同受力情况下，将产生各种不同的变形，但是，不管变形如何复杂，常常是如下四种基本变形或是它们的组合。

1. 拉伸和压缩: 变形形式是由大小相等、方向相反、作用线与杆件轴线重合的一对力引起的, 表现为杆件长度的伸长或缩短。如托架的拉杆和压杆受力后的变形。

2. 剪切: 变形形式是由大小相等、方向相反、相互平行的一对力引起的, 表现为受剪杆件的两部分沿外力作用方向发生相对错动。如连接件中的螺栓和销钉受力后的变形。

3. 扭转: 变形形式是由大小相等、转向相反、作用面都垂直于杆轴的一对力偶引起的, 表现为杆件的任意两个横截面发生绕轴线的相对转动。如机器中的传动轴受力后的变形。

4. 弯曲: 变形形式是由垂直于杆件轴线的横向力, 或由作用于包含杆轴的纵向平面内的一对大小相等、方向相反的力偶引起的, 表现为杆件轴线由直线变为受力平面内的曲线。如单梁吊车的横梁受力后的变形。

杆件同时发生几种基本变形, 称为组合变形。

第二章 轴向拉伸与压缩

一、教学目标和教学内容

1、教学目标

正确理解内力、应力、应变等基本概念, 熟练掌握截面法。正确理解并熟练掌握轴向拉压正应力公式、胡克定律、强度条件, 掌握拉压杆的强度计算方法。掌握拉压时材料的力学性能, 弄清材料力学解决问题的思路和方法。

2、教学内容

- ①截面法、内力、应力
- ②轴力、轴力图
- ③正应力、应力集中的概念
- ④轴向拉(压)时斜截面上的应力
- ⑤拉压杆的变形、胡克定律、泊松比
- ⑥拉压杆的强度计算
- ⑦材料拉压时的力学性能
- ⑧拉压杆件系统的超静定问题
- ⑨连接件的实用计算

二、重点难点

- 1、内力和截面法, 轴力和轴力图。

- 2、应力的概念，轴向拉压时横截面上的应力，轴向拉压时的变形。
- 3、材料拉、压时的力学性能。
- 4、轴向拉压的强度计算。
- 5、应力集中的概念，拉、压静不定问题。

三、教学方式

采用启发式教学和问题式教学法结合，通过提问，引导学生思考，让学生回答问题，激发学生的学习热情。

四、建议学时

12.5 学时

五、讲课提纲

1、轴向拉伸(压缩)的概念

受力特点：作用于杆件上外力合力的作用线与杆件轴线重合。

变形特点：构件沿轴线方向的伸长或缩短。

2、内力、截面法

2.1 内力的概念

内力是构件因受外力而变形，其内部各部分之间因相对位移改变而引起的附加内力。

众所周知，即使不受外力作用，物体的各质点之间依然存在着相互作用的力，材料力学的内力是指在外力作用下上述相互作用力的变化量，是物体内部各部分之间因外力引起的附加的相互作用力，即“附加内力”。它随外力的增大而增大，达到某一限度时就会引起构件破坏，因而它与构件强度是密切相关的。

2.2 截面法

截面法四部曲：截（切开）、取（取分离体）、代（代替）、平（平衡）

3、轴力、轴力图

3.1 轴向拉压时的内力——轴力

轴力——垂直于横截面、通过截面形心的内力。

轴力的符号规则——轴力背离截面时为正，指向截面为负。

3.2 轴力图

形象表示横截面上轴力沿杆轴线变化规律的图形。

4、正应力、应力集中的概念

4.1 应力的概念：

定义：内力在截面上的分布集度。

数学表示： $\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta A}$

应力的三要素：截面、点、方向

应力分量：

$\left\{ \begin{array}{l} \text{正应力 } \sigma: \text{与截面正交的应力。} \\ \text{剪应力 } \tau: \text{与截面相切的应力。} \end{array} \right.$

正应力的代数符号规定：

拉应力为正，压应力为负。

应力的单位：Pa (N/m²)

4.2 轴向拉（压）时横截面上的正应力：

应力计算公式： $\sigma = \frac{N}{A}$

公式的适用范围：

- (1) 外力作用线必须与杆轴线重合，否则横截面上应力将不是均匀分布；
- (2) 当外力作用点较远部分正确，外力作用点附近应力分布复杂，由于加载方式的不同，只会使作用点附近不大的范围内受到影响（圣维南原理）。因此，只要作用于杆端合力作用线与杆轴线重合，除力作用处外，仍可用该公式计算。
- (3) 必须是等截面直杆，否则横截面上应力将不是均匀分布，当截面变化较缓慢时，可近似用该公式计算。

4.3 应力集中的概念、圣维南原理：

局部应力——截面突变处某些局部小范围内的应力。

应力集中——在截面突变处出现局部应力剧增现象。

应力集中对于塑性、脆性材料的强度产生截然不同的影响，脆性材料对局部应力的

敏感性很强，而局部应力对塑性材料的强度影响很小。

圣维南原理——外力作用在杆端的方式不同，只会使杆端距离不大于横向尺寸的范围应力分布受到影响。

5、轴向拉（压）杆斜截面上的应力

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha} = p_{\alpha} \cos \alpha = \sigma \cos^2 \alpha \\ \tau_{\alpha} = p_{\alpha} \sin \alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha \end{cases}$$

6、拉压杆的变形、胡克定律、泊松比

6.1 纵向变形：

绝对变形

$$\Delta l = l_1 - l \rightarrow$$

相对变形（线应变）

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad \text{拉伸 } \varepsilon \text{ 为 “+”，压缩 } \varepsilon \text{ 为 “-”}$$

6.2 横向变形及泊松比：

绝对变形

$$\text{横向尺寸 } a \rightarrow a_1 \quad \Delta a = a_1 - a$$

相对变形（横向应变）

$$\varepsilon' = \frac{\Delta a}{a} \quad \text{拉伸 } \varepsilon' \text{ 为 “-”，压缩 } \varepsilon' \text{ 为 “+”}$$

泊松比（横向变形系数）

$$\text{实验表明：在弹性范围内} \quad \mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|$$

μ 是反映材料性质的常数，由实验确定，一般在 -1——0.5 之间。

6.3 胡克定律：

在弹性范围内： $\sigma \propto \varepsilon$ 即 $\sigma = E\varepsilon$ $\sigma \leq \sigma_p$ 胡克定律

E ——弹性模量（Pa）

$$\text{将 } \sigma = \frac{N}{A} \text{ 和 } \varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \text{ 代入得}$$

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} \quad \text{胡克定律的另一形式}$$

EA —抗拉（压）刚度，反映杆件抵抗拉伸（压缩）变形的能力，其它条件相同。

7、材料在拉伸和压缩时的力学性能

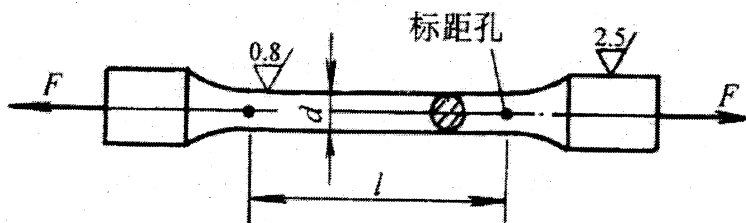
7.1 低碳钢拉伸时的力学性能：

试件：

圆截面： $l = 10d$ $l = 5d$

矩形截面： $l = 11.3\sqrt{A}$ $l = 5.65\sqrt{A}$

l —工作段长度（标距） d —直径 A —横截面积



低碳钢拉伸时变形发展的四个阶段：

(1) 弹性阶段 (oa)

应力特征值： 比例极限 σ_p —材料应力应变成正比的最大应力值（服从虎克定律）

弹性极限 σ_e —材料只出现弹性变形的应力极限值

σ, ε 成比

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \tan \alpha \quad (\text{比例系数})$$

E 为与材料有关的比例常数，随材料不同而异。当 $\varepsilon = 1$ 时， $\sigma = E$ ，由此说明表明材料的刚性的大小； $\varepsilon = \tan \alpha$ 说明几何意义。

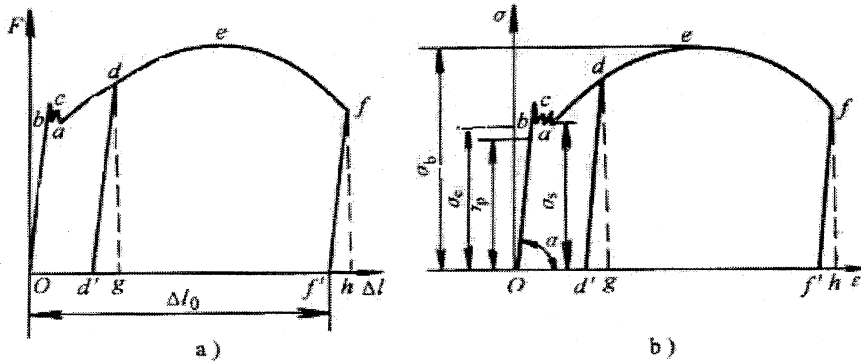
(2) 屈服阶段 (bc)

当应力超过弹性极限后，应变增加很快，但应力仅在一微小范围波动，这种应力基本不变，应变不断增加，从而明显地产生塑性变形的现象称为屈服（流动）。

现象：磨光试件表面出现与轴线成 45° 倾角条纹——滑移线，是由于材料晶格发生相对滑移所造成。

材料产生显著塑性变形，影响构件正常使用，应避免出现。

应力特征值：屈服极限 σ_s —— 衡量材料强度的重要指标



(3) 强化阶段 (cd)

强化现象：材料恢复抵抗变形的能力，要使应变增加，必须增大应力值。 $\sigma - \varepsilon$ 曲线表现为上升阶段。

应力特征性：强度极限 σ_b —— 材料能承受的最大应力值。

冷作硬化——材料预拉到强化阶段，使之发生塑性变形，然后卸载，当再次加载时弹性极限 σ_e 和屈服极限 σ_s 提高、塑性降低的现象。

工程上常用冷作硬化来提高某些材料在弹性范围内的承载能力，如建筑构件中的钢筋、起重机的钢缆绳等，一般都要作预拉处理。

(4) 颈缩阶段 (df)

在某一局部范围内， A (急剧) $\uparrow \varepsilon$ ，用 A 计算的 $\sigma \rightarrow$ ，试件被拉断。

7.2 塑性变形的两个指标：

延伸率 (伸长率) δ ：
$$\delta = \frac{l_1 - l}{l} \times 100\%$$

材料分类 $\begin{cases} \text{塑性材料 } \delta > 5\% \\ \text{脆性材料 } \delta < 5\% \end{cases}$

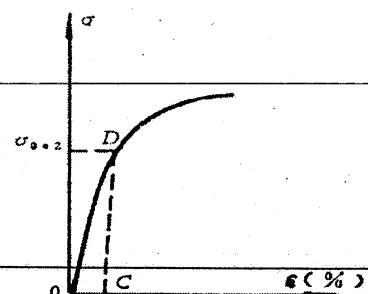
截面收缩率 ψ ：
$$\psi = \frac{A - A_1}{A} \times 100\%$$

A_1 —— 颈缩处的最小面积

7.3 其它材料拉伸时的力学性能：

16Mn 钢也有明显的四个阶段；H62 (黄铜) 没有明显的屈服阶段，另三阶段较明显；T10A (高碳钢) 没有屈服和颈缩阶段，只有弹性和强化阶段。铸铁拉伸时是

显
屈
—



微弯曲线，没有明显的直线部分，拉断前无屈服现象，拉断时变形很小是典型的脆性材料。

对于没有明显的屈服阶段的材料，常以产生 0.2% 的塑性变形所对应的应力值作为屈服极限，称条件屈服极限，用 $\sigma_{0.2}$ 表示。

7.4 材料压缩时的力学性能：

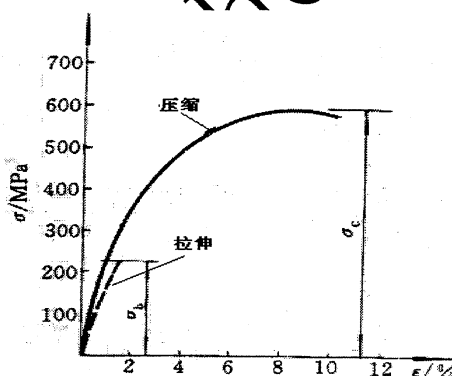
低碳钢压缩时的力学性能：

压缩时 $\sigma - \varepsilon$ 曲线，在屈服阶段以前与拉伸时相同， σ_p, E, σ_s 都与拉伸时相同，当 σ 达到 σ_s 后，试件出现显著的塑性变形，越压越短，横截面增大，试件端部由于与压头之间摩擦的影响，横向变形受到阻碍，被压成鼓形。得不到压缩时的强度极限。因此，钢材的力学性质主要用拉伸试验来确定。

铸铁压缩时的力学性能：

与塑性材料相反脆性材料在压缩时的力学性质与拉伸时有较大差别。

铸铁在压缩时无论是强度极限还是伸长率都比拉伸时；曲线中直线部分很短；大致沿 45° 生剪切错动而破坏，说明铸铁的抗剪能力比抗压差。



学性质与
长率都比
的斜面发

7.5 木材的力学性质：

木材的拉伸与压缩时的力学性质与低碳钢等一般材料不同的特性。其顺木纹方向的强度要比垂直木纹方向的高得多，是各向异性材料，而且其抗拉强度高于抗压强度。

材料在拉伸与压缩时力学性质特点：

当应力不超过一定限度（不同材料其限度不同）时， σ 与 ε 成正比；

- 塑性材料的抗拉强度极限比脆性材料高，宜作受拉构件；表示其强度特征的是 σ_s 和 σ_b ，而 σ_s 是杆件强度设计的依据；
- 脆性材料的抗压强度极限远大于其抗拉强度极限，宜作受压构件；唯一表示强度特征的是 σ_b ，它也是杆件强度设计的依据。

7.6 温度和时间对材料力学性质的影响：

在室温下塑性材料的塑性指标随着温度的降低而减小，并随着温度的升高而显著地

增大（个别材料也会有相反的现象）。与此相反，衡量材料强度的指标则随着温度的降低而增大，并随着温度的升高而减小。

蠕变——在高温和定值静载荷作用下，材料的变形将随着时间而不断地慢慢增加，此现象称蠕变。

松弛——在变形维持不变的情况下，材料随时间而发展的蠕变变形（不可恢复的塑性变形）将部分地代替其初始的弹性变形，从而使材料中的应力随着时间的增加而逐渐减小，这种现象称应力松弛。

8、轴向拉压时的强度计算

8.1 极限应力、安全系数、许用应力：

极限应力

材料破坏时的应力称为极限应力。

$$\sigma_{jx} = \begin{cases} \sigma_s & \text{塑性材料} \\ \sigma_b & \text{脆性材料} \end{cases}$$

安全系数、许用应力

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{jx}}{n}$$

构件工作时允许达到的最大应力值称许用应力 $[\sigma]$ 。许用应力应低于极限应力。

(1) 从安全考虑，构件需要有一定的强度储备；

(2) 构件的实际工作情况与设计时所设想的条件难以完全一致，有许多实际不利因素无法预计。

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{jx}}{n}$$

n —安全系数（大于1的数），其影响因素主要有：

- (1) 材料的均匀程度；
- (2) 载荷估计的准确性；
- (3) 计算方法方面的简化和近似程度；
- (4) 构件的加工工艺、工作条件、使用年限和重要性等。

8.2 强度条件：

为了保证构件有足够的强度,杆内最大工作应力不得超过材料在拉压时的许用应力

$[\sigma]$, 即

$$\sigma_{\max} = \left(\frac{N}{A} \right)_{\max} \leq [\sigma]$$

它可解决工程上的三类强度问题:

- 强度校核
- 设计截面
- 确定许可载荷

9、拉伸和压缩静不定问题

9.1 静不定问题的解法:

基本思路: 静力学关系, 变形几何关系, 物理关系。

解超静定问题, 除列出平衡方程外, 还要通过研究变形和内力的关系建立足够数量的补充方程, 为此要找出变形的协调条件, 即保持结构连续所必须满足的变形几何条件, 在通过变形的物理条件(内力与变形的关系)就可以列出所需要的补充方程。

9.2 装配应力:

杆件制成后, 其尺寸有微小误差是难免的, 这种误差使静定结构的几何形状发生微小改变, 而不会引起内力。但对超静定结构, 这种误差就会使杆件在承受载荷前产生较大的内力。

由于加工误差, 强行装配而引起的内力称为装配内力, 与之相应的应力叫装配应力。计算装配应力的关键在于根据结构的变形几何关系建立补充方程。这类超静定问题的变形几何关系中一定有一项与尺寸误差 δ 有关。

9.3 温度应力:

热胀冷缩是金属材料的通性, 在静定结构中杆件可以自由变形, 温度均匀变化所产生的伸缩, 不会在杆内引起内力。但在超静定结构中, 杆件的伸缩受到部分或全部约束, 温度变化将会引起内力, 和它相应的应力称为温度应力。

10、连接件的实用计算

剪切变形的受力特点: 作用在杆件两个侧面上且于轴线垂直的外力, 大小相等, 方向相反, 作用线相距很近。

变形特点是：两个力之间的截面沿剪切面相对错动。构件只有一个剪切面的情况称为单剪切，有两个剪切面时称为双剪切。

可能被剪断的截面称为剪切面。

剪应力、挤压应力的计算

$$\tau = \frac{V}{A} \quad \tau = \frac{V}{A} \leq [\tau]$$

式中 V ：剪切面上的剪力，它与 P 的关系由平衡方程确定。

A ：剪切面面积（不一定是横截面的面积，且与外载荷平行）

$$\sigma_{bs} = \frac{P}{A_{bs}} \leq [\sigma_{bs}]$$

P ：挤压面上的挤压力

A_{bs} ：挤压面面积（与外载荷垂直）

第五章 扭 转

一、教学目标和教学内容

3. 教学目标

掌握扭转内力的计算方法，正确理解并熟练掌握扭转剪应力、扭转变形的计算方法、剪切胡克定律和剪应力互等定理、扭转强度和扭转刚度计算。

4. 教学内容

- ① 外力偶矩的计算，扭矩、扭矩图，纯剪切。
- ② 圆轴扭转时的应力和变形，扭转的强度条件和刚度条件。
- ③ 扭转的强度计算和刚度计算。
- ④ 扭转静不定问题，非圆截面杆扭转。

二、重点难点

重点：圆轴扭转时横截面上剪应力分布规律和强度，圆轴扭转变形时的刚度和变形（相对扭转角）计算。

难点：扭转剪应力推导过程

重点处理：通过例子，关键理解 τ_{\max} 是指整个轴上的 T_{\max} 面上的最外边缘点（等截面）；对变

截面可用 $\tau_{\max} = \left(\frac{T}{W_p} \right)_{\max}$ ；严格区分刚度和扭转角的区别

难点处理：结合、对比 $\sigma = \frac{N}{A}$ 的推导过程，和薄壁圆筒横截面上 τ 的推导，让学生思考可能采用的方法，然后在讲解。

三、教学方式

采用启发式教学，通过提问，引导学生思考，让学生回答问题，达到课堂互动。

四、建议学时

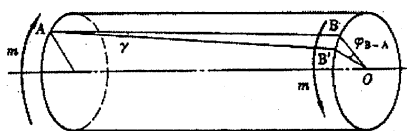
6 学时

五、讲课提纲

1、扭转的概念：

杆件发生扭转变形的受力特点是：在杆件上作用着大小相等、转向相反、作用平面垂直于杆件轴线的两组平行力偶系。图所示的就是杆件受扭的最简单情况。

杆件扭转变形的特点是：当杆件发生扭转变形时，任意两个横截面将绕杆轴线作相对转动而产生相对角位移，称为该两个横截面的扭转角，用 ϕ 表示。图中的 ϕ_{B-A} 表示杆件右端的 B 截面相对于左端 A 截面的扭转角。



2、外力偶矩的计算，扭矩和扭矩图

2.1 外力偶矩的计算

已知轴所传递的功率和轴的转速，则外力偶矩 m ($N \cdot m$)

$$m = 9549 \frac{N}{n}$$

N——功率，单位为千瓦 (KW)

n——转速，单位为 r/min

2.2 扭转时的内力——扭矩：

扭矩：受扭杆件横截面上的内力是作用在该截面上的力偶，该力偶之矩称扭矩 (M_t)。

扭矩的计算方法——截面法（假设扭矩为正，即设正法）

扭矩的符号规则——右手螺旋法则

2.3 扭矩图:

表示杆件各横截面上的扭矩沿杆轴的变化规律。

3、薄壁圆筒的扭转、纯剪切

3.1 薄壁圆筒扭转时的应力:

3.1.1 实验研究

3.1.2 变形特点:

(1) 各纵向线倾斜了同一微小角度 γ ，矩形歪斜成平行四边形；

(2) 各圆周线的形状、大小和间距不变，只是各圆周线绕杆轴线转动了不同的角度。

3.1.3 应力分布：横截面上只有切于截面的剪应力 τ ，它组成与外加扭矩 m 相平衡的内力系。

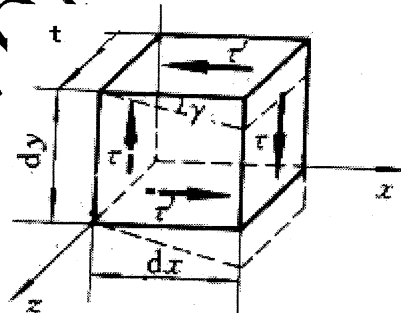
因壁厚 t 很小，假设均匀分布且沿各点圆周的切线方向。

由平衡条件 $\sum m_x = 0$ 得

$$2\pi r t \cdot \tau \cdot r = m$$

$$\tau = \frac{m}{2\pi \cdot r^2 t}$$

式中： r 为圆筒的平均半径。



3.2 剪应力互等定理:

从薄壁中，用两个横截面和两个纵截面取出一个单元体，如图所示。

由平衡方程 $\sum m_z = 0$ 得

$$(\tau \cdot t dy) \cdot dx = (\tau' \cdot t dx) \cdot dy$$

$$\tau = \tau'$$

◆◆ 结论：在单元体互相垂直的两个平面上，剪应力必然成对存在，且数值相等；

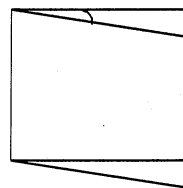
二者都垂直于两平面的交线，其方向则共同指向或共同背离两平面的交线，这种关系称剪应力互等定理。该定理具有普遍性，不仅对只有剪应力的单元体正确，对同时有正应力作用的单元体亦正确。

规定：使单元体绕其内部任意点产生顺时针方向转动趋势的剪应力为正，反之为负。

单元体上只要剪应力而无正应力的情况称为纯剪切应力状态。

3.3 剪切胡克定律：

剪应变的定义：在剪应力作用下，单元体的直角将发生微小的改变，这个直角的改变量 γ 称为剪应变。



剪切胡克定律：

实验表明，当剪应力不超过材料的剪切比例极限时， τ 与 γ 成正比，即

$$\tau = G\gamma \quad G \text{——剪切弹性模量}$$

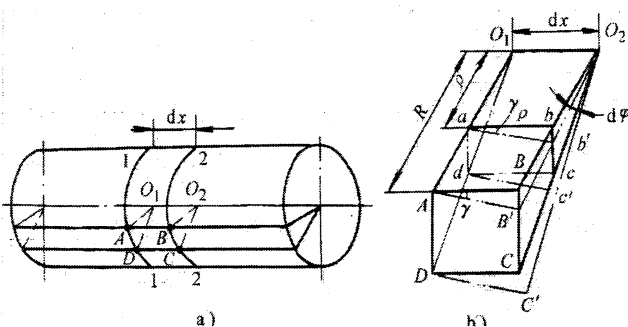
$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

4、圆轴扭转时的应力及强度计算

4.1 横截面上的应力

4.1.1 变形几何关系

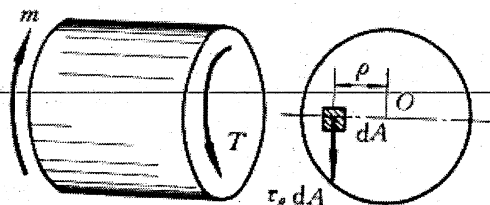
根据实验结果可以得到与薄壁圆筒相同的实验现象，可以认为这是圆轴扭转变形在其表面的反映，根据这些现象可由表及里地推测圆轴内部的变形情况。可以设想，圆轴的扭转是无数层薄壁圆筒扭转的组合，其内部也存在同样的变形规律，这样，根据圆周线形状大小不变，两相邻圆周线发生相对转动的现象，可以设想，圆轴扭转时各横截面如同刚性平面一样绕轴线转动，即假设圆轴各横截面仍保持为平面，且其形状大小不变，横截面上的半径亦保持为一直线，这个假设称平面假设。根据圆轴的对称性和受力情况的对称性，



证明这一假设的正确性。根据上述实验现象还可推断，与薄壁圆筒扭转时的情况一样，圆轴扭转时其横截面上不存在正应力，仅有垂直于半径方向的切应力 τ 作用。

变形几何关系：

$$\gamma_\rho \approx \tan \gamma_\rho = \frac{bb'}{ab} = \frac{\rho d\phi}{dx}$$



4.1.2 物理关系

$$\tau = G\gamma$$

$$\tau_{\rho} = G \cdot \gamma_{\rho} = G \cdot \rho \frac{d\phi}{dx}$$

4.1.3 静力关系

$$\int_A \rho \tau_{\rho} dA = T$$

$$\int_A G \rho^2 \frac{d\phi}{dx} dA = T, \quad G \frac{d\phi}{dx} \cdot \int_A \rho^2 dA = T$$

$\frac{d\phi}{dx}$ —— 单位长度上的扭转角（同一截面上为一定值）

$I_{\rho} = \int_A \rho^2 dA$ —— 截面对形心的极惯性矩（与截面形状、大小有关的几何量）

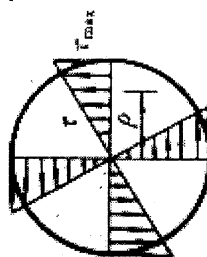
$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{T}{GI_{\rho}}$$

$$\therefore \tau_{\rho} = \frac{T}{I_{\rho}} \cdot \rho$$

I_{ρ} 的计算:

$$I_{\rho} = \frac{\pi D^4}{32} \text{ —— 实心轴}$$

$$I_{\rho} = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4) \text{ (内外径之比) —— 空心轴}$$



4.2 强度计算

强度条件:

$$\tau_{\max} = \frac{T \cdot R}{I_{\rho}} = \frac{T}{W_t} \leq [\tau]$$

式中: $W_t = \frac{I_{\rho}}{R}$ —— 抗扭截面模量 (系数)

$$W_t = \frac{\pi D^3}{16} \text{ —— 实心轴}$$

$$W_t = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) \text{——空心轴}$$

$$\text{对等直圆轴: } \tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_t}$$

解决三类强度问题:

1、校核强度

2、选择截面尺寸

3、计算许用荷载

5、圆轴扭转时的变形和刚度计算

5.1 扭转变形

扭转角 (ϕ): 任意两横截面相对转过的角度

$$\therefore \frac{d\phi}{dx} = \frac{T}{GI_\rho} \quad d\phi = \frac{T}{GI_\rho} dx$$

$$\phi = \int d\phi = \int \frac{T}{GI_\rho} dx$$

在 $T=C$, 轴为等截面条件下

$$\phi = \frac{T \cdot l}{GI_\rho} \quad (\text{弧度})$$

GI_ρ ——截面的抗扭刚度 (ϕ 与 GI_ρ 成反比、反映截面抵抗扭转变形的能力)

5.2 刚度条件

构件除应满足强度条件外, 有时还需满足刚度要求。特别在机械传动轴中, 对刚度要求较高, 如车床的丝杆, 扭转变形过大就会影响螺纹加工精度; 镗床主轴变形过大则会产生剧烈的振动, 影响加工精度和光洁度。

为了避免刚度不够而影响正常使用, 工程上对受扭构件的单位长度扭转角进行限制,

即

$$\theta = \frac{\phi}{l} = \frac{T}{GI_\rho} \quad (\text{rad/m})$$

刚度条件: $\theta_{\max} \leq [\theta]$

$$\frac{T_{\max}}{GI_{\rho}} \leq [\theta]$$

可解决三类刚度问题。

6、扭转静不定问题

7、非圆轴截面杆扭转的概念

7.1 矩形截面杆扭转

矩形截面杆扭转后横截面不再保持为平面, 要发生翘曲。材料力学方法不能研究这一问题, 需用弹性力学知识来解决。

矩形截面杆扭转分自由扭转和约束扭转。杆两端无约束, 翘曲程度不受任何限制的情况, 属于自由扭转。此时, 杆各横截面的翘曲程度相同, 纵向纤维长度无变化, 横截面上只有剪应力, 没有正应力。杆一端被约束, 杆各横截面的翘曲程度不同, 横截面上不但有剪应力, 还有正应力, 这属于约束扭转。

矩形截面杆自由扭转时, 其横截面上的剪应力计算点:

(a) 截面周边各点处的剪应力方向与周边平行

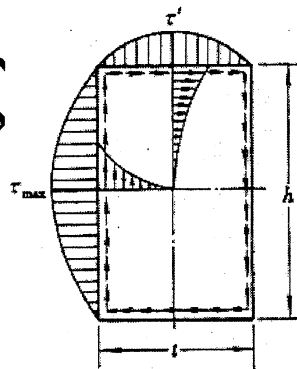
(b) 截面角点处的剪应力等于零;

(c) 截面内最大剪应力发生在截面长边的中点处, 其计算式为

$$\tau_{\max} = \frac{M_h}{\alpha h t^2}$$

式中 h —— 矩形截面长边的长度;

t —— 矩形截面短边的长度; α —— 与截面尺寸的比值 $\frac{h}{t}$ 有关的系数。



的翘曲程
约束扭

有以下特

(相切);

7.2 薄壁杆件的自由扭转

7.2.1 开口薄壁杆件的自由扭转

$$\tau_i = \frac{3T_i}{h_i t_i^2} = \frac{T t_i}{I_i}$$

从上式看出, 当 t_i 为最大值时, 剪应力 τ_i 也最大。所以, 整个截面上最大剪应力发生在厚度最大的狭

长的长边中点处, 其值为 $\tau_{\max} = \frac{T t_{\max}}{I_t}$

7.2.2 闭口薄壁杆件的自由扭转

横截面上任意点处的剪应力与壁厚的乘积为一常数 $C = \tau t$, 称为剪力流

$$\tau_{\max} = \frac{C}{t_{\min}} = \frac{T}{2\omega t_{\min}}$$

第四章 平面图形的几何性质

一、教学目标和教学内容

5. 教学目标

- 1.1 掌握静矩和形心的概念和计算方法。
- 1.2 掌握惯性矩、极惯性矩、惯性半径和惯性积的概念和计算方法。
- 1.3 掌握惯性矩和极惯性矩的关系。
- 1.4 熟练掌握某些几何量在不同坐标系中的转换公式——平行移轴公式、转轴公式的应用。
- 1.5 掌握主惯性轴、主惯性矩、形心主惯性轴及形心主惯性矩的定义及计算方法。

掌握组合图形几何性质的计算方法。

6. 教学内容

静矩和形心; 惯性矩、惯性积和惯性半径, 平行移轴公式、转轴公式、主惯性轴、主惯性矩、形心主惯性轴及形心主惯性矩

二、重点难点

重点: 描述平面图形几何性质的各种几何量的定义及计算。平行移轴公式和转轴公式。

难点: 组合图形几何性质的计算; 某些平面图形几何性质的计算。

三、教学方式

采用启发式教学, 通过提问, 引导学生思考, 让学生回答问题。

四、建议学时

4 学时

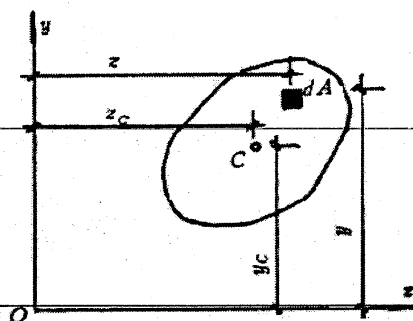
五、讲课提纲

1、截面静矩

从截面中坐标为 (y, x) 处取面积元素 dA , $y dA$ 和 $z dA$ 分别称为面积元素 dA 对 z 和 y 轴的静

矩。平面图形对 z 轴和 y 轴的静矩为:

$$S_z = \int_A y dA$$



$$S_y = \int_A z dA$$

匀质薄板形心公式:

$$y_c = \frac{\int_A y dA}{A}$$

$$z_c = \frac{\int_A z dA}{A}$$

$$\therefore S_z = y_c A, \quad S_y = z_c A$$

(a) 当 $S_z=0 \Rightarrow y_c=0$, 即平面图形对某一轴的静矩为零, 则该轴必然过形心;

(b) 当 $y_c=0 \Rightarrow S_z=0$, 即若某一轴通过形心, 则图形对该轴的静矩为零。

(c) 由平面图形的形心必在对称轴上, 故平面图形对于对称轴的静矩总是等于零。

(d) 静矩是截面对于一的坐标轴而言的, 同一截面对于不同的坐标轴, 其静矩不同。

静矩可正可负, 也可为零。

2、组合图形的静矩与形心坐标的关系

组合截面对某轴的静矩等于组成它的各简单截面对某轴静矩的代数和。即

$$S_y = \sum_{i=1}^n A_i z_{ci}, \quad S_z = \sum_{i=1}^n A_i y_{ci}$$

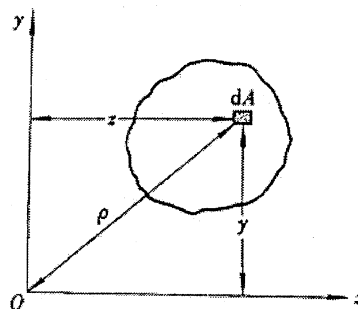
$$\text{形心位置: } y_c = \frac{S_z}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_{ci}}{\sum_{i=1}^n A_i}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n A_i z_{ci}}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

3、惯性矩、极惯性矩和惯性积

惯性矩: (恒为正)

$$I_z = \int_A y^2 dA$$

$$I_y = \int_A z^2 dA$$



$$I_{\rho} = \int_A \rho^2 dA$$

$$I_z = i_z^2 \cdot A, I_y = i_y^2 \cdot A \Rightarrow i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}, i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

i_z, i_y ——截面对 z 、 y 轴的惯性半径。

极惯性矩：（恒为正）

$$I_{\rho} = \int_A \rho^2 dA = \int_A (y^2 + z^2) dA = \int_A y^2 dA + \int_A z^2 dA = I_z + I_y$$

惯性积：（可正可负，也可为零）

$$I_{yz} = \int_A yz dA$$

如果图形有一个对称轴，则 $I_{yz} = 0$

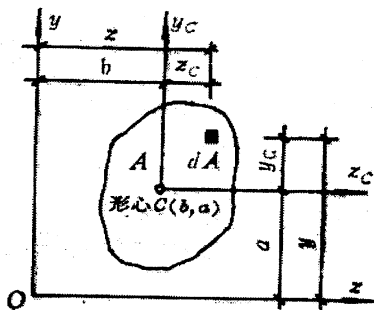
4、平行移轴公式

$$I_z = \int_A y^2 dA = \int_A (a + y_c)^2 dA = a^2 \int_A dA + 2a \int_A y_c dA + \int_A y_c^2 dA = I_{z_c} + a^2 A$$

同理可得 $I_y = I_{y_c} + b^2 A$

$$I_{yz} = I_{y_c z_c} + abA$$

它表明，截面对任一轴的惯性矩，等于截面对行的形心轴的惯性矩，再加上截面的面积与形心到该轴距离平方的乘积。截面对任意两相互垂直轴的惯性积，等于它对于与该两轴平行的两形心轴的惯性积，再加上截面的面积与形心到该两轴间距离的乘积。



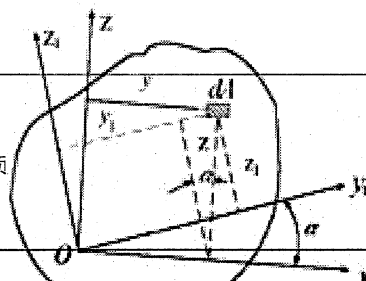
在平面图形对所有互相平行轴的众多惯性矩中，平面图形对形心轴的惯性矩为最小。

5、转轴公式

任意平面图形（如图 I-9）对 y 轴和 z 轴的惯性矩和惯性积，可由式（I-5）—（I-9）求得，若将坐标轴 y, z 绕坐标原点 O 点旋转 α 角，且以逆时针转角为正，则新旧坐标轴之间应有如下关系

$$y_1 = y \cos \alpha + z \sin \alpha$$

$$z_1 = z \cos \alpha - y \sin \alpha$$



将此关系代入惯性矩及惯性积的定义式，则可得相应量的新、旧转换关系，即转轴公式

$$I_{z_c} = 2(I_{z_c}^I + I_{z_c}^{II}) = 2(83.3 + 146.6) = 459.8 \text{ cm}^4$$

$$I_{y_1} = \int_A z_1^2 dA = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\alpha - I_{yz} \sin 2\alpha$$

(I-14)

$$I_{z_1} = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\alpha + I_{yz} \sin 2\alpha$$

6、形心主惯性轴、形心主惯性矩

6.1 定义

6.1.1 主惯性轴 主惯性矩

对于任何形状的截面，总可以找到一对特殊的直角坐标轴，使截面对于这一对坐标轴的惯性积等于零。惯性积等于零的一对坐标轴就称为该截面的主惯性轴，而截面对于主惯性轴的惯性矩称为主惯性矩。

6.1.2 形心主惯性轴 形心主惯性矩

当一对主惯性轴的交点与截面的形心重合时，它们就被称为该截面的形心主惯性轴，简称形心主轴。而截面对于形心主惯性轴的惯性矩就称为形心主惯性矩。

6.2 形心主惯性轴的确定

由于任何平面图形对于包括其形心对称轴在内的一对正交坐标轴的惯性积恒等于零，所以，可根据截面有对称轴的情况，用观察法帮助我们确定平面图形的形心主惯性轴的位置。

(1) 如果平面图形有一根对称轴，则此轴必定是形心主惯性轴，而另一根形心主惯性轴通过形心，并与此轴垂直。

(2) 如果平面图形有两根对称轴，则此两轴都为形心主惯性轴。

(3) 如果平面图形有三根或更多根的对称轴，那么，过该图形形心的任何轴都是形心主惯性轴，而且该平面图形对于其任一形心主惯性轴的惯性矩都相等。

需要说明的是，对于没有对称轴的截面，其形心主惯性轴的位置，可以通过计算来确定，

因为截面对它的惯性矩是最大或最小。

第五章 弯曲内力

一、教学目标和教学内容

7. 教学目标

- ①掌握弯曲变形与平面弯曲等基本概念；
- ②熟练掌握用截面法求弯曲内力；
- ③熟练列出剪力方程和弯矩方程并绘制剪力图和弯矩图；
- ④利用载荷集度、剪力和弯矩间的微分关系绘制剪力图和弯矩图；
- ⑤掌握叠加法绘制剪力图和弯矩图。

8. 教学内容

- ① 平面弯曲等基本概念；
- ② 截面法及简便方法求弯曲内力；
- ③ 剪力方程和弯矩方程、绘制剪力图和弯矩图；
- ④ 用载荷集度、剪力和弯矩间的微分关系绘制剪力图和弯矩图；
- ⑤ 叠加法绘制剪力图和弯矩图。

二、重点难点

- 1、平面弯曲的概念；
- 2、剪力和弯矩，剪力和弯矩的正负符号规则；
- 3、剪力图和弯矩图；
- 4、剪力、弯矩和载荷集度的微分、积分关系；
- 5、叠加法绘制剪力图和弯矩图。

三、教学方式

采用启发式教学，通过提问，引导学生思考，让学生回答问题。

四、建议学时

7 学时

五、讲课提纲

1、平面弯曲的概念

弯曲变形：杆件在垂直于其轴线的载荷或位于纵向平面内的力偶作用下，相邻两横截面绕垂直于轴线的轴发生相对转动的变形。

梁：以弯曲为主要变形形式的构件。

平面弯曲：杆变形之后的轴线所在平面与外力所在平面重合或平行的弯曲变形。

2、梁的计算简图

2.1 几何结构的简化

以梁的轴线来代替梁，忽略构造上的枝节，如键槽、销孔、阶梯等。

2.2 载荷的简化

载荷按作用方式可以简化成三类

1、集中力

2、分布载荷

按长度分布
按面积分布
按体积分布

3、集中力偶

2.3 约束的简化

三种基本形式

1、可动铰支座

2、固定铰支座

3、固定端

2.4 静定梁及其分类

1、简支梁

2、外伸梁

3、悬臂梁

4、多跨静定梁

3、梁的内力——剪力和弯矩

3.1、弯曲内力

根据梁的平衡条件，可以求出静定梁在载荷作用下的支反力，再应用截面法，求得梁的各个截面上的弯矩内力。

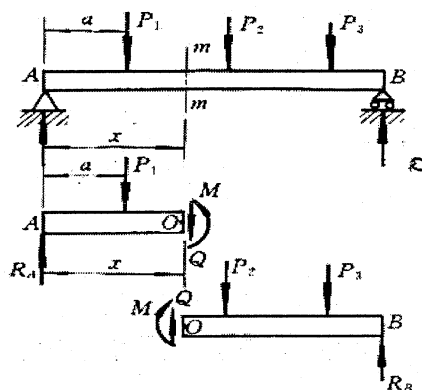
$$\sum Y = 0, R_A - P_1 - Q = 0,$$

$$Q = R_A - P_1$$

$$\sum M_o = 0,$$

$$-R_A x + P_1(x - a) + M = 0$$

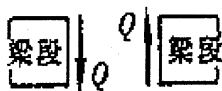
$$M = R_A x - P_1(x - a)$$



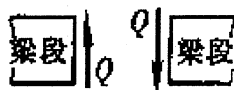
3.2 Q、M 正负号规定：

使梁段绕其内任意点有顺时针转动趋势的剪力规定为正，反之为负，如图所示；

使梁段的下部产生拉伸而上部产生压缩的弯矩规定为正，反之为负，如图所示。



剪力为正值



剪力为负值



M 为正值



M 为负值

3.3 用直接法计算梁内力的规律

3.3.1 剪力

横截面上的剪力在数值上等于此截面左侧（或右侧）梁上所有外力在平行于横截面方向投影的代数和。截面左侧向上外力，或右侧向下外力，产生正的剪力；反之产生负的剪力。左上右下，Q 为正；左下右上，Q 为负。

3.3.2 弯矩

横截面上的弯矩在数值上等于此截面左侧（或右侧）梁上所有外力对该截面形心的力矩的代数和。向上的外力产生正的弯矩，向下的外力产生负的弯矩。截面左侧顺时针转向外力偶，或右侧逆时针转向外力偶，产生正的弯矩；反之产生负的弯矩。上正下负；左顺右逆，M 为正。

4、内力方程 内力图

4.1 内力方程

一般情况下,截面上 Q 、 M 是随截面位置变化的,若横截面的位置用 x 表示,则 Q 、 M 可写成 x 的函数:

$$Q = Q(x), \quad M = M(x)$$

这种内力与 x 的函数式分别称为剪力方程和弯矩方程,统称内力方程。

4.2 内力图

为了形象地表明梁各横截面上的 Q 、 M 沿梁轴线的变化情况,在设计计算中常把各横截面上的 Q 、 M 用图形来表示,分别称为剪力图和弯矩图。

画剪力图和弯矩图时,首先要建立 $Q-x$ 和 $M-x$ 坐标。一般取梁的左端作为 x 坐标的原点, Q 坐标和 M 坐标向上为正。然后根据载荷情况分段列出 $Q(x)$ 和 $M(x)$ 方程。由截面法和平衡条件可知,在集中力、集中力偶和分布载荷的起止点处,剪力方程和弯矩方程可能发生变化,所以这些点均为剪力方程和弯矩方程的分段点。分段点截面也称控制截面。求出分段点处横截面上剪力和弯矩的数值(包括正负号),并将这些数值标在 $Q-x$ 、 $M-x$ 坐标中相应位置处。分段点之间的图形可根据剪力方程和弯矩方程绘出。最后注明 $|Q|_{\max}$ 和 $|M|_{\max}$ 的数值。

5、剪力、弯矩和载荷集度间的关系

5.1 剪力、弯矩和载荷集度间的关系推导

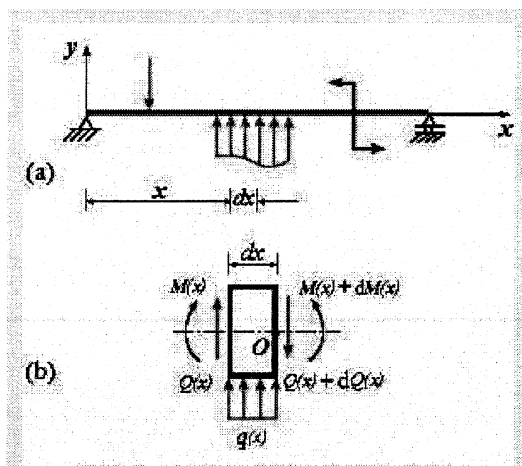
图表示一根普通的梁。以梁的左端为坐标原点,选取右手坐标系如图中所示。规定分布载荷 $q(x)$ 向上(与 y 轴方向一致)为正号。

用坐标为 x 和 $x+dx$ 的两相邻截面从梁为 dx 的微段,并将其放大如图所示。其中 c 为面的形心。在坐标为 x 的截面上,剪力和弯矩和 $M(x)$ 。在坐标为 $x+dx$ 的截面上,剪力和为 $Q(x)+dQ(x)$, $M(x)+dM(x)$ 。图中所截面上,剪力和弯矩均为正的,且设该微段内集中力偶作用。

由于梁处于平衡状态,因此截出的 dx 微段亦应处于平衡状态。因此,根据该微段的平衡方程有:

$$\sum Y = 0, \quad Q(x) - [Q(x) + dQ(x)] + q(x)dx = 0$$

$$\sum m_e = 0, \quad -M(x) + [M(x) + dM(x)] - q(x)dx \cdot \frac{dx}{2} = 0$$



中截取出长
 $x+dx$ 的截
分别为 $Q(x)$
弯矩则分别
示微段的各
无集中力和

省略去上面第二式中的二阶微量 $q(x)dx \cdot \frac{dx}{2}$ ，整理后可得

$$\frac{dQ(x)}{dx} = q(x)$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x)$$

上式中就是载荷集度 $q(x)$ ，和剪力 $Q(x)$ 及弯矩 $M(x)$ 间的微分关系。

5.2 几何意义

1. 剪力图上某处的斜率等于梁在该处的分布载荷集度 q 。
2. 弯矩图上某处的斜率等于梁在该处的剪力。
3. 弯矩图上某处的斜率变化率等于梁在该处的分布载荷集度 q 。

5.3 应用

1. 若某段梁上无分布载荷，即 $q(x) = 0$ ，则该段梁的剪力 $Q(x)$ 为常量，剪力图为平行于 x 轴的直线；而弯矩 $M(x)$ 为 x 的一次函数，弯矩图为斜直线。

2. 若某段梁上的分布载荷 $q(x) = q$ （常量），则该段梁的剪力 $Q(x)$ 为 x 的一次函数，剪力图为斜直线；而 $M(x)$ 为 x 的二次函数，弯矩图为抛物线。在本书规定的 $M-x$ 坐标中，当 $q > 0$ （ q 向上）时，弯矩图为向下凸的曲线；当 $q < 0$ （ q 向下）时，弯矩图为向上凸的曲线。

3. 若某截面的剪力 $Q(x) = 0$ ，根据

$$\frac{dM(x)}{dx} = 0, \text{ 该截面的弯矩为极值。}$$

1. $q=0$, Q =常数, Q 图 为直线, $M(x)$ 为 x 的一次函数, M 图 为斜直线。	3. 剪力 $Q=0$ 处, 弯矩为极值。
2. q =常数, $Q(x)$ 为 x 的一 次函数, Q 图 为斜直线, $M(x)$ 为 x 的二次函数, M 图 为抛物线。 分布载荷向上($q>0$), 抛物线 下凸; 分布载荷向下($q<0$), 抛物线 上凸。	4. 集中力作用 处, 剪力图突变; 集中力偶作 用处, 弯矩图突变。

梁段载荷	无分布力 $q=0$	q =常数 >0	q =常数 <0
$Q(x)$	常数	x 一次函数	x 一次函数
Q 图	直线	斜直线	斜直线
$M(x)$	x 一次函数	x^2 二次函数	x^2 二次函数
M 图	斜直线	下凸抛物线	上凸抛物线

5.4 步骤

利用以上各点，除可以校核已作出的剪力图和弯矩图是否正确外，还可以利用微分关系绘制剪力图和弯矩图，而不必再建立剪力方程和弯矩方程，其步骤如下：

1. 求支座反力；
2. 分段确定剪力图和弯矩图的形状；
3. 求控制截面内力，根据微分关系绘剪力图和弯矩图；

4. 确定 $|Q|_{\max}$ 和 $|M|_{\max}$ 。

6、叠加法

6.1 叠加原理：

当荷载引起的效应为荷载的线性函数时，则多个荷载同时作用所引起的某一效应等于每个荷载单独作用时所引起的该效应的代数和。

6.2 叠加技巧

第 六 章 弯曲应力

一、教学目标和教学内容

9. 教学目标

掌握梁纯弯曲时横截面上正应力计算公式的推导过程，理解推导中所作的基本假设。理解横力弯曲正应力计算仍用纯弯曲公式的条件和近似程度。

掌握中性层、中性轴和翘曲等基本概念和含义。

掌握各种形状截面梁（矩形、圆形、圆环形、工字形）横截面上切应力的分布和计算。熟练弯曲正应力和剪应力强度条件的建立和相应的计算。

了解什么情况下需要对梁的弯曲切应力进行强度校核。

从弯曲强度条件出发，掌握提高弯曲强度的若干措施。

理解等强度梁的概念。

确定薄壁杆件切应力流的方向。

理解弯曲中心对开口薄壁杆件的重要性，掌握确定弯曲中心的方法。

10. 教学内容

梁纯弯曲和横力弯曲时横截面上的正应力

梁横力弯曲时横截面上的切应力

提高弯曲强度的若干措施、薄壁杆件的切应力流和弯曲中心。

二、重点难点

重点：纯弯曲梁横截面上正应力公式的分析推导。

横力弯曲横截面上正应力的计算，最大拉应力和最大压应力的计算。

弯曲的强度计算。

弯曲横截面上的剪应力。

难点：弯曲正应力、剪应力推导过程和弯曲中心的概念。

重点处理：从弯曲变形的特点出发，让学生了解两个应力的分布规律，并对两个应力的分布进行对比，加强学生理解和记忆。分析弯曲正应力、剪应力公式中各项的意义，计算方法，结合 T 型截面梁铸铁梁这一典型问题分析，并在作业中进一步强化训练。

难点处理：结合梁弯曲变形的特点，推导两个应力公式，在推导中，充分利用前面的知识，发挥学

生的主动性，让学生自己选择解决方法，加强学生对内容的掌握。对照 $\sigma = \frac{N}{A}$, $\tau = \frac{M_t}{I_p}$ 的推导消化难点，

以学生理解这一推导思路。结合纯弯曲的条件和两个方向平面弯曲理解弯曲中心。

三、教学方式

采用启发式教学，通过提问，引导学生思考，让学生回答问题。

四、建议学时

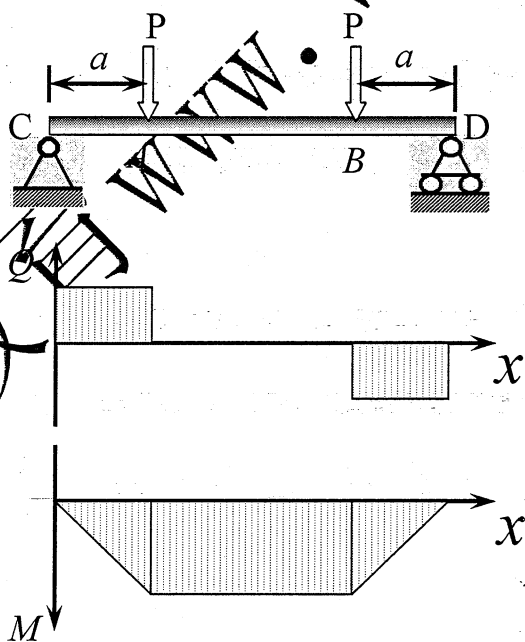
8 学时

五、讲课提纲

1、弯曲正应力

1.1 纯弯曲时的正应力

图所示简支梁 CD，载荷 P 作用在梁的纵向对称面内，梁的弯曲为平面弯曲，其计算简图如图所示。从 CD 梁的剪力图和弯矩图可以看到，AC 和 DB 梁段的各横截面上，剪力和弯矩同时存在，这种弯曲称为横力弯曲；而在 AB 梁段内，横截面上则只有弯矩而没有剪力，这种弯曲称为纯弯曲。横力弯曲时， $\frac{dM}{dx} = Q \neq 0$ 。

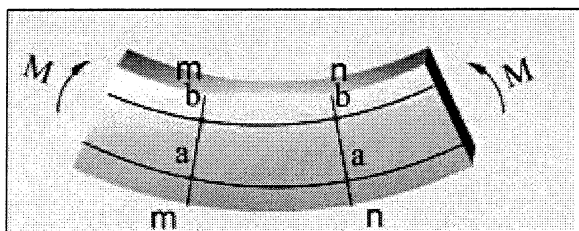
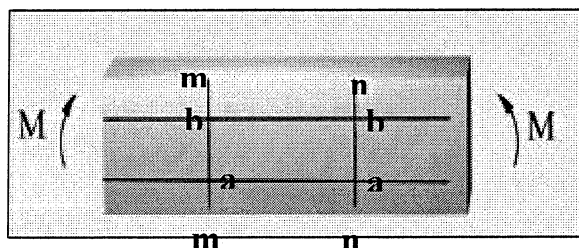


可以知道，梁的各截面上弯矩是不同的；纯弯曲时，由于 $\frac{dM}{dx} = Q = 0$ ，可知梁的各截面上弯矩为一不变的常数值，即 $M = \text{常量}$ 。

下面，首先分析梁在纯弯曲时横截面上的弯曲正应力。

纯弯曲时，根据梁的静力关系知道，横截面上的正应力 σ 组成的内力系的合力矩即为弯矩 M 。但是，只利用静力关系是不可能找到应力分布规律的，因此，所研究的问题是超静定的。和拉（压）杆的正应力、圆轴扭转的剪应力的分析一样，必须综合考虑梁的变形关系、物理关系和静力关系进行分析。

1.1.1 变形几何关系



1、实验观察

为了分析梁的关系，变形前先在梁的侧面画上与轴线平行的纵线以及与梁轴垂直的横线，分别表示变形前梁的纵向纤维和梁的横截面。在材料试验机上作纯弯曲实验，可以观察以下现象：

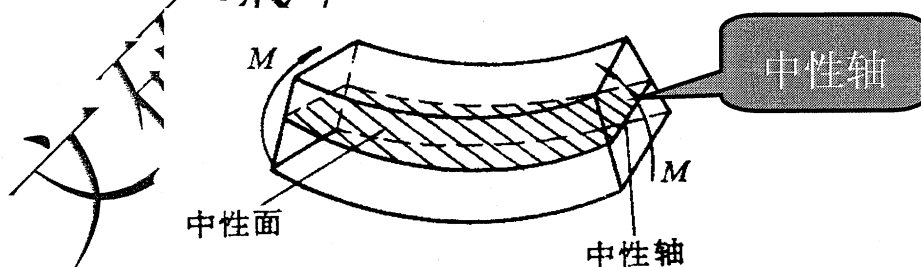
(1) 梁上的纵线（包括轴线）都弯曲成圆弧曲线，靠近梁凹侧一边的纵线缩短，而靠近凸侧一边的纵线伸长。

(2) 梁上的横线仍为直线，各横线间发生相对转动，不再相互平行，但仍与梁弯曲后的轴线垂直。

(3) 在梁的纵线伸长区，梁的宽度减小；而在梁的纵线缩短区，梁的宽度增大。

中性层：梁内某一层纤维既不伸长也不缩短，因而这层纤维既不受拉应力，也不受压应力，这层纤维称为中性层。

中性轴：中性层与梁横截面的交线。如图



2、假设

根据上述实验观察到的纯弯曲的变形现象，经过判断、综合和推理，可作出如下假设：

(1) 梁的横截面在纯弯曲变形后仍保持为平面，并垂直于梁弯曲后的轴线。横截面只是绕其面内的某一轴线刚性地转了一个角度。这就是弯曲变形的平面假设。

(2) 梁的纵向纤维间无挤压，只是发生了简单的轴向拉伸或压缩。

3、几何关系

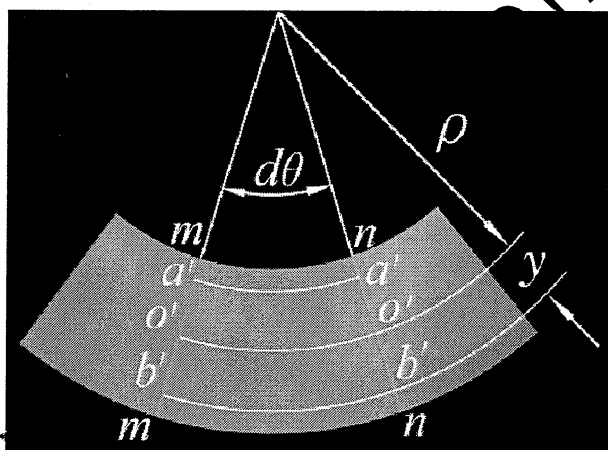
为进一步研究与正应力有关的梁的纵向纤维的变形规律，如图所示，用横截面 m-m 和 n-n 从梁中截取出长为 dx 的一个微段。从图中可以看到，横截面 m-m 和 n-n 间相对转过的角度为 $d\theta$ ，中性层 O_1O_2 曲率半径为 ρ ，距中性层为 y 处的任一纵线（纵向纤维） \overline{ab} 为圆弧曲线。因此，纵线 \overline{ab} 的伸长为

$$\Delta l = (\rho + y)d\theta - dx = (\rho + y)d\theta - \rho d\theta = yd\theta$$

而其线应变为

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{e} = \frac{yd\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho}$$

由于中性层等远的各纵向纤维变形相同，所以，公式线应变 ε 即为横截面上坐标为 y 的所有各点处的纵向纤维的线应变。



1.1.2 物理关系

根据梁的纵向纤维间无挤压，而只是发生简单拉伸或压缩的假设。当横截面上的正应力不超过材料的比例极限 σ_p 时，可由胡克定律得到横截面上坐标为 y 处各点的正应力为

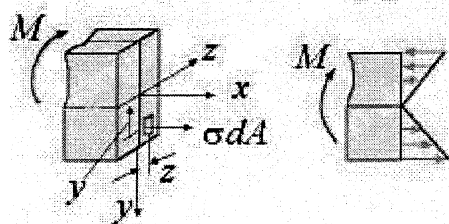
$$\sigma = E\varepsilon = \frac{E}{\rho}y$$

该式表明，横截面上各点的正应力 σ 与点的坐标 y 成正比，由于截面上 $\frac{E}{\rho}$ 为常数，说明弯曲正应力

沿截面高度按线性规律分布，如图所示。中性轴上各点的正应力均为零，中

性轴上部横截面的各点均为压应力，而下部各点则均为拉应力。

1.1.3 静力关系



图所示梁的横截面的形心直角坐标系 $O-xyz$ 中, z 轴为截面的中性轴。横截面上坐标为 (y, z) 的点的正应力为 σ , 截面上各点的微内力 $\sigma \cdot dA$ 组成与横截面垂直的空间平行力系 (图中只画出了该平行力系中的一个微内力, O 为横截面的形心)。这个内力系只可能简化为三个内力分量, 即平行于 x 轴的轴力 N , 对 z 轴的力矩 M_z 和对 y 轴的力偶矩 M_y , 分别为

$$N = \int_A \sigma dA$$

$$M_y = \int_A z \sigma dA$$

$$M_z = \int_A y \sigma dA$$

在纯弯情况下, 梁横截面上只有弯矩 $M_z = M$, 而轴力 N 和 M_y 皆为零。

由 $N = 0$, 有

$$N = \int_A \sigma dA = 0$$

将物理关系代入上式可得: $\int_A \frac{E}{\rho} y dA = \frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0$

由于弯曲时 $\frac{E}{\rho} \neq 0$, 必然有

$$\int_A y dA = S_z = 0$$

此式表明, 中性轴 z 通过截面形心。

同时, 由 $M_y = 0$, 可得

$$M_y = \int_A z \sigma dA = \int_A \frac{E}{\rho} y z dA = \frac{E}{\rho} \int_A y z dA = \frac{E}{\rho} I_{yz} = 0$$

其中

$$I_{yz} = \int_A yz dA$$

称为截面对 y 、 z 轴的惯性积。使 $I_{yz} = 0$ 的一对互相垂直的轴称为主轴。而 z 轴又通过横截面形心，所以 z 轴为形心主轴。

最后，根据 $M = M_z$ ，将物理关系代入下式

$$M_z = \int_A y \sigma dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = M$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}$$

其中

$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}$ 是纯弯曲时梁轴线变形后的曲率；

$I_z = \int_A y^2 dA$ 称为截面对 z 轴的惯性矩； EI_z 称为截面的抗弯刚度。梁弯曲的曲率与弯矩成正比，而与抗弯刚度成反比。

将该式代入物理关系，即可得到纯弯曲时梁的横截面上的正应力计算公式

$$\sigma = \frac{M_y}{I_z}$$

上式中正应力 σ 的正负号与弯矩 M 及点的坐标 y 的正负号有关。实际计算中，可根据截面上弯矩 M 的方向，直接判断中性轴的哪一侧产生拉应力，哪一侧产生压应力，而不必计及 M 和 y 的正负。

公式的适用范围

1、平面弯曲 2、材料在线弹性范围内的梁 3、单向应力

1.1.4 最大应力的计算

设 y_{\max} 为横截面上离中性轴最远点到中性轴的距离，则截面上的最大正应力为

$$\sigma_{\max} = \frac{M y_{\max}}{I_z}$$

如令

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}$$

则截面上最大弯曲正应力可以表达为

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_z}$$

式中, W_z 称为截面图形的抗弯截面模量。它只与截面图形的几何性质有关, 其量纲为 [长度]³。矩形截面和圆截面的抗弯截面模量分别为:

高为 h , 宽为 b 的矩形截面:

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6}$$

直径为 d 的圆截面:

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{\frac{\pi d^4}{64}}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi d^3}{32}$$

至于各种型钢的抗弯截面模量, 可从附录 II 的型钢表中查找。

若梁的横截面对中性轴不对称, 则其截面上的最大拉应力和最大压应力并不相等, 例如 T 形截面。这时, 应把 y_1 和 y_2 分别代入正应力公式, 计算截面上的最大正应力。

最大拉应力为:

$$(\sigma)_t = \frac{My_1}{I_z}$$

最大压应力为:

$$(\sigma)_e = \frac{My_2}{I_z}$$

1.2、横力弯曲时的正应力

梁在横弯曲作用下, 其横截面上不仅有正应力, 还有剪应力。由于存在剪应力, 横截面不再保持平面, 而发生“翘曲”现象。进一步的分析表明, 对于细长梁 (例如矩形截面梁, $l/h \geq 5$, l 为梁长, h 为截面高度), 剪应力对正应力和弯曲变形的影响很小, 可以忽略不计。而且, 用纯弯曲时梁横截面上的正应力计算公式, 即

$$\sigma = \frac{My}{I_z}$$

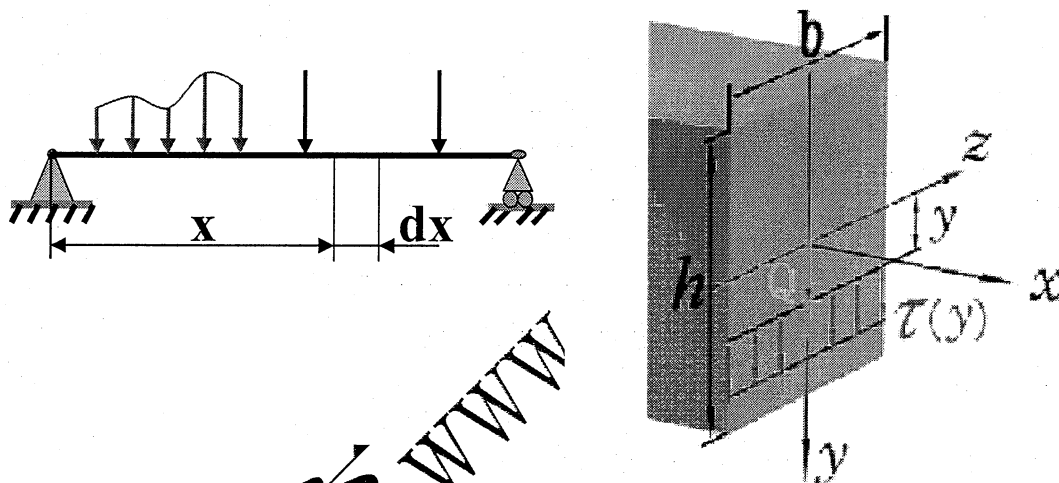
来计算细长梁横力弯曲时的正应力，和梁内的真实应力相比，并不会引起很大的误差，能够满足工程问题所要求的精度。所以，对横力弯曲时的细长梁，可以用纯弯曲时梁横截面上的正应力计算公式计算梁的横截面上的弯曲正应力。

上述公式是根据等截面直梁导出的。对于缓慢变化的变截面梁，以及曲率很小的曲梁（ $h/\rho_0 \leq 0.2$ ， ρ_0 为曲梁轴线的曲率半径）也可近似适用。

2、弯曲剪应力

横力弯曲时，梁内不仅有弯矩还有剪力，因而横截面上既有弯曲正应力，又有弯曲剪应力。同时，由于横力弯曲时梁的横截面不再保持为平面，弯曲剪应力不能采用综合变形条件、物理条件及静力条件进行应力分析的方法。本节从矩形截面梁入手，研究梁的弯曲剪应力。

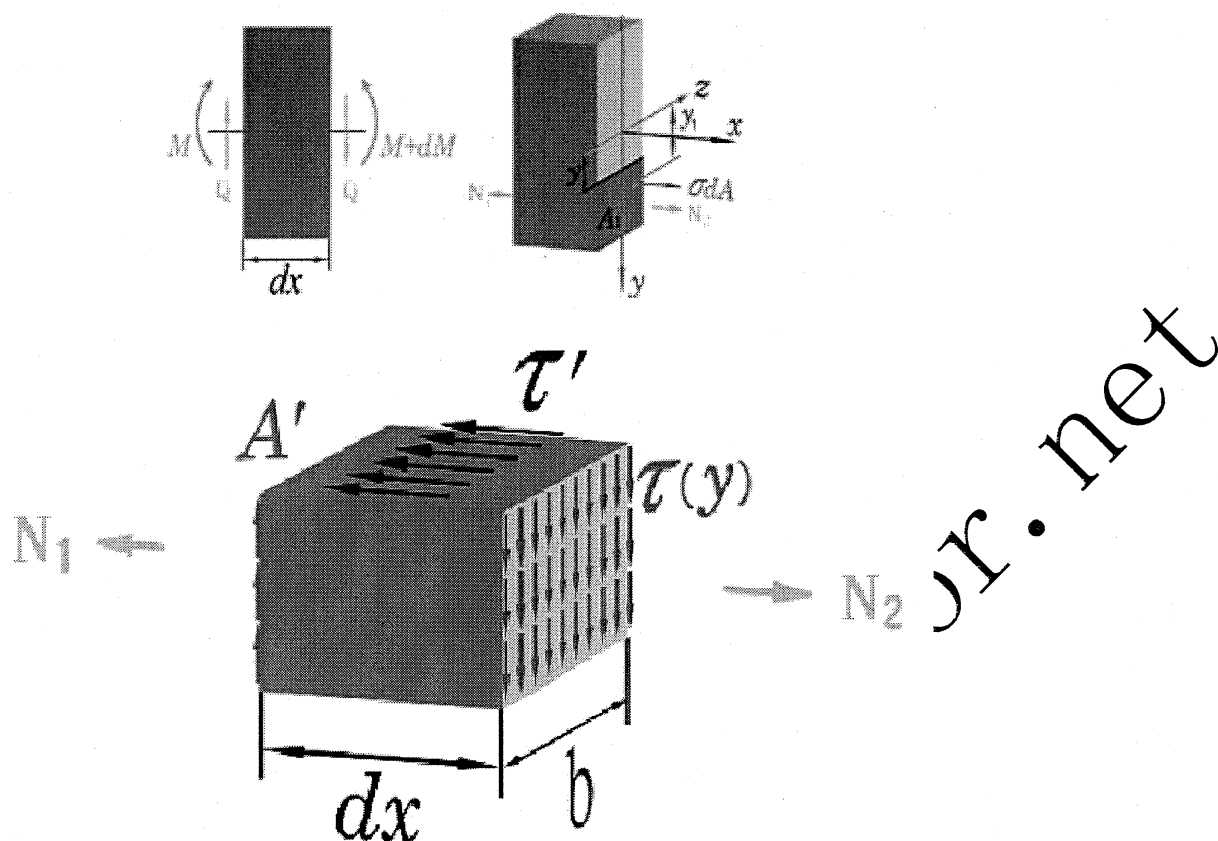
2.1. 矩形截面梁的弯曲剪应力



分析图所示横力弯曲的矩形截面梁截面上某点处的剪应力时，需要先分析截面上剪应力的分布规律。矩形截面上，剪力 Q 截面的纵向对称轴 y 轴重合。在截面两侧边界处取一单元体（尺寸分别为 dx, dy, dz ）的微小六面体，设在横截面上剪应力 τ 的方向与边界成一角度，则可将该剪应力分解为平行于边界的分量 τ_y 和垂直于边界的分量 τ_z 。根据剪应力互等定理，可知在此单元体的侧面必有一剪应力 τ_x 和 τ_z 大小相等。但是，此面为梁的侧表面，是自由表面，不可能有剪应力，即 $\tau_x = \tau_z = 0$ 。说明矩形截面周边处剪应力的方向必然与周边相切。因对称关系，可以推知左、右边界 y 轴上各点的剪应力都平行于剪力 Q 。所以，当截面高度 h 大于宽度 b 时，关于矩形截面上的剪应力分布规律，可作如下假设：

(1) 截面上任意一点的剪应力都平行于剪力 Q 的方向。

(2) 剪应力沿截面宽度均匀分布，即剪应力的大小只与 y 坐标有关。



从图所示横力弯曲的梁上截取长为 dx 的微段梁，设该微段左、右截面上的弯矩分别为 M 及 $M + dM$ ；剪力均为 Q 。再在 $m-n$ 和 m_1-n_1 两截面间距中性层为 y 处用一水平截面将该微段截开，取截面以下部分进行研究。在六面体 pp_1n_1n 上，左、右竖直侧面上有正应力 σ_1 、 σ_2 和剪应力 τ ；顶面上有与 τ 互等的剪应力 τ' 。在左、右侧面上的正应力 σ_1 和 σ_2 分别构成了与正应力方向相同的两个合力 N_1 和 N_2 ，它们为

$$N_1 = \int_A \sigma_1 dA = \frac{M}{I_z} \int_A y_1 dA$$

式中 $\int_A y_1 dA$ 为横截面上距中性轴为 y 的横线以外的面积，如图所示。式中积分

$$S_2^* = \int_A y_1 dA$$

是 A^* 的截面积对矩形截面中性轴 z 的静矩。因此，上式简化为

$$N_1 = \frac{M}{I_z} S_2^*$$

同理,

$$N_2 = \frac{M + dM}{I_z} S_z^*$$

因微段的左、右两侧面上的弯矩不同, 故 N_2 和 N_1 的大小也不相同。 N_1, N_2 只有和水平剪应力 τ' 的合力一起, 才能维持六面体在 x 方向的平衡, 即

$$\sum X = 0, \quad N_1 - N_2 - \tau'(b dx) = 0$$

将 N_1 和 N_2 代入上式, 有

$$\frac{M + dM}{I_z} S_z^* - \frac{M}{I_z} S_z^* - \tau' b dx = 0$$

整理、化简后有

$$\tau' = \frac{dM S_z^*}{dx b I_z}$$

根据梁内力间的微分关系 $\frac{dM}{dx} = Q$, 可得

$$\tau' = \frac{Q S_z^*}{b I_z}$$

由剪应力互等定理 $\tau' = \tau$, 可以推导出矩形截面上距中性轴为 y 处任意点的剪应力计算公式为

$$\tau = \frac{Q S_z^*}{b I_z}$$

式中 Q ——横截面上的剪力

I_z ——横截面 A 对中性轴 z 的轴惯性矩

b ——横截面上所求剪应力点处截面的宽度 (即矩形的宽度)

S_z^* ——横截面上距中性轴为 y 的横线以外部分的面积 A^* 对中性轴的静矩

现在，根据剪应力公式进一步讨论剪应力在矩形截面上的分布规律。在图所示矩形截面上取微面积

$dA = bdy$ ，则距中性轴为 y 的横线以下的面积 A^* 对中性轴 z 的静矩为

$$S_z^* = \int_{A^*} y_1 dA = \int_y^b by_1 dy_1 = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

将此式代入剪应力公式，可得矩形截面剪应力计算公式的具体表达式为

$$\tau = \frac{Q}{2I_z} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

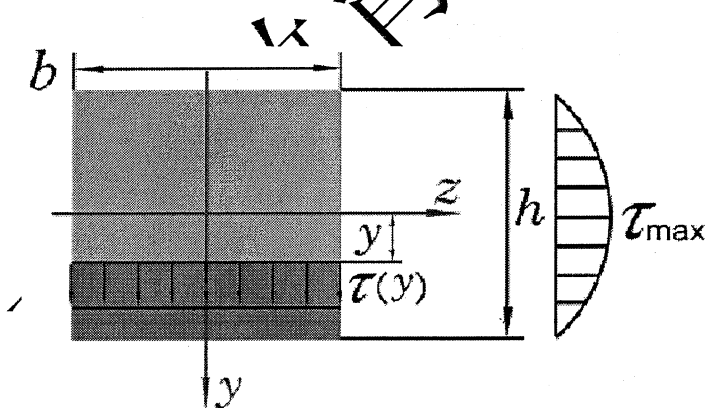
从该式可以看出，沿截面高度剪应力 τ 按抛物线规律变化，如图所示。可以看到，当 $y = \pm \frac{h}{2}$ 时，即矩形截面的上、下边缘处剪应力 $\tau = 0$ ；当 $y=0$ 时，截面中性轴上的剪应力为最大值：

$$\tau_{\max} = \frac{Qh^2}{8I_z}$$

将矩形截面的惯性矩 $I_z = \frac{bh^3}{12}$ 代入上式，得到

$$\tau_{\max} = \frac{3Q}{2bh}$$

说明矩形截面上的最大弯曲剪应力为其平均剪应力的1.5倍。



2.2. 工字形截面、T形截面、槽形截面梁的弯曲剪应力

2.2.1 腹板上剪应力

工字形截面梁由腹板和翼缘组成。实验表明，在翼缘上剪应力很小，在腹板上剪应力沿腹板高度按抛物线规律变化，如图所示。

腹板上剪应力仍然沿用矩形截面梁弯曲剪应力计算公式

$$\tau = \frac{QS_z^*}{bI_z}$$

其中 b 取腹板的宽度。

最大剪应力在中性轴上，其值为

$$\tau_{\max} = \frac{Q(S_z^*)_{\max}}{dI_z}$$

式中 $(S_z^*)_{\max}$ 为中性轴一侧截面积对中性轴的静矩。对于轧制的工字钢，式中的 $I_z / (S_z^*)_{\max}$ 可以从型钢表中查得。

2.2.2 翼缘上剪应力

计算结果表明，腹板承担的剪力 $(0.95 \sim 0.97)Q$ ，因此翼缘上的竖向忽略不计。

水平剪应力

$$\tau = \frac{QS^*}{tI_z}$$

2.3 圆形截面梁

在圆形截面上，任一平行于中性轴的横线 aa 两端方向必切于圆周，并相交于 y 轴上的 c 点。因此，横线方向是变化的。但在中性轴上各点剪应力的方向皆平行于均匀分布，其值为最大。

$$\tau_{\max} = \frac{4Q}{3A}$$

式中 $A = \frac{\pi}{4}d^2$ ，即圆截面的最大剪应力为其平均剪应力的 $\frac{4}{3}$ 倍。

3. 梁的强度校核

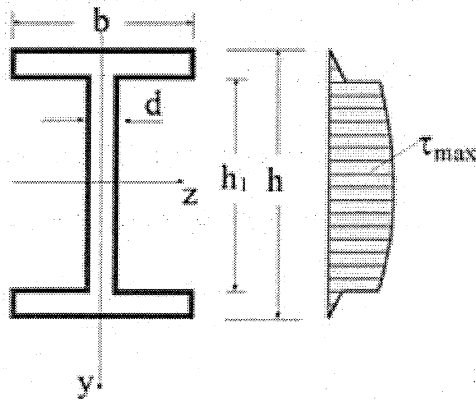
3.1 梁的正应力强度条件

为保证梁的安全，梁的最大正应力点应满足强度条件

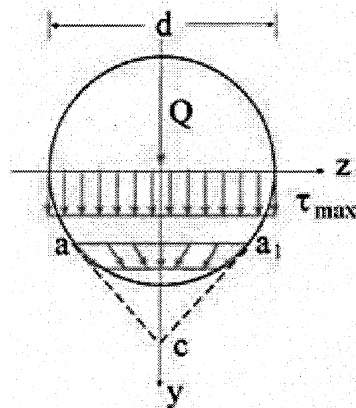
$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} y_{\max}}{I_z} \leq [\sigma]$$

式中 $[\sigma]$ 为材料的许用应力。对于等截面直梁，若材料的拉、压强度相等，则最大弯矩的所在面称为危险截面，危险截面上距中性轴最远的点称为危险点。此时强度条件可表达为

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma]$$



约 为
剪应力很小，可



处，剪应力的
上各点剪应力
于剪力 Q ，设

对于由脆性材料制成的梁，由于其抗拉强度和抗压强度相差甚大，所以要对最大拉应力点和最大压应力点分别进行校核。

根据强度条件可以解决三类强度问题，即强度校核，截面设计和许用载荷计算。

3.2 剪应力强度条件

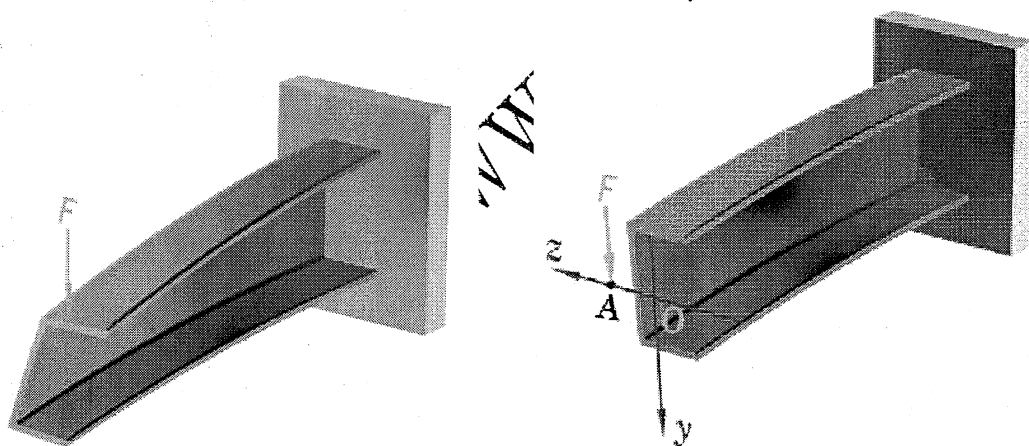
对于某些特殊情形，如梁的跨度较小或载荷靠近支座时，焊接或铆接的壁薄截面梁，或梁沿某一方向的抗剪能力较差（木梁的顺纹方向，胶合梁的胶合层）等，还需进行弯曲剪应力强度校核。等截面直梁的 τ_{\max} 一般发生在 $|Q|_{\max}$ 截面的中性轴上，此处弯曲正应力 $\sigma = 0$ ，微元体处于纯剪应力状态，其强度条件为

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} (S_z^*)_{\max}}{b I_z} \leq [\tau]$$

式中 $[\tau]$ 为材料的许用剪应力。此时，一般先按正应力的强度条件选择截面的尺寸和形状，然后按剪应力强度条件校核。

4、截面的弯曲中心概念

横力弯曲时，梁的横截面上不仅有正应力还有剪应力。对于有对称截面的梁，当外力作用在形心主惯性平面内时，剪应力的合力，即剪力作用线通过形心，梁发生平面弯曲。对于非对称截面（特别是薄壁截面）梁，横向外力即使作用在形心主惯性平面内，剪应力的合力作用线并不一定通过截面形心。此时，梁不仅发生弯曲变形，而且还将产生扭转，如图所示。只有当横向力作用在截面上某一特定点 A 时，该梁才只产生弯曲而无扭转，如图所示。这一特定点 A 称为弯曲中心或剪切中心，简称弯心。



弯曲中心的位置只取决于截面的形状和尺寸，而与外力无关。

当截面有两个对称轴时，两个对称轴的交点即为弯曲中心，此时弯曲中心与形心重合，如工字形截面。当截面有一个对称轴时，可假定外力垂直于该对称轴，并产生平面弯曲，求得截面上剪应力合力的作用线，该作用线与对称轴的交点即为弯曲中心，此时弯曲中心一般与形心不重合，如槽形截面。对于没有对称轴的薄壁截面应这样求弯曲中心：

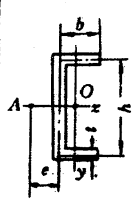
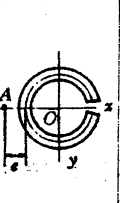
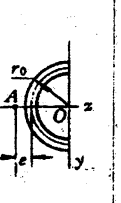
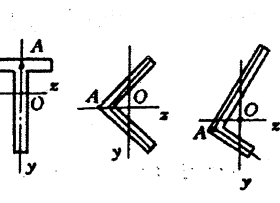
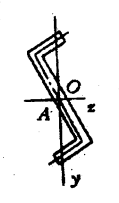
(1) 确定形心主轴。

(2) 设横向力平行于某一形心主轴，并使梁产生平面弯曲，求出截面上弯曲剪应力合力作用线的位置。

(3) 设横向力平行于另一形心主轴，并使梁产生平面弯曲，求出对于此平面弯曲截面上剪应力合力作用线的位置。

(4) 两合力作用线的交点即为弯曲中心的位置。

几种常见截面的弯曲中心位置

截面形状					
弯曲中心 A 的位置	$e = \frac{b^2 h^2 t}{4I_x}$	$e = r_0$	$e = \left(\frac{4}{\pi} - 1 \right) r_0$	在两个狭长矩形中线的交点	与形心重合

5、提高弯曲强度

的措施

一、合理安排梁的受力情况

梁的弯矩与载荷的作用位置和梁的支承方式有关，适当调整载荷或支座的位置，可以降低梁的最大弯矩 M_{\max} 的数值。

二、选择合理截面形状

$$\text{由 } M_{\max} \leq [\sigma]W$$

知梁可能承受的最大弯矩与抗弯截面系数成正比，W 越大越有利，而 W 又与截面面积和形状有关。因此应选择 W 较大的截面（工字形、槽形>矩形>圆形）。

应使截面的上、下缘应力同时达到材料的相应容许应力。

三、采用变截面梁

在横力弯曲下，弯矩是沿梁轴变化的。因此在按最大弯矩设计的等截面梁中，除最大弯矩所在的截面外，其余截面材料的强度均未得到充分利用。为了节省材料，减轻梁的重量，可根据弯矩沿梁轴的变化情况，将梁设计成变截面的。若变截面梁的每一横截面上的最大正应力均等于材料的许用应力，这种梁就称为等强度梁。

在工程实践中，由于构造和加工的关系，很难做到理论上的等强度梁，但在很多情况下，都利用了等强度梁的概念即在弯矩大的梁段使其横截面相应地大一些。例如厂房建筑中广泛使用的鱼腹梁和机械工程中常见的阶梯轴等。

第七章 弯曲变形

一、教学目标和教学内容

11. 教学目标

掌握求梁变形的两种方法：积分法和叠加法，明确叠加原理的使用条件，掌握用变形比较法求解静不定梁。

12. 教学内容

有关弯曲变形的基本概念

积分法和叠加法

明确叠加原理

力法求解静不定梁。

二、重点难点

梁的变形分析。

挠曲轴近似微分方程。

积分法求变形。

叠加法求梁的变形。

静不定梁。

三、教学方式

采用启发式教学，通过提问，引导学生思考，让学生回答问题。

四、建议学时

7 学时

五、讲课提纲

1、概述

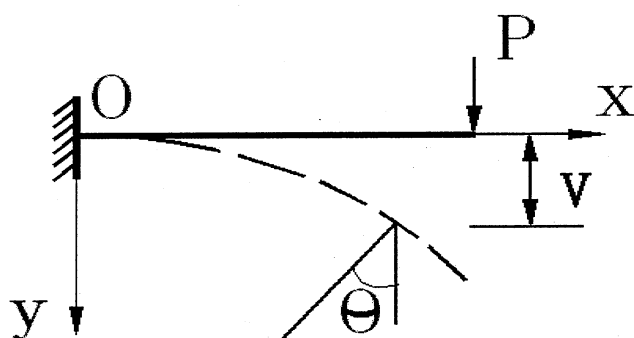


图 7.1

关于梁的弯曲变形，可以从梁的轴线和横截面两个方面来研究。

图示一根任意梁，以变形前直梁的轴线为 x 轴，垂直向下的轴为 y 轴，建立 xoy 直角坐标系。当梁在 xy 面内发生弯曲时，梁的轴线由直线变为 xy 面内的一条光滑连续曲线，称为梁的挠曲线，或弹性曲线。第六章中曾经指出，梁弯曲后横截面仍然垂直于梁的挠曲线，因此，当梁发生弯曲时梁的各个截面不仅发生了线位移，而且还产生了角位移，如图 7.1 所示。

横截面的形心在垂直于梁轴（ x 轴）方向的线位移，称为横截面的挠度，并用符号 v 表示。关于挠度的正负符号，在图示坐标系下，规定挠度向下（与 y 轴同向）为正；向上（与 y 轴反向）为负。应该指出，由于梁在弯曲时长度不变，横截面的形心在沿梁轴方向也存在线位移。但在小变形条件下，这种位移极小，可以忽略不计。梁弯曲时，各个截面的挠度是截面形心坐标 x 的函数，即有

$$v = v(x)$$

上式是挠曲线的函数表达式，亦称为挠曲线方程。

横截面的角位移，称为截面的转角，用符号 θ 表示。关于转角的正负符号，规定在图示坐标系中从 x 轴顺时针转到挠曲线的切线形成的转角 θ 为正的；反之，为负的。

显然，转角也是随截面位置不同而变化的，它也是截面位置 x 的函数，即

$$\theta = \theta(x)$$

此式称为转角方程。工程实际中，小变形时转角 θ 是一个很小的量，因此可表示为

$$\theta \approx \tan \theta = \frac{dy}{dx} = v'(x)$$

综上所述，求梁的任一截面的挠度和转角，关键在于确定梁的挠曲线方程 $v = v(x)$

2、挠曲线近似微分方程

对细长梁，梁上的弯矩 M 和相应截面处梁轴的曲率半径 ρ 均为截面位置 x 的函数，因此，梁的挠曲线的曲率可表示为

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{EI}$$

即梁的任一截面处挠曲线的曲率与该截面上的弯矩成正比，与截面的抗弯刚度 EI 成反比。

另外，由高等数学知，曲线 $y = y(x)$ 任一点的曲率为

$$\frac{1}{\rho(x)} = \pm \frac{v''}{[1 + (v')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

显然，上述关系同样适用于挠曲线。比较上两式，可得

$$\pm \frac{v''}{[1 + (v')^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{M(x)}{EI}$$

上式称为挠曲线微分方程。这是一个三阶非线性常微分方程，求解是很困难的。而在工程实

际中, 梁的挠度 y 和转角 θ 数值都很小, 因此, $(y')^2$ 之值和 1 相比很小, 可以略去不计, 于是, 该式可简化为

$$\pm v'' = \frac{M(x)}{EI}$$

式中左端的正负号的选择, 与弯矩 M 的正负符号规定及 xoy 坐标系的选择有关。根据弯矩 M 的正负符号规定, 当梁的弯矩 $M > 0$ 时, 梁的挠曲线为凹曲线, 按图示坐标系, 挠曲线的二阶导函数值 $v'' < 0$; 反之, 当梁的弯矩 $M < 0$ 时, 挠曲线为凸曲线, 在图示坐标系中挠曲线的 $v'' > 0$ 。可见, 在图示右手坐标系中, 梁上的弯矩 M 与挠曲线的二阶导数 v'' 符号相反, 所以, 上式的左端应取负号, 即

$$-v'' = \frac{M(x)}{EI}$$

上式称为挠曲线近似微分方程。实践表明, 由此方程求得的挠度和转角, 对工程计算来说, 已足够精确。

3、积分法求弯曲变形

积分法计算梁的变形

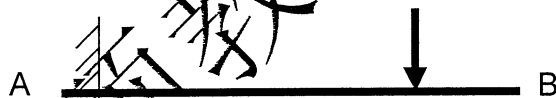
积分一次: $v' = \theta = \int \frac{M(x)}{EI} dx + C$

再积分一次: $v = \iint \frac{M(x)}{EI} dx dx + Cx + D$

C 、 D 为积分常数, 它由位移边界与连续条件确定

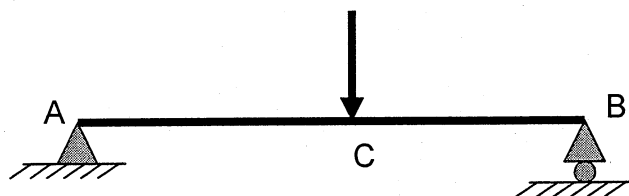
边界条件:

(1) 固定端约束: 限制线位移和角位移



$$v_A = 0, \theta_A = 0$$

(2) 铰支座: 只限制线位移



$$v_A = 0, v_B = 0$$

连续条件:

$$v_C^{\text{左}} = v_C^{\text{右}} \quad \theta_C^{\text{左}} = \theta_C^{\text{右}}$$

4、叠加法求梁的变形

在第五章介绍用叠加法作弯矩图时，曾介绍了材料力学的一个普遍原理——叠加原理。在线弹性小变形前提下，构件的支反力、内力、应力和变形都可以用叠加法的方法计算。

弯曲变形时，梁的挠度与转角都与载荷成线性关系。

因此，可以用叠加法计算梁的弯曲变形。当梁上有几个载荷共同作用时，可以分别计算梁在每个载荷单独作用时的变形，然后进行叠加，即可求得梁在几个载荷共同作用时的总变形。

应用叠加法求梁的变形时，若已知梁在简单载荷作用时的变形，是很方便的。

5、梁的刚度校核

5.1 刚度条件

$$\theta_{\max} \leq [\theta]$$

$$v_{\max} \leq [v] \quad \text{或} \quad \frac{v_{\max}}{l} \leq \left[\frac{v}{l}\right]$$

$[\theta]$ ——构件的许用转角

$[v]$ 、 $\left[\frac{v}{l}\right]$ ——分别为构件的许用挠度、单位长度许用挠度

5.2 刚度校核

刚度校核是检查梁在荷载作用下产生的变形是否超过容许值，在机械工程中，一般对 θ, v 都进行校核；在建筑工程中，大多数只校核挠度 v 。

5.3 提高梁刚度的措施

从挠曲线的近似微分方程及其积分可以看出，弯曲变形与弯矩大小、跨度长短、支座条件，梁截面的惯性矩 I 、材料的弹性模量 E 有关。故提高梁刚度的措施为：

- (1) 改善结构形式，减小弯矩 M ；
- (2) 增加支承，减小跨度 l ；
- (3) 选用合适的材料，增加弹性模量 E 。但因各种钢材的弹性模量基本相同，所以为提高梁的刚度而采用高强度钢，效果并不显著；
- (4) 选择合理的截面形状，提高惯性矩 I ，如工字形截面、空心截面等。

6、简单超静定梁的解法

超静定梁：约束反力数目多于静力平衡方程数目的梁称为超静定梁。两者数目的差称为静不定次数。

第九章 绪 论

一、教学目标和教学内容

1. 教学目标

通过本章学习, 掌握应力状态的概念及其研究方法; 会从具有受力杆件中截取单元体并标明单元体上的应力情况; 会计算平面应力状态下斜截面上的应力; 掌握平面应力状态和特殊空间应力状态下的主应力、主方向的计算, 并会排列主应力的顺序; 掌握广义胡克定律; 了解复杂应力状态比能的概念; 了解主应力迹线的概念。

2. 教学内容

- ① 应力状态的概念;
- ② 平面应力状态分析;
- ③ 三向应力状态下的最大应力;
- ④ 广义胡克定律·体应变;
- ⑤ 复杂应力状态的比能;
- ⑥ 梁的主应力·主应力迹线的概念。

二、重点难点

重点:

- 1、平面应力状态下斜截面上的应力计算, 主应力及主方向的计算, 最大剪应力的计算。
- 2、广义胡克定律及其应用。

难点:

- 1、应力状态的概念, 从具体受力杆件中截面单元体并标明单元体上的应力情况。
- 2、斜截面上的应力计算公式中关于正负符号的约定。
- 3、应力主平面、主应力的概念, 主应力的方向、大小的确定。
- 4、广义胡克定律及其应用。

三、教学方式

采用启发式教学, 通过提问, 引导学生思考, 让学生回答问题。

四、建议学时

学时

五、讲课提纲

1、应力状态的概念

所谓“应力状态”又称为一点处的应力状态 (state of stresses at a given point), 是指过一点不同方向面上应力的集合。

应力状态分析 (Analysis of Stress-State) 是用平衡的方法, 分析过一点不同方向面上应力的相互关系, 确定这些应力的极大值和极小值以及它们的作用面。

一点处的应力状态, 可用同一点在三个相互垂直的截面上的应力来描述, 通常是用围绕该点取出一个微小正六面体 (简称单元体 element) 来表示。单元体的表面就是应力作用面。由于单元体微小, 可以认为单元体各表面上的应力是均匀分布的, 而且一对平行表面上的应力情况是相同的。例如, 图 9.1 截面 mm 上 a~d 点的应力状态表示方式, 如图 (c) 所示。

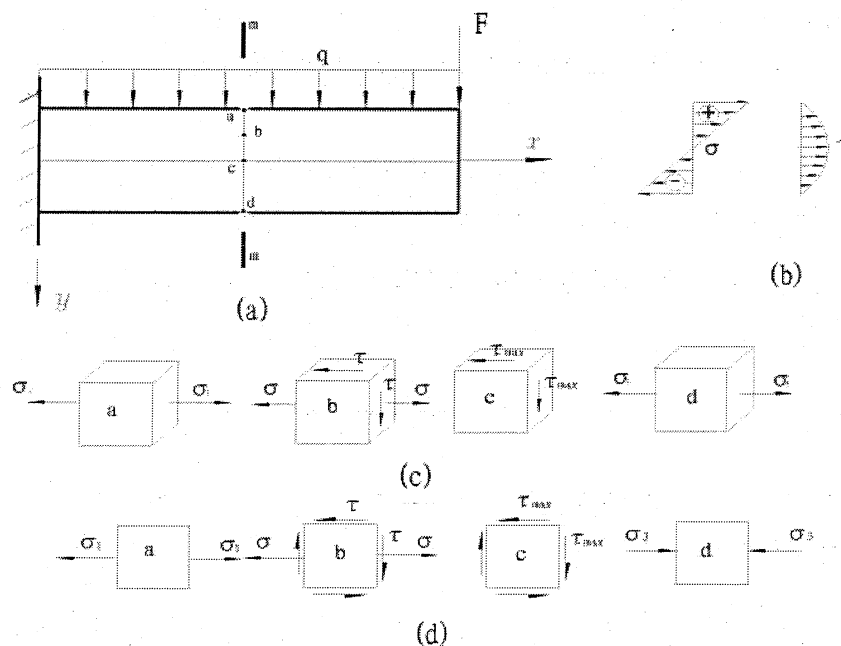


图 9.1

9.2 节中的分析将表明，一点处不同方向面上的应力是不相同的。我们把在过一点的所有截面中，切应力为零的截面称为应力主平面，简称为主平面 (principal plane)。例如，图 (c) 中 a、d 单元体的三对面及 b、c 单元体的前后一对表面均为主平面。由主平面构成的单元体称为主单元体 (principal element)，如图 (c) 中的 a、d 单元体。主平面的法向称为应力主方向。简称主方向 (principal direction)。主平面上的正应力称为主应力 (principal stresses)，如图 (c) 中 a、d 单元体上的 σ_1 及 σ_3 。用弹性力学方法可以证明，物体中任一点总可找到三个相互垂直的主方向，因而每一点处都有三个相互垂直的主平面和三个主应力；但在三个主应力中有两个或三个主应力相等的特殊情况下，主平面及主方向便会多于三个。

一点处的三个主应力，通常按其代数值依次用 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ 来表示，如图 (c) 中 a、d 单元体，虽然它们都只有一个不为零且绝对值相等的主应力，但须分别用 σ_1 、 σ_3 表示。根据一点处存在几个不为零的主应力，可以将应力状态分为三类：

- 1) 单向 (或简单) 应力状态：三个主应力中只有一个主应力不为零，如图 9.2 (a) 所示。
- 2) 二向应力状态：三个主应力中有两个主应力不为零，如图 9.2 (b) 所示。
- 3) 三向 (或空间) 应力状态：三个主应力均不为零，如图 9.2 (c) 所示。

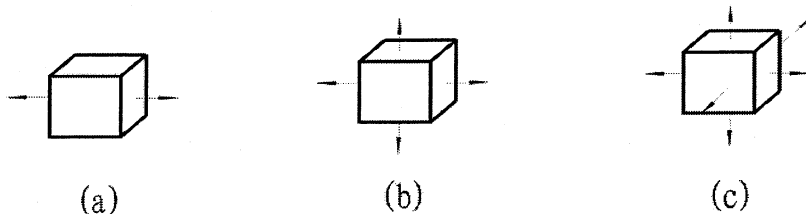


图 9.2

单向及二向应力状态常称为平面应力状态 (plane state of stresses)。二向及三向应力状态又统称为复杂应力状态。因为, 一个单向应力状态与另一个单向应力状态叠加, 可能是单向、二向或零应力状态; 一个单向应力状态与一个二向应力状态叠加, 可能是单向、二向或三向应力状态; ……。也就是说, 一个应力状态与另一个应力状态叠加, 不一定属于原有应力状态。

对于平面应力状态, 由于必有一个主应力为零的主方向, 可以用与该方向相垂直的平面单元来表示单元体, 例如图 9.1 (c) 示各单元体, 可以用图 9.1 (d) 示平面单元表示。这时, 应将零主应力方向的单元体边长理解为单位长度。

在材料力学中所遇到的应力状态, 主要为平面应力状态。本章重点讨论平面应力状态有关问题。

2、平面应力状态分析

在本节中, 将介绍在平面应力状态下, 如何根据单元体各面上的已知应力来确定任意斜截面上的应力。

在以下讨论中, 取平面单元位于 xy 平面内, 如图 9.3 (a) 所示。已知 x 面 (法线平行 x 轴的面) 上的应力 σ_x 及 τ_{xy} , y 面 (法线平行于 y 轴的面) 上有应力 σ_y 及 τ_{yx} 。根据切应力互等定理 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ 。现在要求与 z 轴平行的任意斜截面 ab 上的应力。设斜截面 ab 的外法线 n 与 x 轴成 α 角, 以后简称该斜截面为 α 面, 并用 σ_α 及 τ_α 分别表示 α 面上的正应力及切应力。

将应力、 α 角正负号规定为:

α 角: 从 x 方向反时针转至 α 面外法线 n 的 α 角为正值; 反之为负值。 α 角的取值区间为 $[0, \pi]$ 或 $[-\pi/2, \pi/2]$ 。

正应力: 拉应力为正, 压应力为负。

切应力: 使微元体产生顺时针方向转动趋势为正; 反之为负。或者, 截面外法线矢顺时针向转 90° 后的方向为正; 反之为负。

求 α 面上的应力 σ_α 、 τ_α 的方法, 有解析法和图解法两种。分别介绍如下:

2.1 解析法

利用截面法, 沿截面 ab 将图 9.3 (a) 示单元切成两部分, 取其左边部分为研究对象。设 α 面的面积为 dA , 则 x 面、 y 面的面积分别为 $dA \cos \alpha$ 及 $dA \sin \alpha$ 。于是, 得研究对象的受力情况如图 (b) 示。该部分沿 α 面法向及切向的平衡方程分别为:

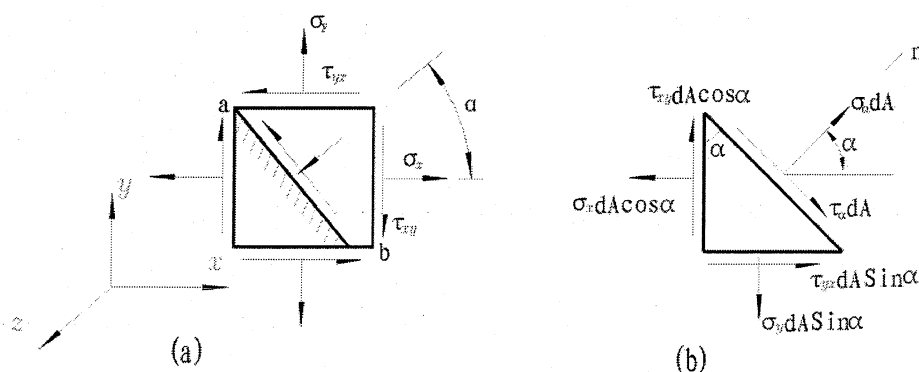


图 9.3

$$\sigma_{\alpha} dA + (-\sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha) dA \cos \alpha + (-\sigma_y \sin \alpha + \tau_{yx} \cos \alpha) dA \sin \alpha = 0$$

$$\tau_{\alpha} dA + (-\sigma_x \sin \alpha - \tau_{xy} \cos \alpha) dA \cos \alpha + (\sigma_y \cos \alpha + \tau_{yx} \sin \alpha) dA \sin \alpha = 0$$

由此得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\alpha} &= \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - (\tau_{xy} + \tau_{yx}) \sin \alpha \cos \alpha \\ \tau_{\alpha} &= (\sigma_x - \sigma_y) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} \cos^2 \alpha - \tau_{yx} \sin^2 \alpha \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

由 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\cos^2 \alpha = (1 + \cos 2\alpha)/2$, $\sin^2 \alpha = (1 - \cos 2\alpha)/2$, $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$, 式 (a) 可改写为:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\alpha} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ \tau_{\alpha} &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \end{aligned} \right\} \quad (9.1)$$

这就是斜面上应力的计算公式, 应用时一定要遵循应力及 α 角的符号规定。如果用 $\alpha + 90^\circ$ 替代式 (9.1) 第一式中的 α , 则

$$\sigma_{\alpha+90^\circ} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

从而有

$$\sigma_{\alpha} + \sigma_{\alpha+90^\circ} = \sigma_x + \sigma_y \quad (9.2)$$

可见, 在平面应力状态下, 一点处与 z 轴平行的两相互垂直面上的正应力的代数和是一个不变量。

由式 (9.1) 可知, 斜截面上的应力 σ_{α} 、 τ_{α} 均为 α 角的函数, 即它们的大小和方向随斜截面的方位而变化。现在来求它们的极限及平面应力状态的主应力。

对于斜截面上的正应力 σ_{α} , 设极值时的 α 角为 α_0 , 由 $d\sigma_{\alpha}/d\alpha = 0$ 得

$$\frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha_0 - 2\tau_{xy} \cos 2\alpha_0 = -2\tau_{\alpha_0} = 0$$

可见, σ_{α} 取极值的截面上切应力为零, 即 σ_{α} 的极值便是单元体的主应力。这时的 α_0 可由上式求得为:

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (9.3)$$

式 (9.3) 的 α_0 在取值区间内有两个根 α_0 及 $\alpha_0 \pm 90^\circ$, 它说明与 σ_α 有关的两个极值 (主应力) 的作用面 (主平面) 是相互垂直的。在按式 (9.3) 求 α_0 时, 可以视 $\tan 2\alpha_0 = (-2\tau_{xy})/(\sigma_x - \sigma_y)$, 并按 $(-2\tau_{xy})$ 、 $\sigma_x - \sigma_y$ 、 $(-2\tau_{xy})/(\sigma_x - \sigma_y)$ 的正负号来判定 $\sin 2\alpha_0$ 、 $\cos 2\alpha_0$ 、 $\tan 2\alpha_0$ 的正负符号, 从而唯一地确定 $2\alpha_0$ 或 α_0 值。于是有

$$\sin 2\alpha_0 = \frac{-2\tau_{xy}}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}, \quad \cos 2\alpha_0 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}$$

$$\sin 2(\alpha_0 \pm 90^\circ) = -\sin 2\alpha_0, \quad \cos 2(\alpha_0 \pm 90^\circ) = -\cos 2\alpha_0$$

将以上各式代入式 (9.1) 的第一式, 得 σ_α 的两个极值 σ_{\max} (对应 α_0 面)、 σ_{\min} (对应 $\alpha_0 \pm 90^\circ$ 面) 为:

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (9.4)$$

可以证明, 式 (9.4) 中 τ_{\max} 的指向, 是介于仅由单元体切应力 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ 产生的主拉应力指向 (与 x 轴夹角为 45° 或 -45°) 与单元体正应力 σ_x 、 σ_y 中代数值较大的一个正应力指向之间。

式 (9.4) 的 σ_{\max} 、 σ_{\min} 为平面应力状态一点处三个主应力中的两个主应力, 它的另一个主应力为零。至于如何根据这三个主应力来排列 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 的次序, 应视 σ_{\max} 、 σ_{\min} 的具体数值来决定。

平面应力状态下, 切应力极值可按下述方法确定。设极值时的 α 角为 θ_0 , 由 $d\tau_\alpha/d\alpha = 0$ 得:

$$\tan 2\theta_0 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \quad (9.5)$$

比较式 (9.3) 和式 (9.5), 有 $\tan 2\alpha_0 \cdot \tan 2\theta_0 = -1$, 可见 $\theta_0 = \alpha_0 + 45^\circ$, 即斜截面上切应力 τ_α 的极值作用面与正应力 σ_α 的极值作用面互成 45° 夹角。将由式 (9.5) 确定的代入式 (9.1) 的第二式, 可以求得斜截面上切应力极值 τ_{\max} (对应 θ_0)、 τ_{\min} (对应 $\theta_0 + 90^\circ$) 为:

$$\tau_{\max/\min} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \pm \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \quad (9.6)$$

这说明, 斜截面上切应力极值的绝对值, 等于该点处两个正应力极值差的绝对值的一半。另

外, 由式 (9.5) 可得 $(\tau_x - \sigma_v) \cos 2\theta_0 - 2\tau_{xy} \sin 2\theta_0 = 0$, 代入式 (9.1) 第一式得:

$$\sigma_{\theta_0} = \sigma_{\theta_0+90^\circ} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad (9.7)$$

可见在 τ_α 极值作用面上的正应力相等, 且为 σ_x 、 σ_y 的平均值。

2.2 图解 (莫尔圆) 法

平面应力状态分析, 也可采用图解的方法。图解法的优点是简明直观, 勿须记公式。当采用适当的作图比例时, 其精确度是能满足工程设计要求的。这里只介绍图解法中的莫尔圆法, 它是 1882 年德国工程师莫尔 (O. Mohr) 对 1866 年德国库尔曼 (K. Culman) 提出的应力圆作进一步研究, 借助应力圆确定一点应力状态的几何方法。

2.2.1 应力圆方程

将式 (9.1) 改写为:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\alpha - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ \tau_\alpha &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

于是, 由上述二式得到一圆方程:

$$\left(\sigma_\alpha - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_\alpha^2 = \left(\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \right)^2 \quad (b)$$

据此, 若已知 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} , 则在以 σ 为横坐标, τ 为纵坐标轴的坐标系中, 可以画出一个圆, 其圆心为 $\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0 \right)$, 半径为 $\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$ 。圆周上一点的坐标就代表单元体一个斜截面上的应力。因此, 这个圆称为应力圆或莫尔圆 (Mohr circle for stresses)。

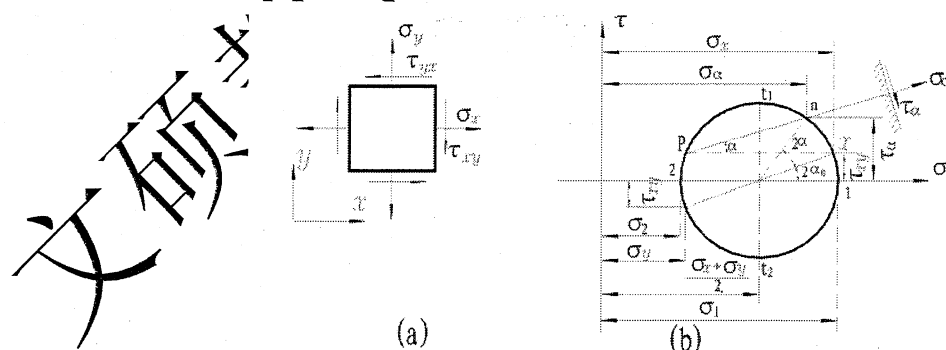


图 9.4

2.2.2 应力圆的画法

在已知 σ_x 、 σ_y 及 τ_{xy} (图 9.4 (a)), 作相应应力圆时, 先在 σ - τ 坐标系中, 按选定的比例尺, 以 (σ_x, τ_{xy}) 、 $(\sigma_y, -\tau_{xy})$ 为坐标确定 x (对应 x 面)、 y (对应 y 面) 两点, (在应力圆中, 正应力以拉应力为正, 切应力以与其作用面外法线顺时针转向 90° 后的方向一致时为正)。然后直线连接 x 、 y 两点交 σ 轴于 C 点, 并以 C 点圆心, 以 \overline{Cx} 或 \overline{Cy} 为半径画圆, 此圆就是应

力圆,如图 9.4 (b)。从图中不难看出,应力圆的圆心及半径,与式 (b) 完全相同。

2.2.3 几种对应关系

应力圆上的点与平面应力状态任意斜截面上的应力有如下对应关系:

1) 点面对应

应力圆上某一点的坐标对应单元体某一方面上的正应力和切应力值。如图 (9.4 (a)) 上的 n 点的坐标即为斜截面 α 面的正应力和切应力。

2) 转向对应

应力圆半径旋转时,半径端点的坐标随之改变,对应地,斜截面外法线亦沿相同方向旋转,才能保证某一方面上的应力与应力圆上半径端点的坐标相对应。

3) 二倍角对应

应力圆上半径转过的角度,等于斜截面外法线旋转角度的两倍。因为,在单元体中,外法线与 x 轴间夹角相差 180° 的两个面是同一截面,而应力圆中圆心角相差 360° 时才能为同一点。

2.2.4 应力圆的应用

1) 应用应力圆能确定任意斜截面上应力的方向和大小。如果欲求 α 面上的应力 σ_α 及 τ_α , 则可从与 x 面对应的 x 点开始沿应力圆圆周逆时针向转 2α 圆心角至 n 点,这时 n 点的坐标便同外法线与 x 轴成 α 角的 α 面上的应力对应。 σ_α 的方向按如下方法确定:过 x 点作 σ 轴的平行线交应力圆于 P 点,以 P 为极点,连接 Pn 两点,则射线 Pn 便为 n 点对应截面的外法线方向,即为的 σ_α 方位线。

2) 确定主应力的方向和大小。应力圆与 σ 轴的交点 1 及 2 点,其纵坐标 (即切应力) 为零,因此,对应的正应力便是平面应力状态的两个正应力极值,但是,在图 9.4 示情况,因 $\sigma_{\max} > \sigma_{\min} > 0$, 所以用单元体主应力 σ_1 、 σ_2 表示,这时的 σ_3 应为零。至于在别的情况时,图 9.4 (b) 中的 1、2 点应取 1、2、3 中的哪两个数,按类似原则确定。主应力的方位按如下方法确定:从极点 P 至 1 点引射线 $P1$ 为 σ_1 作用面外法方向, $P2$ 为主应力 σ_2 作用面的外法线方向。从图 9.4 (b) 中不难看出,主应力 σ_1 、 σ_2 的作用面 (主平面) 的外法线 (主方向) 相互垂直。

由图 9.4 (b) 不难看出,应力圆上的 t_1 、 t_2 两点,是与切应力极值面 (θ_0 面和 $\theta_0 + 90^\circ$ 面) 上的应力对应的。不难证明:正应力极值面与切应力极值面互成 45° 的夹角。

3、三向应力状态的最大应力

组成工程结构物的构件都是三维体,能按材料力学方法进行受力分析的,只是一般三维构件的特殊情况,但属三维问题。既然这样,在建立强度条件时,必须按三维考虑才符合实际。因此,在研究了三向应力状态的一种特殊情况——平面应力状态后,还应将它们返回到三向应力状态,作进一步的分析,才能符合工程实际。另外,在工程中还是存在不少三向应力状态的问题。例如,在地层的一定深度处的单元体 (图 9.5),在地应力作用下便是处于三向应力状态;滚珠轴承中的滚珠与外环接触处、火车轮与轨道接触处,也是处于三向应力状态的。

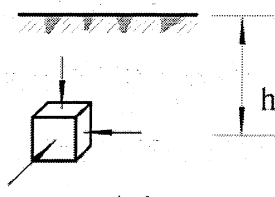


图 9.5

本节只讨论三个主应力 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ 均已知的三向应力状态，对于单元体各面上既有正应力，又有切应力的三向应力状态，可以用弹性力学方法求得这三个主应力。对于材料力学中的问题，可以用 9.2 节的方法以求得三个主应力 σ_1 、 σ_2 及 σ_3 。

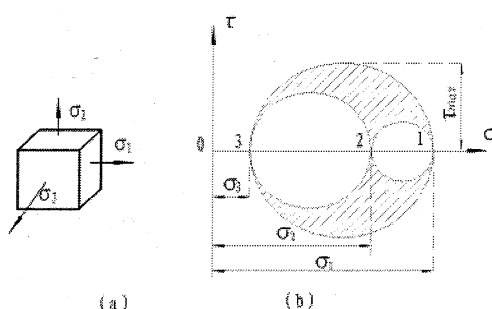


图 9.6

对于图 9.6 (a) 示已知三个主应力的主单元体，可以将这种应力状态分解为三种平面应力状态，分析平行于三个主应力的三组特殊方向面上的应力。在平行于主应力 σ_1 的方向面上，可视为只有 σ_2 和 σ_3 作用的平面应力状态；在平行于主应力 σ_2 的方向面上可视为只有 σ_1 和 σ_3 作用的平面应力状态；在平行于主应力 σ_3 的方向面上，可视为只有 σ_1 和 σ_2 作用的平面应力状态。并可绘出图 9.6 (b) 示三个应力圆，并称为三向应力状态应力圆 (stress circle of three dimensional stress state)。用弹性力学方法可以证明，主单元体中任意斜截面上的正应力及切应力，必位于以这三个应力圆为界的阴影区内。

由三向应力圆可以看出，在三向应力状态下，代数值最大和最小的正应力为：

$$\sigma_{\max} = \sigma_1, \quad \sigma_{\min} = \sigma_3 \quad (9.8)$$

而最大切应力为

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (9.9)$$

式 (9.8)、(9.9) 也适用于三向应力状态的两种特殊情况：二向应力状态及单向应力状态。

4、广义胡克定律 · 体应变

在后续课程中要考虑单元体的变形，本节将讨论应力与应变间的关系。

4.1 广义胡克定律

在三向应力状态下主单元体同时受到主应力 σ_1 、 σ_2 及 σ_3 作用，如图 9.6 (a) 所示。这时，

我们把沿单元体主应力方向的线应变称为主应变 (principal strain), 习惯上分别用 ε_1 、 ε_2 及 ε_3 来表示。对于连续均质各向同性线弹性材料, 可以将这种应力状态, 视为三个单向应力状态叠加来求主应变。由工程力学 I 知, 在 σ_1 单独作用下, 沿主应力 σ_1 、 σ_2 及 σ_3 方向的线应变分别为:

$$\varepsilon_1' = \frac{\sigma_1}{E}, \quad \varepsilon_2' = \frac{\nu\sigma_1}{E}, \quad \varepsilon_3' = \frac{\nu\sigma_1}{E}$$

式中 E 、 ν 为材料的弹性模量及泊松比 (Poisson ratio)。

同理, 在 σ_2 和 σ_3 单独作用时, 上述应变分别为:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1'' &= -\frac{\nu\sigma_2}{E}, & \varepsilon_2'' &= \frac{\sigma_2}{E}, & \varepsilon_3'' &= -\frac{\nu\sigma_2}{E} \\ \varepsilon_1''' &= -\frac{\nu\sigma_3}{E}, & \varepsilon_2''' &= -\frac{\nu\sigma_3}{E}, & \varepsilon_3''' &= \frac{\sigma_3}{E} \end{aligned}$$

将同方向的线应变叠加得三向应力状态下主单元体的主应变为:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}[\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)] \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E}[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] \end{aligned} \right\} \quad (9.10)$$

式 (9.10) 中的 σ_1 、 σ_2 及 σ_3 均以代数值代入, 求出的主应变为正值表示伸长, 负值表示缩短。

主应变的排列顺序为 $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$, 可见, 主单元体中代数值最大的线应变为:

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_1 \quad (9.9)$$

如果不是主单元体, 则单元体各面上将作用有正应力 σ_x 、 σ_y 、 σ_z 和切应力 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ 、 $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ 、 $\tau_{zx} = \tau_{xz}$, 如图 9.7 所示。图中正应力的下标表示其作用面的外法线方向; 切应力有两个下标, 前一个下标表示其作用面的外法线方向, 后一个下标表示其作用方向沿着哪一个坐标轴。如果某一面的外法线沿坐标轴的正方向, 该面称为正面, 正面上的各应力分量便以指向坐标轴正方向为正, 反之为负; 如果某一面的外法线沿坐标轴的负方向, 则称该面为负面, 负面上的各应力便以指向坐标轴的负方向为正, 反之为负。须说明, 这里的约定与 9.2 节的约定是各自独立的。对于图 9.7, 单元体除了沿 x 、 y 及 z 方向产生线应变 ε_x 、 ε_y 及 ε_z 外, 还在三个坐标面 xy 、 yz 、 zx 内产生切应变 γ_{xy} 、 γ_{yz} 及 γ_{zx} 。

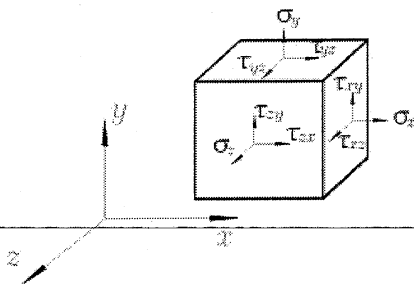


图 9.7

由理论证明及实验证实, 对于连续均质各向同性线弹性材料, 正应力不会引起切应变, 切应力也不会引起线应变, 而且切应力引起的切应变互不耦联。于是, 线应变可以按推导式 (9.10) 的方法求得, 而切应变可以利用剪切胡克定律得到, 最后有

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)], & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G} \end{aligned} \right\} \quad (9.12)$$

式中 G 为剪切弹性模量。 E , ν 及 G 均为与材料有关的弹性常数, 但三者这中只有两个是独立的, 可以证明这三个常数之间存在着如下关系:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (9.13)$$

式 (9.10) 或 (9.12) 称为广义胡克定律 (generalization Hooke law)。

广义胡克定律对于二向及单向应力状态也适用。在二向主单元体中, 有一个主应力为零, 例如, 设 $\sigma_3 = 0$, 则式 (9.10) 变为:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} (\sigma_1 - \nu\sigma_2) \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} (\sigma_2 - \nu\sigma_1) \\ \varepsilon_3 &= -\frac{\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2) \end{aligned} \right\} \quad (9.14)$$

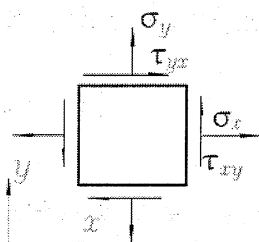


图 9.8

在一般平面应力状态下, 单元体必有一个主应力为零的主平面, 设为 z 面, 这时有 $\sigma_z = 0$, $\tau_{zx} = 0$ 及 $\tau_{zy} = 0$, 如图 (9.8) 所示。于是, 式 (9.12) 写成:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu\sigma_y] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu\sigma_x) \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \end{aligned} \right\} \quad (9.15)$$

而 $\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = 0$, 由式可以解得:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y), & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x), & \varepsilon_z &= -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \end{aligned} \right\} \quad (9.16)$$

4.2 体应变

体应变又称体积应变 (volume strain), 是指在应力状态下单元体单位体积的体积改变, 设单元体各棱边的变形前长度分别为 dx 、 dy 和 dz , 变形前的单元体体积便为

$$V_0 = dx dy dz$$

在三向应力状态下, 主单元体变形后的各棱边长度将分别为 $(1+\varepsilon_1)dx$ 、 $(1+\varepsilon_2)dy$ 及 $(1+\varepsilon_3)dz$, 因此, 变形后主单元体的体积为

$$V_1 = (1+\varepsilon_1)dx \cdot (1+\varepsilon_2)dy \cdot (1+\varepsilon_3)dz$$

因为 ε_1 、 ε_2 及 ε_3 均微小, 略去高阶微量后

$$V_1 = (1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)dx dy dz = (1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)V_0$$

根据主单元体体应变的定义, 有

$$\varepsilon_V = \frac{V_1 - V_0}{V_0} = \frac{(1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)V_0 - V_0}{V_0} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad (9.17)$$

将式 (9.10) 的三个主应变代入上式, 化简后得

$$\varepsilon_V = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (9.18)$$

上述表明, 小变形时的连续均质各同性线弹性体, 一点处的体应变 ε_V 与该点处的三个主应力的代数和成正比。

在纯剪切平面应力状态下, 因 $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau$, $\sigma_2 = 0$, 由式 (9.18) 可得该应力状态下单元体的体变 $\varepsilon_V = 0$ 。因此, 在图 (9.13) 示的一般形式的空间应力状态下, 切应力 τ_{xy} 、 τ_{yz} 及 τ_{zx} 的存在均不会影响该点处的体应变 ε_V , 并可仿照以上推导求得

$$\varepsilon_V = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (9.19)$$

可见, 小变形时连续均质各向同性线弹性体内, 一点处的体应变, 只与过该点沿三个相互垂直的坐标轴方向正应力的代数和成正比, 而与坐标方位和切应力无关。

5、复杂应力状态下的应变比能

弹性体在外力作用下将产生变形, 在变形过程中, 外力便要通过外力作用方向的位移做功, 并将它积蓄在弹性体内, 通常称积蓄在物体内的这种能量为应变能 (strain energy), 而把每单位体积内所积蓄的应变能称为比能 (strain energy density)。与应变能有关的问题将在第十五章能量法中详细介绍。

在单向应力状态中, 如果棱边边长分别为 dx 、 dy 、 dz 的单元体, 作用于 x 面的应力为 σ_1 。

如图 9.9 (a) 所示, 作用在单元体上的外力为 $\sigma_1 dy dz$, 沿外力方向的位移为 $\varepsilon_1 dx$, 外力所做的功为

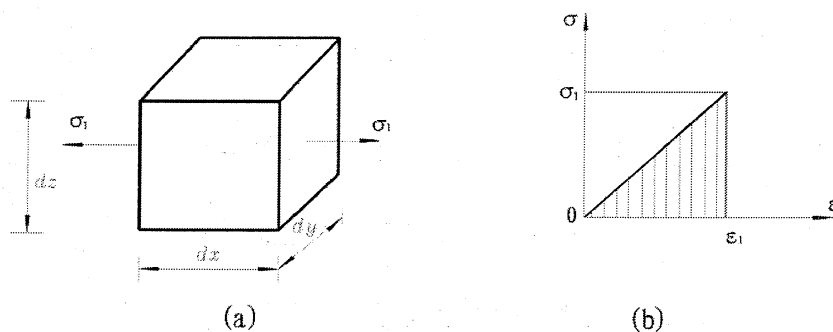


图 9.9

$$dW = \frac{1}{2} \sigma_1 dy dz dx \varepsilon_1$$

根据能量守恒定律，外力功全部积蓄到弹性体内，变成了弹性体的应变能。
单元体的应变能

$$dV_\varepsilon = dW = \frac{1}{2} \sigma_1 \varepsilon_1 dx dy dz$$

单元体的应变比能为

$$v_\varepsilon = \frac{dW}{dV} = \frac{1}{2} \sigma_1 \varepsilon_1 = \frac{\sigma_1^2}{2E}$$

应变比能为图 9.17 (b) 示阴影面积。

在三向应力状态下，如果已知 σ_1 、 σ_2 及 σ_3 三个主应力（图 9.18a），各对力通过其对应位移所做的功的总和，便为积蓄在物体内的应变能。因此

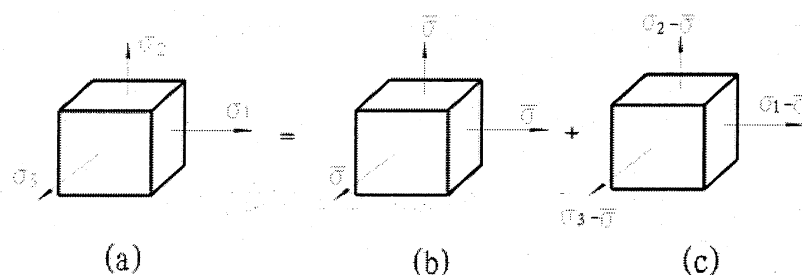


图 11.18

$$dV_\varepsilon = dW = \frac{1}{2} \sigma_1 \varepsilon_1 dx dy dz + \frac{1}{2} \sigma_2 \varepsilon_2 dx dy dz + \frac{1}{2} \sigma_3 \varepsilon_3 dx dy dz$$

单元体的比能为

$$v_\varepsilon = \frac{dW}{dV} = \frac{1}{2} \sigma_1 \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \sigma_2 \varepsilon_2 + \frac{1}{2} \sigma_3 \varepsilon_3$$

式中的 ε_1 、 ε_2 、 ε_3 分别表示沿 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 方向的线应变，应按广义胡克定律（式 9.10）

计算，用三个主应力 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 表示主应变 ε_1 、 ε_2 、 ε_3 ，化简后有

$$v_\varepsilon = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] \quad (9.20)$$

由于单元体的变形有体积改变和形状改变，因此，可以将比能分为相应的两部分。与体

积改变对应的比能称为体积改变比能 (strain. energy density corresponding to the change of volume), 用 ν_v 表示; 与形状改变对应的比能称为形状改变比能 (strain. energy density corresponding to the distortion), 用 ν_d 表示。即

$$\nu_\varepsilon = \nu_v + \nu_d \quad (a)$$

现在来推导体积改变比能和形状改变比能的计算公式。将图 9.18 (a) 示单元体表示为图 b、c 两部分叠加。图 9.18 (b) 中的三个主应力相等, 其值为平均应力 $\bar{\sigma}$, 有

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

由式 (9.18) 知, 图 9.18 (b) 与图 9.18 (a) 的体应变是相等的, 那么体积改变比能 ν_v 也应相等。因此图 9.18 (b) 的三个主应力相等, 变形后的形状与原来的形状相似, 只发生体积改变而无形状改变, 则全部比能应为体积改变比能。这样, 图 9.18 (a) 的体积改变比能 ν_v 为:

$$\begin{aligned} \nu_v &= \frac{1}{2E} [\bar{\sigma}^2 + \bar{\sigma}^2 + \bar{\sigma}^2 - 2\nu(\bar{\sigma}^2 + \bar{\sigma}^2 + \bar{\sigma}^2)] \\ &= \frac{3(1-2\nu)}{2E} \bar{\sigma}^2 = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \end{aligned} \quad (9.21)$$

将式 (9.21) 代入式 (a), 并注意到式 (9.20), 化简后得单元体的形状改变能 ν_d 为

$$\nu_d = \nu_\varepsilon - \nu_v = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (9.22)$$

读者自己证明, 式 (9.22) 即为图 c 的比能。式 (9.22) 将在强度理论中得到应用。

6、梁的主应力·主应力迹线的概念

6.1 梁的主应力

梁在平面弯曲时, 横截面上一般将有正应力 $\sigma = My/I_z$ 和切应力 $\tau = F_Q S_z / (I_z b)$, 而纵截面上无正应力。由于它为平面应力状态, 如果取图 9.19 示坐标系, 则 $\sigma_x = \sigma$ 、 $\tau_{xy} = \tau$ 、 $\sigma_y = 0$ 。这时, 不管 σ_x 及 τ_{xy} 为正或负, 按式 (9.4) 求得的正应力极值, 总是 $\sigma_{\max} \geq 0$, $\sigma_{\min} \leq 0$, 所以梁的主应力总是为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \\ \sigma_2 &= 0 \\ \sigma_3 &= \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \end{aligned} \right\} \quad (9.23)$$

由式 (9.23) 求得的梁内任一点处的两个不等于零的主应力中, 显然, σ_1 必为拉应力, 而 σ_3 必为压应力, 两者是相互垂直的。

6.2 梁的主应力迹线

按式 (9.23) 求出的梁内主应力, 不仅各点处大小不同, 而且方向也是不同的。以图 9.19 示矩形截面梁某截面 mm 上的 1~5 点为例, 可以用莫尔圆法确定其主应力及主方向, 如图所示。

从图可以看出，主应力方向沿梁的高度是连续变化的，从梁顶到梁底，主拉应力 σ_1 和主压应力 σ_3 的方向均变化了 90° 。

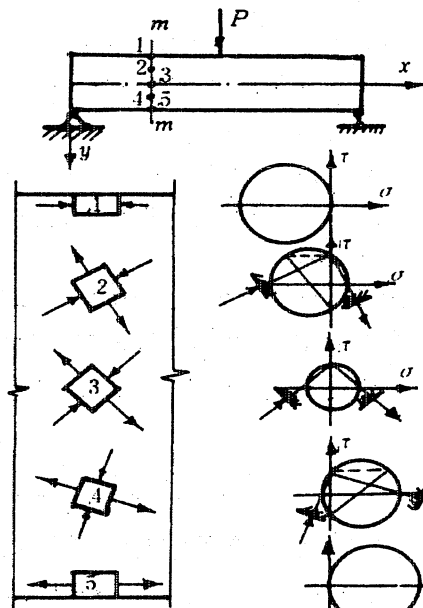


图 9.19

根据梁内主应力方向是连续变化的特性，可以在梁的 xy 平面内绘出两族正交曲线，一族曲线的切线方向为该点处的主拉应力方向，另一族曲线的切线方向为该点处的主压应力方向。这样的曲线称为主应力迹线，如图 9.20 (b) 所示。掌握梁的主应力迹线的变化规律，对于结构设计是有用的。例如，在设计混凝土梁时，可以根据主拉应力方向判断可能产生裂缝的方向，从而合理的布置钢筋。

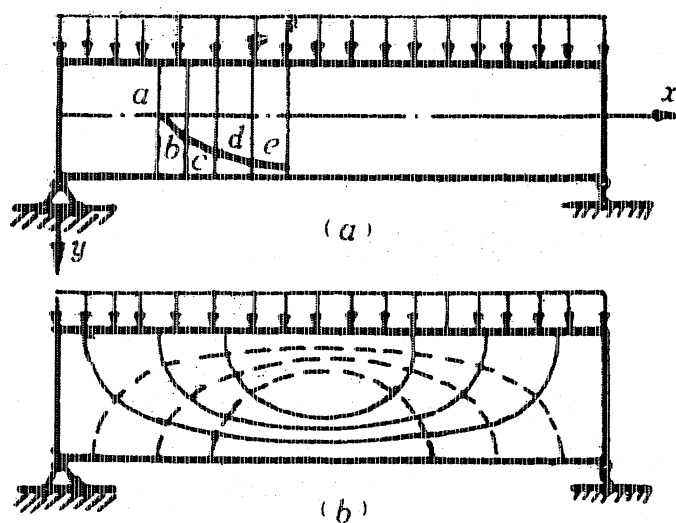


图 9.20

绘制主应力迹线的方法为 (图 9.20 (a))：从梁内任一截面上的任一点 a 处开始，确定

该点的主应力之一, 如 σ_1 的方向 ab 后, 将它的作用线延长至邻近截面, 交于 b 点; 再求 b 点处的 σ_1 方向, 延长至下一个邻近截面, 交于 c 点。依次进行下去, 便得到一条折线 $abcd\cdots$ 。它近似地表示了主拉应力 σ_1 方向的一条迹线。若各截面相隔很近, 并作一条与折线相切的曲线, 这条曲线就表示主拉应力 σ_1 的一条迹线。按同样的方法, 可以绘出主压应力 σ_3 的迹线。图 b 就是均布荷载矩形截面简支梁的主应力迹线图。实线为主拉应力 σ_1 的迹线, 虚线为主压应力 σ_3 的迹线。

须注意, 所有的主应力迹线均与梁轴(中性层)成 45° , 而与梁的顶、底表面相垂直或平行。主应力迹线只显示了主应力的方向, 而不反映主应力的多少。

第十章 强度理论

一、教学目标和教学内容

3. 教学目标

掌握强度理论的概念。

了解材料的两种破坏形式(按破坏现象区分)。

了解常用的四个强度理论的观点、破坏条件、强度条件。

掌握常用的四个强度理论的相当应力。

了解莫尔强度理论的基本观点。

会用强度理论对一些简单的杆件结构进行强度计算。

4. 教学内容

讲解强度理论的概念及材料的两种破坏形式。

讲解常用的四个强度理论的基本观点, 并推导其破坏条件从而建立强度计算方法。

介绍几种强度理论的应用范围和各自的优缺点。

简单介绍莫尔强度理论。

二、重点难点

重点: 强度理论的概念、常用的四个强度理论的观点、强度条件及其强度计算。

难点:

常用四个强度理论的理解。

危险点的确定及其强度计算。

三、教学方式

采用启发式教学, 通过提问, 引导学生思考, 让学生回答问题。

四、建议学时

3 学时

五、讲课提纲

1、概述

1.1 材料在单向应力状态或纯剪切应力状态时的强度条件:

轴向拉(压)杆件的最大正应力发生在横截面上各点处;而横力弯曲梁的最大正应力发生在最大弯矩横截面的上、下边缘处,如图 10.1 (a)、(b) 所示,其应力状态皆为单向应力状态,强度条件为:

$$\text{拉压杆: } \sigma_{\max} = \frac{F_N}{A} \leq [\sigma]$$

$$\text{梁: } \sigma_{\max} = \frac{M}{W} \leq [\sigma]$$

式中 $[\sigma] = \sigma_u / n_s$, σ_u 为材料破坏时的极限应力, n_s 称为安全系数。对于塑性材料, $\sigma_u = \sigma_s$ (屈服极限);对于脆性材料, $\sigma_u = \sigma_b$ (强度极限),皆可由试验确定。

纯扭转圆轴的最大切应力发生在横截面周边各点处;而梁的最大切应力发生在最大剪力横截面的中性轴上,如图 10.1 (c)、(d) 所示,为纯剪切应力状态,强度条件为:

$$\text{扭转轴: } \tau_{\max} = \frac{M_x}{W_p} \leq [\tau]$$

$$\text{梁: } \tau_{\max} = \frac{F_Q S_{z \max}^*}{I_z b} \leq [\tau]$$

式中 $[\tau] = \tau_u / n_s$, $\tau_u = \tau_s$ 或 τ_b 由实验确定

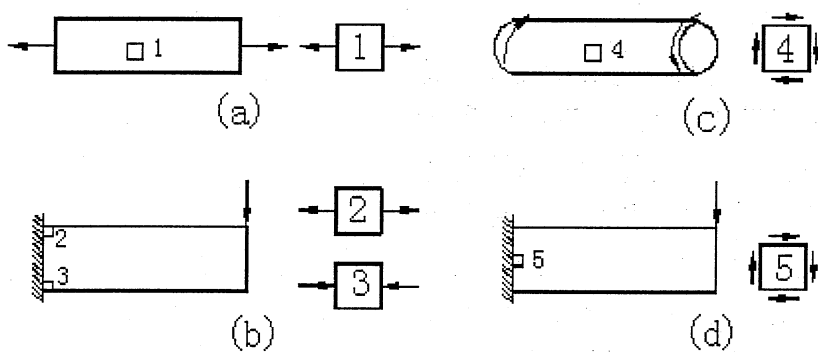


图 10.1

1.2 材料的破坏形式

以上列举的强度条件,用于简单应力状态,是直接根据试验结果建立的。然而工程实际中许多构件的危险点都处于复杂应力状态,其破坏现象较复杂,但材料的破坏形式可分为如下二类:

脆性断裂: 材料失效时未发生明显的塑性变形而突然断裂。如: 铸铁在单向拉伸和纯剪切应力状态下的破坏。

塑性屈服: 材料失效时产生明显的塑性变形并伴有屈服现象。如低碳钢在单向拉伸和纯剪切应力状态下的破坏。

注意: 材料的破坏形式并不是以材料为塑性材料或脆性材料为准来区分的。如: 大理石

为脆性材料，在单向压缩时发生的破坏为脆性断裂，图 10.2 (a)；若表面受均匀经向压力，施加轴向力后出现明显的塑性变形，成为腰鼓形，显然其破坏形式为塑性屈服，图 10.2 (b)。

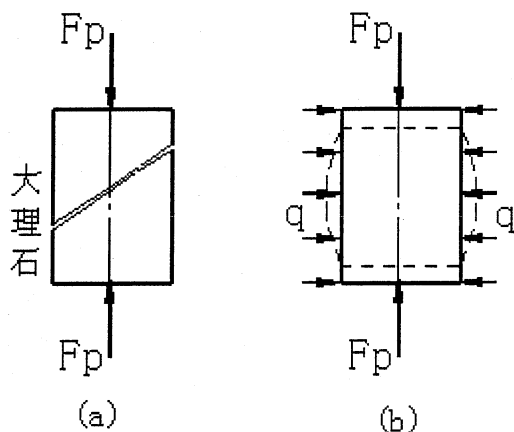


图 10.2

1.3 强度理论的概念

在复杂应力状态下，一点的 3 个主应力 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 可能都不为零，而且会出现不同的主应力组合。此时如果采用直接试验的方法来建立强度条件，是非常困难的，原因在于：进行复杂应力状态试验的设备和加工比较复杂；不同的应力组合需要重新做试验；不同的材料需重新试验。

人们经过长期的生产实践和科学研究，总结材料破坏的规律，提出了各种不同的假说：认为材料之所以按某种形式破坏，是由于某一特定因素（应力、应变、形状改变比能）引起的；对于同一种材料，无论处于何种应力状态，当导致它们破坏的这一共同因素达到某一极限时，材料就会发生破坏。这样的一些假说称为强度理论。

2、常用的强度理论

由于材料存在着脆性断裂和塑性屈服两种破坏形式，因而，强度理论也分为两类：一类是解释材料脆性断裂破坏的强度理论，其中有最大拉应力理论和最大伸长线应变理论；另一类是解释材料塑性屈服破坏的强度理论，其中有最大切应力理论和形状改变比能理论。

2.1 第一强度理论——最大拉应力理论

该理论认为材料断裂的主要因素是该点的最大主拉应力。即在复杂应力状态下，只要材料内一点的最大主拉应力 σ_1 ($\sigma_1 > 0$) 达到单向拉伸断裂时横截面上的极限应力 σ_u ，材料发生断裂破坏。破坏条件为：

$$\sigma_1 \geq \sigma_u \quad (\sigma_1 > 0)$$

强度条件为：

$$\sigma_1 \leq [\sigma] \quad (\sigma_1 > 0) \quad (10-1)$$

式中 $[\sigma]$ ——单向拉伸时材料的许用应力： $[\sigma] = \sigma_b / n_s$ 。

试验表明，该理论主要适用于脆性材料在二向或三向受拉（例如铸铁、玻璃、石膏等）。对于存在有压应力的脆性材料，只要最大压应力值不超过最大拉应力值，也是正确的。

2.2 第二强度理论——最大伸长线应变理论

该理论认为材料断裂的主要因素是该点的最大伸长线应变。即在复杂应力状态下，只要材料内一点的最大拉应变 ε_1 达到了单向拉伸断裂时最大伸长应变的极限值 ε_u 时，材料就发生

断裂破坏。由广义胡克定律可知

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

单向拉伸断裂时

$$\varepsilon_u = \frac{\sigma_b}{E}$$

于是破坏条件为

$$\frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \geq \frac{\sigma_b}{E}$$

即:

$$\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \geq \sigma_b$$

所以, 强度条件为

$$\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma] \quad (10.2)$$

此理论考虑了三个主应力的影响, 形式上比第一强度理论完善, 但用于工程上其可靠性很差, 现在很少采用。

2.3 第三强度理论—最大切应力理论

该理论认为材料屈服的主要因素是最大切应力。在复杂应力状态下, 只要材料内一点处的最大切应力 τ_{\max} 达到单向拉伸屈服时切应力的屈服极限 τ_s , 材料就在该处发生塑性屈服。

由 11 章可知: 复杂应力状态下最大切应力为

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

单向拉伸时

$$\tau_s = \frac{\sigma_s}{2}$$

破坏条件为

$$\sigma_1 - \sigma_3 \geq \sigma_s$$

于是强度条件为

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma] \quad (10.3)$$

该理论对于单向拉伸和单向压缩的抗力大体相当的材料 (如低碳钢) 是适合的。

2.4 第四强度理论—最大形状改变比能理论

该理论认为材料屈服的主要因素是该点的形状改变比能。在复杂应力状态下, 材料内一点的形状改变比能 ν_d 达到材料单向拉伸屈服时形状改变比能的极限值 ν_u , 材料就会发生塑性屈服。由 11 章可知

$$\nu_d = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

单向拉伸时: $\sigma_1 = \sigma_s$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ 可得

$$\nu_u = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_s^2$$

破坏条件为

$$\frac{1+\nu}{6E}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \geq \frac{1+\nu}{3E}\sigma_s^2$$

即

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \geq \sigma_s$$

于是强度条件为

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma] \quad (10.4)$$

试验表明, 对于塑性材料, 此理论比第三强度理论更符合试验结果。

综合以上四个强度理论的强度条件, 可以把它们写成如下的统一形式:

$$\sigma_r \leq [\sigma]$$

其中 σ_r 称为相当应力。四个强度理论的相当应力分别为

$$\begin{aligned} \sigma_{r1} &= \sigma_1 \\ \sigma_{r2} &= \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \\ \sigma_{r3} &= \sigma_1 - \sigma_3 \\ \sigma_{r4} &= \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \end{aligned}$$

对于梁来讲,

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

注意:

1、对以上四个强度理论的应用, 一般说脆性材料如铸铁、混凝土等用第一和第二强度理论; 对塑性材料如低碳钢用第三和第四强度理论。

2、脆性材料或塑性材料, 在三向拉应力状态下, 应该用第一强度理论; 在三向压应力状态下, 应该用第三强度理论或第四强度理论。

3、第三强度理论概念直观, 计算简捷, 计算结果偏于保守; 第四强度理论着眼于形状改变比能, 但其本质仍然是一种切应力理论。

4、在不同情况下, 如何选用强度理论, 不单纯是个力学问题, 而与有关工程技术部门长期积累的经验及根据这些经验制订的一整套计算方法和许用应力值 $[\sigma]$ 有关。

*2.5 莫尔强度理论

该理论认为, 材料发生屈服或剪切破坏, 不仅与该截面上的切应力有关, 而且还与该截面上的正应力有关, 只有当材料的某一截面上的切应力与正应力达到最不利组合时, 才会发生屈服或剪断。

莫尔理论认为材料是否破坏取决于三向应力圆中的最大应力圆。

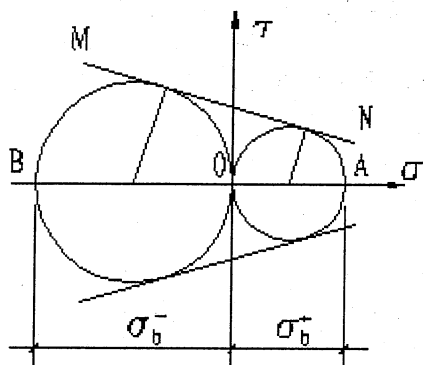


图 10.3

在工程应用中, 分别作拉伸和压缩极限状态的应力圆, 这两个应力圆的直径分别等于脆性材料在拉伸和压缩时的强度极限 σ_b^+ 和 σ_b^- 。这两个圆的公切线 MN 即是该材料的包络线, 如图 10.3。若一点的 3 个主应力 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 已知, 以 σ_1 和 σ_3 作出的应力圆与包络线相切, 则此点就会发生破坏。由此可导出莫尔强度理论的强度条件为:

$$\sigma_1 - \frac{[\sigma]^+}{[\sigma]^-} \sigma_3 \leq [\sigma]^+ \quad (10.5)$$

式中, $[\sigma]^+$ 和 $[\sigma]^-$ 是脆性材料的许用拉应力和许用压应力。

对 $[\sigma]^+ = [\sigma]^-$ 的材料, 莫尔强度条件化为:

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$$

此即为最大切应力理论的强度条件。可见莫尔强度理论是最大切应力理论的发展, 它把材料在单向拉伸和单向压缩时强度不等的因素也考虑进去了。

第十一章 组合变形

一、教学目标和教学内容

5. 教学目标

掌握组合变形的概念。

掌握斜弯曲、弯扭、拉(压)弯、偏心拉伸(压缩)等组合变形形式的概念和区分、危险截面和危险点的确定、应力计算、强度计算、变形计算、中性轴的确定等。

正确区分斜弯曲和平面弯曲。

了解截面核心的概念、常见截面的截面核心计算。

6. 教学内容

讲解组合变形的概念及组合变形的一般计算方法: 叠加法。

举例介绍斜弯曲和平面弯曲的区别。

讲解斜弯曲的应力计算、中性轴位置的确定、危险点的确立、强度计算、变形计算。

讲解弯曲和扭转组合变形内力计算、确定危险截面和危险点、强度计算。

讲解拉伸（压缩）和弯曲组合变形的危险截面和危险点分析、强度计算。

讲解偏心拉伸（压缩）组合变形的危险截面和危险点分析、应力计算、强度计算。

简单介绍截面核心的概念和计算。

二、重点难点

重点：斜弯曲、弯扭、拉（压）弯、偏心拉伸（压缩）等组合变形形式的应力和强度计算。

难点：

1、解决组合变形问题最关键的一步是将组合变形分解为两种或两种以上的基本变形：

斜弯曲——分解为两个形心主惯性平面内的平面弯曲；

弯曲和扭转组合变形——分解为平面弯曲和扭转；

拉伸（压缩）和弯曲组合变形——分解为轴向拉伸（压缩）和平面弯曲（因剪力较小通常忽略不计）；

偏心拉伸（压缩）组合变形——单向偏心拉伸（压缩）时，分解为轴向拉伸（压缩）和一个平面弯曲，双向偏心拉伸（压缩）时，分解为轴向拉伸（压缩）和两个形心主惯性平面内的平面弯曲。

2、组合变形的强度计算，可归纳为两类：

1)、危险点为单向应力状态：斜弯曲、拉（压）弯、偏心拉伸（压缩）组合变形的强度计算时只需求出危险点的最大正应力并与材料的许用正应力比较即可；

2)、危险点为复杂应力状态：弯扭组合变形的强度计算时，危险点处于复杂应力状态，必须考虑强度理论。

三、教学方式

采用启发式教学，通过提问，引导学生思考，让学生回答问题。

四、建议学时

7 学时

五、讲课提纲

1、概述

实际工程中，许多杆件往往同时存在着几种基本变形，它们对应的应力或变形属同一量级，在杆件设计计算时均需要同时考虑。本章将讨论此种由两种或两种以上基本变形组合的情况，统称为组合变形。

图 11.1 中，(a) 图示烟囱，自重引起轴向压缩变形，风荷载引起弯曲变形；(b) 图示柱，偏心力引起轴向压缩和弯曲组合变形；(c) 图示传动轴和 (d) 图示梁分别发生弯曲与扭转、斜弯曲组合变形。

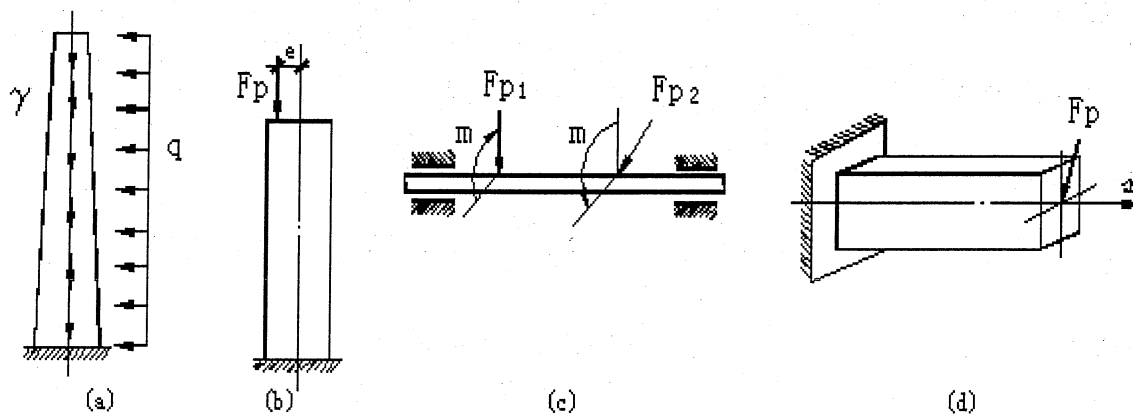


图 11.1

对于组合变形的计算，首先按静力等效原理，将荷载进行简化、分解，使每一种（组）荷载产生一种基本变形；其次，分别计算各基本变形的解（内力、应力、变形），最后综合考虑各基本变形，确定危险截面和危险点，叠加其应力、变形，进行强度和刚度计算。

2、斜弯曲

平面弯曲：横向力作用平面通过梁横截面弯心连线，且与横截面形心主惯性轴所在纵面重合或平行，梁的挠曲线所在平面或者与横向力作用平面重合或者与之平行。

斜弯曲：横向力通过梁横截面的弯心，不与形心主惯性轴重合或平行，而是斜交，梁的挠曲线不再与荷载纵平面重合或平行。

例：图 11.2 中给出几种常见截面，其中图 (b)、(c)、(d)、(f) 是斜弯曲；图 (a) 是平面弯曲；图 (e) 是斜弯曲与扭转的组合变形。

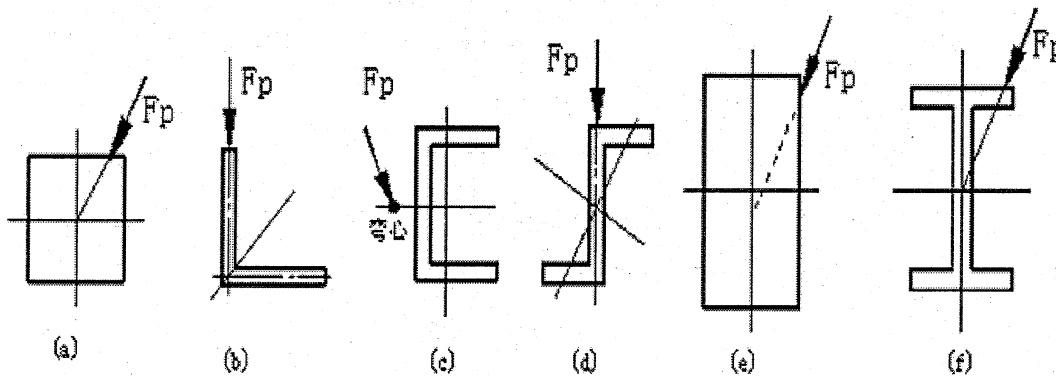


图 11.2

现以图 11.3 示矩形截面悬臂梁为例来说明斜弯曲时应力和变形的计算。设自由端作用一个垂直于轴线的集中力 F_p ，其作用线通过截面形心（也是弯心），并与形心主惯性轴 y 轴夹角为 φ 。

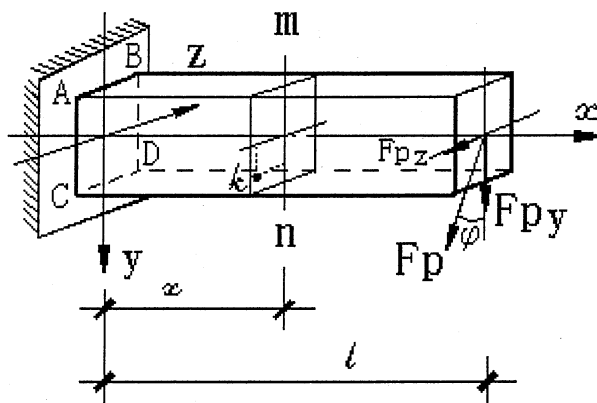


图 11.3

2.1 内力计算

首先将外力分解为沿截面形心主轴的两个分力：

$$F_{py} = F_p \cdot \cos \varphi$$

$$F_{pz} = F_p \cdot \sin \varphi$$

其中， F_{py} 使梁在 xy 平面内发生平面弯曲，中性轴为 z 轴，内力弯矩用 M_z 表示； F_{pz} 使梁在 xz 平面内发生平面弯曲，中性轴为 y 轴，内力弯矩用 M_y 表示。在应力计算时，因为梁的强度主要由正应力控制，所以通常只考虑弯矩引起的正应力，而不计切应力。

任意横截面 mn 上的内力为

$$M_z = F_{py} \cdot (l-x) = F_p (l-x) \cos \varphi = M \cos \varphi$$

$$M_y = F_{pz} \cdot (l-x) = F_p (l-x) \sin \varphi = M \sin \varphi$$

式中， $M = F_p(l-x)$ 是横截面上的总弯矩。

$$M = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}$$

2.2 应力分析

横截面 mn 上第一象限内任一点 $k(y, z)$ 处，对应于 M_z 、 M_y 引起的正应力分别为

$$\sigma' = -\frac{M_z}{I_z} y = -\frac{M \cos \varphi}{I_z} y$$

$$\sigma'' = -\frac{M_y}{I_y} z = -\frac{M \sin \varphi}{I_y} z$$

式中 I_y 、 I_z 分别为横截面对 y 、 z 轴的惯性矩。

因为 σ' 和 σ'' 都垂直于横截面，所以 k 点的正应力为

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' = -M \left(\frac{y \cos \varphi}{I_z} + \frac{z \sin \varphi}{I_y} \right) \quad (11.1)$$

注意：求横截面上任一点的正应力时，只需将此点的坐标（含符号）代入上式即可。

2.3 中性轴的确定

设中性轴上各点的坐标为 (y_0, z_0) ，因为中性轴上各点的正应力等于零，于是有

$$\sigma = -M \left(\frac{y_0}{I_z} \cos \varphi + \frac{z_0}{I_y} \sin \varphi \right) = 0$$

即

$$\frac{y_0}{I_z} \cos \varphi + \frac{z_0}{I_y} \sin \varphi = 0 \quad (11.2)$$

此即为中性轴方程，可见中性轴是一条通过截面形心的直线。设中性轴与 z 轴夹角为 α ，如图 11.4 示，则

$$\tan \alpha = \left| \frac{y_0}{z_0} \right| = \frac{I_z}{I_y} \tan \varphi$$

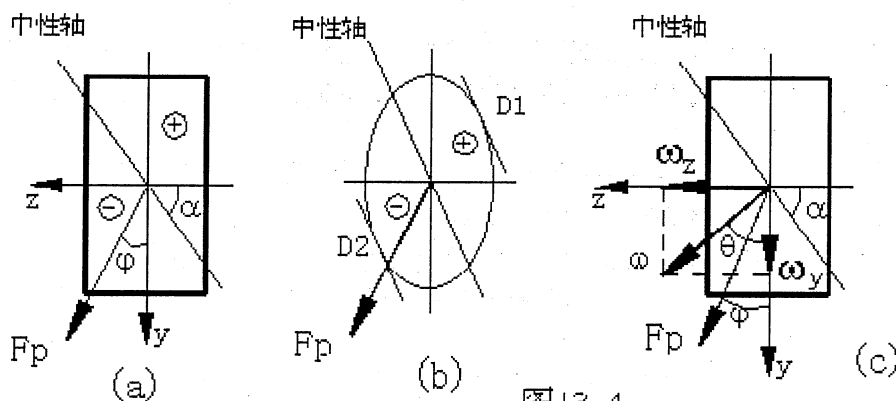


图 11.4

上式表明：①中性轴的位置只与 φ 和截面的形状、大小有关，而与外力的大小无关；②一般情况下， $I_y \neq I_z$ ，则 $\alpha \neq \varphi$ ，即中性轴不与外力作用平面垂直；③对于圆形、正方形和正多边形，通过形心的轴都是形心主轴， $I_y = I_z$ ，则 $\alpha = \varphi$ ，此时梁不会发生斜弯曲。

2.4 强度计算

危险点发生在弯矩最大截面上距中性轴最远的地方，对于图 11.3 示梁，两个方向的弯矩 M_z 、 M_y 在固定端截面上最大，所以危险截面为固定端截面。 M_z 产生的最大拉应力发生在 AB 边上， M_y 产生的最大拉应力发生在 BD 边上，所以梁的最大拉应力发生在 B 点。同理最大压应力发生在 C 点，因为此两点处于单向拉伸或单向压缩应力状态，可得强度条件为

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{z \max}}{W_z} + \frac{M_{y \max}}{W_y} \leq [\sigma] \quad (11.3)$$

若截面形状无明显的棱角时，如图 11.4(b) 示，则作中性轴的平行线并与截面相切于 D_1 、

D_2 两点, 此两点的正应力即为最大正应力。

五、变形计算

现用叠加原理计算图 11.3 示梁自由端挠度 ω

F_{py} 、 F_{pz} 分别引起梁在 xy 、 xz 平面内的自由端挠度为

$$\omega_y = \frac{F_{py} l^3}{3EI_z} = \frac{F_p l^3}{3EI_z} \cos \varphi$$

$$\omega_z = \frac{F_{pz} l^3}{3EI_y} = \frac{F_p l^3}{3EI_y} \sin \varphi$$

则自由端的总挠度为

$$\omega = \sqrt{\omega_y^2 + \omega_z^2} \quad (\text{矢量和}) \quad (11.4)$$

设总挠度 ω 与 y 轴的夹角为 θ , 则

$$\tan \theta = \frac{\omega_z}{\omega_y} = \frac{I_z}{I_y} \tan \varphi = \tan \alpha$$

可见: ①一般情况下, $I_z \neq I_y$, $\theta \neq \varphi$, 即挠曲线平面与荷载作用平面不重合; ② $\theta = \alpha$, 即 ω 方向与中性轴垂直。

3、弯扭组合变形

一般机械传动轴, 大多同时受到扭转力偶和横向力的作用, 发生扭转与弯曲组合变形。现以圆截面的钢制摇臂轴 (如图 11.5 所示) 为例说明弯扭组合变形时的强度计算方法。

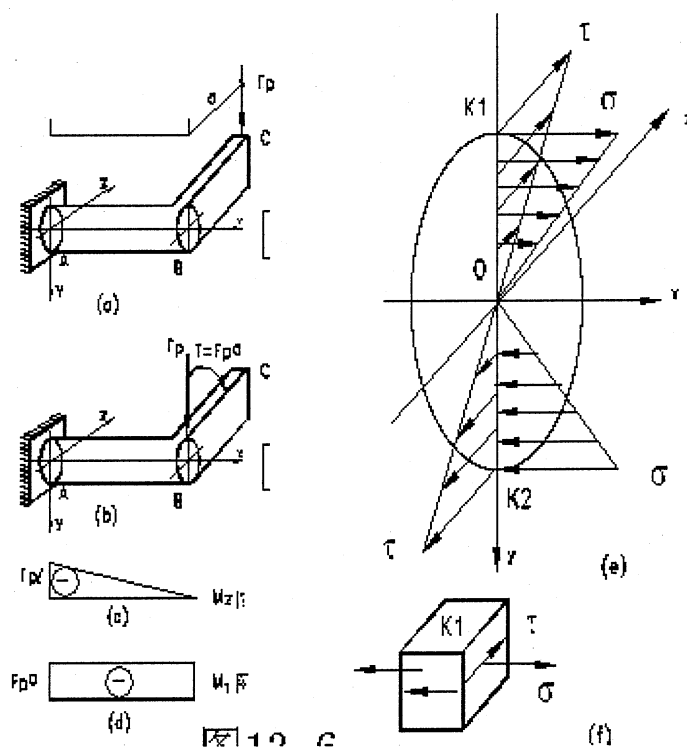


图 11.5

AB 轴的直径为 d , A 端为固定端, 在手柄的 C 端作用有铅垂向下的集中力 F_p 。

3.1 外力简化和内力计算

将外力 F_p 向截面 B 形心简化, 得 AB 轴的计算简图, 如图 11.5 (b) 所示。横向力 F_p 使轴发生平面弯曲, 而力偶矩 $T = F_p a$ 使轴发生扭转。作 AB 轴的弯矩图和扭矩图, 如图 11.5 (c), (d) 所示, 可见, 固定端截面为危险截面, 其上的内力 (弯矩 M_z 和扭转 M_T) 分别为

$$\begin{aligned} M_z &= F_p l \\ M_T &= T = F_p a \end{aligned} \quad (a)$$

3.2 应力计算

画出固定端截面上的弯曲正应力和扭转切应力的分布图, 如图 11.5 (e) 所示, 固定端截面上的 K_1 和 K_2 点为危险点, 其应力为

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{M_z}{W_z} \\ \tau &= \frac{M_T}{W_p} \end{aligned} \quad (a)$$

式中, $W_z = \frac{\pi d^3}{32}$, $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$, 它们分别为圆轴的抗弯和抗扭截面模量。因为圆轴的任一直径都是惯性主轴, 抗弯截面模量都相同 ($W = W_z = W_y$), 故均用 W 表示。 K_1 点的单元体如图 11.5 (f) 所示。

3.3 强度条件

危险点 K_1 (或 K_2) 处于二向应力状态, 其主应力为

$$\begin{aligned} \sigma_{1,3} &= \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \\ \sigma_2 &= 0 \end{aligned} \quad (b)$$

AB 轴为钢材 (塑性材料), 在复杂应力状态下可按第三或第四强度理论建立强度条件。

若采用第三强度理论, 则轴的强度条件为

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$$

将式 (b) 代入上式, 得到用危险点 K_1 (或 K_2) 的正应力和剪应力表示的强度条件

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$$

将式 (a) 中的 σ 和 τ 代入上式, 并注意到圆截面的 $W_p = 2W$, 可得到用危险截面上的弯矩和扭矩表示的强度条件:

$$\sigma_{r3} = \frac{1}{W} \sqrt{M_z^2 + M_T^2} \leq [\sigma] \quad (11.5)$$

若采用第四强度理论, 则轴的强度条件为

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$$

或

$$\sigma_{r4} = \frac{1}{W} \sqrt{M_z^2 + 0.75M_T^2} \leq [\sigma] \quad (11.6)$$

上面式 (11.5) 和式 (11.6) 中 M_z 应理解为是危险截面处的组合弯矩 M , 若同时存在 M_z 和 M_y , 则组合弯矩为: $M = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}$ 。

4、拉伸(压缩)与弯曲

拉弯、压弯组合变形, 是工程中经常遇到的情况, 图 11.1 (a) (b) 示都是压弯组合变形的实际例子, 现以图 11.6 (a) 示矩形截面杆为例分析拉弯、压弯组合变形的强度计算。

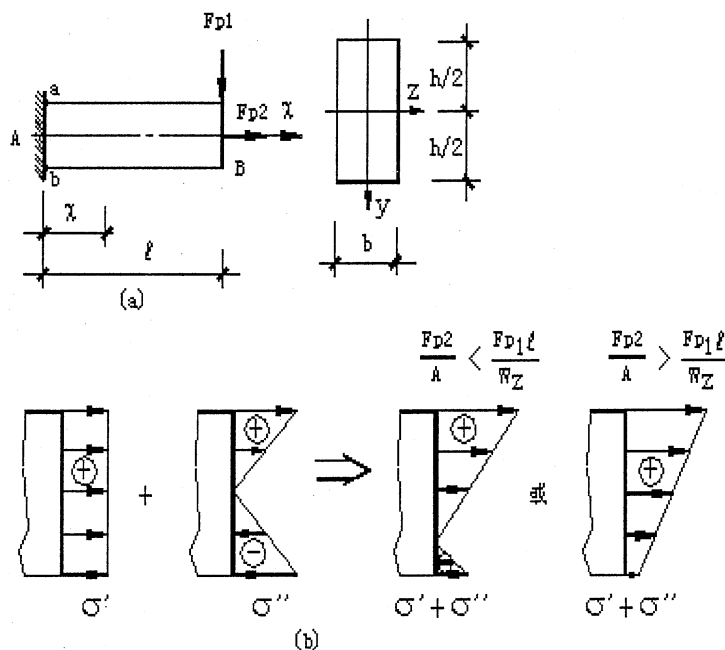


图 11.6

力 F_{p1} 作用在纵向对称性平面 xy 内, 引起杆件发生平面弯曲变形, 中性轴是 z 轴; F_{p2} 引起杆件发生轴向拉伸变形。

内力: $F_N = F_{p2}$ 为常数; $M_z = -F_{p1}(l-x)$, $M_{z\max} = M_z^A = F_{p1}l$ 。所以此杆的危险截面为固定端截面。

应力: 轴向拉伸正应力为

$$\sigma' = \frac{F_N}{A} = \frac{F_{p2}}{A}, \text{ 横截面上均匀分布}$$

弯曲正应力为

$$\sigma'' = \frac{M_z}{I_z} y = -\frac{F_{p1}(l-x)}{I_z} y, \text{ 横截面上呈线性分布}$$

叠加可得任一横截面上任一点的正应力为

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' = \frac{F_{p2}}{A} - \frac{F_{p1}(l-x)}{I_z} y \quad (11.7)$$

所以, 杆件的最大、最小正应力发生在固定端截面(危险截面)的上、下边缘 a 、 b 处,

其值为

$$\sigma_{\max} = \frac{F_{p2}}{A} + \frac{F_{p1}l}{W_z} \quad (>0, \text{为拉应力})$$

$$\sigma_{\min} = \frac{F_{p2}}{A} - \frac{F_{p1}l}{W_z} \quad (\text{可能为拉应力, 可能为压应力})$$

所以固定端截面上的正应力分布如图 11.7 (b) 所示。因为危险点处于单向应力状态, 故其强度条件为

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]$$

对于工程中常见的斜梁[图 11.7 (a)], 亦可按上述方法分析。图 11.7 (a) 可看作图 11.7 (b) 和图 11.7 (c) 的组合, 显然 AC 段的变形为压弯组合变形, BC 段的变形为拉弯组合变形。

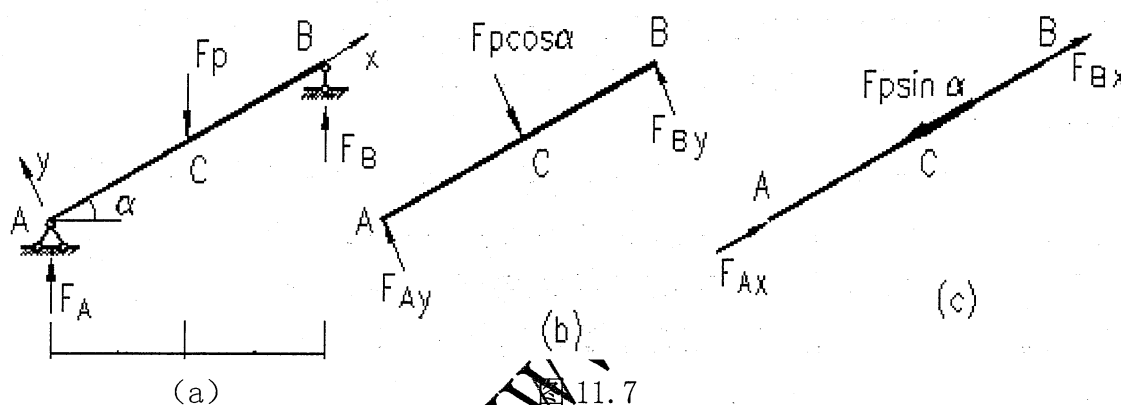


图 11.7

5、偏心拉伸（压缩）与截面核心

当外力作用线与杆的轴线平行, 但不重合时, 杆件的变形称为偏心拉压。它是拉伸（压缩）弯曲的组合。现在以矩形截面柱为例, 讨论偏心拉压时的强度计算。

取图 11.8 中柱的轴线为 x 轴, 截面的形心主轴 (即矩形截面的两根对称轴) 为 y, z 轴。设偏心压力 F_p 作用在柱顶面上的 $B(e_y, e_z)$ 点, e_y, e_z 分别为压力 F_p 至 z 轴和 y 轴的偏心距。当 $e_y \neq 0, e_z \neq 0$ 时, 称为双向偏心压缩; 而当 e_y, e_z 之一为零时, 则称为单向偏压缩。

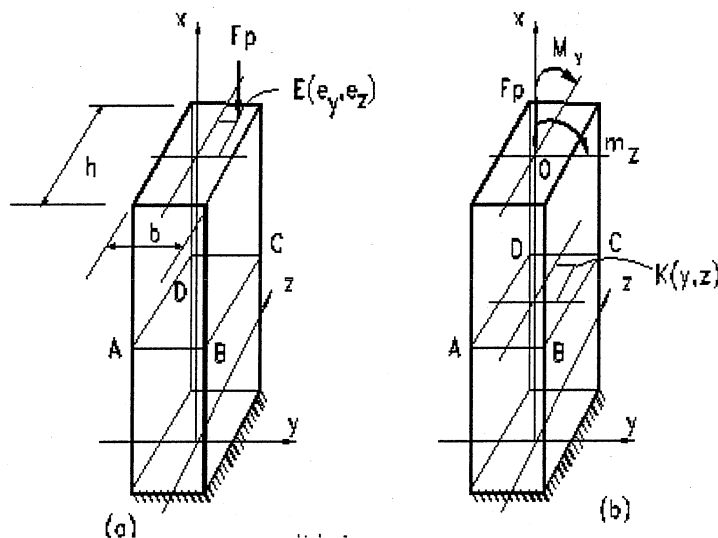


图 11.8

将偏心压力 F_P 向顶面的形心 O 点简化, 得到轴向压力 F_P 以及作用在 xy 平面内的附加力偶矩 $m_z = F_P \cdot e_y$ 和作用在 xz 平面内的附加力偶矩 $m_y = F_P \cdot e_z$, 如图 11.8 (b) 所示。柱的任一横截面 ABCD 上的内力为:

轴力: $F_N = -F_P$; 弯矩: $M_z = m_z = F_P \cdot e_y$; 弯矩: $M_y = m_y = F_P \cdot e_z$, 在截面 ABCD 上任一点 K (y, z) 处, 由以上三个内力产生的正应力 (均为压应力) 分别为

$$\sigma_{F_N} = \frac{F_N}{A} = -\frac{F_P}{A}, \quad \sigma_{M_z} = -\frac{M_z y}{I_z}, \quad \sigma_{M_y} = -\frac{M_y z}{I_y}$$

K 点的总应力用叠加法 (代数和) 求得

$$\sigma_K = \sigma_{F_N} + \sigma_{M_z} + \sigma_{M_y}$$

即

$$\sigma_K = -\frac{F_P}{A} - \frac{M_z y}{I_z} - \frac{M_y z}{I_y} \quad (11.8)$$

或

$$\sigma_K = -\frac{F_P}{A} - \frac{F_P \cdot e_y \cdot y}{I_z} - \frac{F_P \cdot e_z \cdot z}{I_y}$$

$$\sigma_K = -\frac{F_P}{A} \left(1 + \frac{e_y}{i_z^2} \cdot y + \frac{e_z}{i_y^2} \cdot z \right) \quad (11.9)$$

其中, 惯性半径 $i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$, $i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$ 。在计算时, 式中的弯矩取绝对值代入。当偏心压力 F_P 通过截面的

某一形心主轴 y 或 z 轴时, e_z 或 e_y 为零, 此时即为单向偏心压缩。

以图 11.8 (b) 可以看出, 任一横截面 (如截面 ABCD) 上的角点 A 和 C 即为危险点, A 和 C 点的正应力分别是截面上的最大拉应力 σ_{tmax} 和最大压应力 σ_{cmax} 。将 A 和 C 点的坐标代入式 (11.8), 得

$$\begin{aligned} \sigma_{t \max} &= -\frac{F_P}{A} \pm \frac{M_z \cdot y_{\max}}{I_z} \pm \frac{M_y \cdot z_{\max}}{I_y} = -\frac{F_P}{A} \pm \frac{M_z}{W_z} \pm \frac{M_y}{W_y} \\ \sigma_{c \max} & \end{aligned} \quad (11.10)$$

因危险点 A, C 均处于单向应力状态, 故强度条件为

$$\sigma_{t \max} \leq [\sigma]^+ \text{ 和 } \sigma_{c \max} \leq [\sigma]^-$$

当杆的横截面没有凸角时, 危险点的位置就不易直接观察确定。这时, 首先需要确定中性轴的位置。可令 $\sigma = 0$, 由式 (11.9) 可得中性轴方程, 即

$$1 + \frac{e_y}{i_z^2} \cdot y_0 + \frac{e_z}{i_y^2} \cdot z_0 = 0 \quad (11.11)$$

式中的 (y_0, z_0) 为中性轴上任意点的坐标。由以上式可见, 偏心拉压时, 横截面上中性轴为一条不通过截面形心的直线。设 α_z 和 α_y 分别为中性轴在坐标轴上的截距, 则由式 (11.11) 得

$$\begin{aligned} \alpha_z &= -\frac{i_y^2}{e_z} \\ \alpha_y &= -\frac{i_z^2}{e_y} \end{aligned} \quad (11.12)$$

上式表明, α_y 与 e_y , α_z 与 e_z 总是符号相反, 所以中性轴 $n-n$ 与外力作用点 E 的投影点分别位于截面形心的相对两边, 在周边上作平行中性轴的切线, 切点 A_1 和 A_2 是截面上距中性轴最远的两点, 故为危险点[图 11.9 (b)]。对于有凸角的对称截面, 角点 A 和 C 就是危险点, 如图 11.9 (a) 中的角点 A 和 C。将 A 和 C 的坐标代入式 (11.8) 即或求得横截面上数值最大的拉、压应力。

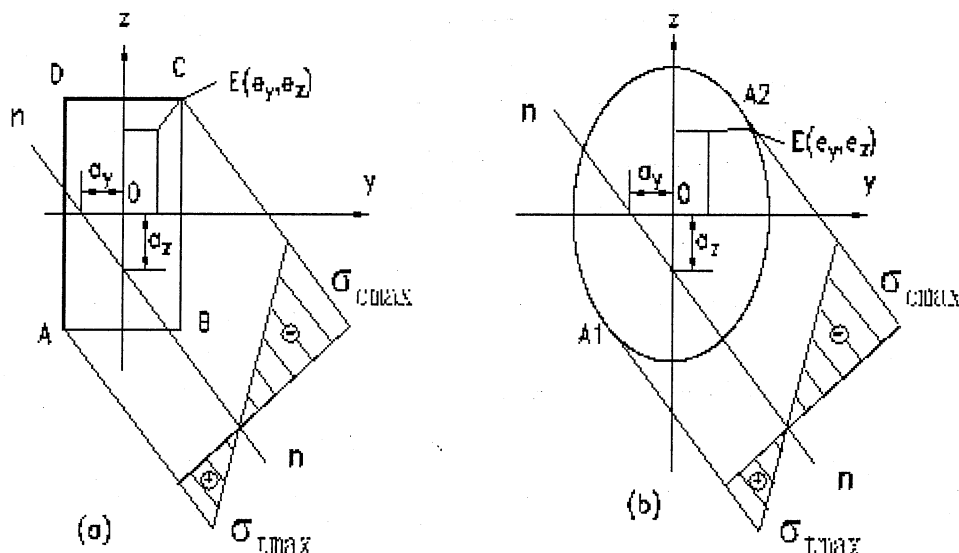


图 11.9

从图 11.9 中的正应力分布图可见, 在一般情况下中性轴将截面分成拉伸和压缩两个区域。工程上常用的砖石、混凝土、铸铁等脆性材料的抗压性能好而抗拉能力差, 对于这些材料制成的偏心受压杆, 应避免截面上出现拉应力。为此, 要对偏心距(即偏心力作用点到截面形心的距离)的大小加以限制。从式(11.12)可知, 中性轴在坐标轴上的截距与外力作用点坐标值成反比, 因此, 外力作用点离形心越近, 中性轴离形心就越远。当偏心外力作用在截面形心周围一个小区内, 而对应的中性轴与截面周边相切或位于截面之

外时, 整个横截面上就只有压应力而无拉应力。这个围绕截面形心的特定小区域称为截面核心。图 11.10 中的阴影区域即为矩形和圆形的截面核心。由截面核心的定义可知, 当偏心力的作用点位于截面核心边界的确定方法是: 以截面周边上若干点的切线作为中性轴, 算出其在坐标轴上的截距, 然后利用式 (11.12) 求出各中性轴所对应的外力作用点的坐标, 顺序连接所求得的外力作用点, 于是得到一条围绕截面形心的封闭曲线, 它所包围的区域就是截面核心。

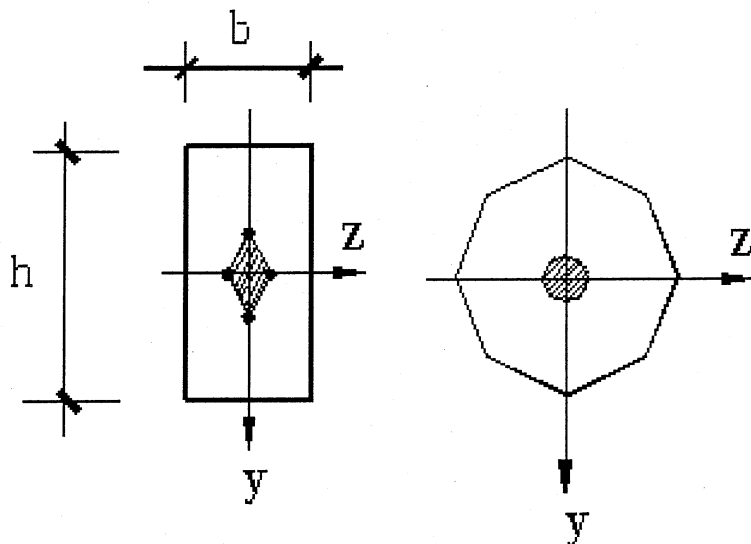


图 11.10

第十三章 压杆稳定

一、教学目标和教学内容

7. 教学目标

深入理解弹性平衡稳定性的概念
 熟练应用压杆的临界力公式, 掌握杆端约束对临界力的影响
 压杆的分类与临界应力曲线
 掌握压杆稳定性校核的方法

8. 教学内容

稳定的概念
 两端铰支细长压杆的欧拉临界力
 杆端约束的影响
 临界应力曲线
 压杆稳定性的校核

二、重点难点

重点: 欧拉临界力公式、压杆的分类、压杆稳定性的校核
 难点: 欧拉临界力公式、压杆的分类、压杆稳定性的校核

三、教学方式

采用启发式教学, 通过提问, 引导学生思考, 让学生回答问题。

四、建议学时

6 学时

五、讲课提纲

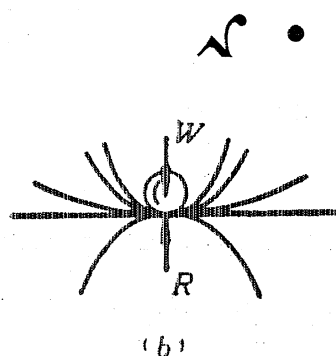
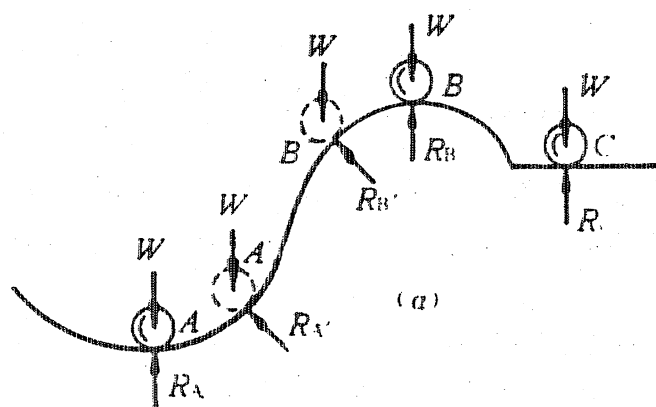
1、稳定的概念

1.1 分叉点失稳

1.1.1 三种平衡状态

(1) 刚球的稳定性

如物体因受了干扰稍为偏离它原来的平衡位置，而在干扰消除后它能够回到原来位置的平衡状态，就说它原来位置的平衡状态是稳定的。若干扰消除后它不回到原来位置的平衡状态，就说原来位置的平衡状态不稳定。所以一个刚体的稳定性是指它维持其原有位置的平衡状态的能力。



图

13.1

在图 13.1a 中，刚体小球 A、和 C 各在重力 W 与反力 R 作

用下处于平衡状态。但是，A 的平衡状态是稳定的，B 和 C 的平衡状态却不稳定。因为若分别以微干扰力使三球稍微移动到其邻近位置又撤去干扰力之后，原在谷底 A 的球到了 A' ，因反力不能平衡重力，必滚回谷底 A，最终在 A 静平衡。原在峰顶 B 的球到了 B' ，反力和重力的不平衡使它往低处滚，非滚到某一谷底不会停止，绝不可能回到原位置峰顶 B 去静平衡。原在 C 的球则在干扰力让它到达之处就地静止并平衡。因 R 和 W 始终在一直线上。

图 13.1b 中几条线分别表示山谷、平原、和山峰。谷坡越陡，坡上的球越易回谷底平衡，因而球在谷底的平衡越稳定。谷坡越平，稳定性越小，谷变为平地，球的平衡的稳定性降为零。平地若变为峰，球在峰顶，其平衡就不稳定了。所以，球在平地的平衡，是稳定平衡与不稳定平衡的分界，并称为临界平衡或中性平衡。

(2) 弹性压杆的稳定性

所谓弹性压杆的稳定性是指弹性压杆在中心压力作用下的直线位形的平衡状态的稳定性；又因弹性体受力后的任一平衡状态都对应着某个唯一的变形状态，所以也是指弹性压杆受压后的轴向缩短的变形状态的稳定性。

设有一两端球铰支座的弹性均质等直杆受毫无偏心的轴向压力作用（这就是所谓的理想压杆），杆呈轴向缩短变形状态，如图 13.2a。现在要判断这种变形状态（或直线位置的平衡状态）是否稳定。要作这种判断，可加一微小干扰力 Q ，使杆轴到达一个微弯曲线位置，

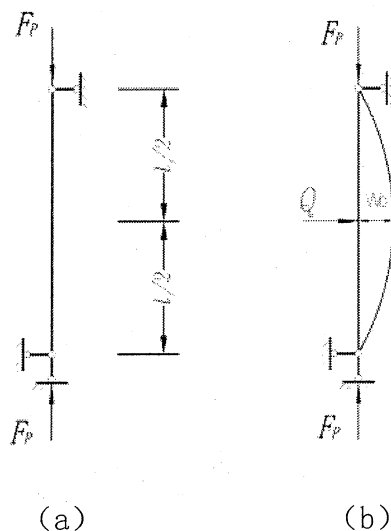


图 13.2

如图 13.2b, 然后撤销干扰力, 如果杆轴能回到直线位置, 则称初始直线位置的平衡状态是稳定的; 如果它继续弯曲到一个挠度更大的曲线位置去平衡, 则初始直线位置的平衡状态是不稳定的; 这就是判别弹性稳定性的静力学准则。如果它停留在干扰力撤销瞬时的微弯曲线的位置不动, 则初始直线位置的平衡是临界平衡或中性平衡。事实上, 同一杆件其直线位置的平衡状态是否稳定, 视所受轴向压力 F_p 的大小是否超过一个仅与杆的材料、尺寸、和支承方式有关的临界值 F_{pcr} 而定。这个取决于杆件本身的定值 F_{pcr} , 称为压杆的临界力或临界荷载。设轴向压力 F_p 从零逐渐增大, 则杆件在直线位置的平衡状态表现为:

- (1) 当 $F_p < F_{pcr}$, 是稳定的平衡状态;
- (2) 当 $F_p = F_{pcr}$, 是临界的平衡状态;
- (3) 当 $F_p > F_{pcr}$, 是不稳定的平衡状态;

当 $F_p = F_{pcr}$ 时, 压杆可在直线位置平衡(当它不受干扰时), 又可在干扰给予的微弯曲线位置平衡, 这种两可性是弹性体系的临界平衡的重要特点。

1.1.2 荷载—挠度曲线, 分叉点

以图 13.2b 的两端铰支的理想弹性压杆所受轴向压力 F_p 为纵轴, 以干扰力 Q 撤销后杆的中点挠度 w_0 为横轴, 如图 13.3a, 表示荷载 F_p 之值由零逐渐增大的过程中的荷载—挠度关系的曲线是该图中的 OAB 折线。图中 OA 段与纵轴重合, 表示在 $F_p < F_{pcr}$ 整个阶段内的任何时刻, 干扰力撤销后杆中点挠度均为零, 即杆件能由微弯位形弹回其直线位形而平衡, 即当 $F_p < F_{pcr}$ 时杆件在初始直线位置的平衡是稳定的。AB 段为水平, 表明当 $F_p = F_{pcr}$ 时, 中点挠度 w_0 可以是 AB 范围内的任意值, 随干扰大小而定, 但整个 AB 之长是微量。若干扰力反向, 则 AB 被 AB' 取代, AB' 的长度也是微量。

当 $F_p > F_{pcr}$ 时, 荷载—挠度曲线为 OABD'L 中 AL 曲线段, 和 AB 直线段, 图 13.3b 表示。其中一个分支 AB 对应着直线的平衡位形(无丝毫干扰); AL 曲线是根据大挠度理论算出来

的, 对应着屈曲的平衡位形, 不能停留在微弯位形。因此当 $F_p = F_{\text{per}}$ 时, 杆在直线

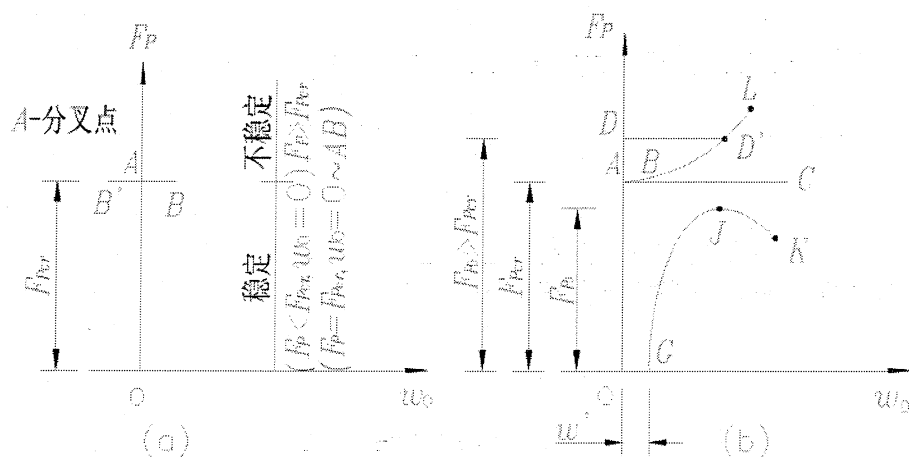


图 13.3

位置的平衡是不稳定的。人们把 $(F_p - w_0)$ 关系的发展曲线称为平衡途径。

当 $F_p < F_{\text{per}}$ 时, 平衡途径为 OA, 这段途径是唯一的。

当 $F_p \geq F_{\text{per}}$ 时; 平衡途径有两条: 若无干扰它将沿 AD 途径发展, 这一途径上各点对应的平衡状态不稳定。若有干扰, 它将沿曲线 AL 途径发展, 其各点对应着稳定的平衡状态。点 A 称为 (两条途径的) 分叉点。OAL 曲线所描写的失稳现象称为分叉点失稳。临界荷载 F_{per} 又称为分叉点荷载。

显然折线 OAB 所代表的小挠度理论只是 OAL 曲线所代表的大挠度理论的一部分, 其贡献在于能确定至关重要的临界力, 在 13.2 节我们将详细介绍小挠度理论—欧拉理论。

1.2 极值点失稳

图 13.3b 的曲线 GJK 描写的失稳现象称为极值点失稳。上面说的分叉点失稳是理想压杆 (无任何缺陷的弹性压杆) 的失稳现象。实际压杆总是有缺陷的 (杆内存在残余应力、初弯曲、荷载有初偏心, 截面上有塑性区, 等等)。图 13.3b 的 GJK 曲线是有初挠度 w' 的实际压杆的 $F_p - w_0$ 关系曲线, 其特点是无直线段, 曲线分上升的 GJ 和下降的 JK 两段, J 点的切线水平, 所以 J 是极值点, 其纵坐标所表示的荷载 F_p 称为极值点荷载。当 $F_p = F_p$ 后, 将出现 JK 段曲线所反映的实际压杆的崩溃现象—在荷载值不断降低的情况下杆件急剧弯曲, 不再能维持其原来的缩短加弯曲的变形形式。这种现象叫做极值点失稳。 F_p 总是小于临界荷载 F_{per} 。

对于理想压杆, 稳定性意味着压杆维持其直线压缩的变形形式的能力。对于有缺陷的压杆, 稳定性意味着它维持其缩短加弯曲的变形形式的能力。总之, 稳定性意味着杆件维持其原有变形形式或平衡形式的能力。再则, 稳定阶段总是一个比较长而缓的渐变过程, 失稳却是一个短促而急剧的突变过程。

2、两端铰支细长压杆的欧拉临界力

理想弹性压杆的临界力是在干扰力撤销后维持压杆在微弯位形平衡的最小轴向压力。求临界力必须从微弯的压杆中取分离体。图 13.4b 就是从图 13.4a 所示轴向受压的理想压杆的变形后的微弯弹性杆件中取出来的。在其 x 截面上取截面形心为矩心建立力矩平衡方程, 当

干扰力撤消前两端有竖向反力 $Q/2$ ，得到任意截面 x 上的弯矩。

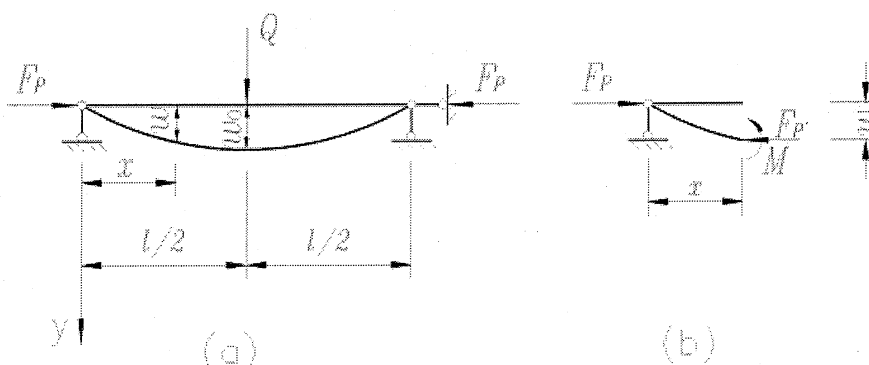


图 13.4

$$M = F_P w + \frac{1}{2} Qx \quad (a)$$

由小挠度微分方程

$$M = -EIw'' \quad (b)$$

当 $F_P < F_{Per}$ 时，就 (a) 式而言， $F_P w$ 一旦失去 $Qx/2$ 的帮助就不能抗衡内力弯矩 M 而让杆弹回直线位置。到 F_P 增大到 $F_P = F_{Per}$ 时， $F_P w$ 无需 $Qx/2$ 的帮助也能平衡，而 $Qx/2$ 就变得可有可无，可以忽略它的影响。这时令 $Q=0$ ，于是就有

$$M = Pw$$

注意，这就是临界平衡方程式。结合式 (b)，得

$$EIw'' + F_P w = 0 \quad (c)$$

这就是微弯弹性曲线的微分方程式，是临界平衡方程确定分叉点荷载的主要依据。

$$k^2 = \frac{F_P}{EI} \quad (d)$$

于是，式 (c) 可写为

$$w'' + k^2 w = 0$$

其通解为

$$w = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx \quad (e)$$

为了确定积分常数 C_1 和 C_2 ，考虑边界条件

1) 当 $x=0$ 时， $w(0)=0$ 。

2) 当 $x=l$ 时， $w(l)=0$

代入式 (e) 分别得

$$\left. \begin{aligned} C_1 \times 1 + C_2 \times 0 &= 0 \\ C_1 \cos kl + C_2 \sin kl &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

式 (f) 是以 C_1 和 C_2 为未知数的二元联立方程，而且是齐次方程。它显然有零解，即 $C_1=0$ ，

$C_2=0$ ，此时，由式 (e) 可得 $w \equiv 0$ ，这表示未加干扰时杆可在直线位置平衡，但这对求解 F_{Per}

毫无意义。要使式(f)有非零解, 必须 C_1 和 C_2 的系数行列式等于零, 即

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos kl & \sin kl \end{vmatrix} = 0$$

由此解答, 稳定方程

$$\sin kl = 0 \quad (g)$$

这要求

$$kl = \pm n\pi \quad (n=0, 1, 2, 3, \dots) \quad (h)$$

于是有所要求的分叉荷载的表达式

$$\frac{F_{\text{Per}}}{EI} = k^2 = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \quad (n=0, 1, 2, 3, \dots)$$

或

$$F_{\text{Per}} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2} \quad (n=0, 1, 2, 3, \dots) \quad (i)$$

首先, n 有一系列的值, 因而 F_{Per} 也是一系列的值, 我们要求的是其中的最小值, 但 $n=0$ 时, $F_{\text{Per}}=0$, 显然无意义, 所以 n 的合理的最小值是 1, 于是得

$$F_{\text{Per}} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (13.1)$$

其次, 截面的惯性矩 I 也是多值的, 当端部各个方向的约束相同时, 上式中的 I 为杆横截面的最小形心惯性矩。式(f)的第一个式给出 $C_1=0$, 由式(h)得 $k=\pm\frac{\pi}{l}$, 这里 $n=1$, 于是由式(e)得弹性曲线方程

$$w = \pm C_2 \sin \frac{\pi x}{l}$$

当 $x=\frac{l}{2}$ 时, $w(\frac{l}{2})=\pm w_0$, 于是上式得 $C_2=\pm w_0$, 所以弹性曲线方程的最后形式为

$$w = w_0 \sin \frac{\pi x}{l} \quad (j)$$

w_0 的值视干扰大小而定, 但是 w_0 是微量。两端铰支压杆失稳时的弹性曲线是半波正弦曲线。

本节求 F_{Per} 的方法叫做微分方程法或临界平衡法, 其思路是: 从临界平衡状态的微弯曲线取分离体, 建立临界平衡方程, 再转换为弹性曲线的微分方程式, 在不能让通解的全部积分常数都等于零的条件下得到稳定方程式, 从而得出临界力。

除临界平衡法外还有能量法确定临界力。

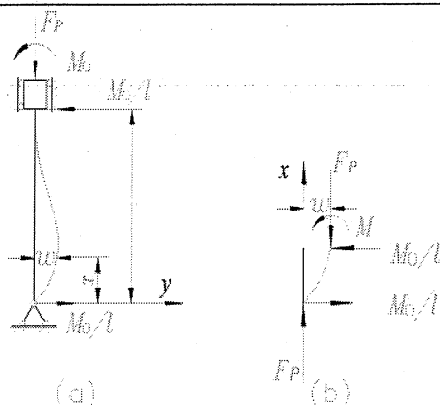
式(13.1)是瑞士科学家 L·欧拉(L. Euler) 在 1744 年提出的, 所以叫做欧拉公式。人们

把两端铰支的理想压杆称为欧拉压杆, 称为 $\frac{\pi^2 EI}{l^2}$ 为欧拉荷载。

3、 杆端约束的影响

对于各种杆端约束情况的弹性压杆, 由静力学平衡方法得到的压杆的平衡微分方程和边

界条件都可能各
同。现以图 13.5
端力矩为 M_0 ，根
反力 M_0/l 。取 x
截面的形心为矩



不相同，临界荷载的表达式也因此不
的一端固定一端铰支压杆为例。当固
据杆件的整体平衡条件，两端有水平
截面以下部分为分离体如图 b，以 x
心建立力矩平衡方程得

$$M = F_P w - M_0 x / l$$

再由 $M = -EIw''$

得微分方程

$$EIw'' + F_P w = M_0 x / l$$

或

$$w'' + k^2 w = \frac{M_0 x}{EI l}$$

式中 $k^2 = F_P / (EI)$ ，微分方程的解是

$$w = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx + \frac{M_0}{F_P} \cdot \frac{x}{l}$$

图 13.5

由边界条件

$$(1) \text{ 当 } x=0 \text{ 时, } w(0) = 0$$

$$(2) \text{ 当 } x=l \text{ 时, } \frac{dw}{dx} = 0$$

得

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -\frac{M_0}{F_P} \cdot \frac{1}{kl \cos kl}$$

于是

$$w = \frac{M_0}{F_P} \left(\frac{x}{l} - \frac{\sin kx}{kl \cos kl} \right)$$

再由边界条件

$$\text{当 } x=l \text{ 时, } w=0$$

得稳定方程

$$\tan kl = kl$$

此方程的最小非零解为

$$kl = 4.493$$

由此得

$$F_{\text{Per}} = \frac{20.2EI}{l^2} = \frac{\pi^2 EI}{(0.7l)^2}$$

和

$$w = \frac{M_0}{F_p} \left[\frac{x}{l} + 1.02 \sin(4.49 \frac{x}{l}) \right]$$

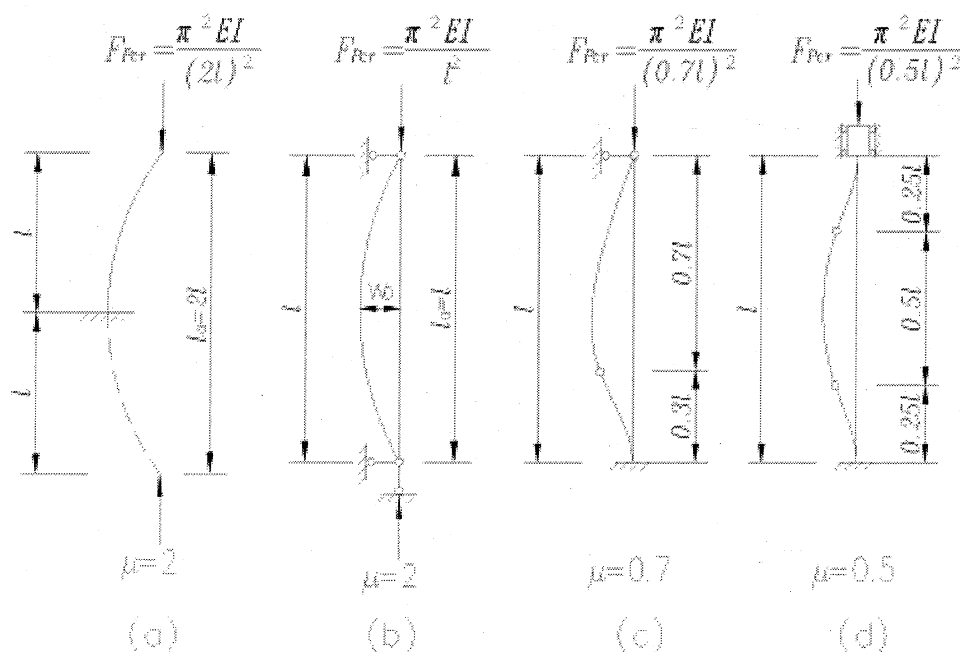


图 13.6

图 13.6 所示几种常见的杆端约束情况的临界力和弹性曲线形式，都是由微分方程法推导而得。它们的临界力表达式可统一写成

$$F_{\text{Per}} = \frac{\pi^2 EI}{l_0^2} \text{ 或 } F_{\text{Per}} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} \quad (13.3)$$

其中：

$$l_0 = \mu l \quad (13.4)$$

l_0 称为压杆的计算长度或有效长度。 l 是实际长度， μ 叫做长度系数。

(a) 一端自由一端固定压杆

$$\mu = 2, \quad l_0 = 2l$$

(b) 两端铰支压杆

$$\mu = 1, \quad l_0 = l$$

(c) 一端固定一端铰支压杆

$$\mu = 0.7, \quad l_0 = 0.7l$$

(d) 一端固定一端夹支压杆

$$\mu = 0.5, \quad l_0 = 0.5l$$

实际支承应简化成什么样的计算简图，它的计算长度如何确定，设计时都必须遵循设计规范。

4、 临界应力曲线

当中心压杆所受压力等于临界力而仍旧直立时，其横截面上的压应力称为临界应力，以记号 σ_{cr} 表示，设横截面面积为 A ，则

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{Pcr}}{A} = \frac{\pi^2 E}{l_0^2} \cdot \frac{I}{A} \quad (13.5)$$

但 $\frac{I}{A} = i^2$, i 是截面的回转半径, 于是得

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E i^2}{l_0^2}$$

令

$$l_0 / i = \lambda \quad (13.6)$$

λ , 称为压杆的长细比或柔度, 于是有

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (13.7)$$

对同一材料而言, $\pi^2 E$ 是一常数, 因此 λ 值决定着 σ_{cr} 的大小, 长细比 λ 越大, 临界应力 σ_{Pcr} 越小。式 (13.7) 是欧拉公式的另一形式。

欧拉公式适用范围:

若压杆的临界力已超过比例极限 σ_p , 胡克定律不成立, 这时式 (13.2) 中的式 (b) $M(x) = EI/\rho$ 不能成立, 从而式 (c) 也不能成立。所以欧拉公式的适用范围是临界应力不超过比例极限, 即

$$\sigma_{cr} \leq \sigma_p \quad (13.8)$$

对于某一压杆, 当临界力未算出时, 不能判断式 (13.8) 是否满足; 能否在计算临界力之前, 预先判断哪一类压杆的临界应力不超过比例极限, 哪一类压杆的临界点应力将超过临界应力, 哪一类压杆不发生失稳而只有强度问题? 回答是肯定的。

若用 λ 的最小值 λ_p 表示欧拉公式的适用范围, 则

$$\lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} = \lambda_p \quad (13.9)$$

以 λ 为横坐标轴, σ_{cr} 为纵坐标轴, 则欧拉公式 (13.7) 的图象是一条双曲线, 如图 13.7 a 所示, 其中只有实线部分适用, 虚线部分表示中柔度压杆, 这类压杆横截面上的应力已经超过比例极限, 故称为非弹性屈曲。

λ_p 与压杆的材料有关, 对于 3 号钢:

$$E \approx 210 \text{ GPa}, \sigma_p \approx 200 \text{ MPa},$$

$$\lambda_p = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} = \sqrt{\frac{\pi^2 (210 \times 10^3)}{200}} = 102$$

镍钢 (含镍 3.5%)

$$E \approx 2.15 \times 10^5 \text{ MPa}, \sigma_p \approx 490 \text{ MPa},$$

$$\lambda_p = \sqrt{\frac{\pi^2 (2.15 \times 10^5)}{490}} = 65.8$$

松木:

$$E \approx 0.11 \times 10^5 \text{ MPa}, \sigma_p \approx 20 \text{ MPa},$$

$$\lambda_p = \sqrt{\frac{\pi^2 (0.11 \times 10^5)}{20}} = 73.7$$

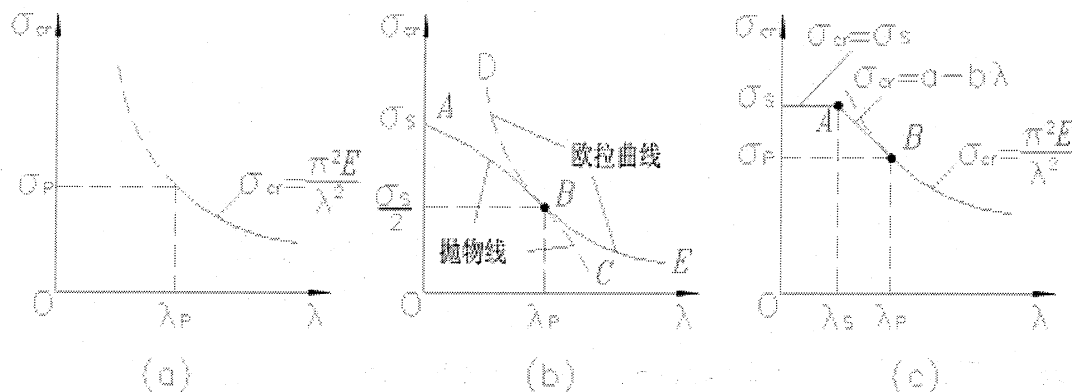


图 13.7

在使用欧拉公式前须算一下 λ 是否大于 λ_p 。

对于中长杆与粗短压杆，目前在设计中多采用经验公式计算其临界应力。下面介绍几种常用工程材料压杆的设计公式。

(1) 结构钢

①、对于细长杆，用由欧拉公式得到的结果：

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (\lambda \geq \lambda_p) \quad (13.10)$$

②、对于中长杆与粗短杆，用抛物线公式得到的结果

$$\sigma_{cr} = \sigma_0 - k \lambda^2 \quad (\lambda \leq \lambda_p) \quad (13.11)$$

根据图 13.7b 所示的 $\sigma_{cr} - \lambda$ 曲线得到： $\lambda = 0$ 时 $\sigma_{cr} = \sigma_s$ ，所以式 (13.11) 中的 $\sigma_0 = \sigma_s$ 。在欧拉双曲线与抛物线连接点处一般取 $\sigma_{cr} = \sigma_s / 2$ ，于是式 (13.11) 中的 k 为

$$k = \frac{\sigma_s}{2 \lambda_p^2} \quad (13.12)$$

由 $\lambda = \lambda_p$ 时 $\sigma_{cr} = \sigma_s / 2$ ，求得

$$\lambda_p = \sqrt{\frac{2 \pi^2 E}{\sigma_s}} \quad (13.13)$$

将式 (13.13) 代入式 (13.12) 得

$$k = \frac{\sigma_s}{4\pi^2 E} \quad (13.13)$$

(2) 铸铁、铝合金与木材

①、对于细长压杆，临界应力仍然采用由欧拉公式得到的结果，即

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (\lambda \geq \lambda_p) \quad (13.15)$$

②、对于粗短压杆，临界应力为

$$\sigma_{cr} = \sigma_s \text{ 或 } \sigma_{cr} = \sigma_b \quad (\lambda \leq \lambda_p) \quad (13.16)$$

③、对于中长杆，采用直线经验公式

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda \quad (\lambda_s \leq \lambda \leq \lambda_p) \quad (13.17)$$

由上述三式所确定的 $\sigma_{cr} - \lambda$ 曲线如图 13.7 c 所示。与 λ_p 、 λ_s 对应的临界应力值分别为比例极限和屈服极限(或强度极限 σ_b)。据此，不难确定不同材料的 λ_p 、 λ_s 值。

此外，式 (13.17) 中常数 a 和 b 均与材料有关。表 13.1 中所列为三种材料的 a 和 b 值。材料 a 、 b 值。

表 13.1 直线经验公式中常数值

材料	a/MPa	b/MPa
铸铁	332.3	1.454
铝合金	373	2.15

5、压杆稳定性的校核

各种金属结构的压杆，其稳定性校核的思路大体相同，不过 $\sigma_{cr} - \lambda$ 曲线各不相同。我们以钢压杆的稳定校核作为典型示例。进行较详细的介绍。木压杆的稳定校核因近年来就国产木材作了大量研究，因而也特加介绍。

(一) 钢压杆的稳定性的校核

实际压杆的缺陷一般归纳为三种：残余应力、初弯曲和荷载偏心。但从概率观点看，三者同时达到其对杆件最不利的情况的机会很小，所以人们只考虑前两者，即以有残余应力和初弯曲的压杆作为实际压杆的模型。

对于实际压杆显然不能用分叉点失稳模式，因为它一开始就有弯曲。也不能用佩里公式即边缘纤维屈服的模式。因该模式没有考虑到残余应力带来的塑性区。因此对实际压杆是考虑的极值点失稳的模式，即以图 13.3b 所示极值点的应力作为临界应力 σ_{cr} 。

计算这样的弹-塑性失稳的临界应力，不但理论上比较复杂，而且不可能推导出适用于一切截面的统一的临界应力公式，也推导不出适用于一切压杆的 $\sigma_{cr} - \lambda$ 曲线(即临界应力总图，工程界称为柱子曲线)。实际上，在计算中只能采用数值法，幸亏有电子计算机可用，使得计算能得以实现，但一次也只能就一种截面计算出一条属于它的柱子曲线。我国钢结构规范组根据自己算出的 96 根钢柱子曲线，经分析研究，最后归纳为图 13.8 所示 a、b 和 c

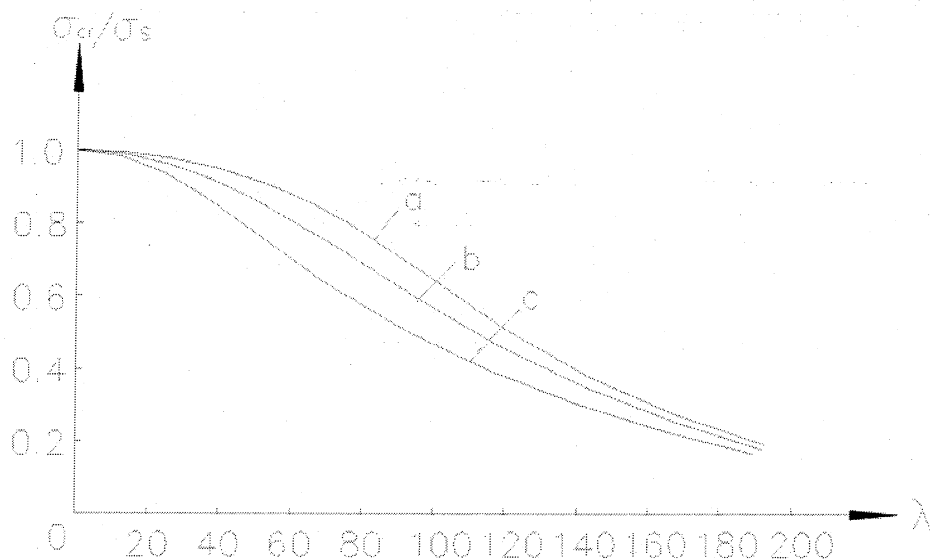


图 12.8

三根曲线，其中：

a 曲线：主要用于轧制工字形截面的强轴（弱轴用 b 曲线）、热轧圆管和方管；

c 曲线：用于焊接工字形截面的弱轴、槽形的对称主轴。

b 曲线：除 a、c 曲线以外的情况。

中心压杆的临界应力（极值点应力） σ_{cr} 与屈服极限 σ_s 之比称为压杆的稳定系数，以 φ 表示。

$$\varphi = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_s} \leq 1 \quad (13.18)$$

相应于每一条柱子曲线有一系列稳定系数，因此钢给构规范中有 a 类截面，b 类截面和 c 类截面三种稳定系数表。各种钢的稳定系数表也互不相同（本章附录所示 3 号钢的稳定系数表）

稳定校核按下述稳定条件进行：

$$F_N \leq \varphi A f \quad (13.19)$$

式中 F_N —压杆所受轴向压力的设计值；

A —压杆截面的毛截面面积；

f —钢材抗压强度的设计值，随钢材种类而异。见表 13.2；

φ —稳定系数，见附录。

关于 f 值与钢材尺寸有关，3 号钢按尺寸分三组，见表 13.2。表 13.3 表示钢材的 f 值。

表 13.2 3 号钢钢材分组尺寸/mm

组 别	圆钢、方钢和扁钢的直径或 厚度	角钢、工字钢和槽钢的 厚度	钢板的厚度
第 1 组	≤ 40	≤ 15	≤ 20
第 2 组	$>40 \sim 100$	$>15 \sim 20$	$>20 \sim 40$
第 3 组		>20	$>40 \sim 50$

表 13.3 钢材的抗压强度设计值/($N \cdot mm^{-2}$)

钢号	组别	厚度或直径	f
----	----	-------	-----

3 号钢	第 1 组	—	215
	第 2 组	—	200
	第 3 组	—	100
16Mn 钢 16Mnq 钢	—	≤16	315
	—	17~25	300
	—	26~36	290
15 MnV 钢 15 MnVq 钢	—	≤16	350
	—	17~25	335

，算得的 $N/\varphi A$ 将大于 190MPa)。

(二) 木压杆的稳定性的校核

根据实验，实际的木压杆的 $F_p - w_0$ 曲线如图 13.9，此曲线的 Ot 段完全重合于纵坐标轴， F_{pt} 是切线模量理论的临界荷载，这就是说木压杆的工作方式是中心受压。

木压杆的稳定性校核按下述计算准则进行

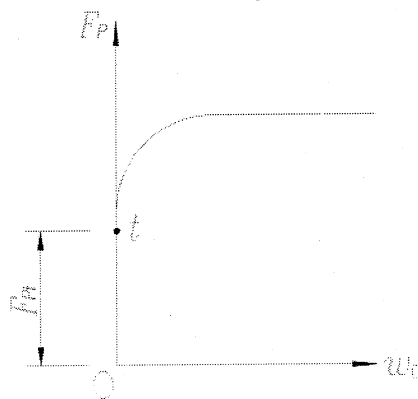
$$F_N \leq \varphi A_0 f_c \quad (13.20)$$

式中 F_N —压杆所受轴向压力的设计值；

f_c —木材顺纹抗压强度的设计值；

A_0 —压杆截面的计算面积；

φ —轴心受压杆件的稳定系数。



图

13.9

树种不同， f_c 和 φ 之值也不同。表 13.4 所示各种树种木材的 f_c 值和 E (弹性模量) 值。

表 13.4 常用树种的顺纹抗压强度设计值和弹性模量

强度等级	组别	适用树种	$f_c / (\text{N} \cdot \text{mm}^{-2})$	$E / (\text{N} \cdot \text{mm}^{-2})$
TC17	A	柏木	16	10 000
	B	东北落叶松	15	
TC15	A	铁杉、油杉	13	10 000
	B	鱼鳞云杉、云南云杉	12	
TC13	A	油松、新疆落叶松、马尾松	12	10 000
	B	红皮云杉、丽江云杉、红松、樟子松	10	9 000
TB11	A	云南云杉、新疆云杉	10	9 000
	B	杉木、冷杉	10	
TB20	—	栎木、青冈、桐木	18	12 000

TB17	—	水曲柳	16	11 000
TB15	—	栲木、桦木	13	10 000

关于 φ 值, 规范规定:

1) 树种强度等级为 TC17、TC15 及 TB20:

当 $\lambda \leq 75$ 时

$$\varphi = \frac{1}{1 + \left(\frac{\lambda}{80}\right)^2} \quad (13.21)$$

当 $\lambda > 75$ 时

$$\varphi = \frac{3000}{\lambda^2} \quad (13.22)$$

2) 树种强度等级为 TC13、TC11、TB17 及 TB15

当 $\lambda \leq 91$ 时

$$\varphi = \frac{1}{1 + \left(\frac{\lambda}{65}\right)^2} \quad (13.23)$$

当 $\lambda > 91$ 时

$$\varphi = \frac{2800}{\lambda^2} \quad (13.24)$$

第十四章 杆件的应变能及其应用

一、教学目标和教学内容

9. 教学目标

让学生掌握杆件弹性应变能的有关概念。

理解和掌握在工程力学有广泛应用的能量方法。

掌握功能原理、功的互等定理、位移互等定理、卡氏定理。

能够熟练地计算基本变形杆件和常见的组合变形杆件的应变能。

对于简单结构应变能, 也能够完成应变能的计算。

能够较为熟练地应用卡氏第二定理, 完成杆件的位移计算, 并可以求解简单超静定问题。

为进一步在结构力学等后续课程中, 学习和应用能量方法奠定基础。

10. 教学内容

介绍能量法的有关概念。例如, 外力的功、应变能、比能等等。

介绍基本变形杆件应变能计算和组合变形杆件应变能计算。

讲解功能原理、功的互等定理和位移互等定理。

讲解余能概念和卡氏定理。

二、重点难点

重点: 建立应变能等有关概念。

基本变形杆件和常见的组合变形杆件的应变能的计算。

卡氏第二定理及其应用。

难点：杆件应变能计算中的可否叠加问题。

对于广义力和相应广义位移的正确理解和认识。

应用卡氏第二定理求位移时，如何正确地选取或设定与位移相应的广义力。

能否正确写出内力方程，灵活地进行先求偏导数再积分的运算。

三、教学方式

采用启发式教学，通过提问，引导学生思考，让学生回答问题。

四、建议学时

6 学时

五、讲课提纲

1、弹性应变能与功能原理

弹性体在荷载作用下将发生变形，外力作用点要产生位移。因此，在弹性体的变形过程中，外力沿其作用方向做了功，称为外力功。对于弹性体，因为变形是可逆的，外力功将以一种能量形式积蓄在弹性体内部。当将荷载逐渐卸除时，该能量又将重新释放出来作功，使弹性体恢复到变形前的形状。例如钟表里的发条在被拧紧的过程中，发生了弹性变形而积蓄了能量，在它放松的过程中可带动指针转动，从而发条就作了功。弹性体伴随弹性变形积蓄了能量，从而具有对外界作功的潜在能力，通常把这种形式的能量称为弹性应变能 (Elastic strain energy) 或弹性变形能 (Elastic deformation energy)，用 V_ϵ 表示。

根据物理学中的功能原理，积蓄在弹性体内的应变能 V_ϵ 及能量损耗 ΔE 在数值上应等于荷载所作的功，即

$$V_\epsilon + \Delta E = W$$

如果在加载过程中动能及其它形式的能量损耗不计，应有

$$V_\epsilon = W \quad (14.1)$$

利用上述的这种功能概念解决固体力学问题的方法统称为能量法，相应的基本原理统称为功能原理 (Principle for work and energy)。弹性体的功能原理的应用非常广泛，它是目前在工程中得到广泛应用的有限单元法的重要理论基础。

2、杆件的应变能计算

如前所述，若外力在加载过程中所作的功全部以应变能的形式积蓄在弹性体内，即在加载和卸载的过程中能量没有任何损失，则只要得到加载过程中外力功的数值，弹性体应变能的数值也就可以计算出来，所以说外力功是应变能的一种度量。

2.1 外力功的计算

外力作功分为以下两种情况。

一种情况为常力作功。这里所谓常力，是指工程动力学中，作用在不变形的刚体上使刚体产生运动的力。当外力在作功过程中保持不变时，它所作的功等于外力与其相应位移的乘积。例如，在沿外力 F 方向线上有线位移 Δ ，则

$$W = F \cdot \Delta$$

另一种情况为静荷载做功。所谓静荷载，是指构件所承受的荷载从零开始缓慢地增加到最终值，然后不随时间改变。所以静荷载的施加过程均为变力。静荷载做功，可以解释为在其施加过程中的一种变力做功。例如如图 14.1 所示的简单受拉杆，拉力由零逐渐增加到定值 F ，由 F 产生的伸长变形由零逐渐增加到 Δl ，这就是拉力 F 的作用点的位移。如果材料服从胡克定律，则外力 F 与位移 Δl 成线性关系（图 14.2a）。设 F_1 表示加载过程中拉力的一个值，相应的位移为 Δl_1 ，此时将拉力增加一微量 dF_1 ，使其产生相应的位移增量 $d(\Delta l_1)$ ，这时，已经作用在杆上的拉力 F_1 将在该位移增量上作全功，其值为

$$dW = F_1 \cdot d(\Delta l_1) \quad (14.2)$$

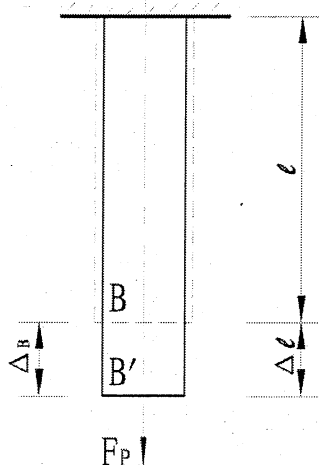


图 14.1

在上式中略去了 dF_1 在 $d(\Delta l_1)$ 上作的功，这部分功为二阶微量。 dW 在图 14.2a 中以阴影面积来表示。拉力从零增加到 F 的整个加载过程中所作的总功则为这种单元面积的总和，也就是 $\triangle OAB$ 的面积，即

$$W = \int_0^F F_1 \cdot d(\Delta l_1) = \frac{1}{2} F \Delta l$$

上述积分是与静荷载施加过程有关的积分，可以称为静荷载做功的过程积分。积分结果的系数 $1/2$ ，既是已经完成过程积分的标志，又表示构件材料为线性弹性材料。将以上的分析推广到其它的受力情况，因而静荷载下外力功的计算式可写为

$$W = \frac{1}{2} F \cdot \Delta \quad (14.3)$$

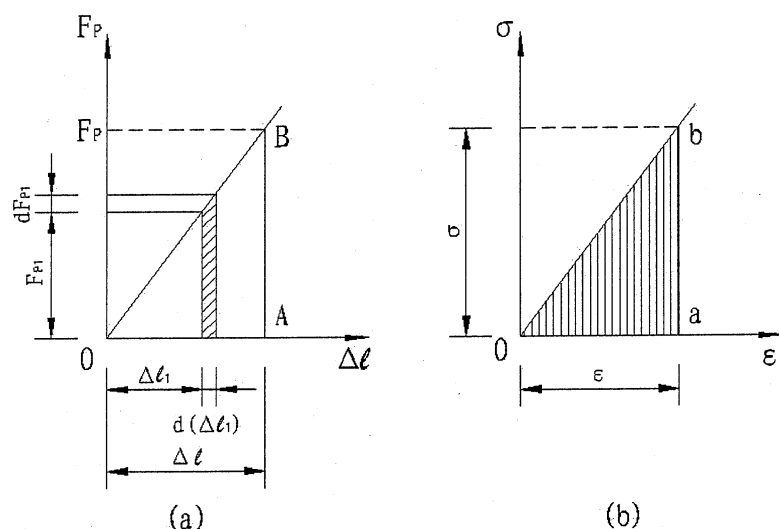


图 14.2

式中的 F 是广义力，它可以是集中力或集中力偶； Δ 是与广义力 F 相对应的位移，称为广义位移，它可以是线位移或角位移。上式表明，当外力是由零逐渐增加的变力时，在符合胡克定律的范围内，外力在其相应位移上所作的功，等于外力最终值与相应位移最终值乘积的一半。

2.2 杆件的应变能计算

2.2.1 应变能的有关概念

按照功能原理，应变能可以由计算外力的功得到，这是应变能的一种计算方法。

同时，也表明线弹性材料杆件的应变能，在完成了过程积分，也始终具有 $1/2$ 系数。

$$V_{\varepsilon} = W$$

$$\int_0^{\Delta l} F_1 \cdot d(\Delta l_1) = \frac{1}{2} F \Delta l$$

应变能和外力的功，它们在杆件受力变形过程中的积累，也可以由荷载伸长图和应力

$$V_{\varepsilon} = W = \int_0^{\Delta l} F_1 \cdot d(\Delta l_1) = \frac{1}{2} F \Delta l$$

应变图(见图 14.2)考察到。

$$V_{\varepsilon} = W = \int_0^{\varepsilon} F_1 \cdot d(\Delta l_1) = \frac{1}{2} F \Delta l$$

2.2.2 杆件的应变能计算

$$v_{\varepsilon} = \int_0^{\varepsilon} \sigma_1 \cdot d\varepsilon_1 = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon$$

2.2.2.1 杆件在各种基本变形时应变能的计算

如前所述，应变能是根据能量守恒原理通过外力功来计算的。以下我们讨论的均为静荷载问题，动能和其他能量的损耗不计。

1. 轴向拉伸或压缩杆的应变能及比能

当拉（压）杆的变形处于线弹性范围内时，外力所作的功为

$$W = \frac{1}{2} F \Delta l$$

则杆内的应变能为

$$V_{\varepsilon} = W = \frac{1}{2} F \Delta l$$

由图 14.1 知，杆件任一横截面上的轴力

$$F_N = F$$

考虑到胡克定律有

$$\Delta l = \frac{F_N l}{EA}$$

所以，拉（压）杆的应变能为

$$V_{\varepsilon} = \frac{F_N^2 l}{2EA}$$

(14.4a)

或

$$V_{\varepsilon} = \frac{EA(\Delta l)^2}{2l} \quad (14.4b)$$

若外力较复杂，轴力沿杆轴线为变量 $F_N(x)$ ，可以先计算长度为 dx 微段内的应变能，再按积分的方法计算整个杆件的应变能，即

$$dV_{\varepsilon} = \frac{F_N^2(x) dx}{2EA}$$

$$V_\varepsilon = \int \frac{F_N^2(x) dx}{2EA}$$

(14.5)

为了对构件的弹性变形能有更全面的了解，我们不但要知道整个构件所能积蓄的应变能，而且要知道杆的单位体积内所能积蓄的应变能。对于承受均匀拉力的杆（图 14.1），杆内各部分的受力和变形情况相同，所以每单位体积内积蓄的应变能相等，可用杆的应变能 V_ε 除以杆的体积 V 来计算。这种单位体积内的应变能，称为应变比能（Density of strain energy），简称比能，并用 v_ε 表示，于是

$$v_\varepsilon = \frac{V_\varepsilon}{V} = \frac{\frac{1}{2} F_N l}{Al} = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon$$

可见应变比能 v_ε 的数值也可以用 $\sigma \sim \varepsilon$ 图中 ΔOab 的面积来表示（图 14.2b）。根据胡克定律 $\sigma = E\varepsilon$ ，比能又可以写成下列形式

$$v_\varepsilon = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{E\varepsilon^2}{2} \quad (14.6)$$

2. 剪切变形时的应变能及比能

为了分析的方便，从受剪切杆中截取如图 14.3a 所示的单元体，该单元体处于纯剪切应力状态，假想其在一个面（如左侧面）上被固定起来，则在剪应力由零逐渐增加到 τ 值的过程中，单元体将发生如图所示的变形，与此对应的剪应变由零增加到 γ 值，其右侧面向下的位移为 $\Delta = \gamma dx$ 。当材料在线弹性范围内工作时，其 τ 与 γ 成正比（图 14.3b），与图 14.2a、b 中所示受拉杆的相应图形类似。所以，单元体各表面上的剪力在单元体变形过程中所作的功为

$$dW = \frac{1}{2} (\tau dy dz) \cdot \Delta = \frac{1}{2} (\tau dy dz) (\gamma dx)$$

上式中，作功的力是单元体右侧面上的剪力。由于剪应变 γ 很小，其余各面上的剪力，在其作用方向上没有位移，都没有在其作用方向上作功。故单元体内积蓄的应变能为

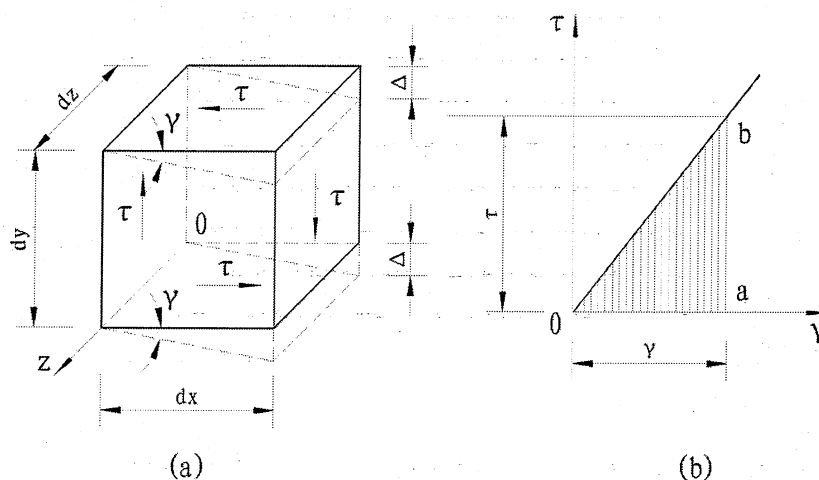


图 14.3

$$dV_{\varepsilon} = dW = \frac{1}{2} \tau \gamma \cdot dV$$

单元体内积蓄的应变比能则为

$$v_{\varepsilon} = \frac{dV_{\varepsilon}}{dV} = \frac{1}{2} \tau \gamma$$

这表明, v_{ε} 等于 $\tau \sim \gamma$ 直线下的面积。由剪切胡克定律 $\tau = G\gamma$, 比能又可以写成下列形式

$$v_{\varepsilon} = \frac{1}{2} \tau \gamma = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{G\gamma^2}{2} \quad (14.7)$$

3. 圆轴扭转时的应变能及比能

如图 14.4a 所示的受扭圆轴, 若扭转力偶矩由零开始缓慢增加到最终值 T , 则在线弹性范围内, 相对扭转角 φ 与扭转力偶矩 T 间的关系是一条直线 (图 14.4b)。与轴向拉伸杆件相似, 扭转圆轴的应变能应为

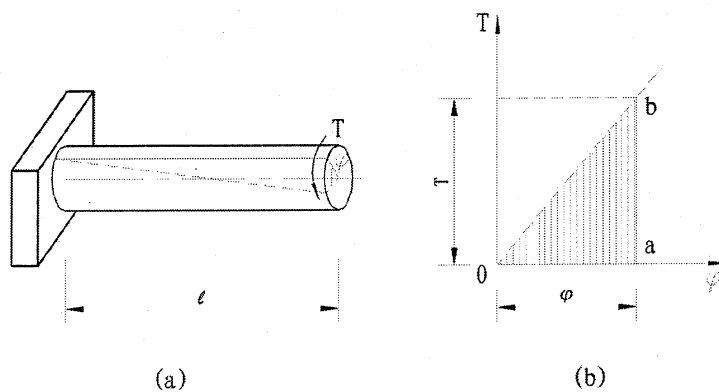


图 14.4

$$V_{\varepsilon} = W = \frac{1}{2} T \varphi$$

由于圆轴横截面上的扭矩 $M_x = T$ ，且

$$\varphi = \frac{M_x l}{GI_p}$$

所以，受扭圆轴的应变能为

$$\frac{\int_0^l M_x^2 dx}{2GI_p} = V_{\varepsilon} = \frac{GI_p \varphi^2}{2l}$$

(14.8)

实际上，受扭圆轴中各点的应力状态均为纯剪切应力状态，因而可以直接采用公式 (14.7)，求积分即得杆件的应变能。因为剪应力 $\tau = \frac{M_x \rho}{I_p}$ ，所以

$$V_{\varepsilon} = \int v dV = \int \int_A \frac{\tau^2}{2G} dA dx = \frac{l}{2G} \left(\frac{M_x}{I_p} \right)^2 \int_A \rho^2 dA = \frac{M_x^2 l}{2GI_p}$$

当扭矩 M_x 沿轴线为变量时，上式变为

$$V_{\varepsilon} = \int \frac{M_x^2(x) dx}{2GI_p}$$

(14.9)

可见利用比能计算全杆内积蓄的应变能应用范围更广，该方法适用于杆各横截

面上内力变化（相应横截面上各点处的应力也不同）的情况。

4. 弯曲变形时的应变能及比能

(1) 纯弯曲梁

设如图 14.5a 所示的简支梁在两端的纵向对称平面内受到外力偶 M_0 作用而发生纯弯曲，在加载过程中，梁的各横截面上的弯矩均有 $M = M_0$ ，故梁在线弹性范围内工作时，其轴线弯曲成为一段圆弧（图 14.5a），两端横截面有相对的转动，其夹角为

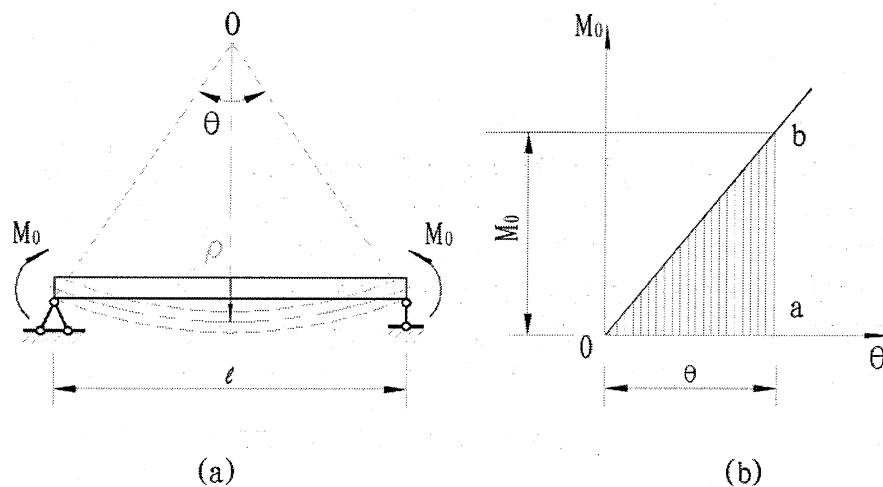


图 14.5

且

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_0}{EI}$$

故

$$\theta = \frac{M_0 l}{EI}$$

与前面的情况相似，在线弹性范围内，当弯曲外力偶矩由零逐渐增加到 M_0 时，梁两端截

面上相对转动产生的夹角也从零逐渐增加到 θ ， M_0 与 θ 的关系也是斜直线（图 14.5b），所以杆件纯弯曲变形时的应变能为

$$V_\varepsilon = W = \frac{1}{2} M_0 l = \frac{M_0^2 l}{2EI} = \frac{EI \theta^2}{2l}$$

(14.10)

(2) 横力弯曲梁

在工程实际中，最常遇到的是受横力弯曲的梁（如图 14.6a 所示）。这时，梁横截面上同时有剪力和弯矩，所以梁的应变能应包括两部分：弯曲应变能和剪切应变能。由于剪力和弯矩通常均随着截面位置的不同而变化，都是 x 的函数，因此，计算梁的应变能应从分析梁上长为 dx 的微段开始（图 14.6b）。

在弯矩的作用下，微段产生弯曲变形，两端横截面有相对的转动（图 14.6c）；在剪力的作用下，微段产生剪切变形，两端横截面有相对的错动（图 14.6d）。由于在小变形的情况下，弯曲正应力不会引起剪应变，剪应力也不会引起线应变。或者说，由弯矩产生的位移与由剪力产生的位移互相垂直，因此，可以先分别计算出弯矩和剪力在各自相应的变形位移上所作的功，然后根据叠加原理将它们叠加起来。

但由于在工程中常用的梁往往为细长梁，与剪应力对应的剪切应变能，比与弯矩对应的弯曲应变能小得多，可以不计，所以只需要计算弯曲应变能。

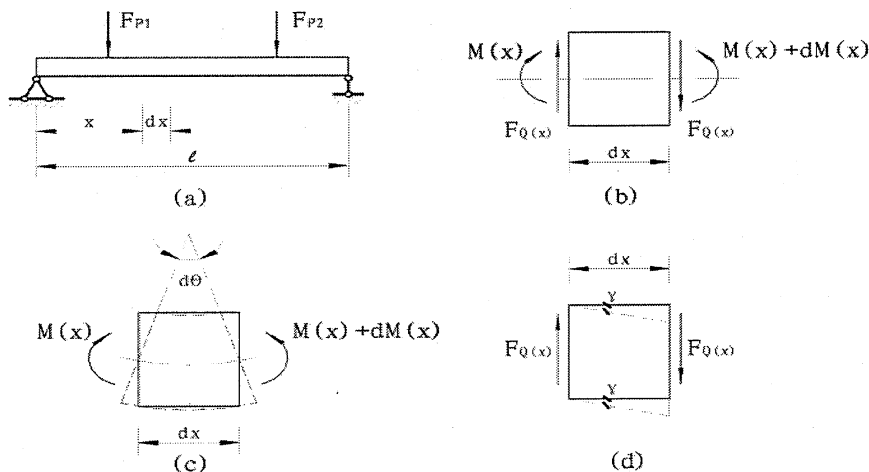


图 14.6

微段梁左右两端横截面上的弯矩应分别为 $M(x)$ 和 $M(x) + dM(x)$ 。在计算其应变能时，弯矩增量 $dM(x)$ 所作的功为二阶微量，可忽略不计，因此可将该微段看作是纯弯曲的情况。应用式 (14.10) 可求得微段的弯曲应变能

$$dV_\varepsilon = \frac{M^2(x) dx}{2EI}$$

全梁的弯曲应变能则可积分上式得到

$$V_{\varepsilon} = \int \frac{M^2(x)dx}{2EI} \quad (14.11)$$

如果梁中各段内的弯矩 $M(x)$ 由不同的函数表示, 上列积分应分段进行, 然后再求其总和。

由以上各种变形形式下应变能的计算式可以看出, 应变能是力的二次函数, 也是变形的二次函数。当构件同时受几个力(或力偶)作用时, 能否用叠加原理求应变能?

2.2.2.2 复杂受力情况下应变能的计算

1. 有关应变能的两个重要概念。

(1) 是否可以应用叠加原理计算应变能。

下面以图 14.7a 所示的拉杆为例加以说明。拉杆在 F_1 、 F_2 同时作用下的应变能为

$$V_{\varepsilon} = \frac{(F_1 + F_2)^2 l}{2EA} = \frac{F_1^2 l}{2EA} + \frac{F_1 F_2 l}{EA} + \frac{F_2^2 l}{2EA} \quad (14.12)$$

而当 F_1 、 F_2 单独作用时(图 14.7b、c), 杆的应变能分别为

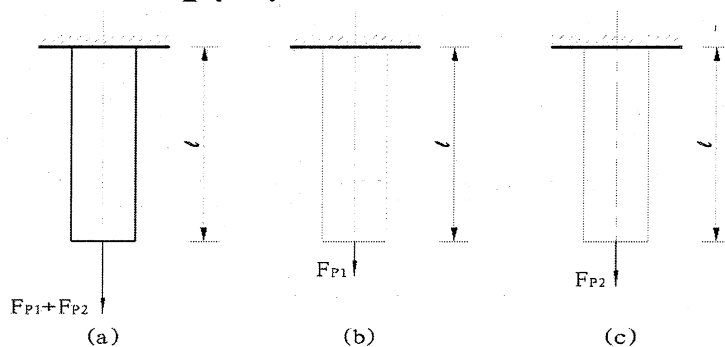


图 14.7

$$V_{\varepsilon 1} = \frac{F_1^2 l}{2EA} \quad \text{和} \quad V_{\varepsilon 2} = \frac{F_2^2 l}{2EA}$$

显然

$$V_{\varepsilon} \neq V_{\varepsilon 1} + V_{\varepsilon 2}$$

可见对图 14.7a 所示的情况不能用叠加原理计算应变能。其原因是这些荷载所作的功是互相影响的，即荷载除在其自身引起的位移上作功外，在其它荷载引起的位移上也要作功，所以不能将各荷载单独分析再进行叠加。这样的荷载称为属于同类型荷载。例如若先将 F_1 作用在拉杆上，杆件有伸长 Δl_1 ，则 F_1 所作的功为

$$W_1 = \frac{1}{2} F_1 \Delta l_1$$

在 F_1 不卸除的情况下，再施加 F_2 ，杆件又伸长了 Δl_2 ，故变力 F_2 、常力 F_1 所作的功为

$$W_2 = \frac{1}{2} F_2 \Delta l_2 \quad \text{和} \quad W_3 = F_1 \cdot \Delta l_2$$

则整个加载过程外力所作的功为

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = \frac{1}{2} F_1 \Delta l_1 + \frac{1}{2} F_2 \Delta l_2 + F_1 \Delta l_2$$

将上式转化为应变能则同样得到式 (14.12)。其中 $F_1 \Delta l_2$ 就是两力所作功互相影响的结果。

(2) 应变能是否与加载次序及过程有关。

对于上述的拉杆，若先施加 F_2 再施加 F_1 ，通过类似的计算可以证明，杆件内积蓄的应变能与上述分析结果一样，当然也与 F_1 、 F_2 同时作用时一样。可见，积蓄在弹性体内的弹性应变能只决定于弹性体变形的最终状态，或者说只决定于作用在弹性体上的荷载和位移的最终值，与加载的先后次序无关。

2. 组合变形时的应变能

如果作用在杆件上的某一荷载作用方向上，其它荷载均不在该荷载方向上引起位移，则前一荷载与其它荷载将属于不同荷载类型，则仍可应用叠加原理计算应变能，即是说，可以单独计算前一荷载作用下杆件的应变能，单独计算其它荷载作用下杆件的应变能，然后叠加得出杆件的总的应变能。组合变形时的应变能就属于这种情况。

图 14.8 所示的微段杆是从处于拉、弯、扭组合变形下的圆杆中取出的，其长度为 dx ，横截面上的轴力 $F_N(x)$ 、弯矩 $M(x)$ 和扭矩 M_x 均只在各自引起的位移 $d(\Delta l)$ 、 $d\theta$ 和 $d\varphi$ 上作功，各类荷载所作的功互相没有影响，故微段杆内的应变能可用叠加原理计算，即

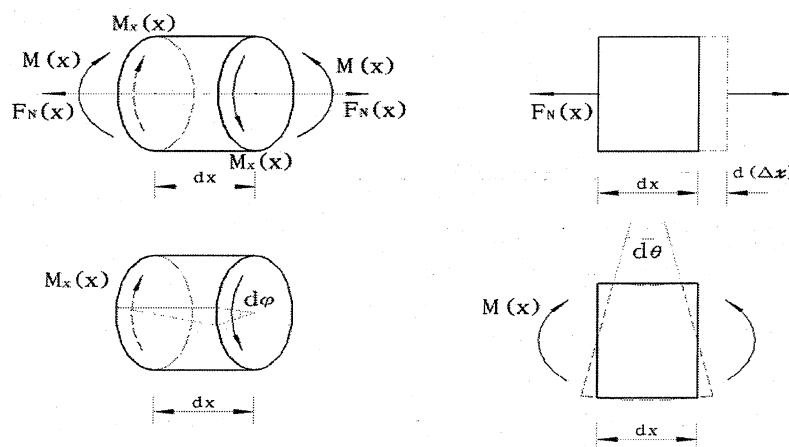


图 14.8

$$\begin{aligned}
 dV_\varepsilon = dW &= \frac{1}{2} F_N(x) \cdot d(\Delta l) + \frac{1}{2} M(x) \cdot d\theta + \frac{1}{2} M_x(x) \cdot d\varphi \\
 &= \frac{F_N^2(x) dx}{2EA} + \frac{M^2(x) dx}{2EI} + \frac{M_x^2(x) dx}{2GI_p}
 \end{aligned}$$

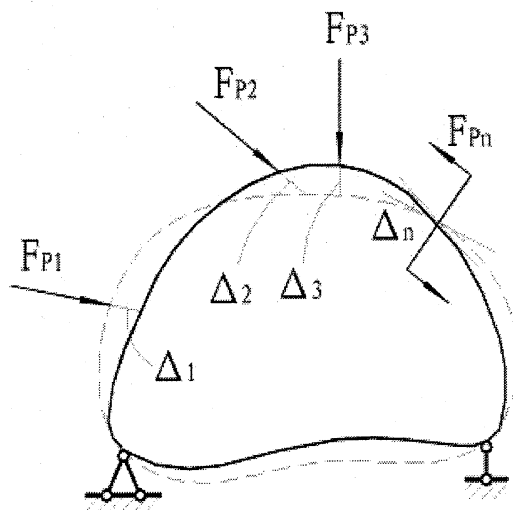
整个圆杆的应变能则为

(14.13)

2.5 应变能的普遍表达式

以上讨论了杆件在基本变形和简单组合变形下应变能的计算，现在研究更普遍的情况。

设有 n 个广义力 F_1, F_2, \dots, F_n 作用在如图 14.9 所示的物体上，且设物体的约束条件足以使它只会发生由于变形引起的位移，不会发生刚体位移。 $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ 表示荷载沿各自作用方位上的广义位移（图 14.9）。由前面的分析我们已经知道，弹性体在变形过程中积蓄的应变能，只决定于作用在弹性体上的荷载和位移的最终值，与加载的先后次序无关。于是，不管实际加载的情况如何，在计算应变能时，为计算方便起见，可以假设这些荷载按同一比例从零开始逐渐增加到最终值，则弹性体的应变能等于各广义力在加载过程中所作功的总和，即



图

14.9

$$V_\varepsilon = \sum_{i=1}^n \int_0^{\Delta_i} F_i d\Delta_i$$

(14.14)

当作用于弹性体上的荷载与其相应位移之间的关系是线性时，即物体为线弹性体，则应变能的计算式为

$$V_\varepsilon = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} F_i \Delta_i \quad (14.14)$$

这表示线弹性体的应变能等于各荷载与其相应位移乘积的二分之一的总和。这一结论称为克拉贝依隆原理。

3、 功的互等定理和位移互等定理

由前面的讨论可知，对线弹性体结构，积蓄在弹性体内的弹性应变能只决定于作用在弹性体上的荷载的最终值，与加载的先后次序无关。由此可以导出功的互等定理和位移互等定理。它们在结构分析中有重要应用。

功的互等定理又称互等功定理，是意大利的 E. 贝蒂 (E. Betti) 1872 年和英国的瑞利 (Rayleigh) 1873 年分别独立提出的，所以又称贝蒂·瑞利互等功定理。

位移互等定理又称互等位移定理，是英国的 J. C. 麦克斯韦 (J. C. Maxwell) 于 1864 年提出的，又称麦克斯韦位移互等定理。

下面以一处于线弹性阶段的简支梁为例进行说明。图 14.10a、b 代表梁的两种受力状态，1、2 截面为其上任意两截面。如图 14.10a 所示， F_1 使梁在截面 1、2 上的位移分别为 Δ_{11}

和 Δ_{21} ；在图 14.10b 中，当 F_2 作用时，在截面 1、2 上产生的位移则分别为 Δ_{12} 和 Δ_{22} 。

在位移符号的角标中，第一个表示截面位置，第二个指的是由哪个力引起的。

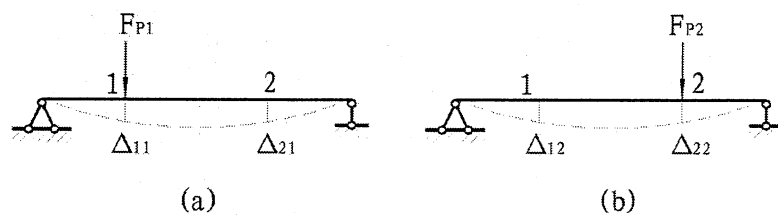


图 14.10

现在用两种办法在梁上加载，来计算 F_1 、 F_2 共同作用时外力的功。先施加 F_1 再施加 F_2 时（图 14.10a），外力的功

$$W_1 = \frac{1}{2} F_1 \Delta_{11} + \frac{1}{2} F_2 \Delta_{22} + F_1 \Delta_{12}$$

而当先施加 F_2 再施加 F_1 时（图 14.10b），外力的功

$$W_2 = \frac{1}{2} F_2 \Delta_{22} + \frac{1}{2} F_1 \Delta_{11} + F_2 \Delta_{21}$$

由于杆件的应变能等于外力的功，与加载次序无关，即 $V_\epsilon = W_1 = W_2$ ，所以有

$$F_1 \Delta_{12} = F_2 \Delta_{21}$$

这表明，第一个力在第二个力引起的位移上所作的功，等于第二个力在第一个力引起的位移上所作的功。这就是功的互等定理（Reciprocal Theorem of Work）。

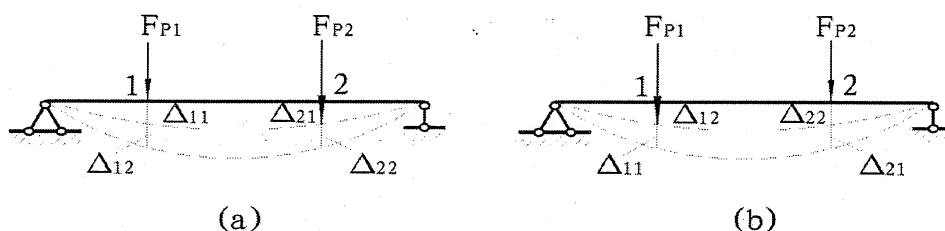


图 14.10

当 $F_1 = F_2$ 时, 由 (14.16) 式可推出一个重要的推论, 即

$$\Delta_{12} = \Delta_{21}$$

(14.17)

这表明, 作用在方位 1 上的荷载使杆件在方位 2 上产生的位移 Δ_{21} , 等于将此荷载作用在方位 2 上而在方位 1 上产生的位移 Δ_{12} 。这就是位移互等定理 (Reciprocal Theorem of Displacement)。

若令 $F_1 = F_2 = 1$ (即为单位力), 且此时用 δ 表示位移, 则有

$$\delta_{12} = \delta_{21}$$

由于 1、2 两截面是任意的, 故上述关系可写为以下一般形式

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}$$

即 j 处作用的单位力在 i 处产生的位移, 等于 i 处作用的单位力在 j 处产生的位移。这是位移互等定理的特殊表达形式, 在结构分析中十分有用。

以上分析对弹性体上作用的集中力偶显然也是适用的, 不过相应的位移是角位移, 所以上述互等定理中的力和位移泛指广义力和广义位移。

4、余能概念及卡氏第一定理

4.1 余能

以上推出的公式均只在线弹性范围内成立。下面, 我们进一步讨论非线性弹性体的应变能表达式, 并介绍非线性弹性体的应变余能 (简称余能) 概念及表达式。

我们仍以图 (14.10) 所示的拉杆为例, 但材料非线性弹性的, 这时力 F 与相应的位移 Δ 的关系就是非线性的 (图 14.11a)。对比图 14.2a, 不难看出仍可用下式计算外力作的功

$$W = \int_0^{\Delta} F d\Delta$$

(14.18)

图 14.11a 表示, 外力功的大小与位移从 0 到 Δ 之间一段 $F-\Delta$ 曲线下的面积相当。式 (14.18) 是以位移作为积分变量的, 若以力作为积分变量, 则有

$$W_C = \int_F^{\Delta} \Delta dF$$

(14.19)

称为余功 (Complementary work)。余功没有具体的物理意义, 但有明确的几何意义, 那就是外力从 0 到 F 之间一段 $F-\Delta$ 曲线与纵坐标轴间的面积。从图 14.11a 不难看出, 功和余功互补为常力功。

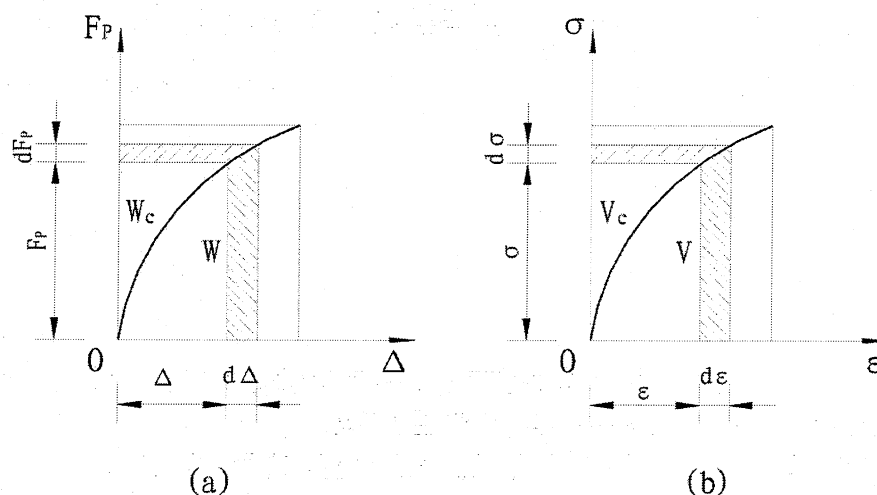


图 14.11

由于材料是弹性的, 如果将加载和卸载过程中的能量损耗略去不计, 则同样有与线弹性体类似的结论, 即积蓄在弹性体内的应变能 V_e 在数值上应等于外力所作的功

$$W = \int_0^{\Delta} F d\Delta \quad (14.20)$$

同样地, 余功 W_c 与余应变能 V_{ec} 在数值上也相等

$$V_{ec} = W_c = \int_F \Delta dF \quad (14.21)$$

此即为由外力余功来计算余应变能 (Complementary strain energy) 的表达式。

如果从拉杆中取出一个边长为 1 的单元体, 该单元体处于单轴应力状态, 上、下表面的力为 $F = \sigma \times 1 \times 1 = \sigma$, 对于单元体而言它们是外力。与 F 相应的伸长量为 $\Delta l = \varepsilon \times 1 = \varepsilon$, 于是在对拉杆加载过程中, 作用在单元体上的外力功为

$$w = \int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon$$

该外力功在数值上等于积蓄在单元体内的应变能, 即比能 v , 于是

$$v_e = w = \int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon \quad (14.22)$$

同样地, 若以应力作为积分变量, 则有

$$v_c = \int_0^{\sigma} \varepsilon d\sigma \quad (14.23)$$

式中 v_c 称为余应变比能 (density of complementary strain energy), 其大小就代表 $\sigma \sim \varepsilon$ 曲线与纵坐标轴间的面积 (14.17b)。

例如, 材料的应力—应变关系为 $\sigma = E \sqrt{\varepsilon}$ 时, 物体的应变比能和余应变比能分别为

$$v_e = \int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon = \frac{2}{3} E \sqrt{\varepsilon^3} = \frac{2}{3} \frac{\sigma^3}{E^2}$$

$$v_c = \int \varepsilon d\sigma = \frac{1}{3} \frac{\sigma^3}{E^2}$$

材料在拉伸压缩时的应力—应变关系可写成 $\sigma = E\varepsilon$ ，显然，这时应变能和余应变能在数值上是相等的，对于线弹性体，当变形在线弹性范围内时，应变能和余应变能在数值上也是相等的。但应该注意，余功、余应变能如前述都没有明确的物理意义，只是因为它们具有与外力功一样的量纲，才把它们作为一种能量参数，而在求解非线性弹性问题时，它们非常有用。

4.2 卡氏第一定理

卡氏定理 (Castigliano's Theorem)，是意大利工程师卡斯蒂利亚诺 (A. Castigliano) 于 1873 年提出的，故得其名。

我们以图 14.9 所示的弹性体为例来说明。设弹性体上作用有 n 个广义力 F_i ，与这些力对应的广义位移为 Δ_i ，其中 $i=1, 2, \dots, n$ ，如果将弹性体的应变能 V_ε 表示为位移的函数 $V_\varepsilon(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n)$ ，则应变能函数对某个广义位移的偏导数，等于与该位移相应的广义力，即

$$F_i = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \Delta_i} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (14.24)$$

这就是卡氏第一定理 (First Castigliano Theorem)。下面进行证明。

现假设沿第 i 个作用力方向的位移有一微小增量 $d\Delta_i$ ，则弹性体的应变能 V_ε 有相应的增量为

$$dV_\varepsilon = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \Delta_i} d\Delta_i \quad (a)$$

这时弹性体内的应变能为

$$V_\varepsilon + \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \Delta_i} d\Delta_i \quad (b)$$

式中： V_ε 可由应变能的普遍表达式 (14.13) 计算， $\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \Delta_i}$ 代表应变能对于位移 Δ_i 的变化率。

此外，由于只有沿第 i 个作用力方向的位移有一微小增量，沿其余作用力方向无位移变化，故外力功的增量为

$$dW = F_i d\Delta_i \quad (c)$$

前面我们已经知道，外力功在数值上等于应变能，它们的变化量也应相等，即

$$dV_\varepsilon = dW$$

将 (a)、(b) 两式代入上式中，则有

$$F_i = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \Delta_i} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

由上述证明过程可见，卡氏第一定理同时适

用于线性弹性体和非线性弹性体。

5、卡氏第二定理及其应用

5.1 卡氏第二定理

下面仍以图 14.9 所示的弹性体为例来说明。根据余能的计算公式 (14.21)，并仿照应变能的普遍表达式 (14.14)，弹性体的余能 $V_{\varepsilon C}$ 可写成下列形式：

$$V_{\varepsilon C} = \sum_{i=1}^n \int_0^{F_i} \Delta_i dF_i \quad (14.25)$$

它是外力的函数 $V_{\varepsilon C}(F_1, F_2, \dots, F_n)$ 。

现假设第 i 个广义力有一微小增量 dF_i ，则弹性体的余能有相应的增量为

(a)

$$dV_{\varepsilon C} = \frac{\partial V_{\varepsilon C}}{\partial F_i} dF_i$$

此外，由于除 F_i 外其余外力均维持常量不变，故外力余功的增量为

(b)

$$dW_C = \Delta_i dF_i$$

则由

$$dV_{\varepsilon C} = dW_C$$

可得到

$$\Delta_i = \frac{\partial V_{\varepsilon C}}{\partial F_i} \quad (14.26)$$

利用上式可计算非线性弹性体在广义力 F_i 作用方位上与 F_i 相应的广义位移 Δ_i 。

对于线性弹性体，正如前节所述，此时的应变能与余能相等，即 $V_{\varepsilon} = V_{\varepsilon C}$ ，则式 (14.26)

可改写为

$$\Delta_i = \frac{\partial V_{\varepsilon}}{\partial F_i} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (14.27)$$

这就是卡氏第二定理 (Second Castigliano Theorem)。应用卡氏第二定理计算线性弹性体的位移很简便。

5.2 卡氏第二定理的应用

在第二节中我们已经得到了各种基本变形及组合变形情况下应变能的计算式，这些式子中的内力均为外力的函数，分别代入式 (14.27)，便可得到各种基本变形及组合变形情况下计算位移的卡氏第二定理的应用式如下：

(1) 轴向拉伸或压缩杆

$$\Delta_i = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_i} = \frac{\partial}{\partial F_i} \left(\int \frac{F_N^2(x) dx}{2EA} \right) = \int \frac{F_N(x)}{EA} \frac{\partial F_N(x)}{\partial F_i} dx$$

(2) 扭转圆轴

$$\Delta_i = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_i} = \frac{\partial}{\partial F_i} \left(\int \frac{M_x^2(x) dx}{2GI_p} \right) = \int \frac{M_x(x)}{GI_p} \frac{\partial M_x(x)}{\partial F_i} dx$$

(3) 平面弯曲梁

$$\Delta_i = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_i} = \frac{\partial}{\partial F_i} \left(\int \frac{M^2(x) dx}{2EI} \right) = \int \frac{M(x)}{EI} \frac{\partial M(x)}{\partial F_i} dx$$

(4) 组合变形杆件

$$\Delta_i = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_i} = \int \frac{F_N(x)}{EA} \frac{\partial F_N(x)}{\partial F_i} dx + \int \frac{M_x(x)}{GI_p} \frac{\partial M_x(x)}{\partial F_i} dx + \int \frac{M(x)}{EI} \frac{\partial M(x)}{\partial F_i} dx$$

(5) 简单桁架结构。由于桁架的每根杆件均受均匀拉伸或压缩，若桁架共有 n 根杆件，故

$$\Delta_i = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_i} = \sum_{i=1}^n \frac{F_{Ni} l_i}{E_i A_i} \frac{\partial F_{Ni}}{\partial F_i}$$

根据卡氏定理的表达式，我们知道在计算结构某处的位移时，该处应有与所求位移相应的外力作用，如果这种外力不存在，可在该处附加虚设的外力 \bar{F} ，从而仍然可以采用卡氏定理求解。

第十五章 动荷载

一、教学目标和教学内容

11. 教学目标

通过本章学习，唤起学生对动荷载问题的注意。

让学生知道动荷载问题的两个方面，目前应当掌握在较简单的工程问题中，动荷载引起杆件的应力、应变和位移的计算。对于材料在动荷载下的力学行为，以后根据工作的需要再进一步补充学习。

让学生掌握动荷载问题的基本知识，如杆件作等加速运动时的应力计算，作等速旋转圆盘的应力分析，简单的自由落体冲击和水平冲击，以及循环应力问题的有关概念。

能够深刻认识动荷系数概念，并能够熟练地进行杆件作等加速运动时的应力计算，作等速旋转圆盘的应力分析，完成简单的自由落体冲击和水平冲击的计算。

12. 教学内容

介绍杆件作等加速运动拉伸、压缩及弯曲时的应力计算。

介绍等角速度旋转的动荷应力计算。

讲解简单冲击时，能量守恒的基本方程，分别导出自由落体冲击和水平冲击时的动荷系数公式，及杆件经受冲击时的应力计算公式。

二、重点难点

重点：建立三类动荷载概念。

掌握杆件作等加速运动时的应力计算。

作等速旋转圆盘的应力分析。

简单的自由落体冲击和水平冲击问题的计算

难点：对动静法和动荷系数的理解。

对于动荷载问题与静荷载问题的联系与区别。

在简单冲击问题中，被冲击杆件冲击点的相应静荷位移的理解和计算，特别是水平冲击时的静荷位移的理解和计算。

三、教学方式

采用启发式教学，通过提问，引导学生思考，让学生回答问题。

四、建议学时

3 学时

五、讲课提纲

1、概述

前面研究了静荷载作用下的强度、刚度和稳定性问题。所谓静荷载 (Static Load) 是指构件所承受的荷载从零开始缓慢地增加到最终值，然后不再随时间而改变。这时，构件在变形过程中各质点的加速度很小，加速度对变形和应力的影响可以忽略不计。当荷载引起构件质点的加速度较大，不能忽略它对变形和应力的影响时，这种荷载就称为动荷载 (Dynamic Load)。

构件在动荷载作用下产生的应力和变形分别称为动应力 (Dynamic Stress) 和动变形 (Dynamic Deformation)。实验表明，在静荷载下服从胡克定律的材料，只要动应力不超过比例极限，在动荷载下胡克定律仍然有效，并且弹性模量也与静荷载时相同。

根据加载速度和应力随时间变化情况的不同，工程中常遇到下列三类动荷载：

1) 作等加速运动或等速转动时构件的惯性力。例如起吊重物，旋转飞轮等。对于这类构件，主要考虑运动加速度对构件应力的影响，材料的机械性质可认为与静荷载时相同。

2) 冲击荷载 (Impact Load)，它的特点是加载时间短，荷载的大小在极短时间内有较大的变化，因此加速度及其变化都很剧烈，不易直接测定。冲击波或爆炸是冲击荷载的典型来源。工程中的冲击实例很多，例如汽锤锻造、落锤打桩、传动轴突然刹车等。这类构件的应力及材料机械性质都与静荷载时不同。

3) 周期性荷载，它的特点是在多次循环中，荷载相继呈现相同的时间历程。如旋转机械装置因质量不平衡引起的离心力。对于承受这类动荷载的构件，荷载产生的瞬时应力可以近似地按静荷载公式计算，但其材料的机械性质与静荷载时有很大区别。

动荷载问题的研究分为两个方面。一方面是由动荷载引起的应力、应变和位移的计算；另一方面是动荷载下的材料行为。本章属基本知识介绍，只讨论前两种情况下简单问题的应力和位移的计算，对于第三种情况，则只介绍有关的基本概念。以唤起读者对动荷载问题的注意。在解决实际问题时，需遵照有关规范要求进行分析计算。

2、杆件作等加速直线运动时的应力计算

构件承受静荷载时，根据静力平衡方程确定支反力及内力。当杆件作加速运动时，考虑加速度的影响，由牛顿第二定律可知

$$\sum \bar{F} = \rho g \bar{a} \quad (15.1)$$

式中， $\sum \bar{F}$ 为杆件所受外力的合力， ρ 为材料密度， g 为重力加速度， \bar{a} 为杆件的加速度。

在静荷载时， $\bar{a}=0$ (此时，式 (15.1) 即为静力平衡方程。若令

$$\bar{F}' = -\rho g \bar{a}$$

\bar{F}' 称为惯性力, 则式 (15.1) 可写成

$$\sum \bar{F} + \bar{F}' = 0 \quad (15.2)$$

这样, 就可将对运动构件的分析式 (15.1)。看成添加惯性力后的平衡问题式 (15.2) 来处理。这种将运动问题转化成平衡问题来分析的方法, 称为达朗伯原理 (D'Alembert's principle), 又称为动静法。下面介绍它的应用。

2.1 动荷拉伸压缩时杆的应力

现用起重机以匀加速加吊构件为例, 来说明构件作等加速直线运动时动荷应力的计算方法。

图 15.1a 所示为一被起吊时的杆件, 其横截面面积为 A , 长为 l , 材料密度为 ρ , 吊索的起吊力为 F , 起吊时的加速度为 a , 方向向上。要求杆中任意横截面 I. I 的正应力。

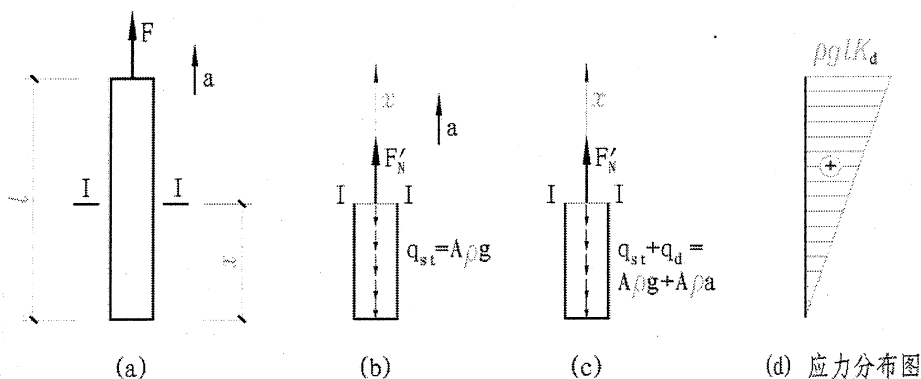


图 15.1

仍用截面法, 取任一截面 I. I 以下部分杆为脱离体, 该部分杆长为 x (图 15.1b), 脱离体所受外力有自身的重力, 其集度为

$$q_{st} = A\rho g \quad (a)$$

有截面 I. I 上的轴力 F'_N , 根据动静法 (达朗伯原理), 如果把这部分杆的惯性力作用为虚拟的力, 其集度为

$$q_d = \frac{A\rho g}{g} \cdot a \quad (b)$$

方向与加速度 a 相反 (图 15.1c)。则作用在这部分杆上的自重、惯性力和轴力 (即动荷轴力) 可看作是平衡力系。应用平衡条件很易求得动荷轴力 F'_d 。

根据平衡条件 $\sum F_x = 0$, 有

$$F'_d - (q_{st} + q_d) \cdot x = 0$$

由此求得

$$F'_{ld} = (q_{st} + q_d) \cdot x \quad (c)$$

将式 (a) 和 (b) 代入上式, 得

$$F'_d = (A\rho g + A\rho g \frac{a}{g}) \cdot x = A\rho g x \left(1 + \frac{a}{g}\right) \quad (d)$$

式中 $A\rho g x$ 是这部分杆的自重, 相当于静荷载。相应的轴力以 F'_{st} 表示

$$F'_{st} = A\rho g x \quad (e)$$

称为静荷轴力。于是式 (d) 可改写成

$$F'_d = F'_{st} \left(1 + \frac{a}{g}\right) \quad (f)$$

由式可见, 动荷轴力等于静荷轴力乘以系数 $\left(1 + \frac{a}{g}\right)$ 以 K_d 表示:

$$K_d = 1 + \frac{a}{g} \quad (15.3)$$

K_d 称为杆件作铅垂匀加速上升运动时的动荷系数, 它与加速度 a 成比例, 将式 (15.3) 代入 (f) 得

$$F'_d = F'_{st} \cdot K_d \quad (15.4)$$

即动荷轴力等于静荷轴力乘以运动荷系数。当 $a=0$ 时, $K_d=1$, 即动荷轴力等于静荷轴力。

欲求截面上的动荷正应力 σ_d , 可将动荷轴力除以截面面积 A 即得。

由式 (d), 有

$$\sigma_d = \frac{F'_d}{A} = \rho g x \left(1 + \frac{a}{g}\right) \quad (g)$$

式中 $\rho g x$ 即为静荷应力 σ_{st} , 所以上式也可写成:

$$\sigma_d = \sigma_{st} \cdot K_d \quad (15.5)$$

即动荷应力等于静荷应力乘以动荷系数。

图 15-1d 示动荷应力 σ_d 图, 它是 x 的线性函数, 当 $x=l$ 时, 由式 (g) 可得最大动荷应力 $\sigma_{d,\max}$ 为

$$\sigma_{d,\max} = \rho g \cdot l \left(1 + \frac{a}{g}\right) = \sigma_{st,\max} \cdot K_d \quad (15.6)$$

同理, 欲求动荷伸长或缩短 Δl_d , 也可由静荷伸长或缩短 Δl_{st} 乘以动荷系数 K_d 得到:

$$\Delta l_d = \Delta l_{st} \cdot K_d \quad (h)$$

2.2 动荷弯曲时梁的应力计算

图 15.2a 示一由起重机起吊的梁, 上升加速度为 a , 设梁长为 l , 梁的密度为 ρ 。则每单位梁长的自重 (静荷集度) 为 $A\rho g$, 惯性力为 $\frac{A\rho g}{g} \cdot a$ 。将静荷集度与惯性力相加, 并以 q_d 表示得:

$$q_d = A\rho g + \frac{A\rho g}{g} \cdot a = A\rho g \left(1 + \frac{a}{g}\right) = q_{st} \cdot K_d \quad (i)$$

q_d 称为动荷集度, 此式表明动荷集度仍可表为静荷集度 q_{st} 乘以动荷系数 K_d 。于是可以把梁看作为一无重梁, 该梁沿全长受集度为 q_d 的均布荷载作用, 如图 15.2b 所示。

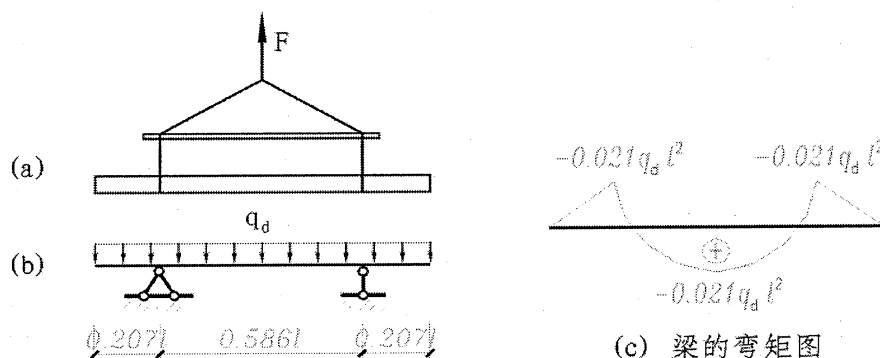


图 15.2

适当选择吊装点 (图 15.2a), 可使梁内正弯矩的最大值与负弯矩的最大绝对值相等, 其值为

$$M_d = 0.021q_d l^2 = 0.021q_{st} \cdot l^2 \cdot K_d = M_{st} \cdot K_d \quad (j)$$

式中 M_{st} 为最大静荷 (自重) 弯矩。相应的弯矩图示于图 15.2c。危险截面的最大动荷应力 $\sigma_{d,max}$ 为

$$\sigma_{d,max} = \frac{M_d}{W} = \frac{M_{st}}{W} K_d = \sigma_{st,max} \cdot K_d \quad (k)$$

式中 $\sigma_{st,max} = \frac{M_{st}}{W}$ 是由静荷载所引起的最大正应力。

不论是动荷拉压问题或动荷弯曲问题, 求得最大动荷应力 $\sigma_{d,max}$ 后, 仍可像以前那样, 来建立强度条件:

$$\sigma_{d,max} = \sigma_{st,max} \cdot K_d \leq [\sigma] \quad (15.7)$$

式中 $[\sigma]$ 仍是静荷计算中的许用应力。上式也可写成

$$\sigma_{st,max} \leq \frac{[\sigma]}{K_d} \quad (15.8)$$

此式表明, 验算动荷强度时, 也可用静荷应力建立强度条件, 只要把许用应力 $[\sigma]$ 除以动荷系

数 K_d 即可。

3、杆件作等角速度转动时的应力计算

图 15.3a 示一根长为 l ，截面面积为 A 的等直杆 OB ，其位置是水平的， O 端与刚性的竖直轴 z 连接，设它以角速度 ω 绕 z 轴作等速转动，现来研究其横截面上的动荷应力。

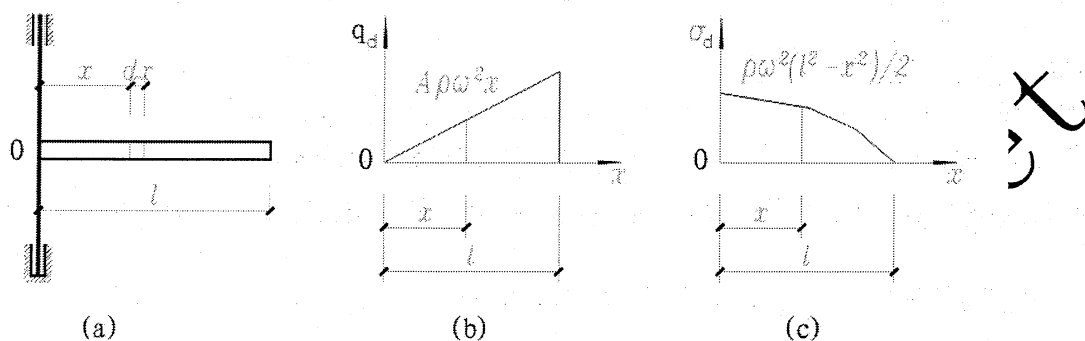


图 15.3

由于杆绕 O 点作匀速转动，由运动学知，杆内任一质点的切向加速度为零，而只有向心加速度 a_n ，其值为

$$a_n = x \cdot \omega^2 \quad (15.9)$$

式中 x 为质点到转动中心 O 的距离。相应地就有惯性力，其大小为 $ma_n = mx\omega^2$ ，方向与向心加速度相反，式中 m 为质点质量。此惯性力沿杆全长分布，设 ρ 为材料密度，则其集度为

$$q_d = x\omega^2 A\rho \quad (a)$$

与 x 成比例，如图 15.3b 所示。

现于离 O 端 x 处，用相距为 dx 的二横截面截取一微段，则其惯性力 dF_d 为

$$dF_d = q_d dx = A\rho\omega^2 x dx \quad (b)$$

欲求 x 截面上的动荷内力 $F'_d(x)$ ，可在 x 截面处把杆截开，取 $l-x$ 段杆为脱离体，求出它的惯性力之和。

$$\int_x^l dF = \int_x^l A\rho\omega^2 x dx$$

然后，根据动静法，即得

$$F'_d(x) = \int_x^l A\rho\omega^2 \cdot x dx = A\rho\omega^2 \frac{l^2 - x^2}{2} \quad (c)$$

动荷应力 $\sigma_d(x)$ 为

$$\sigma_d(x) = \frac{F'_d(x)}{A} = \rho\omega^2 \cdot \frac{l^2 - x^2}{2} \quad (d)$$

其分布规律如图 15.3c 所示。最大动荷应力发生在 $x=0$ 处，即靠近 z 轴处，其值为

$$\sigma_{d,\max} = \frac{\rho\omega^2 l^2}{2} \quad (15.10)$$

下面讨论圆环绕通过圆心且垂直于圆环平面的轴作匀角速旋转的情况，如图 15.4a 所示。机械里的飞轮或带轮等作匀速转动时，若不计轮辐的影响，就是这种情况的实例。

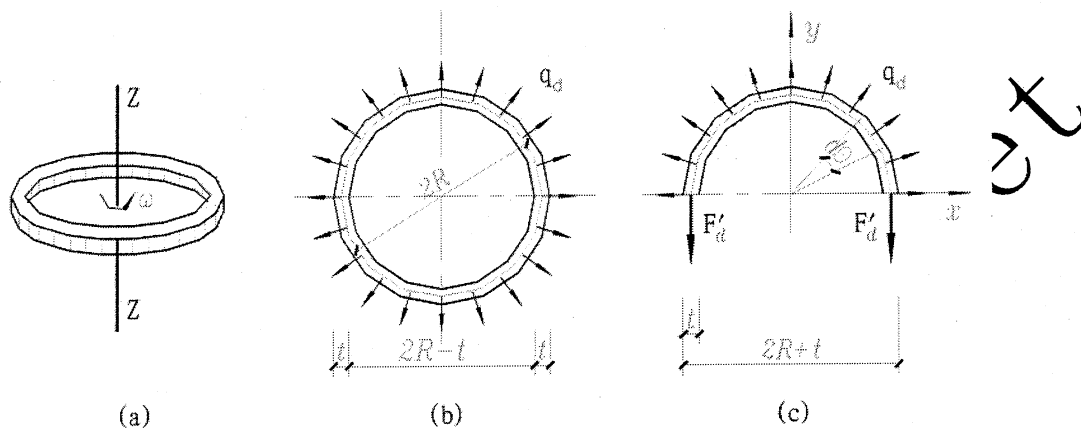


图 15.4

设环的宽度为 t ，平均半径为 R ，且 t 远小于 R ，截面面积为 A 。圆环作匀角速转动时，有向心加速度 $a_n = R\omega^2$ ，于是各质点将产生离心惯性力，集度为

$$q_d = A\rho R\omega^2 \quad (e)$$

其作用点假设在平均圆周上，方向向外辐射，如图 15.4b 所示。

欲求截面上的动荷内力 F'_d ，可取半个圆环为脱离体（图 15.4c），按动静法，脱离体受离心惯性力 q_d 及动荷轴力 F'_d 的作用而平衡，于是由 $\sum F_y = 0$ ，有

$$2F'_d = \int q_d \cos\theta ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} A\rho\omega^2 R \cdot R d\theta \cos\theta$$

由此得

$$F'_d = A\rho\omega^2 R^2 \quad (f)$$

动荷应力为

$$\sigma_d = \frac{F'_d}{A} = \rho\omega^2 R^2 \quad (15.11)$$

强度条件为

$$\sigma_d = \frac{F'_d}{A} = \rho\omega^2 R^2 \leq [\sigma] \quad (15.12)$$

上式表明，对于同样半径的圆环，其应力的与截面面积 A 的大小无关，而与角速度 ω^2 成比例。所以，要保证圆环的强度，须限制圆环的转速。

4、冲击时应力和变形的计算

4.1 概述

$$F_d = K_d Q \quad (15.15b)$$

$$\sigma_d = K_d \sigma_{st} \quad (15.15c)$$

由此可见, 只要求出了动荷系数 K_d , 用 K_d 分别乘以静荷载、静位移和静应力, 即可求得构件受冲击时所达到的最大动荷载、最大位移和最大应力。

下面对动荷系数 K_d 作进一步说明:

1) 冲击物作为突加荷载 (即 $h=0$) 作用在弹性体上时, 由式 (15.14) 可得 $K_d=2$ 。因此在突加荷载作用下, 最大应力和最大位移值都为静荷载作用下的两倍。

2) 如果已知冲击物与被冲击物接触前一瞬间的速度为 v , 根据自由落体时 $v^2=2gh$, 可得

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\Delta_{st}}} \quad (15.15)$$

3) 动荷系数 K_d 表达式中的静位移 Δ_{st} 的物理意义是, 它是将冲击物的重量 Q 作为静荷载, 沿冲击方向作用在冲击点时, 被冲击构件在冲击点处沿冲击方向的静位移。计算 Δ_{st} 时, 应针对具体结构, 按上述意义作具体分析。

4.2.2 水平冲击

设重物 Q 以速度 v 沿水平方向冲击一弹性系统 (以弹簧表示), 如图 15.6 所示。当重物与弹性系统接触后, 该弹性系统便开始变形。与此同时, 重物的速度逐渐减小, 当速度降到零时, 被冲击点达到最大位移 Δ_d 。下面来求 Δ_d 的表达式。

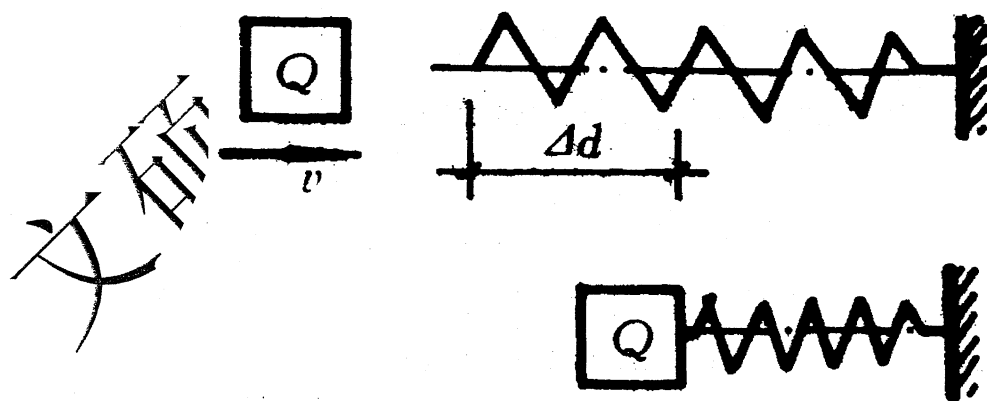


图 15.6

在冲击过程中, 冲击物的高度无变化, 则势能减少为零, 即 $V=0$; 动能减少为 $T = \frac{1}{2} \frac{Q}{g} v^2$;

被冲击物的弹性应变能增加为 $U_e = \frac{1}{2} F_d \Delta_d$ 。根据方程 (15.13), 得

$$\frac{1}{2} \frac{Q}{g} v^2 = \frac{1}{2} F_d \Delta_d \quad (g)$$

在线弹性范围内, 有

$$F_d = \frac{\Delta_d}{\Delta_{st}} Q \quad (h)$$

将式 (h) 代入式 (g), 得

$$\frac{Q}{g} v^2 = \frac{\Delta_d^2}{\Delta_{st}} Q$$

解得

$$\Delta_d = \sqrt{\frac{v^2 \Delta_{st}}{g}} = \sqrt{\frac{v^2}{g \Delta_{st}}} \Delta_{st}$$

于是, 水平冲击动荷系数为

$$K_d = \frac{\Delta_d}{\Delta_{st}} = \sqrt{\frac{v^2}{g \Delta_{st}}} \quad (15.17)$$

故有

$$\Delta_d = K_d \Delta_{st}$$

前两式中, Δ_{st} 为静荷载位移, 其物理意义与自由落体冲击相同。

上面仅介绍了两种常见冲击情况下的应力及位移计算公式。对于其它冲击情况, 例如重物在吊装过程中突然刹车, 吊绳受到的拉伸冲击, 又如带有飞轮的旋转圆轴突然刹车时的扭转冲击, 都可以从基本方程 (15.13) 出发, 推导出相应的公式。

4.2.3 提高构件抗冲击能力的一些措施

构件受冲击时产生很大的冲击力。因此, 必须设法降低冲击应力。从前面的分析中可以看出, 冲击应力可以表达为 $\sigma_d = K_d \sigma_{st}$ 。如果设法减少动荷系数 K_d , 便能降低冲击应力。由式 (15.14) 和 (15.15) 可知, 静位移 Δ_{st} 越大, 动荷系数 K_d 就越小。这是因为静位移增大表示构件刚度减小, 因而能够更多地吸收冲击物的能量。提高抗冲击能力, 主要应从增大静位移 Δ_{st} 着手。但应注意, 在设法增加静位移时, 应当尽量避免增大静应力。否则, 虽然降低了动荷系数 K_d , 却增加了静应力 σ_{st} , 其结果未必能降低冲击应力。下面介绍几种减小冲击应力的措施。

(1) 设置缓冲装置

在被冲击构件上增设缓冲装置, 这样既增大了静位移, 又不会改变构件的静应力。例如, 在火车车箱架与轮轴之间安装压缩弹簧, 在某些机器或零件上加橡皮座垫或垫圈。

(2) 改变被冲击构件的尺寸

在某些情况下, 增大被冲击构件的体积可以降低动应力。例如, 图 15.7 所示受水平冲击的等直杆, 根据式 (15.15), 冲击应力为

$$\sigma_d = K_d \sigma_{st} = \sqrt{\frac{v^2}{g \Delta_{st}}} \frac{Q}{A} = \sqrt{\frac{v^2}{g} \frac{EA}{Ql}} \frac{Q}{A} = \sqrt{\frac{v^2 EQ}{gAl}}$$

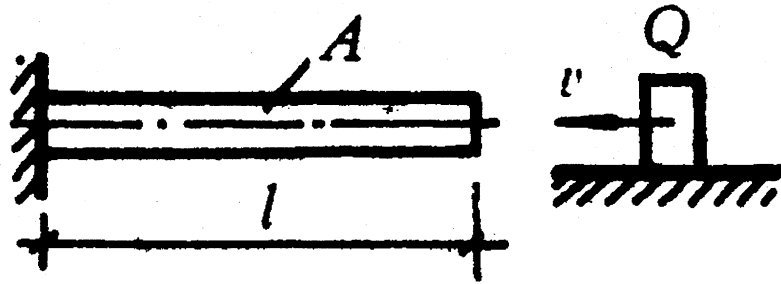


图 15.7

由上式可见，杆件的体积 Al 越大，冲击应力 σ_d 就越小。基于这种原因，如果把承受冲击的汽缸盖螺栓，由短螺栓（图 15.8a）改为长螺栓（图 15.8b），增加了螺栓的体积就可以提高螺栓的承受冲击能力。

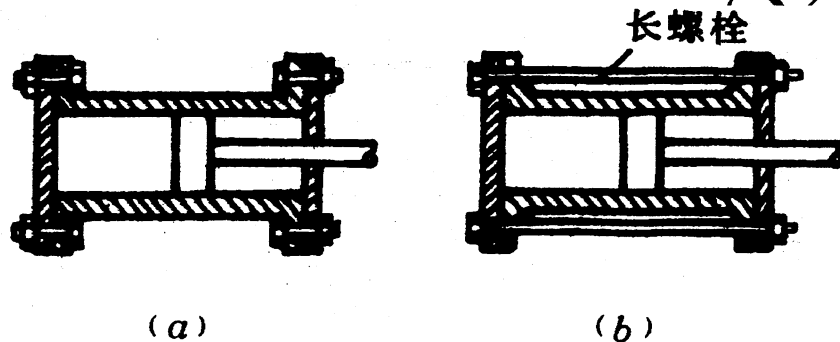


图 15.8

但需注意，上述结论只是对等截面杆有效，不能用于变截面杆。这一点可以图 15.9 所示两杆来说明。显然，两杆危险截面上的静应力 $\sigma_a = \sigma_b$ ，若两杆材料相同，则静位移 $(\Delta_{st})_a > (\Delta_{st})_b$ ，因此 $(K_d)_a < (K_d)_b$ 。这说明虽然 b 杆的体积大于 a 杆的体积，但 b 杆的冲击应力却大于 a 杆的冲击应力。因为，在受冲击杆件中，应尽量避免在部分长度内削弱截面。象螺钉这一类零件，不能避免某些部分要削弱。因此，一些承受冲击的螺钉往往不采取图 15.10a 的形式，而是将无螺纹部分作得细一些（图 15.10b），或将无螺纹部分作成空心截面（图 15.10c），以使螺钉全长范围内截面大小基本一致。

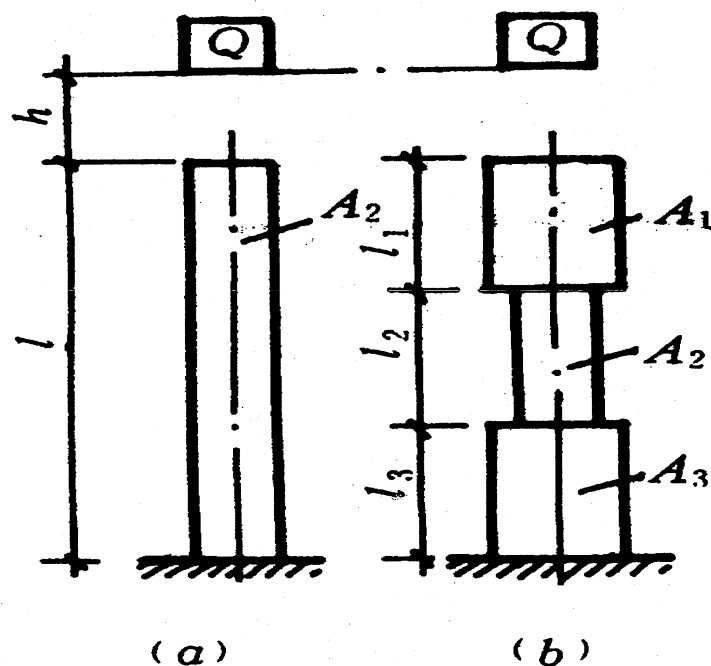


图 15.9

(3) 选用低弹性模量的材料

采用弹性模量较低的材料可以增大静位移，从而降低冲击应力。但是需注意，弹性模量低的材料往往强度指标也低，所以采取这项措施时，还必须校核该构件是否满足强度条件。

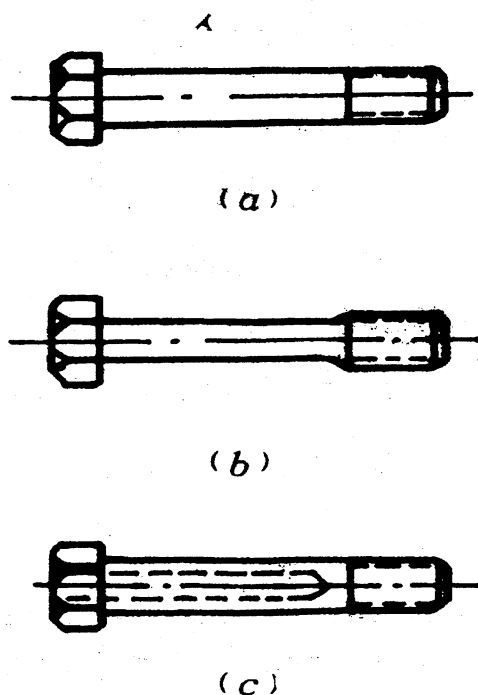


图 15.10

