

重庆大学

# 材料力学学习题解答

---

# 目 录

第一章	绪 论 .....	0
✓第二章	拉伸和压缩 .....	1
✓第三章	扭 转 .....	15
✓第四章	平面图形的几何性质 .....	29
✓第五章	弯曲内力 .....	36
✓第六章	弯曲应力 .....	47
✓第七章	弯曲变形·简单超静定梁 .....	62
第八章	弹性地基梁 .....	86
✓第九章	应力状态理论及应变状态理论 .....	89
✓第十章	强度理论 .....	104
✓第十一章	组合变形 .....	109
第十二章	开口薄壁杆件 .....	122
✓第十三章	压杆稳定 .....	129
第十四章	杆件的应变能及其应用 .....	137
第十五章	动荷载 .....	147
第十六章	循环应力下构件的疲劳强度计算 .....	152

## 第二章 拉伸和压缩

[2-1] 求图示各梁的固端反力, 建议把固端反力表示为三个分量(水平分量  $H$ , 竖向分量  $V$ , 和反力偶  $M$ ), 在图  $c$  中  $q$  表示均布荷载的集度(即梁每单位长度上的荷载)。

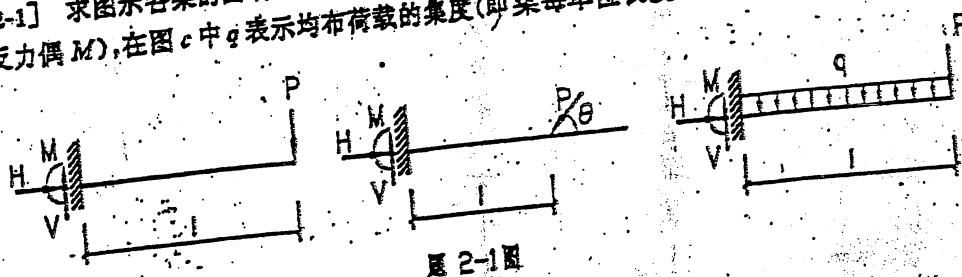


图 2-1 图

[2-2] 试指出图中诸杆的轴向压缩段。

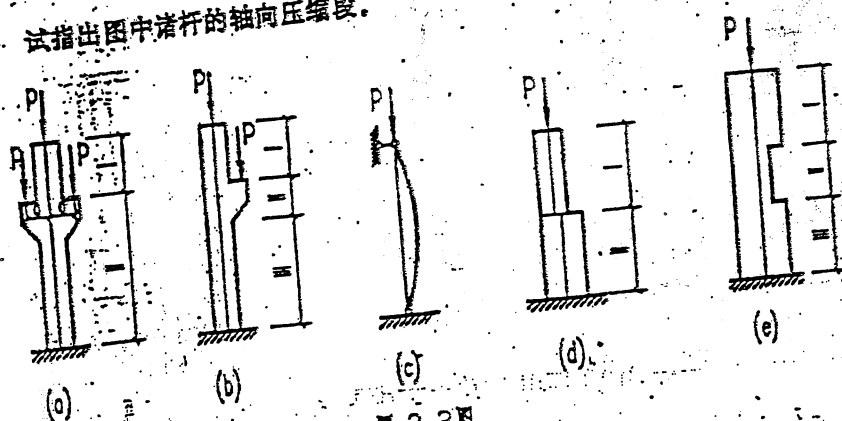


图 2-2 图

[2-3] 试绘出图示杆件的轴力图。设杆的截面是直径为 20mm 的圆形。试求其绝对值最大的正应力。

$$\text{解: } \sigma_{\max} = \frac{30 \times 10^3}{\pi(20)^2/4} = 95.49 \text{ MPa} (-)$$

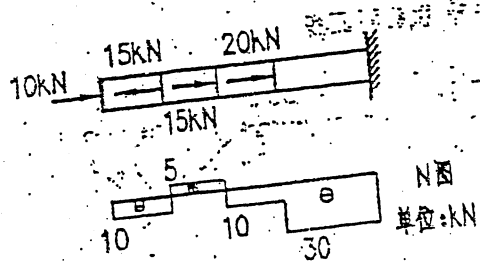


图 2-3 图

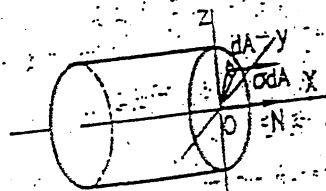


图 2-4 图

[2-4] 试证明若正应力在杆的横截面上均匀分布, 则作为分布内力之合力的轴力  $N$  必经过截面的形心。  
证: 设截面形心为  $O$ , 设置以  $O$  为原点的  $XYZ$  坐标系, 面元  $dA$  的坐标为  $(y, z)$ , 合力  $N$  的

坐标为 \$(Y, Z)\$, \$dA\$ 的元内力为 \$\sigma dA\$, 由里隆定理

$$Y = \int_A y \sigma dA / \int_A \sigma dA = \int_A y \sigma dA / \int_A \sigma dA = \int_A y \sigma dA / A$$

$$Z = \int_A z \sigma dA / \int_A \sigma dA = \int_A z \sigma dA / \int_A \sigma dA = \int_A z \sigma dA / A$$

因 \$Y, Z\$ 轴都是形心轴, 因而

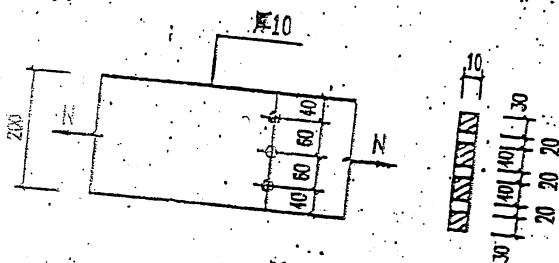
$$\int_A y \sigma dA = \int_A z \sigma dA = 0$$

所以

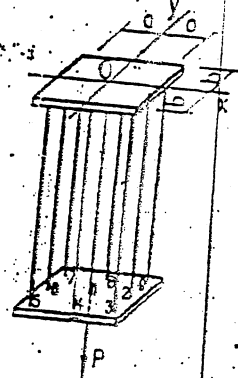
$$Y = 0, Z = 0$$

证毕。

[2-5] 钢板受轴向拉力 \$P=150\text{kN}\$, 板宽 \$200\text{mm}\$, 厚 \$10\text{mm}\$, 板上有 3 个直径为 \$20\text{mm}\$ 的圆孔, 试求其危险截面上的名义应力。



题 2-5 图



题 2-6 图

解:

$$\sigma = \frac{150 \times 10^3}{(200 - 3 \times 20) \times 10} = 107.14 \text{ MPa}$$

[2-6] 一刚性板 \$S\$ 自重远小于荷载 \$P\$, 可略去不计, 现用 9 条索索悬起如图, 求当用一重物 (重量为 \$P\$) 分别悬于 1、2、3 索下端时各索的内力。

解: \$P\$ 悬于

索 1: \$N\_1 = P/9\$ (\$i=1, 2, 3, \dots, 9\$)

索 2: \$N\_2 = N\_3 = N\_9 = P/3\$, 其余诸索 \$N=0\$

索 3: \$N\_3 = P\$, 其余诸索 \$N=0\$

[2-7] 在图示结构中所有杆件都是铝杆, 横截面积均为 \$3000\text{mm}^2\$, 试求各杆应力。

解: 考虑结点 \$B\$

$$\Sigma X = 0, N_{BC} = \frac{P}{\cos \alpha} = \frac{160}{0.8} = 200 \text{ kN}$$

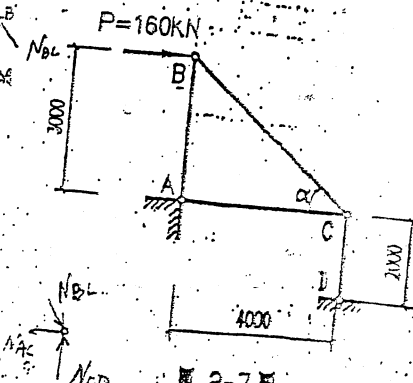
$$\sigma_{BC} = \frac{200 \times 10^3}{3000} = 66.6 \text{ MPa}$$

$$\Sigma Y = 0, N_{BA} = -N_{BC} \sin \alpha = 120 \text{ kN}$$

$$\sigma_{BA} = \frac{120 \times 10^3}{3000} = 40 \text{ MPa}$$

考虑结点 \$C\$

$$\Sigma X = 0, N_{CD} = N_{BC} \cos \alpha = 200 \times 0.8 = 160 \text{ kN}$$



题 2-7 图



$$\sigma_{CA} = \frac{160 \times 10^3}{3000} = 53.3 \text{ MPa}$$

$$\sum Y = 0, N_{CD} = N_{AC} \sin \alpha = -200 \times 0.6 = -120 \text{ kN}$$

$$\sigma_{CD} = \frac{-120 \times 10^3}{3000} = -40 \text{ MPa}$$

[2-8] 图示一两层的排架上, 横木搁在立柱上, 作用于横木上的荷载全传给立柱, 柱在轴向受力状态下工作。柱的截面为  $200 \times 200 \text{ mm}^2$ , 求柱的应力。

$$\text{解: } \sigma_{\pm 1}(200)^2 = -\frac{2}{3}(900 \times 10^3)$$

$$\sigma_{\pm 1} = -15 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\pm 2}(200)^2 = -\frac{1}{3}(900 \times 10^3)$$

$$\sigma_{\pm 2} = -7.5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\pm 3} = -\left[15 + \frac{1}{3}(300 \times 10^3)/(200)^2\right] = -25 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\pm 4} = -\left[7.5 + \frac{1}{3}(300 \times 10^3)/(200)^2\right] = -5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\pm 5} = -\left[25 - \frac{1.5}{3}(300 \times 10^3)/(200)^2\right] = -21.25 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\pm 6} = -\left[5 + \frac{4.5}{3}(300 \times 10^3)/(200)^2\right] = -16.25 \text{ MPa}$$

校核  $\sum Y = 0$

$$900 + 300 + 300 - (21.25 + 16.25) \times 10^{-3} \times (200)^2 = 0$$

[2-9] 一零件如图所示, 受力  $P = 38 \text{ kN}$  作用, 试求零件内的最大正应力。

$$\text{解: } A_1 = (50 - 22)(20) = 560 \text{ mm}^2$$

$$A_2 = 2(50 - 22)(15) = 840 \text{ mm}^2$$

危险截面是 I—I

$$\sigma_1 = \frac{38 \times 10^3}{560} = 67.86 \text{ MPa}$$

[2-10] 图示小车重  $P = 15 \text{ kN}$  作为一种行载, 可在 AC 杆上移动, 拉杆 AB 的截面是  $d = 20 \text{ mm}$  的圆形截面, 求: (a) 当小车在 AC 中点时斜杆 AB 的轴力和应力, (b) AB 杆拉应力出现最大值时小车的位置, 并求出该应力的值。

$$\text{解: } l_{AB} = \sqrt{1.9^2 + 0.8^2} = 2.06 \text{ m}$$

(a) 当小车在 AC 中点时

$$N_{AB}(0.8/2.06)(1.9) = 15(1.9/2)$$

$$N_{AB} = 19.31 \text{ kN}$$

$$\sigma = 19.31 \times 10^3 / \left(\frac{\pi}{4} \times 20^2\right) = 61.466 \text{ MPa}$$

(b) 设小车距 C 点  $x$  米, 由  $\sum M_C = 0$  得

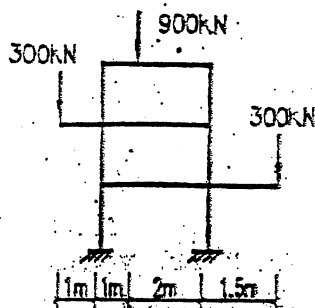


图 2-8 图

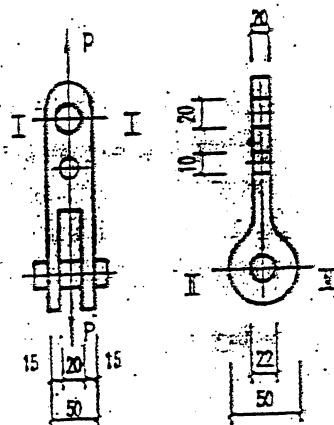


图 2-9 图

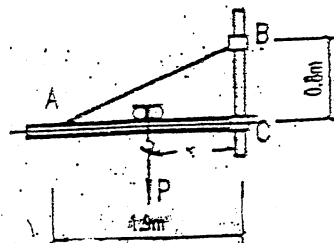


图 2-10 图

$$l_{AC}(0.8/2.06)N_{AB} = 15x$$

$$N_{AB} = 15(2.06/0.8)(x/l_{AC})$$

可见当  $x/l_{AC}=1$ , 即小车在 A 点时  $N_{AB}$  出现最大值。

所以  $(N_{AB})_{\max} = 15(2.06/0.8) = 38.625 \text{ kN}$

$$(\sigma_{AB})_{\max} = 38.625 \times 10^3 / (\frac{\pi}{4} \times 20^2) = 123 \text{ MPa}$$

[2-11] 设浇在混凝土内的钢杆所受粘结沿其长度均匀分布, 在杆端用力  $P=20 \text{ kN}$  拉拔图示, 试作图表明截面上应力沿杆长的分布情况。杆的截面积为  $A=200 \text{ mm}^2$ 。

解: 设粘结力的集度为  $k \text{ N/mm}$ , 则

$$\gamma x = A\sigma$$

$$\sigma = \frac{\gamma}{A} x$$

即  $\sigma$  沿杆长呈线性变化

$$\text{当 } x=0, \quad \sigma=0$$

$$\text{当 } x=400, \quad \sigma = \frac{P}{A} = \frac{20 \times 10^3}{200} = 100 \text{ MPa}$$

[2-12] 图示钢杆的横截面面积为  $1000 \text{ mm}^2$ , 图示长度以  $\text{mm}$  为单位。轴向外力以  $\text{kN}$  为单位。钢材的弹性模量  $E=200 \text{ GPa}$ , 试求(1)各段的应变和线变形。(2)自由端的位移  $\delta$ 。

解: 从左到右,  $N_1 = 20 \text{ kN}$ ,  $N_2 = 0$ ,  $N_3 = -20 \text{ kN}$

$$(1) \epsilon_1 = \frac{(20 \times 10^3)}{(200 \times 10^3)(1000)} = 0.1 \times 10^{-3}$$

$$\Delta l_1 = (0.1 \times 10^{-3})(1000) = 0.1 \text{ mm}$$

$$\epsilon_2 = -0.1 \times 10^{-3}$$

$$\Delta l_2 = (-0.1 \times 10^{-3})(2000)$$

$$= -0.2 \text{ mm}$$

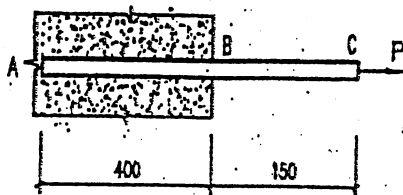
$$(2) \delta = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0.1 + 0 - 0.2 = -0.1 \text{ mm}$$

[2-13] 钢和混凝土的弹性模量各为  $E_1 = 200 \text{ GPa}$  和  $E_2 = 28 \text{ GPa}$ 。一钢杆和一混凝土杆受同样的轴向荷载作用, 求(a)当两杆应力相等时两杆应变之比; (b)当两杆应变相等时两杆应力之比; (c)当两杆应变为  $0.001$  的应力。

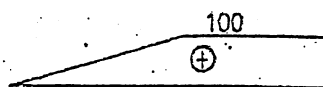
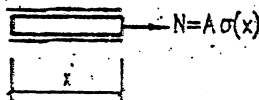
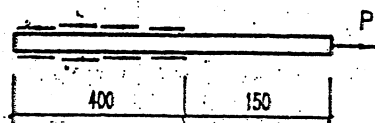
$$\text{解: (a) } \epsilon_1 : \epsilon_2 = E_2 : E_1 = 7 : 50$$

$$(b) \sigma_1 : \sigma_2 = E_1 : E_2 = 50 : 7$$

$$(c) \sigma_1 = (200 \times 10^3)(0.001) = 200 \text{ MPa}$$

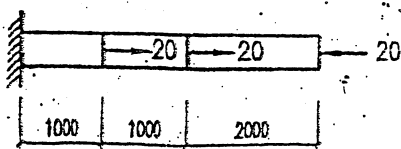


题 2-11 图



$\sigma$  图 (单位: MPa)

题 2-11 解图



题 2-12 图 (单位: kN)

$$\sigma_2 = (28 \times 10^3)(0.001) = 28 \text{ MPa}$$

[2-14] 图示结构由 5 根抗拉刚度  $EA$  相等的等直杆铰结而成。(a)沿对角线  $AB$  加拉力  $P$ , 求  $AB$  杆的线变形。(b)沿对角线  $CD$  加拉力  $P$ , 求  $AB$  杆的线变形。

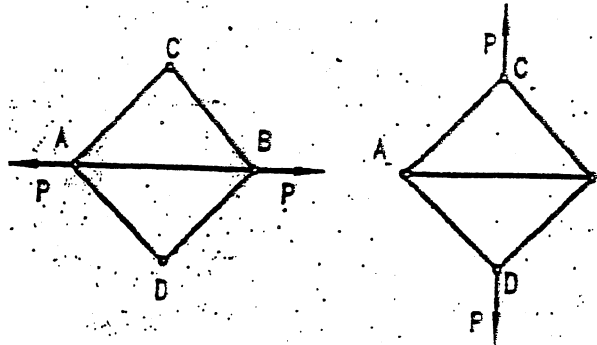


图 2-14

解: (a) 沿  $AB$  加力:  $N_{AB} = P$ ,  $\Delta l = \frac{Pl}{EA}$

(b) 沿  $CD$  加力:  $N_{AB} = -P$ ,  $\Delta l = -\frac{Pl}{EA}$

[2-15] 水平刚杆  $AB$  不变形, 由钢杆 1 和铜杆 2 水平地悬吊着, 两杆的弹性模量  $E_1$  和  $E_2$  以及两杆截面的直径  $d_1$  和  $d_2$  均注明于图中。设在荷载  $P = 30 \text{ kN}$  作用下,  $AB$  杆保持水平, 求  $P$  到杆 1 的距离  $a$  和两杆的应力。

解: 由几何关系  $\Delta l_1 = \Delta l_2$  得

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{E_1 l_2 (d_1)^2}{E_2 l_1 (d_2)^2} = \frac{210}{115} \left( \frac{4}{5} \right)^2 = \frac{64}{75}$$

由平衡条件  $\sum M_A = 0$  得

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{200 - a}{a} = \frac{64}{75}$$

所以

$$a = 1079 \text{ mm}$$

由

$$\sum M_B = 0$$

得

$$N_1 = (30 \times 10^3)(2000 - 1079)/2000 = 13815 \text{ N}$$

$$\sigma_1 = \frac{13815}{\pi(20)^2/4} = 44 \text{ MPa}$$

由

$$\sum Y = 0$$

得

$$N_2 = 30000 - 13815 = 16185 \text{ N}$$

$$\sigma_2 = \frac{16185}{\pi(25)^2/4} = 32.97 \text{ MPa}$$

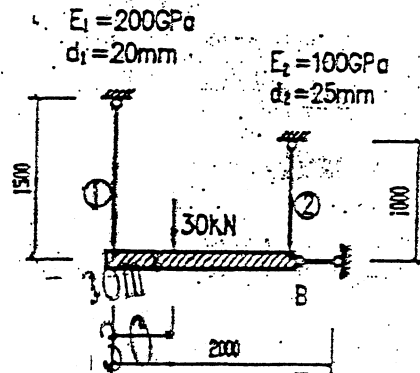


图 2-15

[2-16] 图中刚杆  $AB$  的中点承受竖向荷载  $P = 270 \text{ kN}$ ,  $BG$  和  $BH$  两杆铰结于  $B$ , 杆  $CD$  截面面积为  $700 \text{ mm}^2$ , 其材料的弹性模量为  $E = 200 \text{ GPa}$ , 求加载后  $G$  和  $H$  两点间的相对位移  $\delta$ 。

解：以  $\delta$  表示  $G$  和  $H$  两点的相对水平位移

$$\text{则 } \delta = \frac{3}{1.5} \Delta_{CD} = 2\Delta_{CD}$$

以  $BG$  杆为分离体，并注意到  $R_C = \frac{P}{4}$ ，

由  $\sum M_B = 0$

$$\text{得 } 2.5(P/4) = N_{CD}(1.5)$$

$$N_{CD} = \frac{5}{3} \times \frac{270}{4} = 112.5 \text{ kN}$$

$$\therefore \delta = \frac{2(112500)(2500)}{(200 \times 10^3)(700)} = 4 \text{ mm}$$

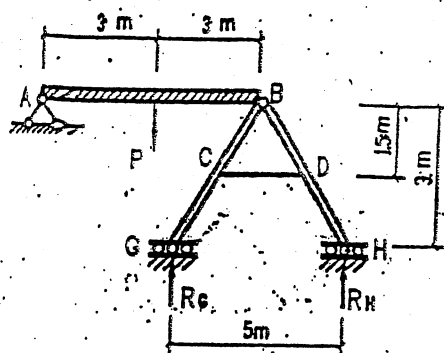


图 2-16

[2-17] 求题 2-11 所示钢杆的伸长，钢的弹性模量为  $E=200\text{GPa}$ 。

解：第 I 段， $0 \leq x \leq 400\text{mm}$

$$\sigma_1 = \frac{100}{400}x = \frac{\pi}{4} \text{ MPa}$$

$$\epsilon_1 = \frac{\sigma}{E} = \frac{1}{200 \times 10^3} \left( \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{8 \times 10^3}$$

$$\Delta l_1 = \int_0^{400} \epsilon dx = \frac{1}{8 \times 10^3} \int_0^{400} x dx = \frac{1}{8 \times 10^3} \frac{(400)^2}{2} = 0.1 \text{ mm}$$

第 II 段， $400 \leq x \leq 550$

$$\sigma_2 = 100 \text{ MPa}$$

$$\epsilon_2 = \frac{100}{200 \times 10^3} = \frac{1}{2 \times 10^3}$$

$$\Delta l_2 = \frac{150}{2 \times 10^3} = 0.075 \text{ mm}$$

$$\text{总： } \Delta l = (0.1 + 0.075) = 0.175 \text{ mm}$$

[2-18] 一圆锥形杆直立于地面上，如图所示，其高为  $l$ ，底部截面半径为  $R$ ，锥角不大。已知材料的重度  $\gamma$  和弹性模量  $E$ ，求杆在自重使用下的轴向线变形  $\Delta l$ 。

解：把  $x$  轴原点设在锥顶面向下，当  $x=x$ ，有

$$r = Rx/l$$

截面面积  $A(x) = \pi R^2 x^2 / l^2$

$$N(x) = - \int_0^x \gamma A dx = - \frac{\gamma \pi R^2}{l^2} \int_0^x x^2 dx = - \frac{\gamma \pi R^2}{3l^2} x^3$$

$$\sigma(x) = \frac{N}{A} = - \left( \frac{\gamma \pi R^2}{3l^2} x^3 \right) / \left( \pi R^2 x^2 / l^2 \right) = - \frac{\gamma x}{3}$$

$$\epsilon(x) = - \frac{\gamma x}{3E}$$

$$\therefore \Delta l = \int_0^l \epsilon dx = - \frac{\gamma}{3E} \int_0^l x dx = - \frac{\gamma l^2}{6E}$$

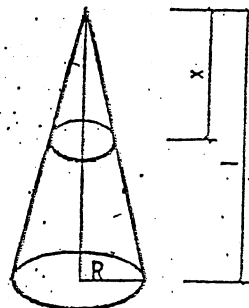


图 2-18

[2-19] 图示结构在结点  $C$  承受与竖向成角  $\theta$  的荷载  $P$ ，杆①和杆②材料相同，截面面积分别为  $A_1$  和  $A_2$ 。若结点  $C$  的位移  $\delta_C$  与  $P$  的方向重合，求  $\theta$  角。

解：考虑结点  $C$  的平衡

$$\sum Y=0, N_1 \sin 45^\circ = P \cos \theta$$

$$\sum X=0, N_1 + N_1 \cos 45^\circ = P \sin \theta$$

第二式除以第一式,得

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\sqrt{2}}{\tan \theta - 1}$$

考虑几何关系

$$\delta_c = \frac{\Delta L_1}{\cos \alpha} = \frac{\Delta L_2}{\cos \beta}$$

$$\text{或} \quad \frac{\Delta L_1}{\Delta L_2} = \frac{\cos(\theta - 45^\circ)}{\sin \theta} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \tan \theta)$$

考虑胡克定律,得

$$\frac{\Delta L_1}{\Delta L_2} = \frac{N_1}{N_2} \frac{L_1}{L_2} \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1} = \frac{\sqrt{2}}{\tan \theta - 1} \sqrt{2} \frac{A_2}{A_1}$$

$$\text{于是} \quad 2\sqrt{2} \frac{A_2}{A_1} = (\tan \theta - 1)(1 + \tan \theta)$$

两边同乘以  $\tan \theta$ ,得

$$\sqrt{2} \frac{A_2}{A_1} (2 \tan \theta) = -(1 - \tan^2 \theta)$$

$$2\theta = \arctan\left(-\frac{A_2}{\sqrt{2} A_1}\right)$$

[2-20] 在一板条形的杆面上有一直线段 AB, 其长度为  $l$ , 与横向直线 AC 的交角为  $\alpha$ , 求当杆的轴向线应变为  $\epsilon$  时线段 AB 的线变形  $\Delta l$ .

解:  $(l + \Delta l)^2 = [(1 + \epsilon)l \sin \alpha]^2 + [(1 - \nu \epsilon)l \cos \alpha]^2$   
展开,并略去高阶微量,得

$$\Delta l = \epsilon l (\sin^2 \alpha - \nu \cos^2 \alpha)$$

[2-21] 一板条形等直拉杆,长 700mm,宽 50mm,厚 5mm,在轴向拉力  $P$  作用下,长度的增量为  $\Delta l = 0.4\text{mm}$ ,截面宽度的增量为  $\Delta b_x = -0.01\text{mm}$ ,厚度的增量为  $\Delta b_z = -0.0037\text{mm}$ ,求厚度  $t$ .

$$\text{解: 泊松比 } \nu = \left(\frac{\Delta b_z}{b}\right) / \left(\frac{\Delta l}{l}\right) = \left(\frac{0.01}{50}\right) / \left(\frac{0.4}{700}\right) = 0.35$$

$$t = \Delta b_z / \left(\nu \frac{\Delta l}{l}\right) = \frac{0.0037}{0.35(0.4/700)} = 18.5\text{mm}$$

[2-22] 图示结构中,杆 AC 的截面为 2[12.6, 其容许应力为  $[\sigma]_1 = 160\text{MPa}$ , 杆 BC 的截面为 I22a, 其容许应力为  $[\sigma]_2 = 100\text{MPa}$ , 设荷载  $P$  沿铅垂方向如图示. 试求其容许荷载  $[P]$  之值.

解: 查型钢表, [12.6 的截面面积为  $15.69\text{cm}^2$ , I22a 的截面面积为  $42\text{cm}^2$ , 于是

$$[N]_1 = A_1 [\sigma]_1 = (2 \times 15.69 \times 10^2)(160) = 502.08\text{kN}$$

$$[N]_2 = A_2 [\sigma]_2 = (42 \times 10^2)(100) = 420\text{kN}$$

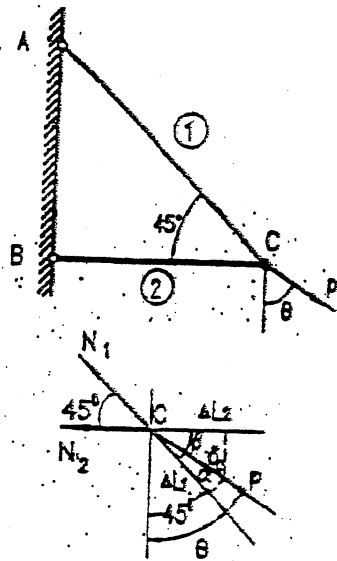


图 2-19

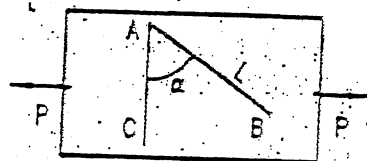


图 2-20

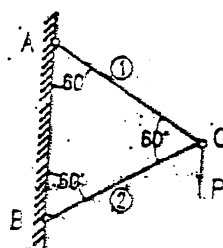


图 2-22

由结点C的平衡,得  $N_1 = -N_2 = P$ , 所以  $[P] = [N]_2 = 420\text{kN}$

[2-23] 图示一阶梯形柱, 上端作用一集中力  $P$ , 各段长度分别为  $l_1$ ,  $l_2$  和  $l_3$ , 材料的重度为  $\gamma$ , 容许应力为  $[\sigma]$ , 求各段的横截面积。

解: 以  $A_1$ ,  $A_2$  和  $A_3$  分别表示上中下三段的截面面积, 令每段底端截面的应力等于容许应力, 于是

$$\begin{aligned} A_1[\sigma] &= P + \gamma A_1 l_1 & \therefore A_1 &= P / ([\sigma] - \gamma l_1) \\ A_2[\sigma] &= A_1[\sigma] + \gamma A_2 l_2 & A_2 &= A_1[\sigma] / ([\sigma] - \gamma l_2) \\ A_3[\sigma] &= A_2[\sigma] + \gamma A_3 l_3 & A_3 &= A_2[\sigma] / ([\sigma] - \gamma l_3) \end{aligned}$$

[2-24] 图示两直径  $d = 20\text{mm}$  的圆截面钢杆  $AC$  和  $BC$  交于  $C$  点, 受竖向荷载  $P$  作用, 设钢的容许应力为  $[\sigma] = 157\text{MPa}$ , 求容许荷载  $[P]$ 。

解: 考虑结点  $C$  的平衡

$$\begin{aligned} \sum X = 0 & \quad N_{BC} \sin 45^\circ = N_{AC} \sin 30^\circ \\ \sum Y = 0 & \quad N_{BC} \cos 45^\circ + N_{AC} \cos 30^\circ = P \\ \text{得} & \quad N_{AC} = 0.732P, \quad N_{BC} = 0.5177P \end{aligned}$$

$$\text{又} \quad [N]_{AC} = [N]_{BC} = \frac{\pi}{4} (20)^2 (157) \times 10^{-3} = 49.32\text{kN}$$

$$\text{因 } N_{AC} > N_{BC}, \text{ 必然 } [P]_{AC} < [P]_{BC}, \text{ 所以 } [P] = [P]_{AC} = \frac{49.32}{0.732} = 67.4\text{kN}$$

[2-25] 钢索上端固定, 下端吊  $30\text{kN}$  的重物, 钢索由直径  $d = 2\text{mm}$  的钢丝编成, 材料的容许应力为  $[\sigma] = 120\text{MPa}$ , 请问编此索需用多少股钢丝。

$$\text{解:} \quad n = \frac{30 \times 10^3}{\frac{\pi (2)^2 (120)}{4}} \approx 80 \text{ 根}$$

[2-26] 图示杆系中, 木杆的长度  $a$  已确定不变, 其截面也不变, 但交角  $\alpha$  可变, 若欲使钢杆  $AC$  用料为最少, 问角  $\alpha$  应多大?

解: 以下标 1 标示杆  $AC$  的量

$$N_1 \sin \alpha = P$$

$$A_1 = \frac{N_1}{[\sigma]_1} = \frac{P}{[\sigma]_1 \sin \alpha}$$

$$l_1 = a / \cos \alpha$$

杆 1 的体积为

$$V_1 = A_1 l_1 = \frac{Pa}{[\sigma]_1 \cos \alpha \sin \alpha} = \frac{2Pa}{[\sigma]_1 \sin 2\alpha}$$

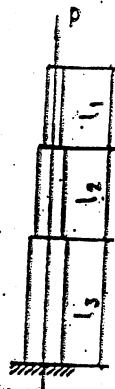
$$\therefore \sin 2\alpha = 1, \quad \alpha = 45^\circ$$

[2-27] 一钢杆两端固定, 横截面面积  $A = 1000\text{mm}^2$ , 荷载及长度均如图示, 试求各段的轴力。

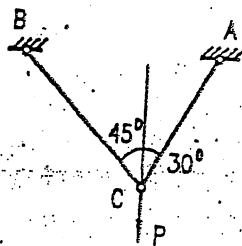
$$\text{解:} \quad R_1 = \frac{7}{12} \times 100 + \frac{4}{12} \times 150 = 108.3\text{kN}$$

$$R_2 = 250 - 108.3 = 141.7\text{kN}$$

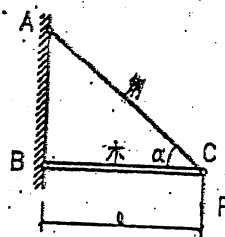
$$N_1 = 108.3\text{kN}, N_2 = 8.3\text{kN}, N_3 = -141.7\text{kN}$$



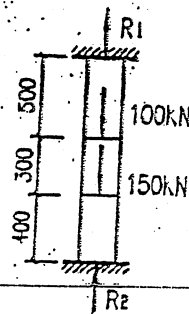
题 2-23 图



题 2-24 图



题 2-26 图



题 2-27 图

[2-28] 阶形钢杆在温度  $t_1 = 5^\circ\text{C}$  时被固定于二刚硬平面之间, 杆上段的截面面积为  $A_1 = 500\text{mm}^2$ , 下段的截面面积为  $A_2 = 1000\text{mm}^2$ , 试求杆内各段因温度升高至  $t_2 = 25^\circ\text{C}$  时所引起的应力。钢的线膨胀系数  $\alpha = 12 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ ,  $E = 200\text{GPa}$ 。

解:  $\Delta L_t = \alpha L \Delta t = (12 \times 10^{-6})(200)(25 - 5) = 48 \times 10^{-3}\text{mm}$

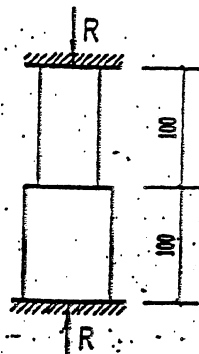
$$\Delta L_R = \frac{RL_1}{E_1 A_1} + \frac{RL_2}{E_2 A_2} = \frac{R(100)}{200 \times 10^3} \left( \frac{1}{500} + \frac{1}{1000} \right) = \frac{R}{2 \times 10^5} \left( \frac{3}{1000} \right)$$

形变协调关系  $\Delta L_R = \Delta L_t$

由此得  $R = \frac{2 \times 10^5 \times 1000}{3} \times (48 \times 10^{-3}) = 32000\text{N}$

所以  $\sigma_1 = -32000/500 = -64\text{MPa}$

$\sigma_2 = -32000/1000 = -32\text{MPa}$



题 2-28 图

[2-29] 正方形截面的钢筋混凝土立柱上放置一块刚性板, 板上承受轴向压力  $300\text{kN}$ , 分别以下标 1、2 标示钢筋和混凝土的量, 钢筋横截面和混凝土横截面的面积之比  $A_1 : A_2 = 1 : 40$ , 两者弹性模量之比为  $E_1 : E_2 = 10$ , 求钢筋和混凝土各自分担的压力  $N_1$  和  $N_2$ 。正方形截面的边长为  $400\text{mm}$ 。

解: 考虑平衡条件, 有

$$N_1 + N_2 = 300\text{kN}$$

考虑变形几何关系有

$$\Delta L_1 = \Delta L_2$$

结合胡克定律, 得

$$\frac{N_1 L}{E_1 A_1} = \frac{N_2 L}{E_2 A_2}$$

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{E_1 A_1}{E_2 A_2} = 10 \times \frac{1}{40} = \frac{1}{4}$$

与平衡方程联立解得

$$N_1 = -60\text{kN}, \quad N_2 = -240\text{kN}$$

[2-30] 钢螺栓外套钢管, 截面尺寸如图, 管长  $750\text{mm}$ , 螺距  $h = 3\text{mm}$ , 钢和铜的弹性模量分别为  $E_1 = 200\text{GPa}$ ,  $E_2 = 100\text{GPa}$ 。现将一侧螺母拧紧四分之一圈, 求在螺栓和套管中引起的应力。

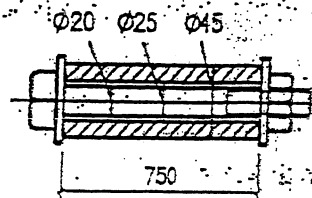
解: 设螺母的原始位置为 A, 如图 a 所示。拧进  $\frac{h}{4}$  到 B, 此时钢管已缩短, 但螺栓还没有伸长, 如图 b。螺栓伸长后螺母的最后位置为 C。于是, 螺栓的长度由  $(750 - \frac{3}{4}) \approx 700\text{mm}$  伸长  $\Delta L_1 = BC$ , 钢管缩短  $\Delta L_2 = AC$ , 变形几何关系为

$$\Delta L_1 + \Delta L_2 = h/4$$

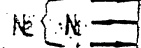
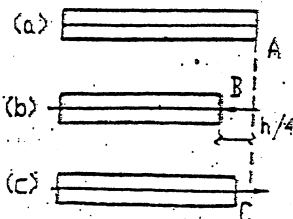
图 d 示螺母的受力情况, 考虑其平衡, 得

$$N_1 = N_2$$

于是有



题 2-30 图



题 2-30 解图

$$N_1 l \left( \frac{1}{E_1 A_1} + \frac{1}{E_2 A_2} \right) = \frac{h}{4}$$

其中

$$A_1 = \frac{\pi}{4}(20)^2, A_2 = \frac{\pi}{4}(45^2 - 25^2), l = 750, h = 3$$

$$E_1 = 200 \times 10^3 \text{MPa}, E_2 = 100 \times 10^3 \text{MPa}$$

所以

$$N_1 = N_2 = 40 \text{kN}$$

螺栓应力

$$\sigma_1 = \frac{40000}{314} = 127.3 \text{MPa}$$

钢管应力

$$\sigma_2 = \frac{40000}{1100} = 36.4 \text{MPa} (-)$$

[2-31] 图示杆系结构中, 杆 1 的设计长度为  $l$ , 安装时发现短了  $\delta$  ( $\delta \ll l$  图中把它夸大了), 问, 若把它强行安装上去, 三杆的轴力是多少? 假定杆 2 和杆 3 的一切性质相同。

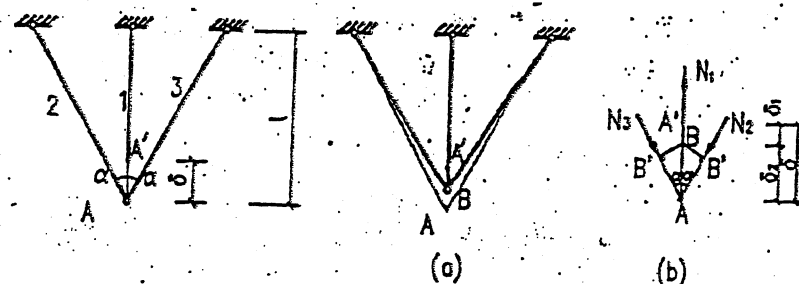


图 2-31

解: 设三杆交点安装好以后在点  $B$ ,  $B$  必在  $A$  和  $A'$  之间, 令  $A'B = \delta_1$ ,  $BA = \delta_2$ , 则

$$\delta_1 + \delta_2 = \delta$$

杆 1 的伸长为  $\Delta l_1 = \delta_1$ , 杆 2 的缩短为  $\Delta l_2 = B'A$  或

$$\Delta l_2 = \delta_2 \cos \alpha$$

于是变形几何关系可写为

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 \cos \alpha = \delta$$

由平衡条件得

$$N_1 = N_2 (2 \cos \alpha)$$

于是有

$$\frac{2N_2 \cos \alpha}{E_1 A_1} + \frac{N_2 l}{E_2 A_2 \cos^2 \alpha} = \delta$$

所以

$$N_2 = \frac{\delta}{l} \left( \frac{2 \cos \alpha}{E_1 A_1} + \frac{1}{E_2 A_2 \cos^2 \alpha} \right)^{-1}$$

$$N_1 = \frac{\delta}{l} \left( \frac{1}{E_1 A_1} + \frac{1}{2 E_2 A_2 \cos^2 \alpha} \right)^{-1}$$

[2-32] 图 a 示一铰支座上端的组合环, 其外环为铸钢的, 弹性模量  $E_1$ , 径向截面面积  $A_1$ , 内环是黄铜的, 弹性模量  $E_2$ , 径向截面面积  $A_2$ , 为了使外环箍紧内环, 先把外环内壁半径  $r_1$  做得比内环外壁半径  $r_2$  小  $\delta$ , 即  $r_1 = r_2 - \delta$ , 如图 b 所示。强行安装后两壁的接触面为  $b-b$  圆柱面, 其半径为  $R$ 。两壁相互挤压, 每单位环长的挤压力为  $q$ , 如图 c 和 d 所示。外环径向截面上



产生环向拉应力  $\sigma_r$ 。如图 e 所示。内环的径向截面上同时出现环向压应力  $\sigma_i$  (未画图)。试求  $q$ 、 $\sigma_r$  和  $\sigma_i$ 。

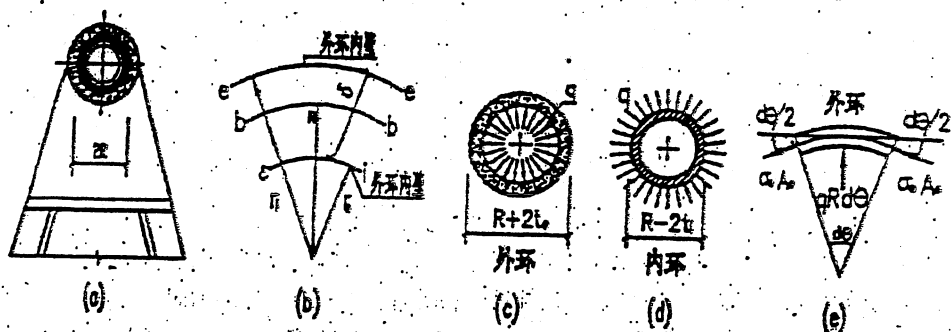


图 2-32

解：考虑变形几何关系

设外环厚度为  $t \ll r_o$ ，则安装前外环的长度为  $L_o = 2\pi(r_o + \frac{t}{2}) \approx 2\pi r_o$ 。内环的长度为  $L_i \approx 2\pi r_i$ ，安装后外环的环向应变为  $\epsilon_o$

$$\epsilon_o = \frac{[2\pi(r_o + \Delta r_o)] - 2\pi r_o}{2\pi r_o} = \frac{\Delta r_o}{r_o} \approx \frac{\Delta r_o}{R}$$

同理，内环安装后的环向应变为  $\epsilon_i = \frac{\Delta r_i}{r_i} \approx \frac{\Delta r_i}{R}$ ，由图 b 可见

$$\Delta r_o = (R - r_o) > 0, \Delta r_i = (R - r_i) < 0$$

外环内壁半径增大了，内环外壁半径减小了，所以外环受拉，内环受压。由图 b 可得变形几何关系

$$\Delta r_o + \Delta r_i = \delta$$

或

$$R(\epsilon_o + \epsilon_i) = \delta \quad (a)$$

考虑平衡条件

取一段外环为分离体如图 e，两边径向截面上有轴力  $\sigma_r A_r$ ，内壁上有挤压力的合力  $qRd\theta$ 。三力的平衡条件为

$$2\sigma_r A_r \sin \frac{d\theta}{2} = qRd\theta$$

由于  $\sin \frac{d\theta}{2} \approx \frac{1}{2}d\theta$ ，上式简化为

$$\sigma_r = \frac{R}{A_r} q \quad (b)$$

考虑胡克定律，有

$$\epsilon_o = \frac{\sigma_r}{E_o} = \frac{R}{E_o A_o} q \quad (c)$$

$$\epsilon_i = \frac{\sigma_i}{E_i} = \frac{R}{E_i A_i} q \quad (d)$$

把式(c)和(d)代入式(a)，得

$$(\frac{1}{E_o A_o} + \frac{1}{E_i A_i}) R^2 q = \delta$$

所以

$$q = \frac{1}{(E_s A_s)^{-1} + (E_l A_l)^{-1}} \left( \frac{\delta}{R^2} \right) \quad (e)$$

代式(e)入式(b)及(d),得

$$\sigma_c = \frac{R}{A_s} q = \frac{1}{(E_s A_s)^{-1} + (E_l A_l)^{-1}} \left( \frac{\delta}{R A_s} \right) \quad (f)$$

$$\sigma_l = \frac{R}{A_l} q = \frac{1}{(E_s A_s)^{-1} + (E_l A_l)^{-1}} \left( \frac{\delta}{R A_l} \right) \quad (g)$$

顺便指出,式(b)可用来求受均匀内压力 $q$ 的圆筒形薄壁容器的环向应力。事实上,设图c沿筒轴方向(与图面正交)取单位长度,则 $A_s = 1 \times t_s = t$ ,于是得薄壁容器环向应力的公式

$$\sigma = \frac{Rq}{t} \quad (h)$$

这里去掉了下标 $c$ 。环向应力又名环箍应力。

[2-33] 某轮船上所用主压缩空气瓶,壁厚 $t=30\text{mm}$ ,气瓶的内直径为 $1520\text{mm}$ ,气瓶材料的容许应力为 $[\sigma]=150\text{MPa}$ ;气瓶受压强为 $q=3\text{MPa}$ 的内压力作用,试校核气瓶的强度。

解:  $\sigma = \frac{Rq}{t} = \frac{(1520/3)(3)}{30} = 76\text{MPa}$

$76\text{MPa} < [\sigma] = 150\text{MPa}$ , 安全

[2-34] 图示一起重机的吊具,它由销轴将吊钩上端与吊板联结而成。已知起吊物重 $P=40\text{kN}$ ,销轴直径 $d=22\text{mm}$ ,吊板厚度 $t=20\text{mm}$ ,销轴材料的容许应力为 $[\sigma_k]=120\text{MPa}$ , $[\tau]=60\text{MPa}$ ,试校核销轴强度。

解: 剪切校核  $A_s = \frac{\pi}{4} (22)^2 = 380.133\text{mm}^2$

$\tau = \frac{40 \times 10^3}{2 \times 380.133} = 52.61\text{MPa} < 60\text{MPa}$ , 安全

挤压校核

$\sigma_k = \frac{P}{dt} = \frac{40 \times 10^3}{22 \times 20} = 90.9\text{MPa} < 120\text{MPa}$ , 安全

[2-35] 图示一螺栓连接,已知钢板宽度 $b=200\text{mm}$ ,板厚 $\delta=6\text{mm}$ ,螺栓直径 $d=18\text{mm}$ ,钢板容许拉应力 $[\sigma]=160\text{MPa}$ ,容许挤压应力 $[\sigma_k]=240\text{MPa}$ ,螺栓容许剪应力 $[\tau]=100\text{MPa}$ ,试求容许荷载 $[P]$

解: 螺栓剪切:  $P_1 = 7A_s[\tau] = 7 \times \frac{\pi}{4} (18)^2 \times 100$   
 $= 178\text{kN}$

钢板挤压:  $P_2 = 7A_k[\sigma_k] = 7 \times (18 \times 6) \times 240$   
 $= 181\text{kN}$

钢板拉断,最右一列小孔直径截面:

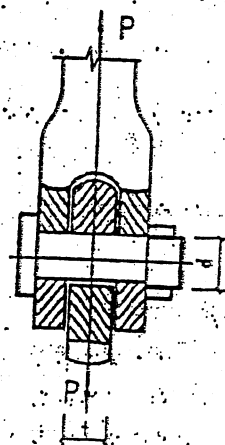
$P_3 = [(200 - 2 \times 18) \times 6] \times 160 = 157.44\text{kN}$

钢板拉断:中间一列小孔直径截面

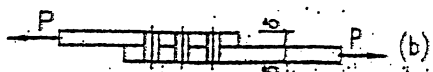
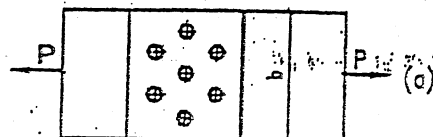
$P_4 = \frac{7}{5} [(200 - 3 \times 18) \times 6] \times 160 = 196.22\text{kN}$

最小的是 $P_3$ ,所以

$[P] = 157.44\text{kN}$



题 2-34 图



题 2-35 图

[2-36] 一对热轧角钢(2L75×50×8),其长边用螺栓与连接板相连。角钢与连接板的材料都是三号钢。连接板厚  $t=10\text{mm}$ , 螺栓直径  $d=16\text{mm}$ , 其容许剪应力为  $[\tau]=130\text{MPa}$ , 容许挤压应力  $[\sigma_k]=300\text{MPa}$ , 角钢的容许拉应力为  $[\sigma]=170\text{MPa}$ , 试确定此螺栓连接需要的螺栓个数, 其荷载  $P=128\text{kN}$ 。

解: 考虑螺栓剪切, 设有  $n$  个螺栓, 则

$$n \geq (128 \times 10^3) / (2 \times \frac{\pi}{4} (16)^2 \times 130) = 2.45, \text{取 } n = 3$$

校核

螺栓挤压  $\sigma_k = \frac{P/3}{dt} = \frac{128 \times 10^3 / 3}{16 \times 10} = 266.6 \text{MPa} < 300 \text{MPa}$ , 安全。

角钢拉伸 查型钢表, 对于 L75×50×8,  $A=9.467\text{cm}^2$

净截面  $A_n = 9.467 \times 10^2 - 16 \times 8 = 818.7 \text{mm}^2$

$$\sigma = \frac{P}{2A_n} = \frac{128 \times 10^3}{2 \times 818.7} = 78.17 \text{MPa} < 170 \text{MPa}, \text{安全。}$$

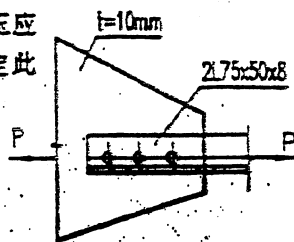


图 2-36

[2-37] 图示一木屋架的端结点, 两根杆件的矩形截面在垂直于图面方向的尺寸为  $b=160\text{mm}$ , 下弦端部  $l_1=400\text{mm}$ , 两杆夹角  $\alpha=30^\circ$ , 垫木宽度  $l'=120\text{mm}$ , 上弦杆轴力  $N=-50\text{kN}$ , 试计算下弦杆的剪切破坏面的剪应力  $\tau$  和垫块处下弦杆的挤压应力。

解:  $\tau = \frac{N \cos \alpha}{l_1 b} = \frac{50 \times 10^3 \cos 30^\circ}{400 \times 160} = 0.812 \text{MPa}$

$$\sigma_k = \frac{N \sin \alpha}{l' b} = \frac{50 \times 10^3 \sin 30^\circ}{120 \times 160} = 1.562 \text{MPa}$$

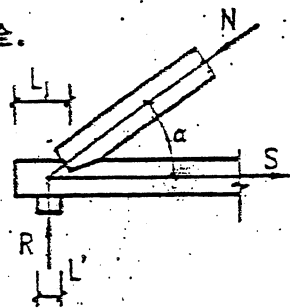


图 2-37

[2-38] 二矩形截面木杆, 用两块凹形钢板连接如图示。已知杆沿顺纹方向受轴向拉力  $P=150\text{kN}$ , 矩形截面的宽度  $b=250\text{mm}$ , 木材的顺纹容许挤压应力  $[\sigma_k]=100\text{MPa}$ , 顺纹容许剪应力  $[\tau]=1\text{MPa}$ , 试求连接处所需尺寸  $\delta$  和  $l$  的大小。

解:  $\delta \geq \frac{P}{2b[\sigma_k]} = \frac{150 \times 10^3}{2(250)(100)} = 3\text{mm}$

$$l \geq \frac{P}{2b[\tau]} = \frac{150 \times 10^3}{2(250)(1)} = 300\text{mm}$$

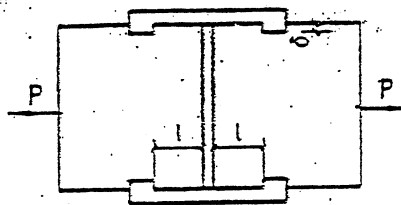


图 2-38

[2-39] 矩形截面木拉杆如图所示, 已知  $P=50\text{kN}$ ,  $b=250\text{mm}$ , 木材顺纹容许剪应力  $[\tau]=1\text{MPa}$ , 容许挤压应力  $[\sigma_k]=10\text{MPa}$ , 求图中尺寸  $L$  和  $a$ 。

解:  $L = \frac{P}{b[\tau]} = \frac{50 \times 10^3}{(250)(1)} = 200\text{mm}$

$$a = \frac{P}{b[\sigma_k]} = \frac{50 \times 10^3}{(250)(10)} = 20\text{mm}$$

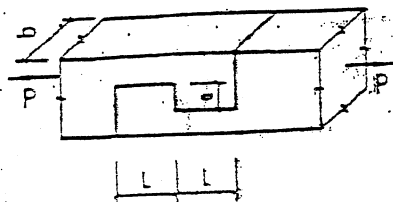


图 2-39

[2-40] 一拉杆由两块材料沿  $mn$  线胶合组成, 由于实用的原因, 限定  $0 < \theta \leq 60^\circ$ , 胶合处的容许应力  $[\tau] = \frac{3}{4}[\sigma]$ , 请问: 为了使该杆能承受的荷载  $P$  达到最大,  $\theta$  角的值应是多少? 假设胶合处的强度控制设计。

解:  $\sigma_c = P/A$

由  
得

$$\sigma_c = \sigma_0 \cos^2 \theta \leq [\sigma]$$

$$\sigma_c \leq [\sigma] / \cos^2 \theta$$

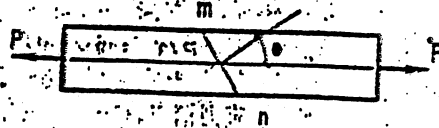
$\sigma_c = [\sigma] / \cos^2 \theta$  是  $\theta$  的单调增加函数, 如下图曲线①所示.

由  
得

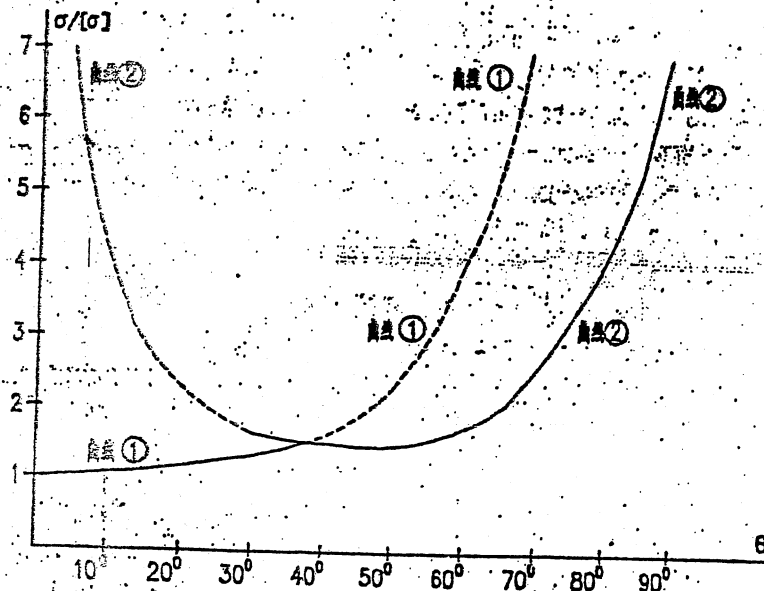
$$\tau_c = \frac{\sigma_c}{2} \sin 2\theta \leq [\tau] = \frac{3}{4} [\sigma]$$

$$\sigma_c \leq \frac{3 [\sigma]}{2 \sin 2\theta}$$

$\sigma_c = \frac{3 [\sigma]}{2 \sin 2\theta}$  的图象如下图曲线②所示.



题 2-40 图

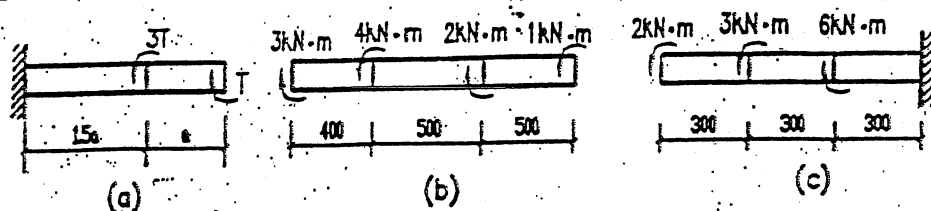


题 2-40 解图

可见  $\sigma$  (从而  $P$ ) 的最大值出现于  $\theta = 60^\circ$ .

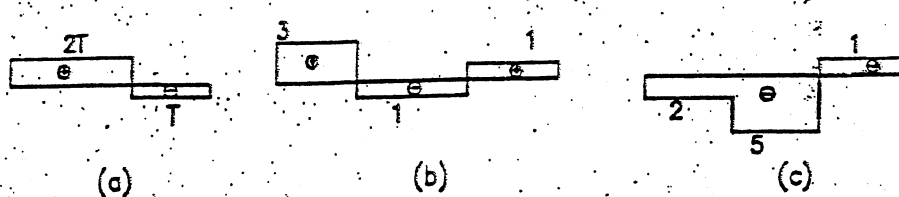
### 第三章 扭 转

[3-1] 试绘下列各轴的扭矩图。



题 3-1 图

解:



题 3-1 解图 (单位: kN·m)

[3-2] 图示阶梯形传动轴, 转速  $n=300\text{r/min}$ , 轮 2 输入功率  $P_2=50\text{kW}$ , 轮 1 和轮 3 输出的功率分别为  $P_1=10\text{kW}$ ,  $P_3=40\text{kW}$ , 试绘轴的扭矩图。

解:  $P_1, P_2, P_3$  相应的扭转外力偶矩分别为

$$T_1 = 9.55 \times \frac{10}{300} = 0.318 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

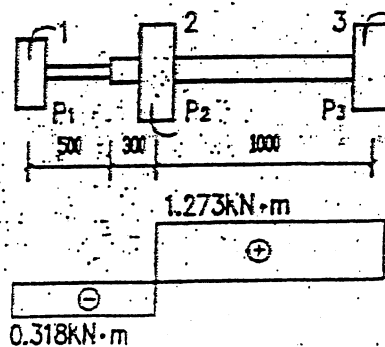
$$T_2 = 9.55 \times \frac{50}{300} = 1.591 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$T_3 = 9.55 \times \frac{40}{300} = 1.273 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

在 AB 段, 由  $\sum M_x = 0$  有

$$M_{AB} = -T_1 = -0.318 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

同理, BC 段  $M_{BC} = T_2 = 1.273 \text{ kN} \cdot \text{m}$  绘  $M_x$  图如



题 3-2 图

右。

[3-3] 图示传动轴, 转速  $n=350\text{r/min}$ , 轮 2 为主动轮, 输入功率  $P_2=70\text{kW}$ , 轮 1、3、4 均为从动轮, 输出功率分别为  $P_1=P_3=20\text{kW}$ ,  $P_4=30\text{kW}$ 。(1) 试绘轴的扭矩图; (2) 若将轮 2 和轮 3 的位置互换, 试绘轴相应的扭矩图。

解: 各轮的外力偶矩为

$$T_1 = T_3 = 9.55 P_1 / n = 9.55 \times 20 / 350 = 0.546 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$T_2 = 9.55 \times 70 / 350 = 1.910 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$T_4 = 9.55 \times 30 / 350 = 0.818 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

用截面法求得从左至右各段扭矩分别为

$$M_{AB} = 0.546 \text{ kN} \cdot \text{m}, M_{BC} = -1.364 \text{ kN} \cdot \text{m},$$

$M_x = 0.546 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 。轴的扭矩图如图  $c$ 。

将轮 2 和轮 3 位置互换, 计算简图如图  $b$  所示。仍用截面法求出各轴段的扭矩, 画出轴的扭矩图如图  $c$ 。

由图  $a$  和  $c$ , 容易看出, 传递相同的功率, 后一种轮的布置改善了轴的受力, 故较前种布置更合理。

✓ [3-4] 图示薄壁圆筒, 平均半径  $r_0 = 30 \text{ mm}$ , 壁厚  $t = 2 \text{ mm}$ , 长度  $l = 300 \text{ mm}$ , 当  $T = 1.20 \text{ kN} \cdot \text{m}$  时, 测得圆筒两端面间扭转角  $\varphi = 0.76^\circ$ , 试计算横断面上的扭转剪应力和圆筒材料的剪切弹性模量  $G$ 。

解: 根据薄壁圆筒扭转剪应力公式, 有

$$\tau = \frac{T}{2\pi r_0^2 t} = \frac{1.20 \times 10^4}{2\pi \times 30^2 \times 2} = 106.1 \text{ MPa}$$

又因为,  $\gamma l = r_0 \varphi$ , 所以

$$\gamma = \frac{r_0 \varphi}{l} = \frac{30 \times 0.76}{300} \times \frac{\pi}{180} = 1.326 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

于是,  $G = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{106.1 \times 10^{-3}}{1.326 \times 10^{-3}} = 80.0 \text{ GPa}$

[3-5] 正方形受纯剪切单元体如图示, 已知对角线  $BD$  的伸长量为  $a/1500$ , 材料的  $G = 80 \text{ GPa}$ , 试求剪应力  $\tau$ 。

解: 单元体受纯剪切的变形如图  $a$ ,  $BD$  的伸长

$$\overline{D_1 D_2} = \overline{BD_1} - \overline{BD_2} = \overline{BD_1} - \overline{BD} = a/1500$$

$$\text{又} \quad \overline{D_1 D_2} = \overline{D_1 D} \cos \alpha = \gamma a \cos \alpha$$

式(b)给出

$$\gamma = \frac{\overline{D_1 D_2}}{a \cos \alpha}$$

代入式(a)得

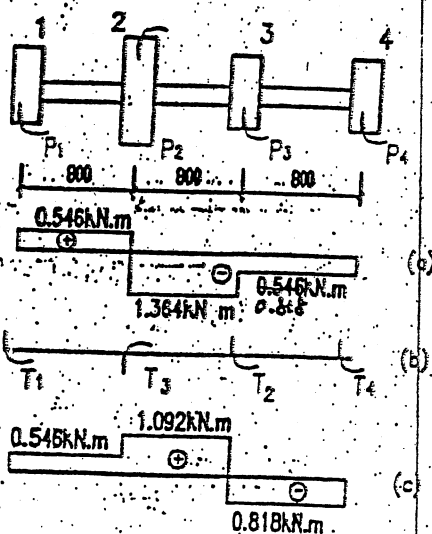
$$\gamma = \frac{a}{1500} \times \frac{1}{a \cos \alpha} = \frac{1}{1500 \cos \alpha}$$

$$\therefore \tau = G\gamma = \frac{G}{1500 \cos \alpha} = \frac{80 \times 10^3}{1500 \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = 75.42 \text{ MPa}$$

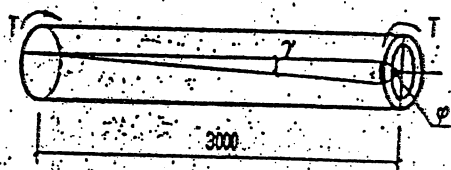
[3-6] 图中  $M_x$  为圆杆横截面上的扭矩, 试画出横截面上与  $M_x$  对应的剪应力分布图。

解: 无论实心或空心圆截面杆件, 截面上的扭转剪应力均成线性分布, 其分布图绘在题图上。

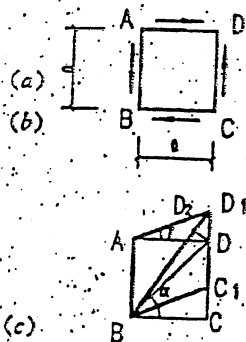
[3-7] 某钻机的筒式钻头工作情况如图所示, 钻头刀头  $C$  处作用有外力偶  $T_c = 2.53 \text{ kN} \cdot \text{m}$ , 在筒体  $BC$  段受岩层阻力形成的均匀分布力偶  $m = 0.9 \text{ kN} \cdot \text{m/m}$ , 钻杆  $AB$  段长为  $l_1$ , 横



题 3-3 图



题 3-4 图



题 3-5 图

截面上扭矩为  $M_t$ , 钻杆外径  $D=80\text{mm}$ , 内径  $d=60\text{mm}$ , (1) 试绘 ABC 段的扭矩图; (2) 计算钻杆横截面上的最大和最小扭转剪应力。

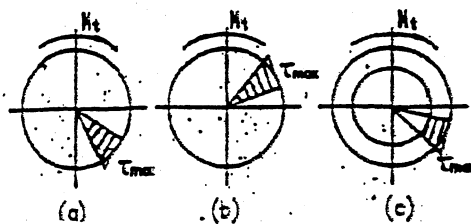


图 3-6 图

解: (1) 绘轴的扭矩图

用截面法求得 C 截面(稍上)处的扭矩  $M_C = -2.53\text{kN} \cdot \text{m}$ , 在 B 截面处的

$$M_B = M_C - 0.8m = -2.53 - 0.8 \times 0.9 = -3.25\text{kN} \cdot \text{m}$$

AB 段无外力偶作用, 该段扭矩为常量(等于  $M_B$ ), 绘出  $M_t$  图如下图。

(2) 钻杆横截面上的最大和最小扭转剪应力

$$I_p = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4) = \frac{\pi}{32}(80^4 - 60^4) = 2.749 \times 10^6 \text{mm}^4$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{I_p} \times \frac{D}{2} = \frac{3.25 \times 10^3}{2.749 \times 10^6} \times \frac{80}{2} = 47.29 \text{MPa}$$

$$\tau_{\min} = \frac{M_t}{I_p} \times \frac{d}{2} = \frac{3.25 \times 10^3}{2.749 \times 10^6} \times \frac{60}{2} = 35.47 \text{MPa}$$

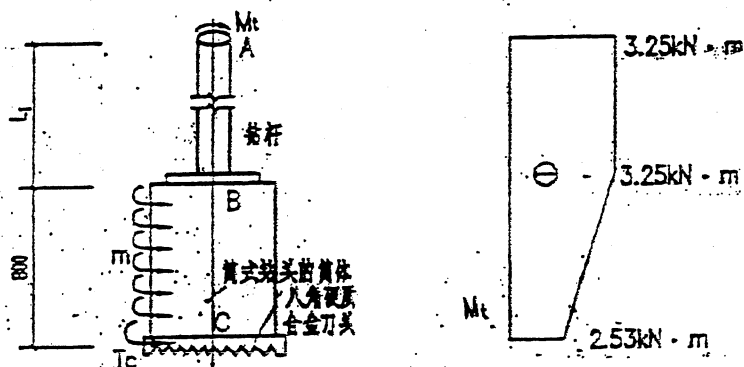


图 3-7 图

\* [3-8] 在图 a 示受扭圆轴内, 用横截面 ABC、DEF 和径向纵截面 ACFD 切出分离体 ABCDEF 如图 b。图 b 中, 点  $K_1(\rho, z)$  和点  $K_2(\rho, z)$  分别为左、右端横截面上任一点, 点  $K_3(x, z)$  是纵截面上任一点。(1) 分别写出点  $K_1$ 、 $K_2$ 、 $K_3$  处剪应力的表达式; (2) 用计算验证分离体是怎样平衡的。

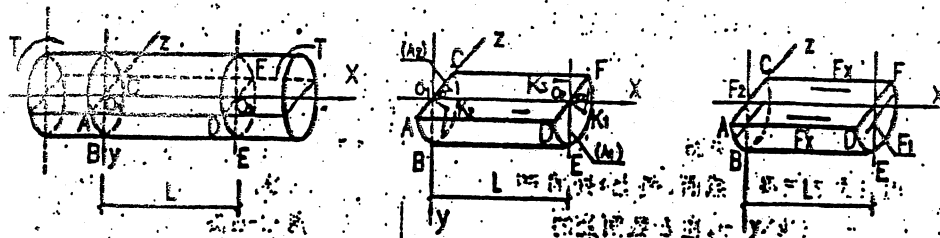
解:  $K_1$ 、 $K_2$  两点处的剪应力, 直接由横截面剪应力公式计算, 即  $\tau(\rho, z) = M_t \rho / I_p$ , 在  $K_3$  点处, 可取  $\rho = z$  用横截面剪应力公式计算, 即  $\tau(x, z) = M_t z / I_p$

下面从满足  $\sum X = 0$ ,  $\sum Y = 0$ ,  $\sum Z = 0$ ,  $\sum M_x = 0$ ,  $\sum M_y = 0$ ,  $\sum M_z = 0$  来验证分离体的平衡

(1) 在  $x$  轴方向上, 仅水平面 ADFC (面积为  $A_2$ ) 分布有力, 其合力,

$$\sum X = \int_{A_2} \tau(z, z) dA = \int_{A_2} \frac{M_t z}{I_p} dA = \int_{-r}^{+r} dz \int_{-r}^{+r} \frac{M_t z}{I_p} dz = 0$$

(2) 在  $y$  轴上方向上, 仅两横截面分布力有该轴方向的分量, 但左面 ABC ( $A_1$ ) 或右面 DEF ( $A_3$ ) 均有  $\sum Y = 0$ , 即各面分布力沿  $y$  轴方向的合力为零。例如右面 DEF 上,



$$\Sigma Y = \int_A \tau(\rho, \alpha) \cdot \cos \alpha \cdot dA = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{M_x \rho}{I_p} \cos \alpha \cdot \rho d\rho \cdot d\alpha = \int_0^{2\pi} \cos \alpha d\alpha \int_0^R \left(\frac{M_x}{I_p}\right) \rho^2 d\rho$$

其中  $\int_0^{2\pi} \cos \alpha \cdot d\alpha = 0$ , 故  $\Sigma Y = 0$  (b)

(3) 在  $z$  轴方向上, 右端面 DEF 有分布力合力  $F_1$ ,

$$F_1 = \int_A \tau(\rho, \alpha) \sin \alpha \cdot dA = \int_0^{2\pi} \sin \alpha d\alpha \int_0^R \left(\frac{M_x}{I_p}\right) \rho^2 d\rho$$

$$= 2 \times \left(\frac{M_x}{I_p}\right) \times \frac{r^3}{3} = \frac{2}{3} r_{\max}^3$$
 (c)

同理, 左端面 ABC 有分布力合力  $F_2$ , 方向正好与  $F_1$  相反, 即

$$F_2 = -F_1 = -\frac{2}{3} r_{\max}^3$$
 (d)

于是, 由式(c)和(d)容易得出

$$\Sigma Z = F_1 + F_2 = 0$$
 (e)

(4) 诸分布力对  $x$  轴的矩。水平面过  $x$  轴, 分布力对  $x$  轴之矩为零。左右端面分布的剪应力对  $x$  轴之矩分别为  $(M_x/2) = (T/2)$ , 它们大小相等, 方向相反, 满足  $\Sigma M_x = 0$ 。

(5) 诸分布力对  $z$  轴之矩。左端面、水平面均过  $z$  轴, 分布力之矩为零。而右端面分布力关于  $y$  轴方向的合力如式(b)为零, 故  $\Sigma M_z = 0$ 。

(6) 诸分布力对  $y$  轴之矩, 左端面过  $y$  轴, 力之矩为零。右端面力系有矩是,

$$M_{y,1} = -F_1 \times l = -\frac{2}{3} r_{\max}^3 l$$
 (f)

水平面 ADFC 力系对  $y$  轴之矩是

$$M_{y,2} = \int_A \tau(x, z) \cdot z \cdot dA = \int_0^R \frac{M_x z}{I_p} \cdot z \cdot dz \int_0^{2\pi} dx = \frac{M_x}{I_p} \left(\frac{z^3}{3}\right) \Big|_0^R \times l$$

$$= \frac{2}{3} \frac{M_x}{I_p} r^3 l = \frac{2}{3} r_{\max}^3 l$$
 (g)

$$\Sigma M_y = M_{y,1} + M_{y,2} = 0$$
 (h)

结论: 分离体能满足空间力系的六个平衡方程, 因而是力平衡的。

[3-9] 某钻机的钻杆为外径  $D=100\text{mm}$ , 内径  $d=80\text{mm}$  的空心圆截面轴, 其工作转速为  $n=90\text{r/min}$ , 设横截面上的最大剪应力为  $100\text{MPa}$ 。试确定钻机的最小功率。

解:  $\alpha = d/D = 0.8$ , 由公式  $\tau_{\max} = M_x/W_t$  得



$$M_t = W_t \tau_{\max} = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) \tau_{\max}$$

由题设,  $T = M_t$ , 又  $T = 9.55P/\pi$

$$\begin{aligned} \therefore P &= \frac{\pi}{9.55} T = \frac{\pi}{9.55} \times \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) \tau_{\max} \\ &= \left[ \frac{90}{9.55} \times \frac{\pi \times 100^3}{16} (1 - 0.8^4) \times 100 \right] \times 10^{-3} = 109.25 \text{ kW} \end{aligned}$$

[3-10] 当薄壁圆筒的平均半径  $r_0$  与壁厚  $t$ , 满足条件  $(r_0/t) \geq 10$  时, 试证明按公式(3-3)计算扭转剪应力的最大误差不超过 4.6%。

证明: 按公式(3-3)有  $\tau = M_t/2\pi r_0^2 t$ , 按精确公式,  $\tau_{\max} = M_t/W_t$

$$W_t = \frac{\pi}{16D} (D^4 - d^4) = \frac{\pi}{16D} (D+d)(D-d)(D^2 + d^2) \quad (c)$$

式中,  $D = 2r_0 + t$ ,  $d = 2r_0 - t$ , 故  $D+d = 4r_0$ ,  $D-d = 2t$ ,  $D^2 + d^2 = 8r_0^2 + 2t^2$ , 它们代入式(c)得

$$W_t = \frac{\pi}{16(2r_0 + t)} \times 4r_0 \times 2t \times (8r_0^2 + 2t^2) = \frac{\pi r_0^2}{2r_0 + t} (4r_0^2 + t^2)$$

设所求误差为  $\Delta$ , 则

$$\Delta = \frac{\tau_{\max} - \tau}{\tau_{\max}} = 1 - \frac{\tau}{\tau_{\max}} = 1 - \frac{W_t}{2\pi r_0^2 t}$$

将  $W_t$  代入上式得

$$\Delta = 1 - \frac{r_0^2 (4r_0^2 + t^2)}{(2r_0 + t) \times 2r_0^2 t} = 1 - \frac{4r_0^2 + t^2}{2r_0(2r_0 + t)}$$

令  $\beta = t/2r_0$ , 即  $t = 2\beta r_0$ , 上式改写为

$$\Delta = 1 - \frac{1 + \beta^2}{1 + \beta} = \frac{\beta(3 - \beta)}{1 + \beta}$$

由上式可见, 当  $\beta$  愈小, 误差  $\Delta$  也愈小。当  $(r_0/t) \geq 10$  (即  $\beta \leq 1/20$ ), 取等号时代入式中

$$\Delta = \frac{0.05(1 - 0.05)}{1 + 0.05} = 4.52\%$$

从而可知, 当  $(r_0/t) \geq 10$  时, 误差小于等于 4.52%, 未超过 4.6%。

[3-11] 图示阶梯形圆轴, 轮 2 为主动轮, 轴的转速  $n = 100 \text{ r/min}$ , 容许剪应力  $[\tau] = 80 \text{ MPa}$ 。当轴强度能力被充分发挥时, 试求主动轮输入的功率  $P_2$ 。

解: 按题设条件  $T_1 = [\tau] W_{t1}$ ,  $T_3 = [\tau] W_{t3}$ , 相应

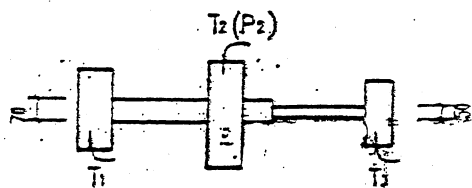


图 3-11 题

$$T_2 = T_1 + T_3 = [\tau] (W_{t1} + W_{t3})$$

$$\begin{aligned} \therefore P_2 &= \frac{n}{9.55} T_2 = \frac{n}{9.55} [\tau] (W_{t1} + W_{t3}) \\ &= \frac{100}{9.55} \times \left[ 80 \times \left( \frac{\pi \times 50^3}{16} + \frac{\pi \times 70^3}{16} \right) \times 10^{-3} \right] = 77.0 \text{ kW} \end{aligned}$$

[3-12] 直径为  $d_1$  的实心轴与内外直径比  $d_2/D_2 = 0.6$  的空心轴, 通过牙嵌离合器连接在一起, 已知轴的转速  $n = 100 \text{ r/min}$ , 传递功率  $P = 8.5 \text{ kW}$ , 容许剪应力  $[\tau] = 60 \text{ MPa}$ , 试确定  $n$ 。

和  $D_2$ 。

解：作用在两轴上的扭矩是

$$M_1 = T = 9.55 \frac{P}{n} = 9.55 \times \frac{8.5}{100} = 0.812 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

选实心轴，

$$d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{16M_1}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \times 0.812 \times 10^3}{\pi \times 60}} = 41.0 \text{ mm}$$

选空心轴，

$$D_2 \geq \sqrt[3]{\frac{16M_1}{\pi(1-\alpha^4)[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \times 0.812 \times 10^3}{\pi(1-0.6^4) \times 60}} = 42.94 \text{ mm}$$

【3-13】 题 3-1c 图示轴，若是直径  $d=70\text{mm}$  的实心轴，材料的  $[\tau]=80\text{MPa}$ ，试校核轴的强度。

解：由题 3-1c 解知， $M_{\max}=5\text{kN} \cdot \text{m}$ ，相应

$$\tau_{\max} = \frac{16M_{\max}}{\pi d^3} = \frac{16 \times 5 \times 10^3}{\pi \times 70^3} = 74.2 \text{ MPa}$$

因为  $\tau_{\max} < [\tau]=80\text{MPa}$ ，所以实心轴强度符合要求。

【3-14】 题 3-1b 图示轴，轴径  $d=50\text{mm}$ ，剪切弹性模量  $G=80\text{GPa}$ ，试计算该轴的总扭转角。

解：轴的分段情况和扭矩图如右图。各轴段的扭转角  $\varphi_{AC} = (M_n l_1)/GI_p$ ， $\varphi_{BC} = M_n l_2/GI_p$ ， $\varphi_{CD} = M_n l_3/GI_p$ ，轴的总扭转角是

$$\varphi = \varphi_{AB} = \varphi_{AB} + \varphi_{BC} + \varphi_{CD} = \frac{1}{GI_p} (M_n l_1 + M_n l_2 + M_n l_3)$$

$$= \frac{32}{80 \times 10^3 \times \pi \times 50^4} (3 \times 400 - 1 \times 500 + 1 \times 500) \times 10^3 = 2.445 \times 10^{-2} \text{ rad}$$

【3-15】 某一传动轴，转速  $n=150\text{r/min}$ ，传递功率  $P=60\text{kW}$ ，材料的  $[\tau]=60\text{MPa}$ ， $G=80\text{GPa}$ ，轴的单位长度容许扭角  $[\theta]=0.5^\circ/\text{m}$ ，试设计轴的直径。

$$\text{解： } M_1 = T = 9.55 \frac{P}{n} = 9.55 \times \frac{60}{150} = 3.82 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\text{按强度， } d \geq \sqrt[3]{\frac{16M_1}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \times 3.82 \times 10^3}{\pi \times 60}} = 68.7 \text{ mm}$$

$$\text{按刚度， } d \geq \sqrt[3]{\frac{32M_1}{\pi G[\theta] \times 10^{-3}}} \times \frac{180}{\pi} = \sqrt[3]{\frac{32 \times 3.82 \times 10^3 \times 180}{\pi \times 80 \times 10^3 \times 0.5 \times 10^{-3} \times \pi}} = 86.4 \text{ mm}$$

设计选取轴径  $d=87\text{mm}$ 。

【3-16】 某钢轴，转速  $n=150\text{r/min}$ ，传递的功率  $P=30\text{kW}$ ，采用材料的  $[\tau]=60\text{MPa}$ ， $G=80\text{GPa}$ ，轴工作的  $[\theta]=0.5^\circ/\text{m}$ ，设计此轴拟用两种方案，方案 I 将轴设计成直径为  $d_1$  的实心轴，方案 II 则设计成为内外径  $d_2/D_2=0.8$  的空心轴。试分别确定  $d_1$  和  $D_2$ ，并计算空心轴重量为实心轴重量的百分之几。

$$\text{解：(I) 设计 } d_1, M_1 = T = (9.55 \times 30/150) = 1.91 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

按强度,  $d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{16M_t}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \times 1.91 \times 10^4}{\pi \times 60}} = 54.5 \text{ mm}$

按刚度,  $d_1 \geq \sqrt[4]{\frac{32M_t}{\pi G[\theta] \times 10^3} \times \frac{180}{\pi}} = \sqrt[4]{\frac{32 \times 1.91 \times 10^4}{\pi \times 80 \times 10^3 \times 0.5 \times 10^{-3}} \times \frac{180}{\pi}} = 72.66 \text{ mm}$

(2) 设计空心轴的  $D_2$  (同样有  $M_t = 1.91 \text{ kN} \cdot \text{m}$ )

由强度条件

$$D_2 \geq \sqrt[3]{\frac{16M_t}{\pi(1-\alpha^4)[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \times 1.91 \times 10^4}{\pi(1-0.8^4) \times 60}} = 65.00 \text{ mm}$$

按刚度条件

$$D_2 \geq \sqrt[4]{\frac{32M_t}{\pi(1-\alpha^4)G[\theta] \times 10^3} \times \frac{180}{\pi}} = \sqrt[4]{\frac{32 \times 1.91 \times 10^4}{\pi(1-0.8^4) \times 80 \times 10^3 \times 0.5 \times 10^{-3}} \times \frac{180}{\pi}} = 82.89 \text{ mm}$$

(3) 两种设计方案所选轴的重量比

由(1)和(2)可知, 两种方案均由刚度条件决定着轴的直径, 前者  $d_1 = 72.66 \text{ mm}$ , 后者  $D_2 = 82.89 \text{ mm}$ . 它们长度相同, 材质相同, 轴的重量比等价于其面积比, 所以

$$\text{重量比} = \frac{\pi(D_2^2 - d_1^2)/4}{\pi d_1^2/4} = \frac{D_2^2}{d_1^2} (1 - \alpha^2) = \frac{82.89^2}{72.66^2} (1 - 0.8^2) = 46.9\%$$

[3-17] 图示圆截面轴, 材料的  $G = 80 \text{ GPa}$ , 试计算截面 C 的转角  $\varphi$ .

解: 拆出 B 端约束, 加上多余未知力  $T_B$ , 如图所示. 轴两端面间的扭转角

$$\varphi_{AB} = (\varphi_{AB})_T + (\varphi_{AB})_{T_B} = \frac{TL_C}{GI_t} - \frac{T_B l_{AB}}{GI_t} \quad (a)$$

将此静定基本体系与原设超静定扭轴相比较, 仅当

$$\varphi_{AB} = 0 \quad (b)$$

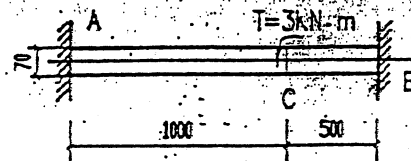
时, 两者相一致. 将式(a)代入式(b)有

$$TL_C - T_B l_{AB} = 0 \quad (c)$$

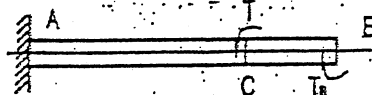
$$\text{得, } T_B = \frac{l_{AC}}{l_{AB}} T = \frac{1000}{1500} \times 3 = 2 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

所要计算的截面 C 的转角  $\varphi$  是

$$\begin{aligned} \varphi = \varphi_C = -\varphi_B &= -\frac{T_B l_{CB}}{GI_t} \\ &= \frac{2 \times 10^4 \times 500}{80 \times 10^3 \times (\pi/32) \times 70^4} = 5.30 \times 10^{-2} \text{ rad} \end{aligned}$$



题 3-17 图



题 3-17 解图

[3-18] 图示圆截面轴, 材料的  $[\tau] = 50 \text{ MPa}$ ,  $G = 80 \text{ GPa}$ , 轴工作的  $[\theta] = 0.35^\circ/\text{m}$ , 试确定容许的外力偶  $[T]$ .

解: 取图 a 示静定基本体系, 按变形比较方法得出几何方程

$$\varphi_{AB} = \frac{-T_a}{GI_t} + \frac{3T \times 2a}{GI_t} - \frac{T_B l}{GI_t} = 0$$

由此可解得多余未知反力

$$T_B = \frac{1}{l} (6 - 1) T_a = \frac{5a}{l} T = \frac{5 \times 600}{2000} T = \frac{3}{2} T$$

作轴的扭矩图如图b,  $M_{\max} = 1.5T$ 。

按强度条件, 有:

$$1.5T \leq [\tau]W,$$

$$\text{即 } T \leq \frac{1}{1.5}[\tau]W,$$

$$= \frac{1}{1.5} \times 50 \times \frac{\pi}{16} \times 60^3 \times 10^{-6}$$

$$= 1.41 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

按刚度条件,

$$1.5T \leq [\theta] \times 10^{-3} \times \frac{\pi}{180} \times GI_p,$$

$$\text{得 } T \leq \frac{1}{1.5}[\theta] \times 10^{-3} \times \frac{\pi}{180} \times G \times \frac{\pi}{32} d^4$$

$$= \frac{1}{1.5} \times 0.35 \times 10^{-3} \times \frac{\pi}{180}$$

$$\times 80 \times 10^3 \times \frac{\pi}{32} \times 60^4 \times 10^{-8}$$

$$= 0.414 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

轴的容许外力偶由刚度条件决定, 即  $[T] = 0.414 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 。

[3-19] 图示空心圆管A套在实心圆杆B的一端, 两杆在截面D处各有一直径相同的贯穿孔, 但两杆上孔中心线间有夹角  $\beta$ , 现在杆B上施加外力偶使杆B扭转, 当两孔对准后装上销钉再卸去施加在B杆上的外力偶, 若已知材料的  $G = 80 \text{ GPa}$ , 且销钉是刚性的。求作用于杆A和杆B截面上的扭矩。

解: 当装上销钉且卸去原施加在B杆上的力偶后, 两杆间在销钉处有相互作用的力偶  $T$  和  $T'$ , 且  $T = T'$ 。

$$\text{这时, } \varphi_{CD} = \frac{TL_1}{GI_{PA}}$$

$$\varphi_{DE} = -\frac{T'L_2}{GI_{PB}}$$

由变形相容的几何关系有

$$\varphi_{CD} + |\varphi_{DE}| = \beta = 5^\circ$$

$$\text{即 } \frac{T}{G} \left( \frac{L_1}{I_{PA}} + \frac{L_2}{I_{PB}} \right) \times \frac{180}{\pi} = 5^\circ$$

代入题设有关数据

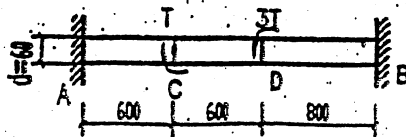
$$\frac{T \times 10^6}{80 \times 10^3} \left( \frac{32}{\pi} \times \frac{1000}{(48^4 - 42^4)} \right)$$

$$+ \frac{32}{\pi} \times \frac{1200}{40^4} \times \frac{180}{\pi} = 5^\circ$$

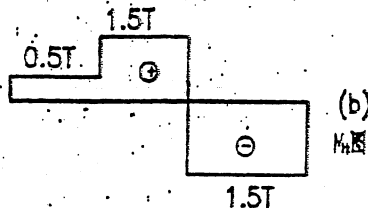
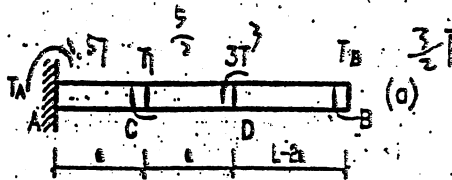
$$\text{解得 } T = 0.742 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

两杆各横截面上的扭矩  $M$ , 均为常量, 即

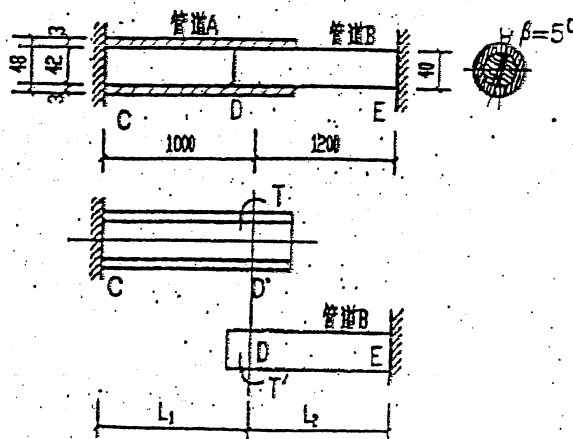
$$M_1 = T = 0.742 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



题 3-18 图



题 3-18 解图



题 3-19 图

[3-20] 图示阶梯形圆轴的  $[\theta] = 0.35^\circ/\text{m}$ , 材料  $G = 80\text{GPa}$ , 试求容许的外力偶  $[T]$ 。  
解: 设 B 端的约束反力偶为  $T_B$ , 则超静定扭轴有几何关系

$$\varphi_{AB} = (\varphi_{AB})_T + (\varphi_{AB})_{T_B} = 0$$

代入物理关系后, 上式化为

$$\frac{32T \times 1300}{G\pi d_1^4} - \frac{32T_B \times 1300}{G\pi d_1^4} - \frac{32T_B \times 1000}{G\pi d_2^4} = 0$$

$$\text{即} \quad 1.3T - [1.3 + (\frac{d_1}{d_2})^4]T_B = 0$$

$$\text{或者} \quad 1.3T - [1.3 + (60/40)^4]T_B = 0$$

$$\text{解得} \quad T_B = 0.204T$$

在 AC 段,  $M_n = T - T_B = 0.796T$ , 在 CB 段,  $M_n = -T_B = -0.204T$ . 与此相应两轴段的单位长扭角是  $\theta_1$  和  $\theta_2$ , 且

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{M_n}{GI_p} \times \frac{GI_p}{|M_n|} = \frac{I_{p1}}{I_{p2}} \times \frac{M_n}{|M_n|} = (\frac{d_2}{d_1})^4 \times \frac{M_n}{|M_n|} = (\frac{40}{60})^4 \times \frac{0.796}{0.204} = 0.77$$

这表明, 细轴段变形程度大, 应是刚度条件考虑的关键。

$$\text{取} \quad \theta_2 = [\theta]$$

$$\text{相应地} \quad \frac{32 \times 0.204(T) \times 10^6}{G\pi d_2^4} \times \frac{180}{\pi} = 0.35 \times 10^{-3}$$

$$\text{得到} \quad [T] = \frac{0.35 \times 10^{-3} \times 80 \times 10^3 \times \pi^2 \times 40^4}{32 \times 0.204 \times 10^6 \times 180} = 0.602\text{kN} \cdot \text{m}$$

\* [3-21] 图示圆锥形杆, 锥度不大, 沿轴线受均匀分布的扭转力偶 (其集度为  $m$ ) 作用, 试计算自由端 B 的扭转角。

解: 以 A 端为坐标原点建立  $x$  坐标, 在  $x$  截面处的扭矩和直径分别为

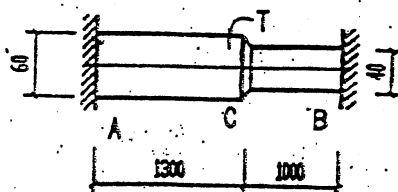
$$M_n(x) = m(l-x), \quad d(x) = d_1 + \frac{x}{l}(d_2 - d_1)$$

由扭转角公式, 所求的

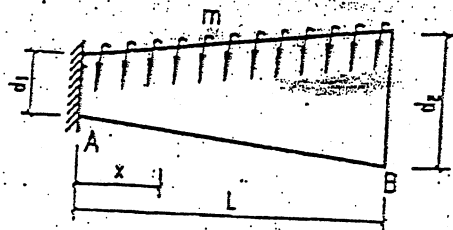
$$\varphi_B = \varphi_{AB} = \int_0^l \frac{M_n(x)dx}{GI_p(x)} = \frac{32m}{G\pi} \left[ \int_0^l \frac{l}{d^4(x)} dx - \int_0^l \frac{x}{d^4(x)} dx \right]$$

上式中积分

$$\begin{aligned} [\dots] &= \int_0^l \frac{l dx}{[d_1 + \frac{x}{l}(d_2 - d_1)]^4} - \int_0^l \frac{x [d_1 + \frac{x}{l}(d_2 - d_1)]^{-4} dx}{1} \\ &= \left[ \frac{-l^2}{3(d_2 - d_1)} \left( d_1 + \frac{x}{l}(d_2 - d_1) \right)^{-3} \right]_0^l - x \cdot \left( \frac{-l}{3(d_2 - d_1)} \right) \\ &\quad \left( d_1 + \frac{x}{l}(d_2 - d_1) \right)^{-3} \Big|_0^l + \int_0^l \left( \frac{-l}{3(d_2 - d_1)} \right) \left( d_1 + \frac{x}{l}(d_2 - d_1) \right)^{-3} dx \\ &= \left( \frac{l^2}{3(d_2 - d_1)d_1^3} \right) + \frac{l^2}{6(d_2 - d_1)^2} \left( d_1 + \frac{x}{l}(d_2 - d_1) \right)^{-2} \Big|_0^l \end{aligned}$$



题 3-20 图



题 3-21 图

$$\begin{aligned}
 &= \frac{l^3}{3(d_2 - d_1)d_1^3} + \frac{l^3}{6(d_2 - d_1)^2} \times \left[ \frac{1}{d_1^2} - \frac{1}{d_2^2} \right] \\
 &= \frac{l^3}{3(d_2 - d_1)d_1^3} + \frac{l^3}{6(d_2 - d_1)^2} \times \frac{-(d_2 + d_1)(d_2 - d_1)}{d_1^2 d_2^2} \\
 &= \frac{l^3}{6(d_2 - d_1)} \left[ \frac{2d_2^2 - d_2 d_1 - d_1^2}{d_1^2 d_2^2} \right] \\
 &= \frac{(d_1 + 2d_2)l^3}{6d_1^2 d_2^2}
 \end{aligned}$$

代回前式

$$\varphi = \frac{32m}{G\pi} \times \frac{(d_1 + 2d_2)l^3}{6d_1^2 d_2^2} = \frac{16ml^3}{3G\pi d_1^2 d_2^2} (1 + 2\frac{d_2}{d_1})$$

[3-22] 图示实心圆截面轴, 已知  $[\theta] = 0.5^\circ/\text{m}$ ,  $G = 80\text{GPa}$ , 试选定轴的直径  $d$ 。

解: 取基本静定体系如图 a, 轴横截面上的扭矩在 AC 段

$$M_n(x) = m(a-x) - T_B \quad (a)$$

在 CB 段

$$M_n(x) = -T_B$$

由变形的几何条件

$$\varphi_{AB} = \varphi_{AC} + \varphi_{CB} = 0$$

$$\begin{aligned}
 \text{可得 } \varphi_{AB} &= \int_0^a \frac{M_n dx}{GI_p} + \int_a^l \frac{M_n dx}{GI_p} \\
 &= \frac{1}{GI_p} \left[ \int_0^a M_n dx + \int_a^l M_n dx \right] = 0
 \end{aligned}$$

将式(a)、(b)代入得

$$\int_0^a (ma - mx - T_B) dx + \int_a^l (-T_B) dx = 0$$

$$\text{即 } ma^2 - \frac{m}{2}a^2 - T_B a - T_B(l-a) = 0$$

$$\text{解得 } T_B = \frac{a^2 m}{2l} \quad (c)$$

$$\text{又 } T_A = ma - T_B = (1 - \frac{a}{2l})ma \quad (d)$$

将  $m = 2\text{kN} \cdot \text{m}/\text{m}$  代入式(c)和(d)可得

$$T_B = \frac{0.8^2}{2 \times 1.0} \times 2 = 0.64\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$T_A = (1 - \frac{0.8}{2 \times 1.0}) \times 0.8 \times 2 = 0.96\text{kN} \cdot \text{m}$$

相应轴的扭矩图如图 b。

轴的刚度条件

$$\theta_{\max} = \frac{M_{\max}}{GI_p} \times \frac{180}{\pi} = \frac{32M_{\max}}{\pi G d^4} \times \frac{180}{\pi} \leq [\theta] \times 10^{-3}$$

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32 \times 180 M_{\max}}{\pi G [\theta] \times 10^{-3}}} = \sqrt[4]{\frac{32 \times 180 \times 0.96 \times 10^3}{80 \times 10^3 \times \pi^2 \times 0.5 \times 10^{-3}}} = 61.16\text{mm}$$

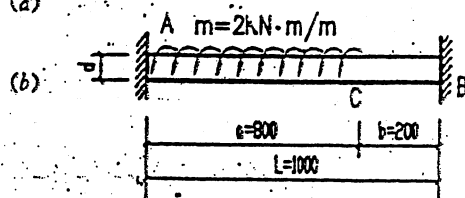


图 3-22 图

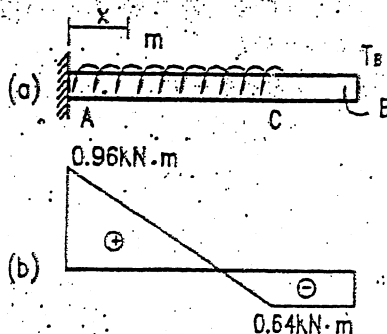


图 3-22 解图

取

$$d = 62 \text{ mm}$$

[3-23] 有一矩形截面轴, 横截面尺寸  $100 \text{ mm} \times 60 \text{ mm}$ , 长度  $l = 1.8 \text{ m}$ , 轴因两端受一力偶  $T$  作用而扭转, 已知材料的  $G = 80 \text{ GPa}$ ,  $[\tau] = 60 \text{ MPa}$ ,  $[\theta] = 1.0^\circ/\text{m}$ 。试确定容许的力偶  $[T]$ 。

解: 根据强度条件和刚度条件可以写出容许外力偶的条件, 即由

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t} \leq [\tau]$$

和

$$\theta = \frac{M_t}{GI_t} \times \frac{180}{\pi} \leq [\theta] \times 10^{-3}$$

有

$$T_1 \leq [\tau] \cdot W_t \quad \text{和} \quad T_2 \leq GI_t \times \frac{\pi}{180} [\theta] \times 10^{-3}$$

再由矩形截面边长  $h/b = 100/60 = 1.667$ , 查表得

$$\alpha = 0.294 + \frac{0.167}{2 - 1.5} \times (0.457 - 0.294) = 0.348$$

$$\beta = 0.346 + \frac{0.167}{2 - 1.5} \times (0.493 - 0.346) = 0.395$$

于是,

$$W_t = \beta b^3 = 0.395 b^3, \quad I_t = \alpha b^4 = 0.348 b^4$$

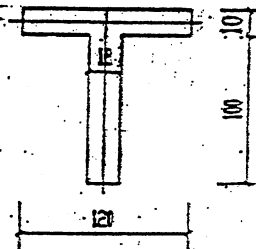
将  $W_t, I_t$  代入  $T_1$  和  $T_2$  计算式

$$T_1 \leq 60 \times 0.395 \times 60^3 \times 10^{-9} = 5.12 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$T_2 \leq 80 \times 10^3 \times 0.348 \times 60^4 \times \frac{\pi}{180} \times 1.0 \times 10^{-3} \times 10^{-6} = 6.30 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

选取两者中较小的, 得  $[T] = 5.12 \text{ kN} \cdot \text{m}$

[3-24] 图示 T 字形截面杆长为  $l = 1.5 \text{ m}$ , 材料的  $G = 80 \text{ GPa}$ , 受纯扭矩  $M_t = 0.25 \text{ kN} \cdot \text{m}$  作用, 试求此杆的最大剪应力及扭转角。



题3-24图

$$\text{解: } \tau_{\max} = \frac{M_t}{I_t} \cdot r_{\max} = \frac{3M_t}{\sum h_i b_i^3} \cdot r_{\max}$$

$$= \frac{3 \times 0.25 \times 10^3}{120 \times 10^3 + 100 \times 12^3} \times 12 = 30.74 \text{ MPa}$$

杆的扭转角

$$\varphi = \frac{M_t l}{GI_t} = \frac{0.25 \times 10^3 \times 1500}{80 \times 10^3 \times \frac{1}{3} \times (120 \times 10^3 + 100 \times 12^3)} = 4.80 \times 10^{-2} \text{ rad}$$

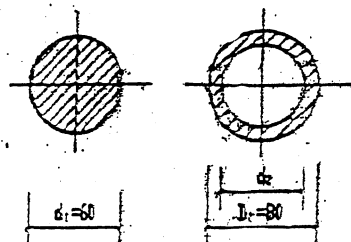
[3-25] 图示两种受扭圆轴, 横截面面积相同, 若材料的剪切屈服极限  $\tau_s = 160 \text{ MPa}$ , 试求两轴的塑性极限扭矩。

解: 对于实心圆截面轴

$$M_{tL1} = \frac{\pi d^3}{12} \tau_s$$

$$= \frac{\pi \times 60^3}{12} \times 160 \times 10^{-6} = 9.05 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

对于空心圆截面轴, 其横截面面积  $A_2$  与实心轴



题3-25图

的  $A_1$  相同,即

$$\frac{\pi}{4}(80^2 - d_1^2) = \frac{\pi}{4}60^2$$

可求得,  $d_1 = \sqrt{80^2 - 60^2} = 52.92\text{mm}$ , 相应的塑性极限扭矩

$$M_{p1} = \left( \frac{\pi D_1^3}{12} - \frac{\pi d_1^3}{12} \right) \times \tau_s = \frac{\pi}{12}(80^3 - 52.92^3) \times 160 \times 10^{-3} = 15.24\text{kN} \cdot \text{m}$$

\* [3-26] 某一受扭闭口薄壁杆件,其截面为矩形,设杆的截面面积  $A$  和壁厚  $t$  不变,当截面分别为图 a 示正方形和图 b 示长方形时,为在强度方面比较截面的合理性,(1)试求两种情况下杆容许承受的扭矩  $[M_p]$  与  $[M_{p1}]$  的比值。(2)并作简单讨论。

解:对于图 a 示正方形闭口薄壁杆

$$[M_p] = [\tau] \cdot 2A_p t = 2[\tau]a^2 t$$

对于图 b 示矩形闭口薄壁杆

$$[M_{p1}] = [\tau] \cdot 2A_{p1} t = 2[\tau]\beta b_1^2 t$$

它们的比值  $k$  为

$$k = [M_p]/[M_{p1}] = a^2/\beta b_1^2$$

题 3-26 图

由题设,  $A = 4at = A_1 = 2(1+\beta)b_1 t$ , 有  $b_1 = \frac{2}{1+\beta}a$ , 代入上式

$$k = \frac{a^2}{\beta} \times \left( \frac{1+\beta}{2a} \right)^2 = \frac{(1+\beta)^2}{4\beta} = 0.25\beta + 0.5 + 0.25 \frac{1}{\beta}$$

讨论:当  $\beta=1$  时,  $k=1$  (图 b 此时与图 a 一致), 而图 b 中  $\beta_{\max}$  对应于  $(b_1)_{\min} = t$ , 相应  $t = b_{1\min} = 2a/(1+\beta_{\max})$ , 即

$$\beta_{\max} = \frac{2a}{t} - 1$$

将  $k$  对于  $\beta$  求导,  $\frac{dk}{d\beta} = 0.25 - \frac{0.25}{\beta^2}$ , 因  $\beta \geq 1$ , 故  $\frac{dk}{d\beta} \geq 0$ , 函数  $k(\beta)$  在  $[1, \beta_{\max}]$  区间内是由  $k=1$ , 单调上升的。在  $\beta_{\max}$  处, 有  $k_{\max} = 0.5 \frac{a}{t} + 0.25 + 0.125 \frac{t}{a}$

若设  $\frac{a}{t} = 10$ , 则  $k_{\max} = 0.5 \times 10 + 0.25 + 0.125 \times \frac{1}{10} = 5.263$  (倍)。

\* [3-27] 图示受扭圆轴,材料为理想弹塑性体,剪切屈服极限  $\tau_s = 160\text{MPa}$ ,轴长  $l = 1.0\text{m}$ 。(1)试求塑性极限情况下,相应的最大均布力偶集度  $m$ 。(2)试确定在截面 D 处的弹性核心半径  $r_0$ 。

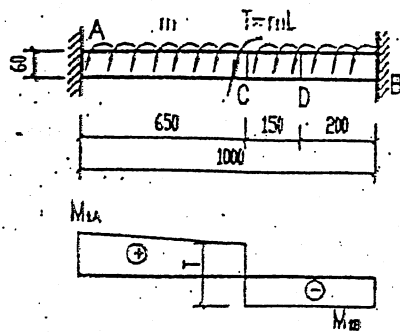
解:(1)塑性极限状态分析与相应的  $m$ 。在弹性工作阶段,扭矩图有峰值为  $M_{tB}$  和  $M_{tA}$ , 且  $|M_{tA}| > M_{tB}$  (由  $T$  作用位置靠近 B 端推断)。

该扭转超静定轴的塑性极限状态为

$$|M_{tB}| = M_{tA} = M_t^p$$

由平衡  $M_t^p = \frac{1}{2}(|M_{tB}| + M_{tA})$

$$= \frac{1}{2}(ml + T) = ml$$



题 3-27 图



$$\therefore m = \frac{M_t}{l} = \frac{1}{l} \times \frac{\pi d^3}{12} \times \tau_s = \frac{1}{1.0} \times \frac{\pi \times 60^3}{12} \times 160 \times 10^{-6} = 9.05 \text{ kN} \cdot \text{m/m}$$

(2) D截面的弹性核半径  $r_e$ .

相应于上述极限状态,  $|M_{D0}| = |M_{D0}| - 0.2m$ , 该面上分布内力素的合力矩可写为

$$|M_{D0}| = \frac{\pi}{12} [d^3 - (2r_e)^3] \tau_s + \frac{\pi (2r_e)^3}{16} \tau_s = \frac{\pi}{12} (d^3 - 2r_e^3) \tau_s$$

$$\text{得, } r_e = \sqrt[3]{\frac{d^3}{2} - \frac{6|M_{D0}|}{\pi \tau_s}} = \sqrt[3]{\frac{60^3}{2} - \frac{6 \times (9.05 - 0.2 \times 9.05) \times 10^6}{\pi \times 160}} = 27.84 \text{ mm}$$

[3-28] 图示机轴由两段直径  $d=100\text{mm}$  的圆轴, 用凸缘和八个螺栓连接而成, 螺栓布置在  $D_0=200\text{mm}$  的圆周上, 设轴在扭转时最大剪应力  $\tau_{\max}=80\text{MPa}$ , 螺栓的容许剪应力  $[\tau]=60\text{MPa}$ , 试选取螺栓的直径  $d_1$ .

解: (1) 作用于圆轴的扭矩  $M_t$

$$M_t = W \cdot \tau_{\max} = \frac{\pi d^3}{16} \tau_{\max}$$

(2) 每颗螺栓担负的剪力  $V$

$$\therefore M_t = 8 \times V \times \frac{D_0}{2}$$

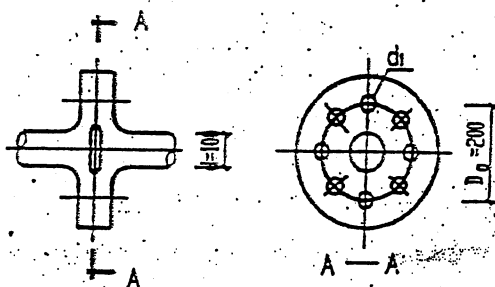
$$\therefore V = M_t / (4D_0) = \frac{\pi d^3}{64D_0} \tau_{\max}$$

(3) 选螺栓直径

$$\text{由 } \tau_v = \frac{V}{A} = \frac{4V}{\pi d_1^2} \leq [\tau]$$

$$\text{有 } d_1 \geq \sqrt{\frac{4V}{\pi[\tau]}} = \sqrt{\frac{4}{\pi[\tau]} \times \frac{\pi d^3}{64D_0} \tau_{\max}} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{100^3 \times 80}{60 \times 200}} = 20.4 \text{ mm}$$

$$\text{选 } d_1 = 20.4 \text{ mm}$$



题 3-28 图

[3-29] 图示托架, 由四个  $d=20\text{mm}$  的铆钉将钢板锚固于立柱而成, 铆钉都受单剪, 试求最危险的铆钉横截面剪应力的数值与方向。

提示: 可将  $P$  力向铆钉群的横截面形心简化。

解: (1) 铆钉受力分析

钢板分离体如图 a, 可反映各铆钉所受水平剪力和竖向剪力的情况, 其中

$$V_{1x} = V_{2x} = V_{3x} = V_{4x} = \frac{P}{4} = 7.5 \text{ kN}$$

而水平剪力对铆钉群形心  $O$  点的矩为

$$2(V_{1x}r_1 + V_{2x}r_2) = Pb$$

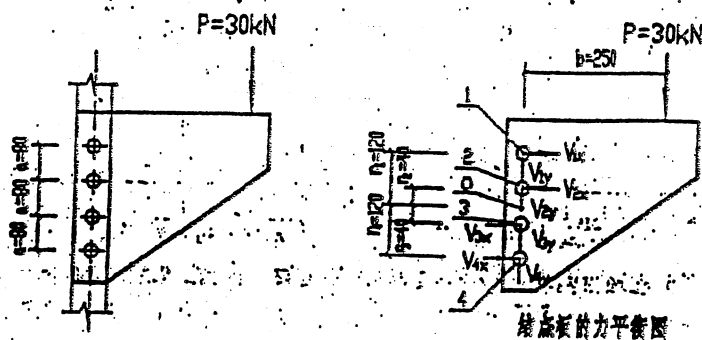
又当钢板有转动趋势时, 应满足变形协调, 即

$$V_{1x}/V_{2x} = r_1/r_2$$

此式与前式联立, 解出

$$V_{2x} = \frac{Pbr_1}{2(r_1^2 + r_2^2)} = \frac{30 \times 250 \times 40}{2(120^2 + 40^2)} = 9.375 \text{ kN}$$

$$V_{1x} = \frac{r_1}{r_2} V_{2x} = \frac{120}{40} \times 9.375 = 28.125 \text{ kN}$$



题 3-29 图

(2) 最危险铆钉的剪应力及方向

铆钉 1、4 剪应力数值相同(方向如图)

$$\tau_{\max} = V_{\max} / \frac{\pi d^2}{4} = \frac{4 \sqrt{V_{1x}^2 + V_{1y}^2}}{\pi d^2} = \frac{4 \sqrt{28.125^2 + 7.5^2} \times 10^3}{\pi \times 20^3} = 92.65 \text{ MPa}$$

其方向与  $V_{1x}$  或与  $V_{1y}$  分别成角度

$$\alpha = \tan^{-1} \left( \frac{\tau_x}{\tau_y} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{V_{1y}}{V_{1x}} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{7.5}{28.125} \right) = 14.93^\circ$$

## 第四章 平面图形的几何性质

[4-1] 试用积分法确定图示平面图形的形心位置。

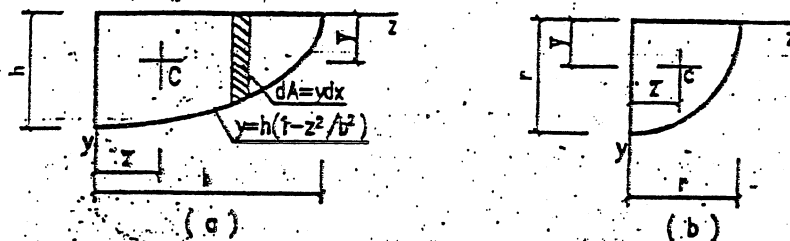


图 4-1

解: (a) 取平行于  $y$  轴的微条  $dA = ydx$ , 其形心坐标为  $(y/2, z)$ , 静矩

$$S_y = \int_A x dA = \int_0^b y x dz = \int_0^b h(1 - \frac{z^2}{b^2}) x dz = h(\frac{x^2}{2} - \frac{z^4}{4b^2})_0^b = \frac{b^2 h}{4}$$

$$S_z = \int_A (\frac{y}{2}) dA = \int_0^b \frac{1}{2} y^2 dz = \frac{1}{2} \int_0^b h^2(1 - \frac{z^2}{b^2})^2 dz = \frac{h^2}{2} (z - \frac{2z^3}{3b^2} + \frac{z^5}{5b^4})_0^b = \frac{4bh^2}{15}$$

$$\text{面积 } A = \int_A dA = \int_0^b y dz = \int_0^b h(1 - \frac{z^2}{b^2}) dz = \frac{2}{3}bh \quad S_z = \int_A y dA = \bar{y} \cdot A = \sum y_i A_i$$

$$\text{于是 } \bar{z} = S_y/A = (\frac{b^2 h}{4})/(\frac{2}{3}bh) = \frac{3b}{8}$$

$$\bar{y} = S_z/A = (\frac{4bh^2}{15})/(\frac{2}{3}bh) = \frac{2h}{5}$$

(b) 取极坐标  $(\rho, \alpha)$ , 相应  $dA = \rho d\rho d\alpha$  ( $\alpha$  由  $y$  轴转向  $z$  轴)。根据对称性静矩

$$S_x = S_y = \int_A y dA = \int_0^{\pi/2} \rho^2 d\rho \int_0^{\pi/2} \sin \alpha d\alpha = \frac{\pi^2}{3}$$

面积

$$A = \pi^2/4$$

得

$$\bar{y} = \bar{z} = S_y/A = (\frac{\pi^2}{3})/(\frac{\pi^2}{4}) = \frac{4\pi}{3\pi}$$

[4-2] 确定图示图形形心的位置。

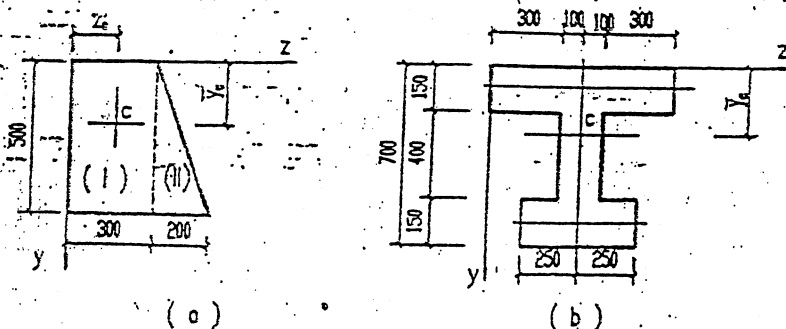


图 4-2

解: (a) 将梯形划分为一个矩形和一个三角形, 相应

$$\bar{y} = \frac{\sum A_i \bar{y}_i}{\sum A_i} = \frac{300 \times 500 \times 250 + 0.5 \times 200 \times 500 (2 \times 500/3)}{300 \times 500 + 0.5 \times 200 \times 500} = 270.8 \text{ mm}$$

同理  $\bar{z} = \frac{300 \times 500 \times 150 + 0.5 \times 200 \times 500 \times (200/3 + 300)}{300 \times 500 + 0.5 \times 200 \times 500} = 204.2\text{mm}$

(b) 图形形心在对称轴上,  $\bar{z}=400\text{mm}$ , 另一个坐标

$$\bar{y} = \frac{500 \times 150 \times (550 + 150/2) + 200 \times 400 \times 350 + 800 \times 150 \times 75}{500 \times 150 + 200 \times 400 + 800 \times 150} = 305\text{mm}$$

[4-3] 试确定图示三角形和四分之一圆形对  $y, z$  轴的惯性矩  $I_y, I_z$  和惯性积  $I_{yz}$ 。

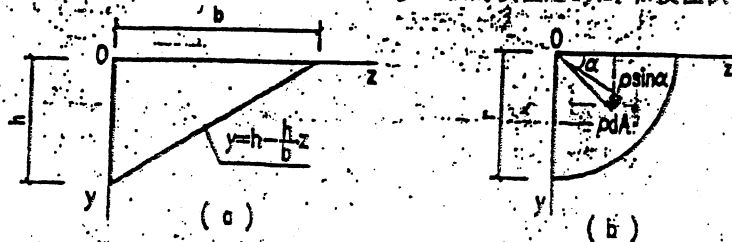


图 4-3

解: (a) 三角形对  $y, z$  轴的惯性矩分别为

$$I_y = \int_A z^2 dA = \int_0^b z^2 dz \int_0^{(h-hz/b)} dy = \int_0^b (hz^2 - \frac{h}{b}z^3) dz = \frac{b^3 h}{12}$$

$$I_z = \int_A y^2 dA = \int_0^h y^2 dy \int_0^{(h-hy/b)} dx = \int_0^h \frac{1}{3} (h - \frac{h}{b}y)^3 dy = \frac{bh^3}{12}$$

惯性积  $I_{yz} = \int_A yz dA = \int_0^b z dz \int_0^{(h-hz/b)} y dy = \frac{1}{2} \int_0^b z (h - \frac{h}{b}z)^2 dz = \frac{b^3 h^2}{24}$

(b) 由对称性, 四分之一圆形的

$$I_z = I_y = \iint r^2 \sin^2 \alpha \rho d\alpha = \int_0^r \rho^3 d\rho \int_0^{\pi/2} \sin^2 \alpha d\alpha = \frac{\pi r^4}{16}$$

惯性积  $I_{yz} = \int_A yz dA = \iint r^2 \sin \alpha \cos \alpha \rho d\alpha = \int_0^r \rho^3 d\rho \int_0^{\pi/2} \sin \alpha \cos \alpha d\alpha = \frac{r^4}{8}$

[4-4] 图示矩形、箱形和工字形截面的图形面积  $A$  相同, 试求它们对形心轴  $z$  的惯性矩之比。

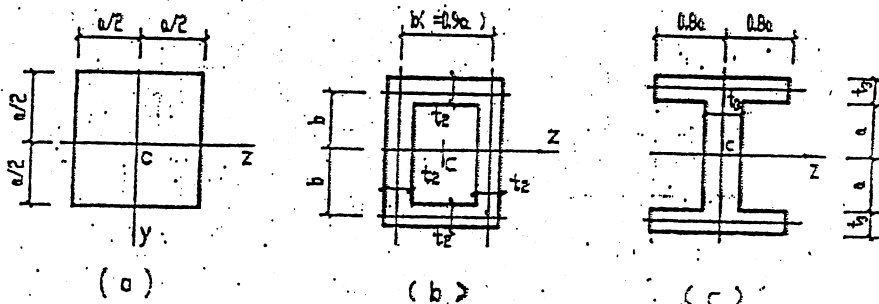


图 4-4

解: 图 a 正方形,  $A_1 = a^2, I_{z1} = a^4/12$

图 b 箱形, 由条件  $A_2 = 6bt_2 = 6 \times (0.9a)t_2 = 5.4at_2 = A_1$ , 有  $t_2 = a/5.4$ 。

相应  $I_{z2} = \frac{1}{12} [(b + t_2)(2b + t_2)^3 - (b - t_2)(2b - t_2)^3]$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a^4}{12} \left[ \left( \frac{b}{a} + \frac{t_1}{a} \right) \times \left( \frac{2b}{a} + \frac{t_1}{a} \right)^3 - \left( \frac{b}{a} - \frac{t_1}{a} \right) \left( \frac{2b}{a} - \frac{t_1}{a} \right)^3 \right] \\
&= \left[ \left( 0.9 + \frac{1}{5.4} \right) \times \left( 1.8 + \frac{1}{5.4} \right)^3 - \left( 0.9 - \frac{1}{5.4} \right) \times \left( 1.8 - \frac{1}{5.4} \right)^3 \right] I_{x_1} \\
&= 5.48 I_{x_1}
\end{aligned}$$

对于图c示工字形,由条件

$$A_3 = (2 \times 1.6a + 2a)t_2 = 5.2at_2 = a^2, \text{ (即 } t_2 = a/5.2 \text{)}$$

其惯性矩  $I_{x_1}$  为:

$$\begin{aligned}
I_{x_1} &= \frac{1}{12} \left[ (1.6a) \times (2a + 2t_2)^3 - (1.6a - t_2) \times 2a^3 \right] \\
&= \left[ 1.6 \times \left( 2 + \frac{2}{5.2} \right)^3 - \left( 1.6 - \frac{1}{5.2} \right) \times 2^3 \right] I_{x_1} = 10.43 I_{x_1}
\end{aligned}$$

最后得到,  $I_{x_1} : I_{x_2} : I_{x_3} = 1 : 5.48 : 10.43$

[4-5] 已知三角形对  $y, z$  轴的惯性矩  $I_y = bh(3b - 3bd + d^2)/12$ ,  $I_z = bh^3/12$  以及惯性积  $I_{yz} = bh^2(3b - 2d)/24$ , 求三角形对形心轴  $y_c, z_c$  的惯性矩  $I_{y_c}, I_{z_c}$  和惯性积  $I_{y_c z_c}$ .

解: (1) 确定形心坐标

取平行  $z$  轴的微分面积  $dA = b(y)dy$ , 其中  $b(y) = (h - y)b/h$ , 相应

$$S_y = \int_0^h y b(y) dy = \frac{b}{h} (hy - y^2/2) dy = \frac{bh^2}{6}$$

面积  $A = bh/2$ , 故  $\bar{y} = S_y/A = h/3$ . 这表明三角形形心距任一边, 等于相应高的三分之一. 形心的另一坐标, 可由其下顶点向  $z$  轴引垂线所得两个三角形来计算, 即

$$\begin{aligned}
\bar{z} &= \left\{ \frac{(b-d)h}{2} \times \frac{2(b-d)}{3} + \frac{dh}{2} \times \left[ (b-d) + \frac{d}{3} \right] \right\} / \left( \frac{(b-d)h}{2} + \frac{dh}{2} \right) \\
&= [2(b-d)^2 h + dh(3b - 2d)] / 3bh = (2b - d)/3
\end{aligned}$$

(2) 计算  $I_{y_c}, I_{z_c}$

$$I_{y_c} = I_y - A\bar{z}^2 = \frac{bh(3b^2 - 3bd + d^2)}{12} - \frac{bh}{2} \left( \frac{2b-d}{3} \right)^2 = \frac{bh}{36} (b^2 - bd + d^2)$$

$$I_{z_c} = I_z - A\bar{y}^2 = \frac{bh^3}{12} - \frac{bh}{2} \times \left( \frac{h}{3} \right)^2 = \frac{bh^3}{36}$$

(3) 惯性积  $I_{y_c z_c}$

$$I_{y_c z_c} = I_{yz} - A\bar{y}\bar{z}$$

$$= \frac{bh^2}{24} (3b - 2d) - \frac{bh}{2} \left( \frac{2b-d}{3} \right) \left( \frac{h}{3} \right) = \frac{bh^2}{72} (b - 2d)$$

[4-6] 已知  $z$  轴半圆环形的形心且与上边  $z$  轴平行, 试分别计算当  $a_1 = 0.5$  和  $a_2 = 0.8$  时的半圆环形对  $z$  轴的惯性矩  $I_{z_c}$ .

解: 利用组合图形计算形心公式

$$\bar{y} = \frac{S_1}{A} = \left( \frac{\pi r^2}{2} \times \frac{4r}{3\pi} - \frac{\pi r_1^2}{2} \times \frac{4r_1}{3\pi} \right) / \frac{\pi r^2}{2} (1 - a^2)$$

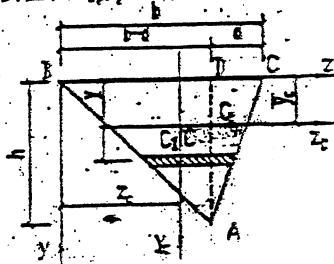


图 4-5

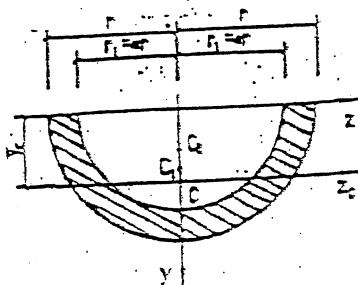


图 4-6

式中,  $a=r_1/r$ , 化简得

由移轴公式  $\bar{y} = \frac{1+a+a^2}{1+a} \times \frac{4r}{3\pi}$

$$I_x = I_c - A(\bar{y})^2 = \frac{\pi r^4}{8}(1-a^4) - \frac{\pi r^2}{2}(1-a^2) \times \bar{y}^2 = \frac{\pi r^4}{8}(1-a^2)[1+a^2-4(\frac{\bar{y}}{r})^2]$$

当  $a_1=0.5$ ,  $\bar{y}/r_1=14/9\pi$ , 相应

$$I_{x,1} = \frac{\pi r^4}{8}(1-0.5^2)[1+0.5^2-4 \times (14/9\pi)^2] = 0.0793r^4$$

当  $a_2=0.8$ ,  $\bar{y}/r_2=244/135\pi$ , 相应

$$I_{x,2} = \frac{\pi r^4}{8}(1-0.8^2)[1+0.8^2-4 \times (\frac{244}{135\pi})^2] = 0.0447r^4$$

[4-7] 试证明图示矩形对坐标轴  $y, z$  的惯性积  $I_{yz}$  恒小于零。

提示: 较简明的一个证明方法是过  $C$  点作  $z_c$  与  $z$  轴平行, 交矩形二长边为  $G, F$ , 这时四边形  $BGEF$  为菱形, 其  $I_{yz_c} = I_{yz}$ , ...

解法一: 按提示作  $z_c$  轴, 菱形的  $I_{yz_c,1} = 0$ , 四边形  $ABDF$  对  $y, z_c$  轴的惯性积,

$$I_{yz} = I_{yz,1} + I_{yz,2} + I_{yz,3}$$

式中, 因为  $\triangle ABG$  和  $\triangle EDF$  关于  $y, z_c$  坐标系有对称性, 且位于二、四象限, 故  $I_{yz,2} = I_{yz,3} < 0$ , 由此得到  $I_{yz} = 2I_{yz,2} < 0$

再用移轴公式

$$I_{yz} = I_{yz,2} + ab \times (\overline{BC} \times 0) = I_{yz,2} < 0$$

结论得证。

解法二: 利用惯性矩和惯性积转轴公式证明。设  $BD$  为  $y_1$  轴,  $BA$  为  $z_1$  轴, 坐标系  $y_1, z_1$  旋转  $\alpha$  ( $\alpha = \angle DBE$ ) 为  $yz$  坐标系。按几何关系

$$\sin \alpha = b / \sqrt{b^2 + h^2}, \cos \alpha = h / \sqrt{b^2 + h^2}, I_{y_1} = b^3 h / 3, I_{z_1} = b h^3 / 3, I_{y_1 z_1} = b^2 h^2 / 4$$

$$\sin 2\alpha = 2bh / (b^2 + h^2), \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = (h^2 - b^2) / (b^2 + h^2)$$

$$\text{于是, } I_{yz} = \frac{I_{y_1} - I_{z_1}}{2} \sin 2\alpha + I_{y_1 z_1} \cos 2\alpha$$

$$= \frac{1}{2} \times (\frac{b^3 h}{3} - \frac{b h^3}{3}) \times \frac{2bh}{b^2 + h^2} + \frac{b^2 h^2}{4} \times \frac{h^2 - b^2}{b^2 + h^2} = \frac{b^2 h^2 (b^2 - h^2)}{12(b^2 + h^2)}$$

显然, 因  $b^2 - h^2 < 0$ , 故  $I_{yz} < 0$ , 结论证实。

[4-8] 图示矩形 ( $\zeta = h/b \geq 1$ ), (1) 试确定矩形通过坐标原点  $O_1$  的主惯性轴的位置及主惯性矩; (2) 试确定矩形通过坐标原点  $O_2$  的主惯性轴的位置及主惯性矩  $I_{x_c}$  和  $I_{y_c}$ 。

解: (1) 第一问。

$$I_x = \frac{hb^3}{12} + bh(\frac{b}{2})^2 = \frac{hb^3}{3} = \frac{\zeta b^4}{3}$$

$$I_y = \frac{bh^3}{12} = \frac{\zeta^3 b^4}{12}$$

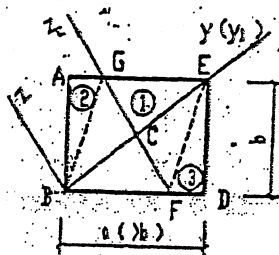


图 4-7 图

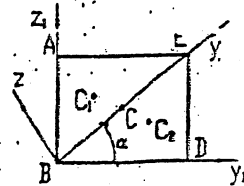


图 4-7 解图

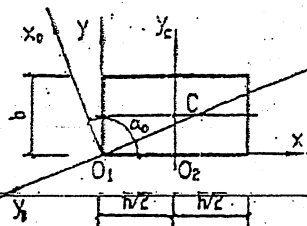


图 4-8 图

因  $y_c$  轴是对称轴, 故  $x, y$  坐标轴是主轴, 上述  $I_x, I_y$  即为所求主惯性矩。

(2) 第二问。对于  $x, y$  坐标系, 有

$$I_x = \zeta b^3/3, I_y = \zeta^3 b/3, I_{xy} = 0 + A(b/2)(b/2) = \zeta^2 b^4/4$$

因为  $\tan 2\alpha_0 = \frac{-2I_{xy}}{I_x - I_y} = \left(-\frac{\zeta^2 b^4}{2}\right) \times \frac{3}{\zeta b^3 - \zeta^3 b} = \frac{-3\zeta}{2(1 - \zeta^2)}$

这里  $\sin 2\alpha_0 < 0, \cos 2\alpha_0 < 0$ , 故  $\alpha_0 = \{\tan^{-1}[-3\zeta/2(1 - \zeta^2)]\}/2$ , 在  $90^\circ$  至  $135^\circ$  之间。另一主惯性轴与之垂直。

$$I_{x_0} = \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} = \frac{\zeta b^4}{6}(1 + \zeta^2) + \sqrt{\left(\frac{\zeta b^4}{6}\right)^2(1 - \zeta^2)^2 + \frac{\zeta^4 b^4}{16}}$$

$$= \zeta b^4(2 + 2\zeta^2 + \sqrt{4 + \zeta^2 + 4\zeta^4})/12$$

同理  $I_{y_0} = \zeta b^4(2 + 2\zeta^2 - \sqrt{4 + \zeta^2 + 4\zeta^4})/12$

[4-9] 利用题 4-3a 的结果, 确定图示三角形的形心主惯性轴的位置, 并计算形心主惯性矩。

解: 由题 4-3a, 有  $I_x = \zeta b^4/12, I_y = \zeta^3 b^4/12, I_{xy} = \zeta^2 b^4/24$ 。对于  $x, y$  坐标系

$$I_{x_c} = I_x - A(b/3)^2$$

$$= \zeta b^4/12 - (\zeta^2 b^2/2) \times (b^2/9) = \zeta b^4/36$$

同理  $I_{y_c} = \zeta^3 b^4/36$

$$I_{x_{c_0}} = I_{x_c} - A(b/3)(\zeta b/3) = -\zeta^2 b^4/72$$

确定形心主轴坐标系,  $x_0$  轴的方位,

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{-2I_{x_{c_0}}}{I_{x_c} - I_{y_c}} = \left(\frac{\zeta^2 b^4/36}{\zeta b^4/36}\right) \times \frac{36}{(\zeta - \zeta^3)b^4} = \frac{\zeta}{1 - \zeta^2}$$

因  $\sin 2\alpha_0 > 0, \cos 2\alpha_0 < 0$ , 故  $\alpha_0$  在  $45^\circ \sim 90^\circ$  范围内, 且

$$\alpha_0 = \arctan[\zeta/(1 - \zeta^2)]/2$$

相应  $I_{x_0} = \frac{I_{x_c} + I_{y_c}}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_{x_c} - I_{y_c}}{2}\right)^2 + I_{x_{c_0}}^2}$

$$= \frac{\zeta b^4}{72}(1 + \zeta^2) + \sqrt{\left[\frac{\zeta b^4}{72}(1 - \zeta^2)\right]^2 + \left(\frac{\zeta^2 b^4}{72}\right)^2} = \zeta b^4(1 + \zeta^2 + \sqrt{1 - \zeta^2 + \zeta^4})/72$$

同理  $I_{y_0} = \zeta b^4(1 + \zeta^2 - \sqrt{1 - \zeta^2 + \zeta^4})/72$

[4-10] 试确定图示组合图形的形心主惯性矩。

解: (1) 有关几何数据: 由型钢表查得 [32b 的

$$A_1 = 5491.3 \text{ mm}^2, z_1 = 21.6 \text{ mm},$$

$$I_{x_1} = 8.14 \times 10^7 \text{ mm}^4, I_{y_1} = 0.336 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

角钢的,  $A_2 = 1716.7 \text{ mm}^2, z_2 = 25.9 \text{ mm}$

$$I_{x_2} = I_{y_2} = 0.12858 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

(2) 形心位置。形心在对称轴上, 另一坐标以槽钢底边为参考

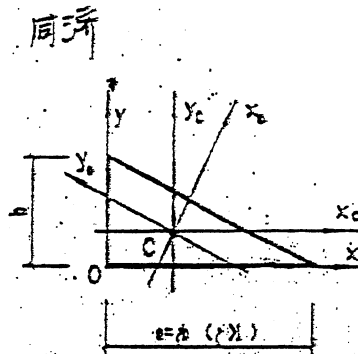


图 4-9 图

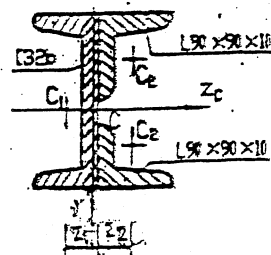


图 4-10 图

$$z_c = \frac{-A_1 z_1 + 2A_2 z_2}{A_1 + 2A_2} = \frac{5491.3 \times (-21.6) + 2 \times 1716.7 \times 25.9}{5491.3 + 2 \times 1716.7} = -3.326 \text{ mm}$$

(3) 计算  $I_x$  与  $I_y$

$$I_x = [8.14 + 2 \times 0.12858 + 2 \times 1716.7 \times (160 - 25.9)^2 \times 10^{-7}] \times 10^7 = 14.571 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

$$I_y = [0.336 + 5491.3 \times (21.6 - 3.326)^2 \times 10^{-7} + 2 \times 0.12858 + 2 \times 1716.7 \times (3.320 + 25.9)^2 \times 10^{-7}] \times 10^7 = 1.070 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

[4-11] 图示由两个[35c号槽钢组成的组合图形,若使图形对两对称轴的惯性矩  $I_x = I_y$ , 则两槽钢的间距  $a$  为多少?

解: (1) 查表得槽钢数据

$$A_1 = 7531 \text{ mm}^2, I_{x1} = 13.4 \times 10^7 \text{ mm}^4, I_{y1} = 0.536 \times 10^7 \text{ mm}^4, z_0 = 23.4 \text{ mm}.$$

(2) 计算槽钢间距  $a$ , 由  $I_x = I_y$  得,

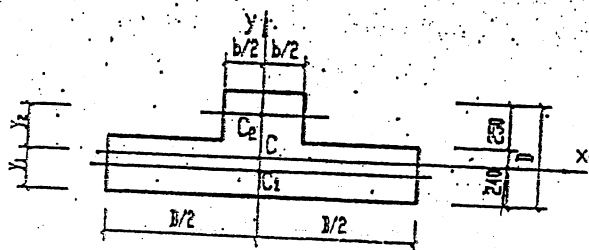
$$I_x = 2I_{x1} = 2I_{y1} + 2A_1(a/2 + z_0)^2$$

得

$$a = 2[\sqrt{(I_{x1} - I_{y1})/A_1} - z_0]$$

$$= 2[\sqrt{(13.4 - 0.536) \times 10^7 / 7531} - 23.4] = 214.6 \text{ mm} \quad \text{题 4-11 图}$$

[4-12] 图示物体 T 形截面, 当  $B=1200 \text{ mm}$ ,  $b=370 \text{ mm}$ ,  $D=490 \text{ mm}$  时, (1) 试计算该图形的形心位置参数  $y_1, y_2$ ; (2) 试计算图形对形心轴  $x$  和  $y$  的惯性矩及相应的回转半径。



题 4-12 图

解: (1)  $y_1, y_2$

$$y_1 = \frac{240 \times 1200 \times 120 + 370 \times 250 \times (125 + 240)}{240 \times 1200 + 370 \times 250} = 179.6 \text{ mm}$$

$$y_2 = D - y_1 = 490 - 179.6 = 310.4 \text{ mm}$$

(2)  $I_x, I_y$

$$I_x = \frac{1200 \times 240^3}{12} + 240 \times 1200 \times (179.6 - 120)^2 + \frac{370 \times 250^3}{12} + 370 \times 250 \times (310.4 - \frac{250}{2})^2 = 6.067 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

$$I_y = \frac{240 \times 1200^3}{12} + \frac{250 \times 370^3}{12} = 3.562 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

(3) 惯性半径

$$i_x = \sqrt{I_x/A} = \sqrt{6.067 \times 10^8 / (240 \times 120 + 250 \times 370)} = 126.3 \text{ mm}$$



$$i_y = \sqrt{I_y/A} = \sqrt{3.562 \times 10^8 / (240 \times 120 + 250 \times 370)} = 305.9 \text{ mm}$$

[4-13] 试求图示图形的形心主惯性轴的位置及其形心主惯性矩。

解: (1)  $I_x, I_y$  与  $I_{xy}$

$$I_x = \frac{1}{12} [2 \times (160 \times 40^3) + 40 \times 400^3] + 2 \times 160 \times 40 \times 180^2 = 6.298 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

$$I_y = \frac{1}{12} [2 \times 40 \times 160^3 + 400 \times 40^3] + 2 \times 160 \times 40 \times 100^2 = 1.574 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

$$I_{xy} = 0 + 0 + 2 \times [160 \times 40 \times (-100) \times 180] = -2.304 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

(2) 主惯性轴的方位

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{-2I_{xy}}{I_x - I_y} = \frac{-2 \times (-2.304)}{6.298 - 1.574} = 0.975$$

$\therefore \sin 2\alpha_0 > 0, \cos 2\alpha_0 > 0$ , 故  $\alpha_0$  在  $0^\circ \sim 45^\circ$  内,  $\alpha_0 = 22.14^\circ$

(3) 主惯性矩

$$I_{x_0} = \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} = \left(\frac{6.298 + 1.574}{2} + \sqrt{\left(\frac{6.298 - 1.574}{2}\right)^2 + (-2.304)^2}\right) \times 10^8 = 7.236 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_0} = \frac{I_x + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} = 0.636 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

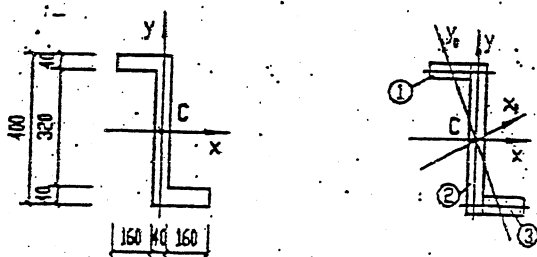


图 4-13

## 第五章 弯曲内力

5-1] 求图示各梁中指定截面上的剪力和弯矩。

(1) 解: 1) 求支座反力:

$$\text{由 } \Sigma M_A = 0, -R_B l + 2ql \cdot \frac{l}{2} + \frac{ql}{4} \cdot \frac{9}{8}l = 0, R_B = \frac{41}{32}ql$$

$$\text{由 } \Sigma Y = 0, R_A + R_B - 2ql - \frac{1}{4}ql = 0, R_A = \frac{31}{32}ql$$

2) 求截面 1 的剪力和弯矩:

取分离体如图 b, 由分离体写力平衡方程式

$$\Sigma Y = 0, R_A - 2q \cdot \frac{l}{2} - V_1 = 0, V_1 = -\frac{1}{32}ql$$

$$\Sigma M_{O_1} = 0, M_1 + 2q \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} - R_A \cdot \frac{l}{2} = 0$$

$$M_1 = R_A \cdot \frac{l}{2} - 2q \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{15}{64}ql^2$$

(2) 解: 1) 求支座反力  $R_A$

$$\text{由 } \Sigma M_B = 0, R_A \cdot 4 + 80 - 80 - 10 \times 4 \times 2 = 0, R_A = 20 \text{ kN}$$

2) 求截面 1 的剪力  $V_1$  和弯矩  $M_1$ :

$$\text{由 } \Sigma Y = 0, V_1 = 0$$

$$\Sigma M_{O_1} = 0, M_1 + 80 + 10 \times 2 \times 1 - R_A \cdot 2 = 0$$

$$M_1 = -60 \text{ kNm}$$

(3) 解: 1)  $V_1 = 1.2 \text{ kN}$

$$2) M_1 = -0.6 \text{ kNm}$$

(4) 解: 1) 求支反力  $R_B$ :  $\Sigma M_A = 0, R_B l + M = 0, R_B = -\frac{M}{l}$

$$2) \text{由 } \Sigma Y = 0, R_A = +\frac{M}{l}$$

$$3) V_1 = R_A = \frac{M}{l}, M_1 = R_A l = M$$

$$4) V_2 = 0, M_2 = M$$

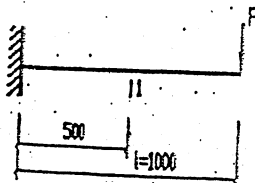


图 5-1-3

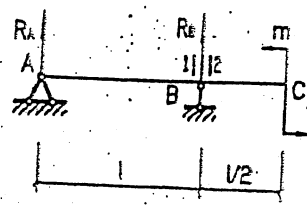


图 5-1-4

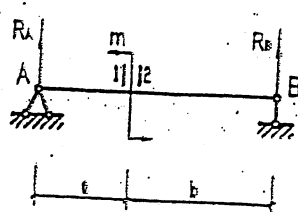


图 5-1-5

(5) 解: 1) 支反力:  $R_A = \frac{M}{a+b}, R_B = -\frac{M}{a+b}$

$$2) V_2 = \frac{M}{a+b}, M_2 = -\frac{b}{a+b}M$$

$$3) V_1 = R_A = \frac{M}{a+b}, M_1 = \frac{a}{a+b}M$$

(6) 解: 1)  $V_1 = -q \cdot a, V_2 = -qa, V_3 = 0$

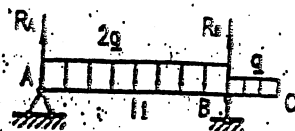


图 5-1-1

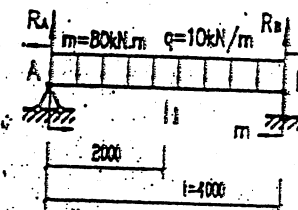


图 5-1-2

$$2) M_1 = -\frac{qa^2}{2}, M_2 = -\frac{qa^2}{2}, M_3 = 0$$

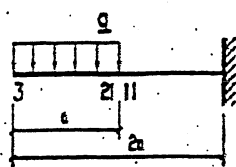


图 5-1-6

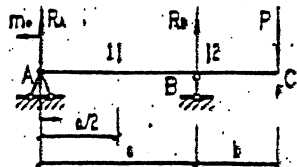


图 5-1-7

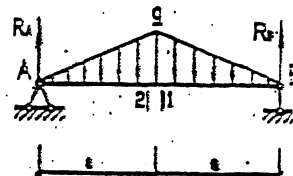


图 5-1-8

(7) 解: 1) 求支反力  $R_2 = \frac{1}{a}(P(a+b) - M_1)$ ,  $R_1 = -\frac{b}{a}P + \frac{M_1}{a}$

2)  $V_2 = P$ ,  $M_2 = -Pb$

3)  $V_1 = P - R_2 = -\frac{b}{a}P + \frac{M_1}{a}$ ,  $M_1 = -\frac{b}{2}P - \frac{M_1}{2}$

(8) 解: 1) 求支反力  $R_1 = R_2 = \frac{1}{2}aq$

2)  $V_1 = 0$ ,  $M_1 = R_1 \cdot a - \frac{1}{2}qa \cdot \frac{1}{3}a = -\frac{1}{3}qa^2$

3)  $V_2 = 0$ ,  $M_2 = M_1 = -\frac{1}{3}qa^2$

(9) 解: 1)  $V_1 = 2qa$ ,  $M_1 = qa^2 - qa \cdot \frac{3a}{2} - q \cdot a \cdot a = -\frac{3}{2}qa^2$

2)  $V_2 = 2qa$ ,  $M_2 = -qa \cdot a - qa \cdot \frac{a}{2} = -\frac{3}{2}qa^2$

(10) 解: 1) 支反力  $R_1 = R_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{6} \cdot q_0 \times 3 = \frac{1}{4}q_0l$

2)  $V_1 = 0$

3)  $M_1 = R_1 \cdot \frac{l}{2} - \frac{1}{2} \cdot q \cdot \frac{l}{9} - \frac{1}{2}q \cdot \frac{l}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{6} = \frac{7}{108}q_0l^2$

(11) 解: 1)  $V_1 = -qa$ ,  $M_1 = -\frac{1}{2}qa^2$

2)  $V_2 = 0$ ,  $M_2 = \frac{1}{2}qa^2 - qa \cdot \frac{3a}{2} = -qa^2$

(12) 解: 1)  $V_1 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{q}{2} = -\frac{1}{8}ql$ ,  $V_2 = \frac{q}{2}l(-)$

2)  $M_1 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{q}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{2} = -\frac{1}{48}ql^2$

$M_2 = -\frac{1}{2}ql \cdot \frac{l}{3} = -\frac{ql^2}{6}(-)$

[5-2] 写出下列各梁的剪力方程和弯矩方程, 并绘出剪力图和弯矩图。

(1) 解: 1) 支反力, 由  $\Sigma M_A = 0$ ,  $R_B = \frac{P(a+l)}{l}$

$\Sigma Y = 0$ ,  $R_A = \frac{a}{l}P(-)$

2) 列剪力方程  $V(x)$  和弯矩方程  $M(x)$

$V_1(x) = -\frac{a}{l}P$ ,  $(0 < x_1 < l)$

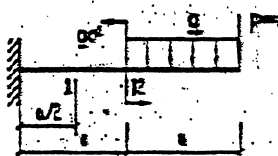


图 5-1-9

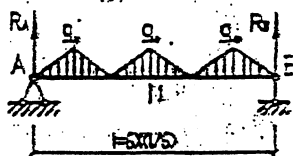


图 5-1-10

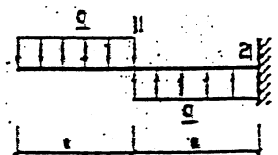


图 5-1-11

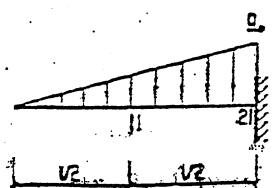


图 5-1-12

$$M_1(x) = -\frac{q}{2}Px_1 \quad (0 \leq x_1 \leq l)$$

$$V_2(x) = P, \quad [l < x_2 \leq (l+a)]$$

$$M_2(x) = -P(l+a-x_2), \quad [l < x_2 \leq (l+a)]$$

3) 作剪力图和弯矩图如图 b, c 所示,

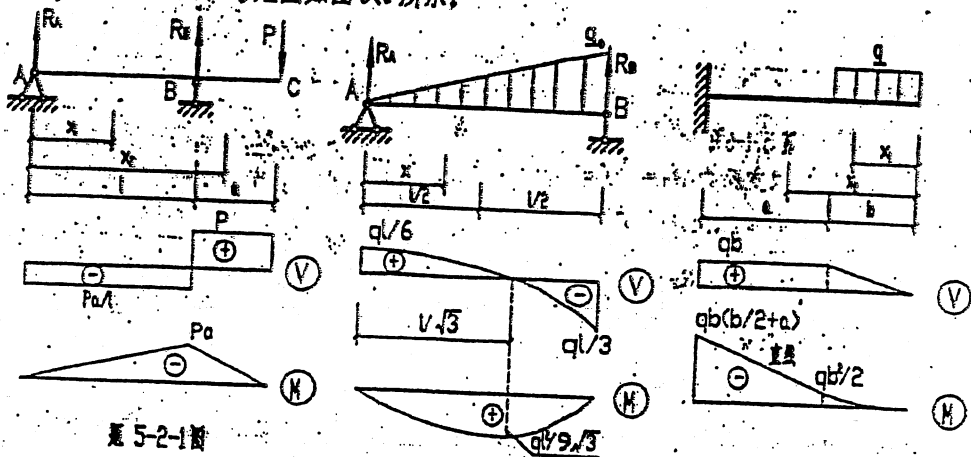


图 5-2-1

图 5-2-2

图 5-2-3

(2) 解: 1) 支反力: 由  $\sum M_B = 0$  和  $\sum M_A = 0$  得

$$R_A = \frac{1}{6}ql, \quad R_B = \frac{1}{3}q_0l$$

2) 列 V, M 方程

$$V(x) = \frac{1}{6}ql - \frac{1}{2}q(x) \cdot x = \frac{1}{6}ql - \frac{qx^2}{2l} \quad (0 < x < l)$$

$$M(x) = \frac{1}{6}qlx - \frac{q}{2l}x^2 \cdot \frac{x}{3} = \frac{1}{6}qlx - \frac{qx^3}{6l} \quad (0 \leq x \leq l)$$

令  $V(x) = 0$ , 得  $x = \frac{l}{\sqrt{3}}$  (取正值),  $M_{\max} = \frac{ql^2}{9\sqrt{3}}$

3) 作 V, M 图如图 b, c 示。

(3) 解: 1)  $V(x_1) = qx_1, \quad (0 < x_1 < b)$

$$M(x_1) = -\frac{q}{2}x_1^2, \quad (0 \leq x_1 \leq b)$$

$$M(x_2) = -qb(x_2 - \frac{b}{2})$$

$$V(x_2) = qb, \quad [b < x_2 < (a+b)]$$

2) 作图如右图示。

(4) 解: 1)  $\sum M_A = 0, \quad R_B = \frac{1}{l}[qa(l + \frac{a}{2})] = qa + \frac{qa^2}{2l}$

$$\sum y = 0, \quad R_A = qa - R_B = -\frac{qa^2}{2l}$$

$$2) V(x_1) = R_A = -\frac{qa^2}{2l}, \quad (0 < x_1 < l)$$

$$M(x_1) = R_A \cdot x_1 = -\frac{qa^2}{2l}x_1, \quad (0 \leq x_1 \leq l)$$

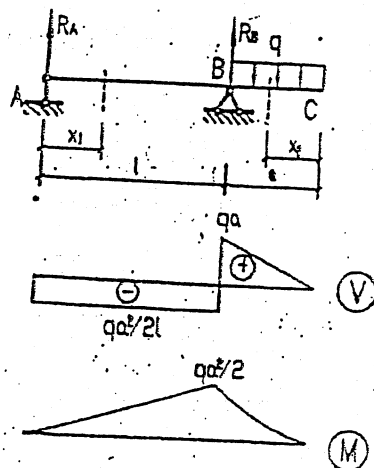


图 5-2-4

$$V(x_2) = qx_2, (0 < x_2 < a)$$

$$M(x_2) = -\frac{q}{2}x_2^2, (0 \leq x_2 \leq a)$$

3) 作图如 b, c 图。

(5) 解: 1) 求支反力

$$\Sigma M_A = 0, R_B = \frac{1}{10}(-100 + 20 \times 10 \times 7) = 130 \text{ kN}$$

$$\Sigma Y = 0, R_A = 20 \times 10 - 130 = 70 \text{ kN}$$

2) 列 V, M 方程

$$V(x_1) = R_A = 70 \text{ kN}, (0 < x_1 < 2 \text{ m})$$

$$M(x_1) = R_A x_1 = 70 x_1, (0 \leq x_1 \leq 2 \text{ m})$$

$$V(x_2) = R_A - q(x_2 - 2) = 70 - 20(x_2 - 2) \\ = 110 - 20x_2, (2 < x_2 < 10 \text{ m})$$

$$M(x_2) = R_A x_2 - \frac{q(x_2 - 2)^2}{2} - 100 \\ = 70x_2 - 10(x_2 - 2)^2 - 100, (2 \leq x_2 \leq 10 \text{ m})$$

$$V(x_3) = qx_3 = 20x_3, (0 < x_3 < 2 \text{ m})$$

$$M(x_3) = q \frac{x_3^2}{2} = 10x_3^2, (0 \leq x_3 \leq 2 \text{ m})$$

(6) 解: 1) 求支反力:

$$\Sigma M_A = 0, R_B = \frac{1}{3a}(Pa - P \cdot 2a) = -\frac{P}{3}$$

$$\Sigma Y = 0, R_A = P - P - R_B = \frac{P}{3}$$

2) 列 V, M 方程

$$V(x_1) = R_A = \frac{1}{3}P, (0 < x_1 < a)$$

$$M(x_1) = R_A x_1 = \frac{1}{3}P x_1, (0 \leq x_1 \leq a)$$

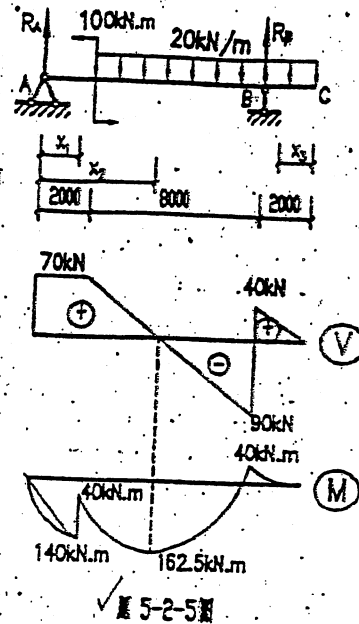
$$V(x_2) = -\frac{2}{3}P, (a < x_2 < 2a)$$

$$M(x_2) = R_A \cdot x_2 - P(x_2 - a) = \frac{P}{3}x_2 - P(x_2 - a) \\ = Pa - \frac{2}{3}P x_2, (a \leq x_2 \leq 2a)$$

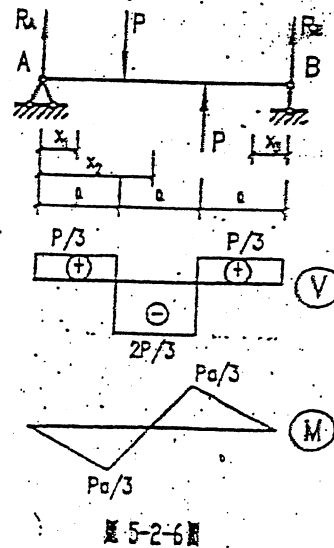
$$V(x_3) = -R_B = \frac{P}{3}, (0 < x_3 < a)$$

$$M(x_3) = R_B \cdot x_3 = -\frac{P}{3}x_3, (0 \leq x_3 \leq a)$$

3) 绘 V, M 图。



5500



[5-3] 作下列各梁的剪力图和弯矩图。

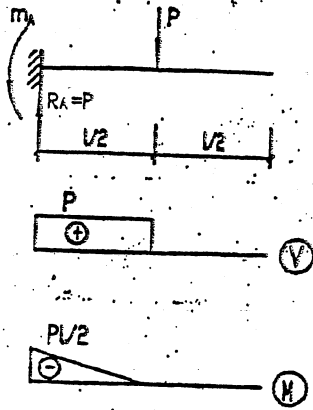


图 5-3-1

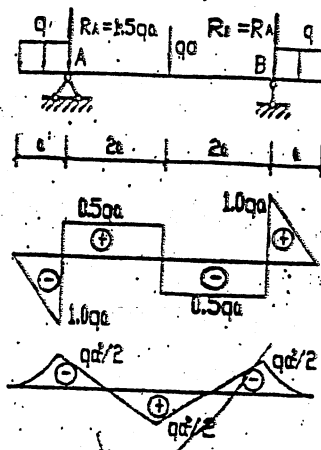


图 5-3-2

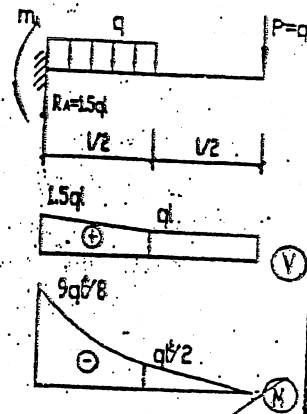


图 5-3-3

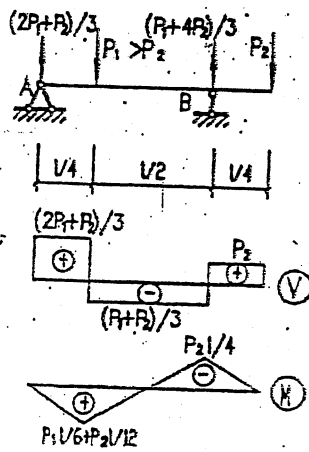


图 5-3-4

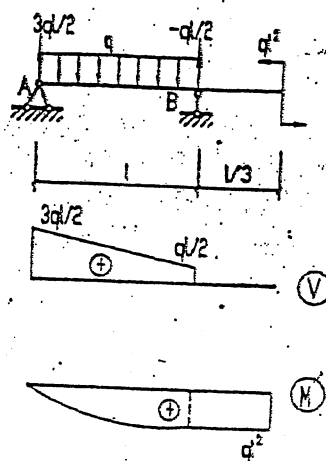


图 5-3-5

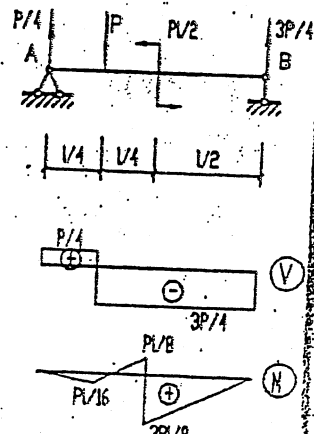


图 5-3-6

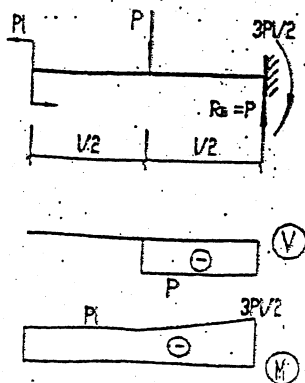


图 5-3-7

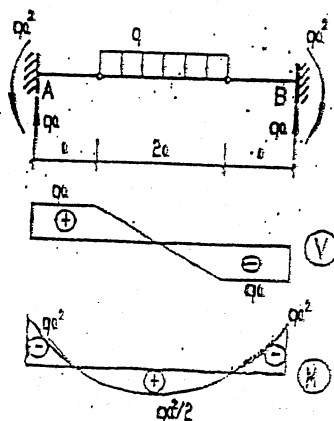


图 5-3-8

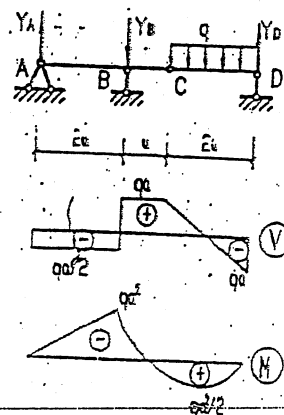


图 5-3-9

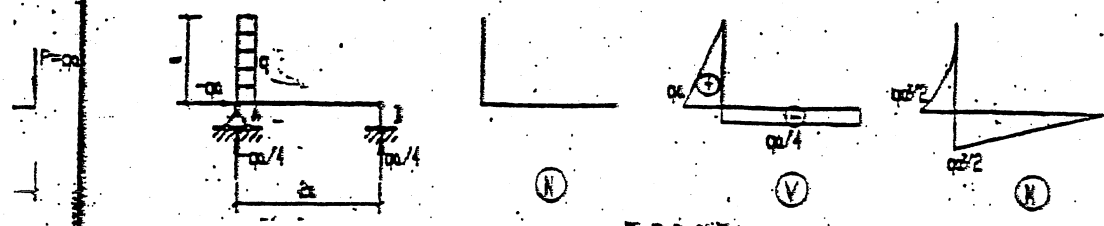


图 5-3-10

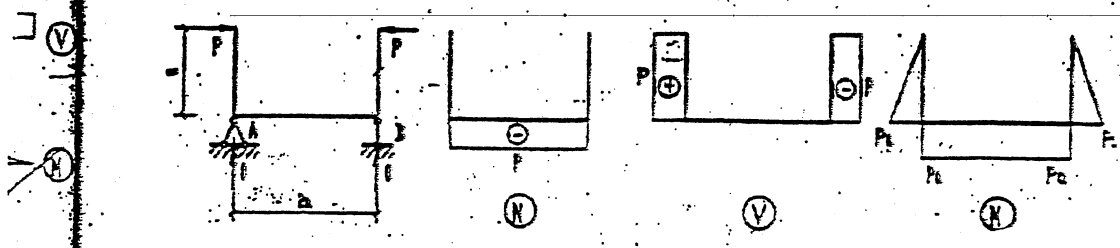


图 5-3-11

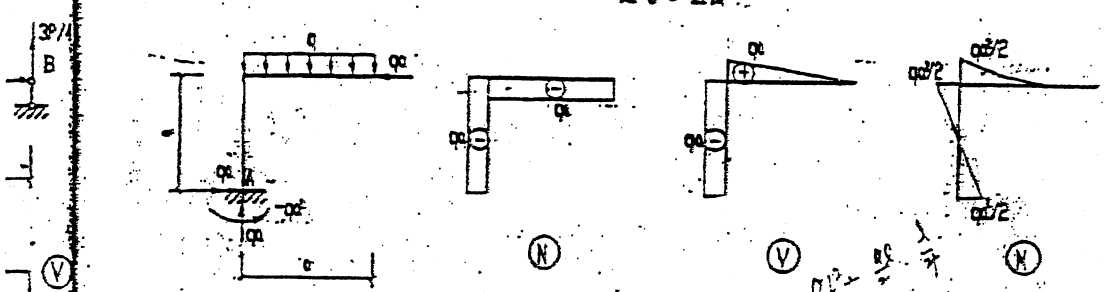


图 5-3-12

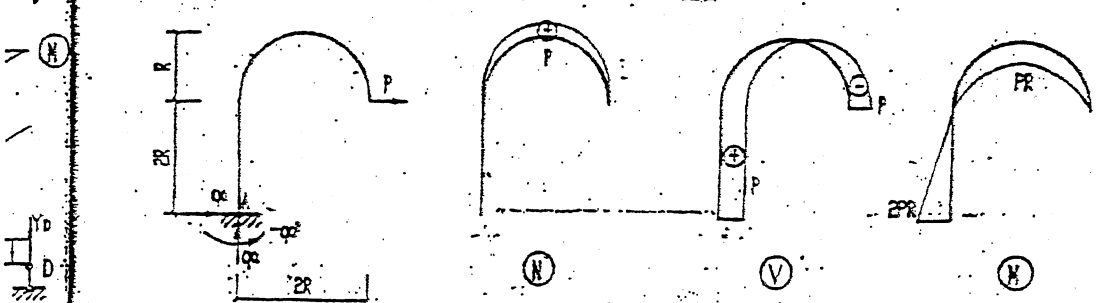


图 5-3-13

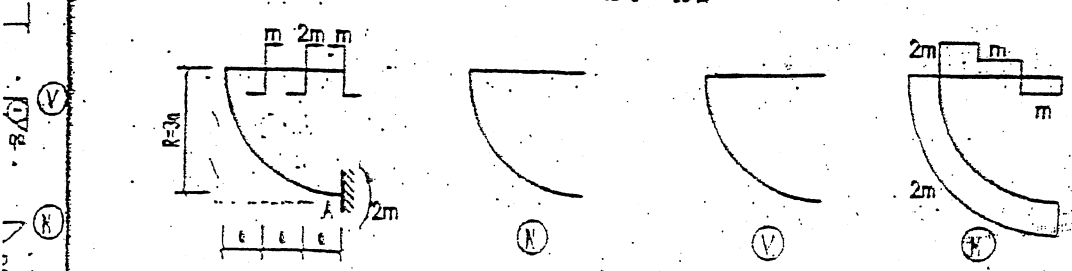


图 5-3-14

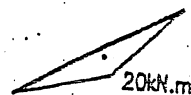
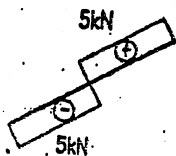
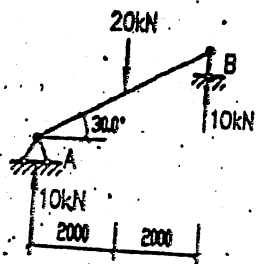


图 5-3-15

[5-4] 用微积分关系绘剪力图和弯矩图

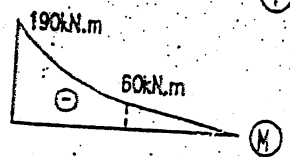
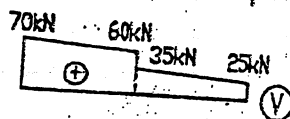
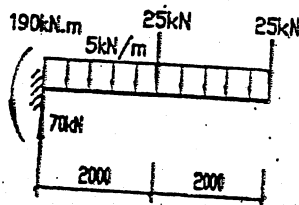


图 5-4-1

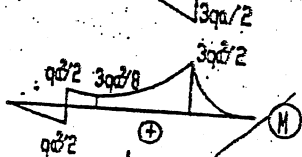
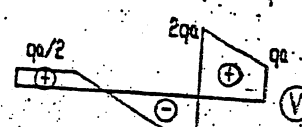
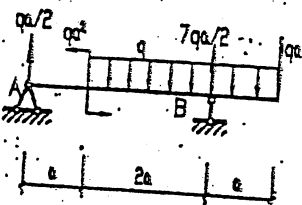


图 5-4-2

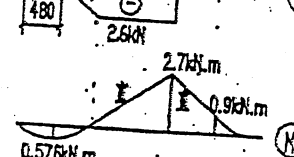
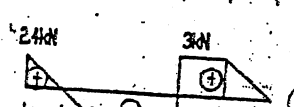
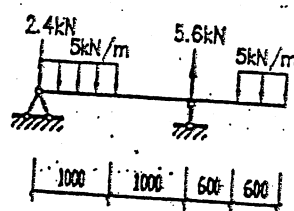


图 5-4-3

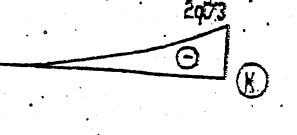
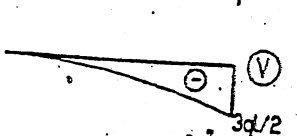
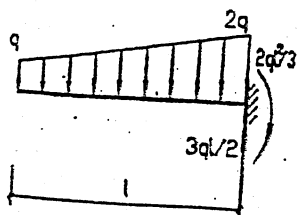


图 5-4-4

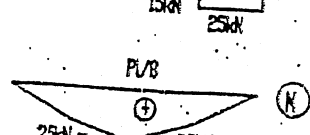
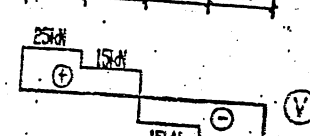
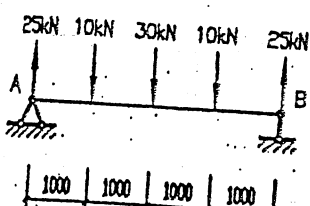


图 5-4-5

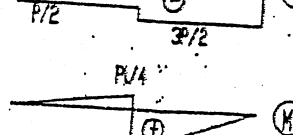
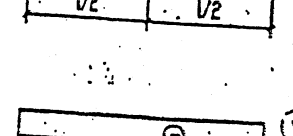
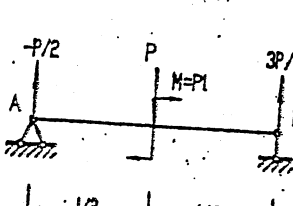


图 5-4-6



[5-5] 检查下列各梁的剪力图和弯矩图

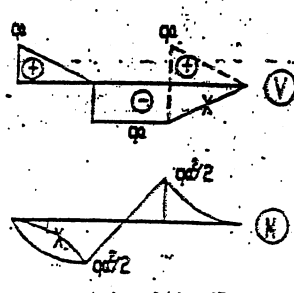
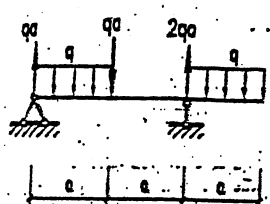


图 5-5-1图

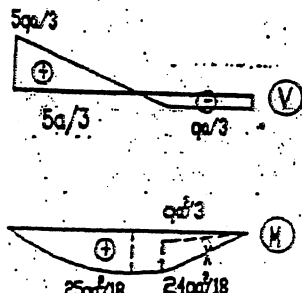
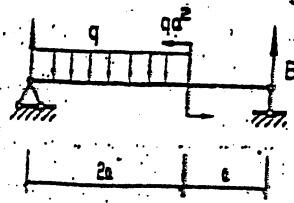


图 5-5-2图

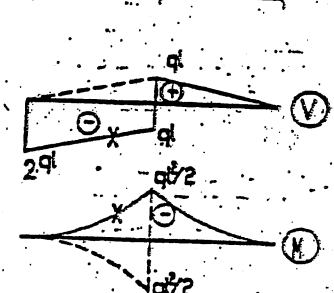
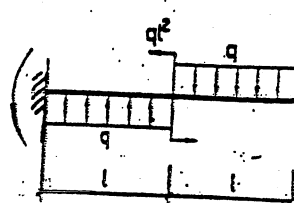


图 5-5-3图

[5-6] 图示简支梁的剪力图或弯矩图,求荷载图和弯矩图或剪力图。

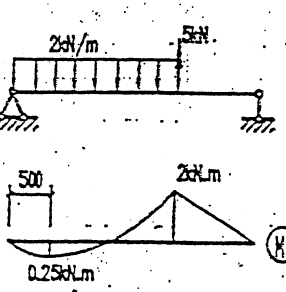
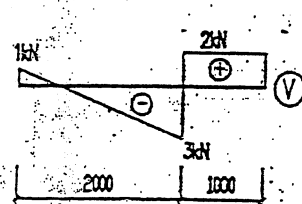


图 5-6-1图

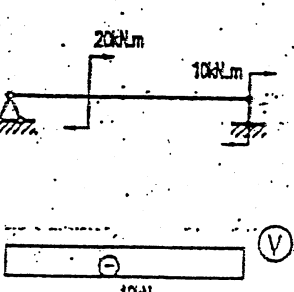
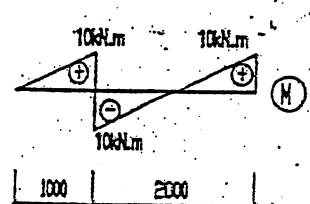


图 5-6-2图

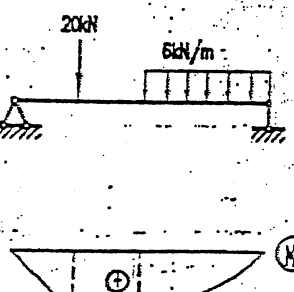
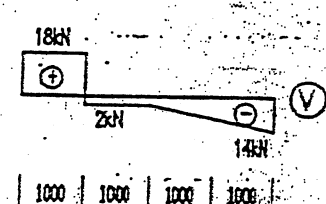


图 5-6-3图

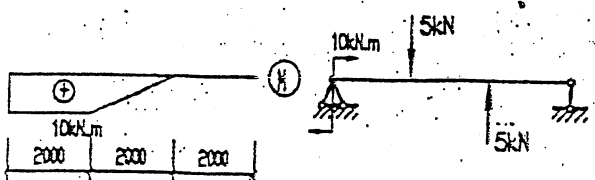
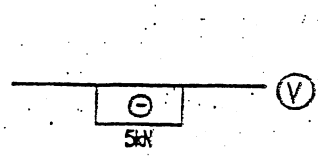
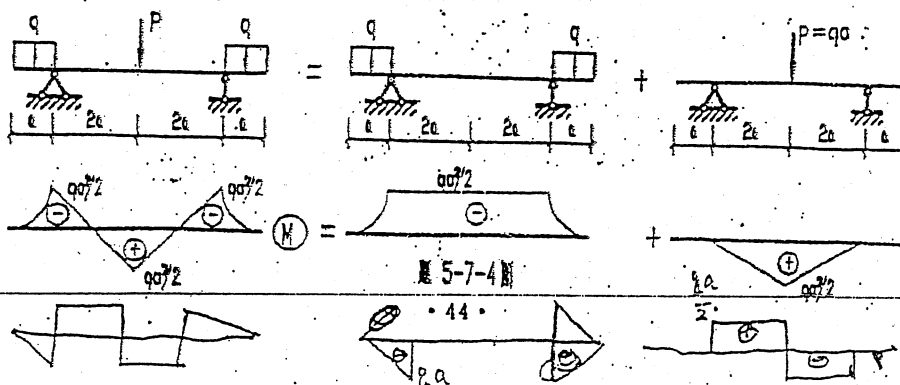
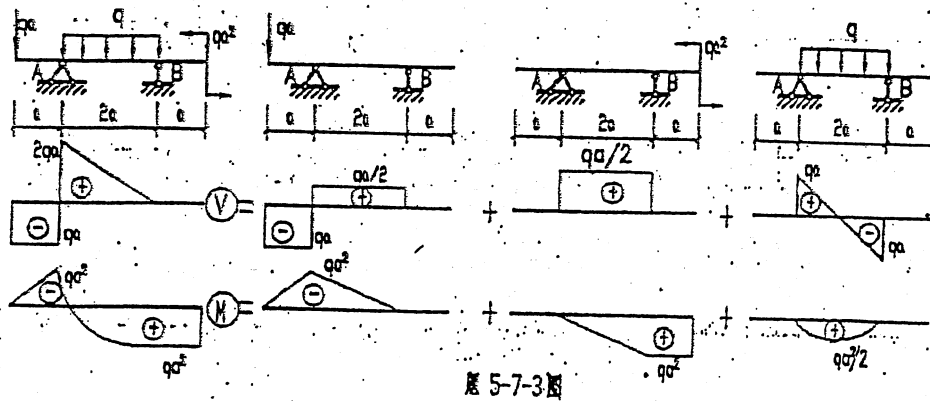
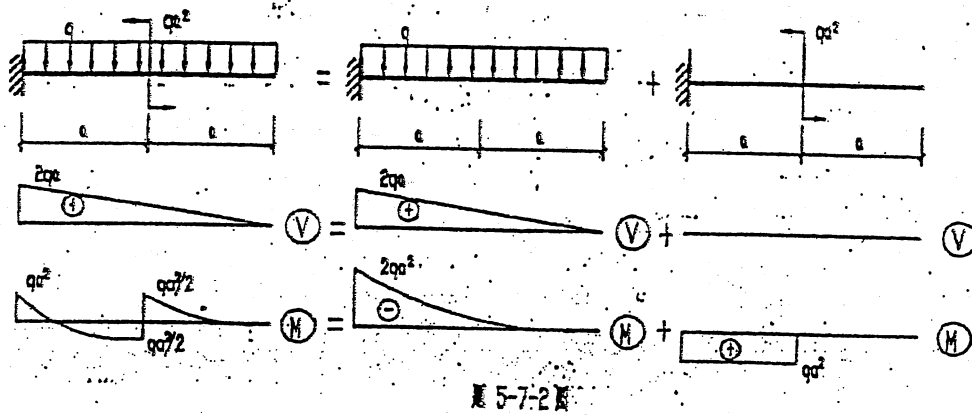
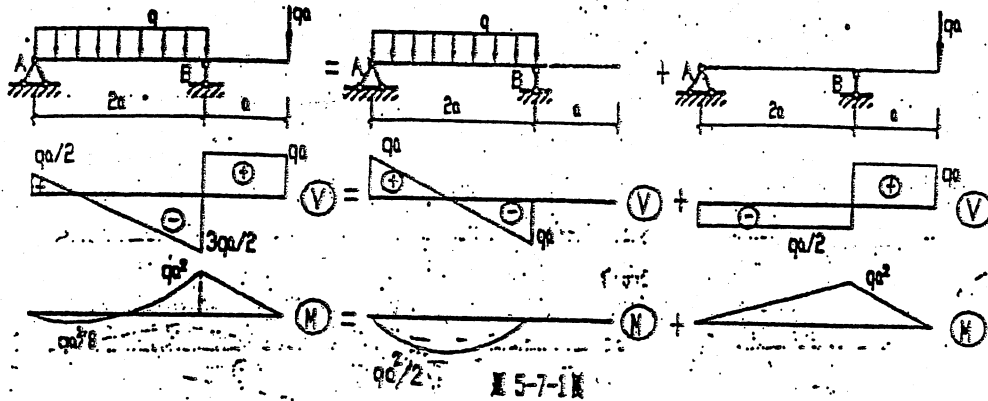


图 5-6-4图



[5-7] 用叠加法绘内力图。



吊的正、负位置是

图 5-7-4

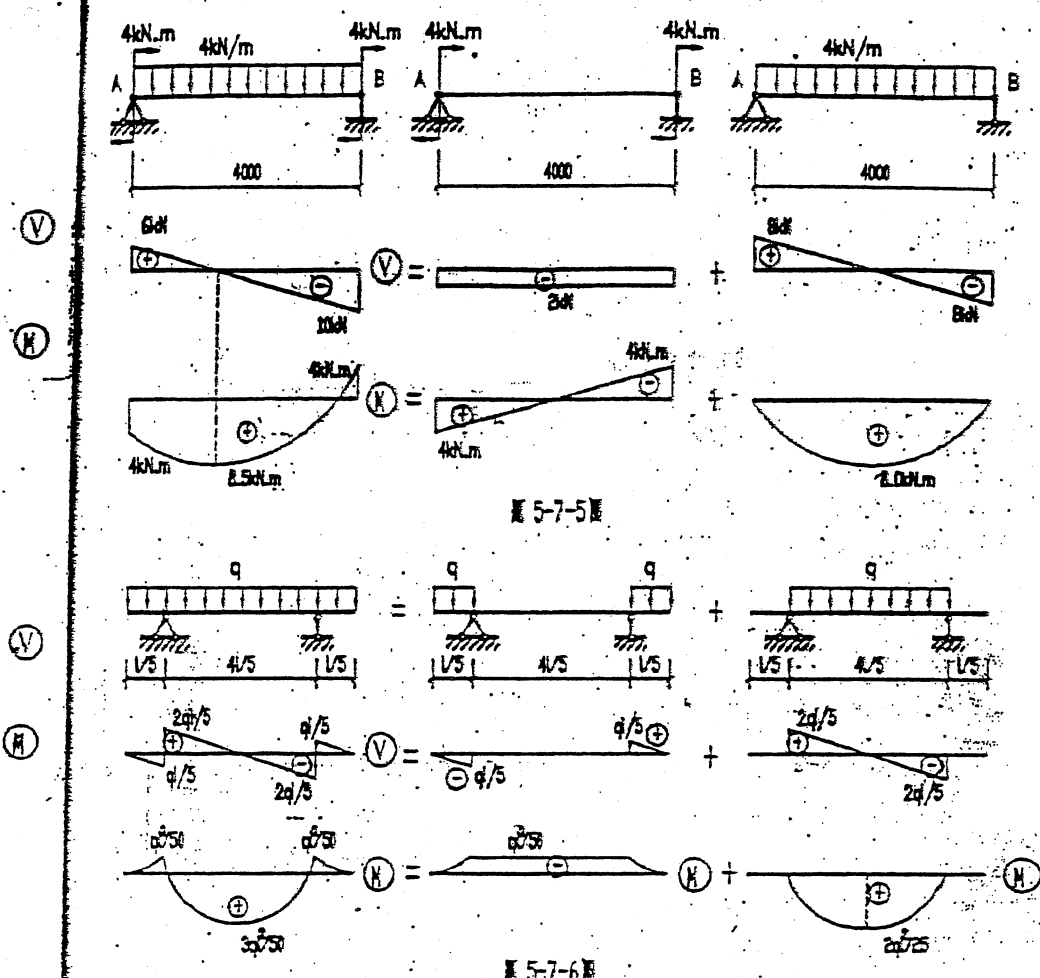


图 5-7-5

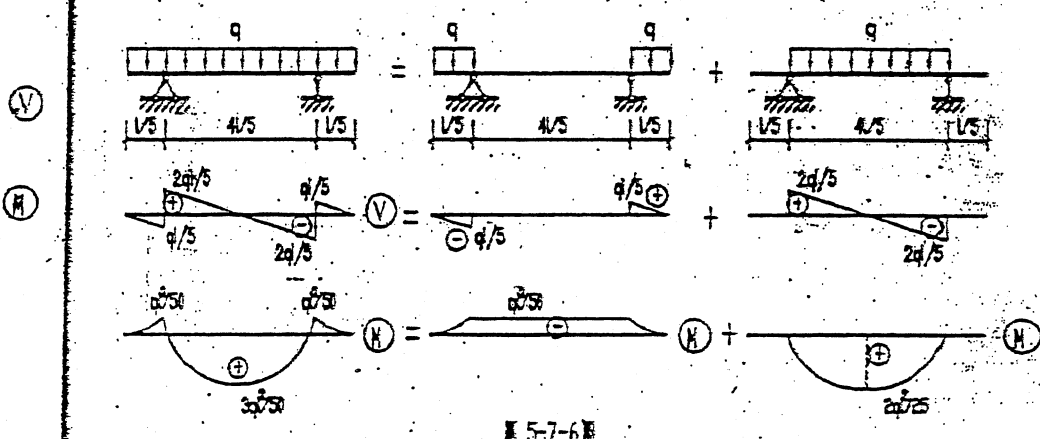


图 5-7-6

[5-8] 试确定在图示荷载情况下梁 ABC 中绝对值最大的弯矩。

解: 由 CD 梁,  $\sum M_D = 0, 2a \cdot R_C = P \cdot a + P \cdot a,$

$$R_C = P$$

$$\sum y = 0, R_D = 2P - P = P$$

ABC 梁:  $\sum M_A = 0, 2a \cdot R_B = P \cdot a + 3aP, R_B = 2P$

$$\sum y = 0, R_A = 2P - 2P = 0$$

$$M_{max} = -P \cdot a$$

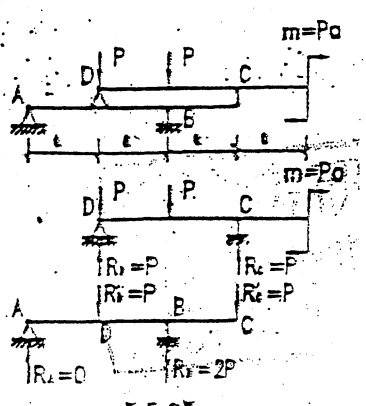


图 5-8

[5-9] 起吊一根自重为  $q(N/m)$  的等截面梁, 问起吊的合理位置  $x$  应为多少。(使梁在吊点处和中点处的正、负弯矩值相等。)

解: 构件的计算简图如图 b 所示, 欲求绳索的最佳位置, 即使构件内最大正弯矩值等于最大负弯矩值, 即是  $|M_A| = |M_C|$  有

$$M_A = -\frac{1}{2}qx^2$$

$$M_C = \frac{q}{8}(l-2x)^2 - \frac{1}{2}qx^2$$

$$\text{即 } \frac{1}{2}qx^2 = \frac{q}{8}(l-2x)^2 - \frac{1}{2}qx^2$$

$$4x^2 + 4lx - l^2 = 0$$

$$0.207l$$

$$x = -1.414l (\text{舍去})$$

取  $x = 0.207l$  为最佳位置

[5-10] 图示吊车梁, 吊车的每个轮子对梁的作用力都是  $P$ , 问

(1) 吊车在什么位置时梁内有最大弯矩? 最大弯矩等于多少?

(2) 吊车在什么位置时, 梁的支座反力最大, 最大支座反力和最大剪力各等于多少?

解: 设在行车左轮距  $A$  为  $x$  时, 在该轮作用点  $M$  有最大值, 此时  $A$  点的支反力,

$$R_A = \frac{P(l-x) + P(l-x-a)}{l} \\ = \frac{P(2l-2x-a)}{l} = 2P - \frac{2x+a}{l}P,$$

$$R_B = 2P - R_A = \frac{2Px+Pa}{l}$$

$$M_x = R_A \cdot x = \frac{P(2l-2x-a)}{l} x$$

$$\text{当 } x=0 \text{ 处, } R_A = R_{\max} = 2P - \frac{aP}{l}$$

求  $M$  的最大值, 令其一阶导数为零,

$$M' = \frac{P}{l}(2l - 4x - a) = 0, x = \frac{l}{2} - \frac{a}{4}$$

$$M_{\max} = \frac{P}{l} \left[ 2l - 2 \left( \frac{l}{2} - \frac{a}{4} \right) - a \right] \left( \frac{l}{2} - \frac{a}{4} \right) = \frac{P}{2l} \left( l - \frac{a}{2} \right)^2$$

同样右轮距右端的距离为  $(\frac{l}{2} - \frac{a}{2})$  时, 也是  $M_{\max}$  的地方。

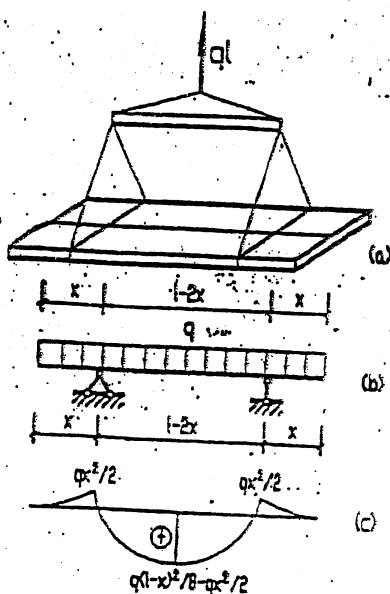


图 5-9

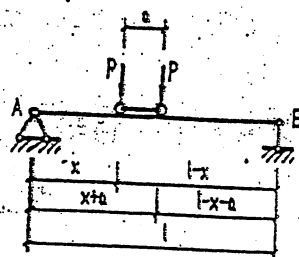


图 5-10

## 第六章 弯曲应力

[6-1] 厚度为  $h=1.5\text{mm}$  的钢带, 卷成内径为  $D$  的圆环,  $D=3\text{m}$ , 求此时钢带横截面上的最大正应力。已知钢的弹性模量  $E=210\text{GPa}$ 。

$$\text{解: } \sigma = E \frac{\gamma}{\rho} = 210 \times 10^9 \times \frac{1.5/2 \times 10^{-3}}{(\frac{3}{2} + \frac{1.5}{2} \times 10^{-3})} = 105\text{MPa}$$

[6-2] 矩形截面的悬臂梁, 受集中力和集中力偶作用(图示)。试求截面 I-I (固定端) 上  $a, b, c, d$  四点处的正应力。

解: 由题图,  $-y_a = +y_b = 0.15\text{m}$ ;

$y_c = 0, y_d = -0.075\text{m}$ ;  $x = 0$ ;

$$I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{1}{12} \times 0.18 \times 0.3^3 = 4.05 \times 10^{-6}\text{m}^4$$

$$M_I = 20 - 15 \times 3 = -25\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$\sigma_a = \frac{M_I y_a}{I_x} = \frac{(-25 \times 10^3) \times (-0.15)}{4.05 \times 10^{-6}} = 9.26\text{MPa}, \sigma_b = -\sigma_a = -9.26\text{MPa},$$

$$\sigma_c = 0, \sigma_d = \frac{y_d}{y_a} \sigma_a = \frac{-0.075}{-0.15} \times 9.26 = -4.63\text{MPa}$$

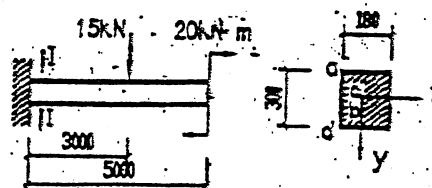


图 6-2 图

[6-3] 梁在铅垂平面内受外力作用而弯曲。当梁具有图示各种不同形状横截面时, 试分别绘出截面上的正应力沿其高度变化的图。

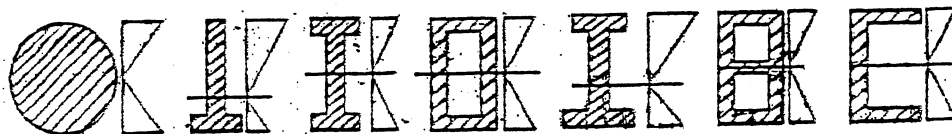


图 6-3 图

[6-4] 一外径为  $250\text{mm}$ , 壁厚为  $10\text{mm}$ , 长度为  $12\text{m}$  的铸铁水管, 两端搁在支座上; 管中充满着水。铸铁的重度  $\gamma_1 = 76\text{kN/m}^3$ , 水的重度  $\gamma_2 = 10\text{kN/m}^3$ 。试求管的最大拉、压正应力的数值。

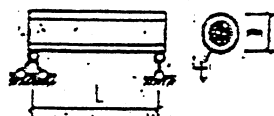


图 6-4 图

解: 该铸铁管能简化为图示简支梁, 相应的  $q$  为

$$q = 76 \times \frac{\pi}{4} (250^2 - 230^2) \times 10^{-6} + 10 \times \frac{\pi}{4} \times 230^2 \times 10^{-6} \\ = 0.573 + 0.415 = 0.988\text{kN/m}$$

$$M_c = \frac{1}{8} q l^2 = \frac{1}{8} \times 0.988 \times 12^2 = 17.78\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$\text{又截面有 } W_x = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4) = \frac{\pi \times 250^3}{32} [1 - (\frac{230}{250})^4] = 4.35 \times 10^6 \text{mm}^3 = 4.35 \times 10^{-6} \text{m}^3$$

故有  $\sigma_{\max} = -\sigma_{\min} = \frac{M}{W} = \frac{17.78}{4.35 \times 10^3} = 40.90 \text{MPa}$

[6-5] 割刀在切削工作时,受到  $P=1\text{kN}$  的切削力的作用。割刀尺寸如图所示。试求割刀内的最大正应力及最大剪应力。

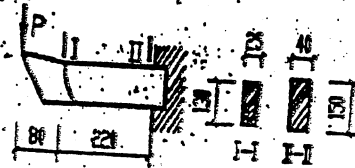
解: ① 正应力计算, I-I、II-II 截面的弯矩分别为  $M_I = 0.08\text{kN} \cdot \text{m}$ ,  $M_{II} = 0.3\text{kN} \cdot \text{m}$

I-I 截面最大正应力

$$\sigma_{\max} = \frac{0.08 \times 10^3}{\frac{1}{6} \times 0.025 \times 0.13^3} = 1.14 \text{MPa}$$

II-II 截面最大正应力

$$\sigma_{\max} = \frac{0.3 \times 10^3}{\frac{1}{6} \times 0.04 \times 0.15^3} = 2 \text{MPa}$$



题 6-5 图

② 剪应力计算:

$$V = P = 1\text{kN}, A = bh$$

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{V}{A} = \frac{3 \times 1 \times 10^3}{2 \times 25 \times 130 \times 10^{-6}} = \frac{3 \times 10^3}{65 \times 10^{-4}} = \frac{30}{65} \times 10^6 = 0.46 \text{MPa}$$

[6-6] 图示圆截面木梁。已知  $l=3\text{m}$ ,  $P=3\text{kN}$ ,  $q=3\text{kN/m}$ ,  $[\sigma]=10\text{MPa}$ , 试选圆木的直径  $d$ ,  $[\tau]=1\text{MPa}$ 。

解: (1) 求梁中最大弯矩:

支反力:  $R_A = 8.5\text{kN}$ ,  $R_B = 3.5\text{kN}$

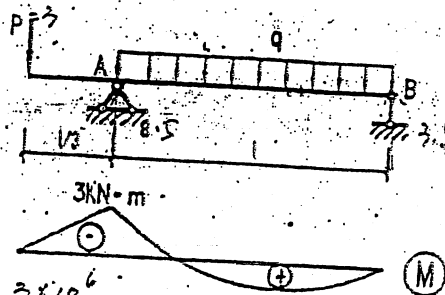
最大弯矩发生在右边支座处

$$M_{\max} = 3\text{kN} \cdot \text{m} \text{ (负值)}$$

$$M_{\max} = 2.40\text{kN} \cdot \text{m} \text{ (正值)}$$

(2) 正应力的强度条件

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{M_{\max}}{\frac{\pi d^3}{32}} \leq [\sigma] \quad \sigma_{\max} = \frac{3 \times 10^6}{10.02} = 2.02 \text{MPa}$$



题 6-6 图

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 M_{\max}}{\pi [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \times 3 \times 10^3}{\pi \times 10 \times 10^6}} = 0.145 \text{m}$$

(3) 剪应力校核

$$V_{\max} = 5.5\text{kN}$$

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{V}{A} = \frac{4}{3} \times \frac{5.5 \times 10^3}{\frac{\pi}{4} \times 0.145^2} = 0.444 \text{MPa} < [\tau]$$

[6-7] 铸铁梁的荷载及横截面尺寸如图。容许拉应力  $[\sigma_t] = 40\text{MPa}$ , 容许压应力  $[\sigma_c] = 100\text{MPa}$ 。试按正应力强度条件校核梁的强度。已知:  $P=20\text{kN}$ ,  $q=10\text{kN/m}$ 。

$$\text{解: } y_c = \frac{3 \times 20 \times 10 + 3 \times 20 \times 21.5}{3 \times 20 + 3 \times 20} = 0.1575 \text{m}$$

$$I_x = \frac{0.2 \times 0.03^3}{12} + 0.2 \times 0.3 \times (0.0575)^2 + \frac{0.03 \times 0.2^3}{12} + 0.2 \times 0.03 \times (0.0575)^2 = 6013 \times 10^{-8} \text{m}^4 = 6013 \times 10^4 \text{mm}^4$$

校核 B 截面, 上边缘受拉

$$\sigma_{\max} = \frac{20 \times 10^3 \times 0.0725}{6013 \times 10^{-8}} = 24.1 \text{ MPa} < [\sigma]$$

下边缘受压

$$\sigma_{\max} = \frac{20 \times 10^3 \times 0.1575}{6013 \times 10^{-8}} = 52.4 \text{ MPa} \leq [\sigma]$$

校核 C 截面,

$$\text{上边缘受压: } \sigma_{\max} = \frac{10 \times 10^3 \times 0.0725}{6013 \times 10^{-8}} = 12.1 \text{ MPa} < [\sigma]$$

$$\text{下边缘受拉: } \sigma_{\max} = \frac{10 \times 10^3 \times 0.1575}{6013 \times 10^{-8}} = 26.2 \text{ MPa} < [\sigma]$$

故此梁强度足够。

[6-8] 图示矩形截面悬臂梁, 在全梁上受均布荷载  $q$  作用, 其横截面尺寸为  $b, h$ , 长为  $l$ 。

(1) 试证明在离自由端为  $x$  处的横截面上切向内力元素  $\tau dA$  的合力等于该截面上的剪力, 而法向内力元素  $\sigma dA$  的合力偶矩等于该截面上的弯矩。

(2) 如果沿梁的中性层截出梁下半部 (图 b), 问在截开面上的剪应力  $\tau$  沿梁长度的变化规律如何? 该面上总的水平剪力有多少? 它由什么力来平衡。

解: (1) 剪应力沿矩形截面的高度的分布公式是:

$$\tau = \frac{VS_x}{I_z b} = \frac{V}{I_z b} \cdot \frac{b}{8} (h^2 - 4y^2) = \frac{3V}{2bh^3} (h^2 - 4y^2)$$

剪应力在横截面上形成的合力为

$$\int \tau dA = \int \tau b dy = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{3V(h^2 - 4y^2)}{2bh^3} b dy = \frac{3V}{2h^3} \left( h^2 y - \frac{4}{3} y^3 \right) \Big|_{-h/2}^{h/2} = V$$

根据  $x$  截面左边分离体的平衡, 有  $-qx = \int \tau dA = V$

因为  $x$  截面上剪力等于  $qx$ , 所以内力元素  $\tau dA$  的合力等于该截面上的剪力。

$x$  横截面上的法向内力元素  $\sigma dA$  对中性轴之矩为:

$$\int \sigma y dA = \frac{M}{I_z} \int y^2 dA = \frac{M}{I_z} I_z = M$$

由静力平衡  $\frac{1}{2} qx^2 = \int \sigma y dA = M$

于是证得法向内力元素  $\sigma dA$  的合力偶矩等于该截面的弯矩。

(2) 梁的剪力方程式  $V(x) = qx$

据弯曲剪应力公式及剪应力互等定理, 得 (中性层上的  $\tau$  是最大剪应力)

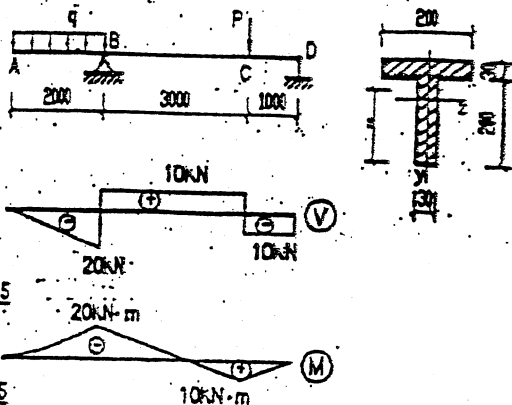


图 6-7 题

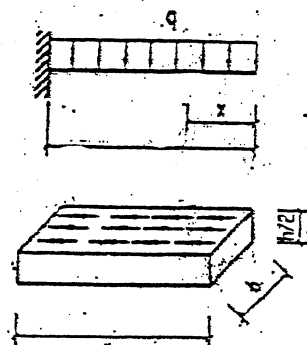


图 6-8 题

$$\tau = \tau = \frac{3V(x)}{2bh} = \frac{3qx}{2bh}$$

$$\text{总的水平剪力为: } V' = \int_A \tau' dA' = \int_0^b \frac{3qx}{2bh} b dx = \frac{3qL^2}{4h}$$

剪力  $V'$  由根部(固定端)横截面的下半部的法向内力元素  $\sigma dA$  组成的合力平衡。

[6-9] 铸铁管托架如图示。设铸铁的容许应力  $[\sigma_t] = 40\text{MPa}$ ,  $[\sigma_c] = 120\text{MPa}$  (危险截面  $m$ )，试确定托架所能承受的荷载  $P$ 。

解：托架的计算简图为一悬臂梁。自由端受一集中力  $P$  作用。截面  $n-n$  的弯矩为  $M_{n-n} = -0.7P$ ，求  $n-n$  截面的形心位置。

$$y_c = \frac{S_z}{A} = \frac{120 \times 20 \times (60 + 20) + 80 \times 20 \times 10}{120 \times 20 + 20 \times 80} = 52\text{mm}$$

求惯性矩、抗弯截面模量：

$$I_z = \frac{1}{12} \times 20 \times 120^3 + 20 \times 120 \times (80 - 52)^2 + \frac{1}{12} \times 80 \times 20^3 + 80 \times 20 \times (52 - 10)^2 = 7.64 \times 10^{-6} \text{m}^4$$

$$W_z = \frac{I_z}{y_c} = \frac{I_z}{0.052} = \frac{7.64 \times 10^{-6}}{0.052} = 1.469 \times 10^{-4} \text{m}^3$$

$$W_z = \frac{I_z}{-y_c + 0.14} = \frac{I_z}{0.088} = 8.68 \times 10^{-5} \text{m}^3$$

求  $P$ ：铸铁的抗拉、抗压强度不等。根据拉、压容许应力求得能承受的弯矩分别为：

$$M_1 \leq W_z [\sigma_t], M_2 \leq W_z [\sigma_c]$$

将有关数据代入后：

$$0.7P_1 \leq 1.469 \times 10^{-4} \times 40 \times 10^6, P_1 \leq 8.39\text{kN}$$

$$0.7P_2 \leq 8.68 \times 10^{-5} \times 120 \times 10^6, P_2 \leq 14.88\text{kN}$$

所以取托架能承受的荷载  $P \leq 8.39\text{kN}$

[6-10] 图示简支梁，已知某 T 形截面各部分尺寸如图。若梁的材料容许拉应力  $[\sigma_t] = 160\text{MPa}$ ，容许压应力  $[\sigma_c] = 80\text{MPa}$ ，试求容许此梁承受的均布荷载集度  $q = ?$ 。

$$\text{解：该梁的 } M_{\max} = \frac{ql^2}{8}$$

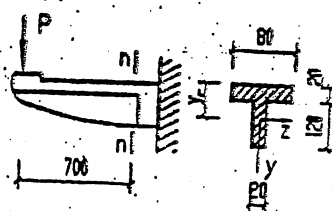
形心位置

$$y_c = \frac{100 \times 25 \times 12.5 + 12 \times 125 \times 87.5}{100 \times 25 + 12 \times 125} = 40.625\text{mm}$$

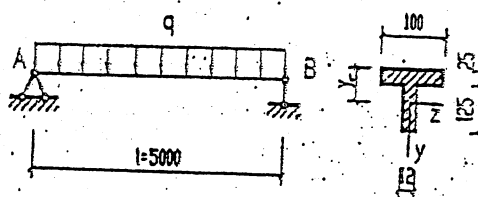
惯性矩

$$I_z = \frac{1}{12} (100 \times 25^3 + 12 \times 125^3) + 100 \times 25 \times (40.625 - 12.5)^2 + 12 \times 125 \times (87.5 - 40.625)^2 = 7.357 \times 10^6 \text{mm}^4 = 7.357 \times 10^{-6} \text{m}^4$$

由于截面对  $z$  轴不对称，因而两个不同的抗弯截面模量  $W_z, W_z'$ ，由  $M_{\max} \leq W_z [\sigma_t], M_{\max} \leq W_z' [\sigma_c]$



题 6-9 图



题 6-10 图



$$W_y[\sigma_c]$$

$$\text{由 } \frac{\sigma_c}{8} f \leq W_y[\sigma_c]$$

$$q \leq W_y[\sigma_c] \cdot 8 \cdot \frac{1}{f} = \frac{I_y}{y_c} [\sigma_c] \cdot \frac{8}{f}$$

$$= \frac{7.357 \times 10^4 \times 10^{-12}}{(150 - 40.625) \times 10^{-3}} \times 160 \times 10^6 \times \frac{8}{5^2} = 3.44 \text{ kN/m}$$

$$\text{由 } \frac{\sigma_c}{8} f \leq W_y[\sigma_c]$$

$$q \leq W_y[\sigma_c] \cdot \frac{8}{f} = \frac{I_y}{40.625} [\sigma_c] \cdot \frac{8}{f}$$

$$= \frac{7.357 \times 10^4 \times 10^{-12}}{40.625 \times 10^{-3}} \times 80 \times 10^6 \times \frac{8}{5^2} = 4.63 \text{ kN/m}$$

∴ 取  $q \leq 3.44 \text{ kN/m}$

[6-11] 矩形截面木梁受力如图所示。已知  $P=15 \text{ kN}$ ,  $a=0.8 \text{ m}$ , 木材的容许应力  $[\sigma]=10 \text{ MPa}$ 。设梁横截面的高度与宽度之比为  $h/b=3/2$ 。试选择梁的截面尺寸。

解: 作弯矩图如图所示。其最大弯矩为  $M_{\max}=Pa=15 \times 0.8=12 \text{ kN} \cdot \text{m}$

由强度条件选择截面

$$\frac{M_{\max}}{W_y} \leq [\sigma]$$

$$W_y \leq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{12 \times 10^3}{10 \times 10^6} = 1200 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$W_y = \frac{bh^3}{6} = \frac{b}{6} \left(\frac{3}{2}b\right)^3 = \frac{3}{8}b^3$$

$$\therefore b \geq \sqrt[3]{1200 \times 10^{-6} \times \frac{8}{3}} = 147.4 \text{ mm}$$

$$\text{取 } b=150 \text{ mm}, h=\frac{3}{2}b=225 \text{ mm}$$

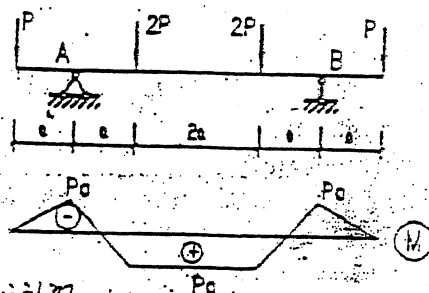


图 6-11

[6-12] 两个相同矩形截面  $120 \times 200 \text{ mm}$  的木梁, 左端用垫木和螺栓相联结, 而右端用一直径为  $10 \text{ mm}$  的螺栓渐渐拉紧, 设木梁的抗弯强度极限为  $47 \text{ MPa}$ , 而螺栓的抗拉强度极限为  $400 \text{ MPa}$ , 其中  $l=2 \text{ m}$ 。

(1) 问木梁先折断还是右端螺栓先断裂?

(2) 要使木梁和螺栓同时达到强度极限, 螺栓的直径应为多大。

解: (1) 设螺栓所受拉力为  $P$ , 木梁受力如图所示,  $M_{\max}=Pl$

梁破坏时应有  $\sigma \geq \sigma_s$

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{P \times 2000}{\frac{120 \times 200^3}{6}} \geq 47$$

$$\text{得 } P \geq 18.80 \text{ kN}$$

$$\text{螺栓受拉破坏时应有 } \sigma \leq \sigma_s, \sigma = \frac{P}{A} \geq \sigma_s$$

$$P \geq 400 \times \frac{\pi \times 10^2}{4} = 31 \text{ kN}, \text{ 所以木梁先破坏。}$$

(2) 设螺栓的直径为  $d$

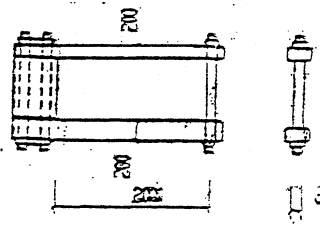
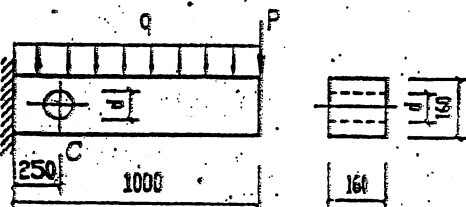


图 6-12

因梁破坏时体系所受的最大集中力为 18.8kN, 所以螺栓所受拉力也是 18.8kN, 使螺栓在此拉力下也到达其强度极限, 所需直径为

$$\frac{P}{A} = \sigma_s, \frac{18.8}{\frac{\pi d^2}{4}} = 400, d = \sqrt{\frac{4 \times 18.8 \times 10^3}{400 \times 10^6 \pi}} = 7.7 \text{mm}$$

【6-13】 正方形截面的悬臂木梁受力如图。木料的容许应力  $[\sigma] = 10 \text{MPa}$ 。现需要在梁的截面 C 上中性轴处钻一直径为  $d$  的圆孔, 在保证该梁强度的条件下, 圆孔的最大直径  $d$  (不考虑圆孔处应力集中的影响) 可达多少?



题 6-13 图

解: C 截面上的弯矩值为:

$$M_c = 5 \times 0.75 + \frac{1}{2} \times 2 \times (0.75)^2 = 4.31 \text{kN} \cdot \text{m}$$

C 截面的惯性矩是

$$I_x = \frac{1}{12} (0.16^4 - 0.16d^2) = \frac{BH^3}{12} - \frac{bh^3}{12}$$

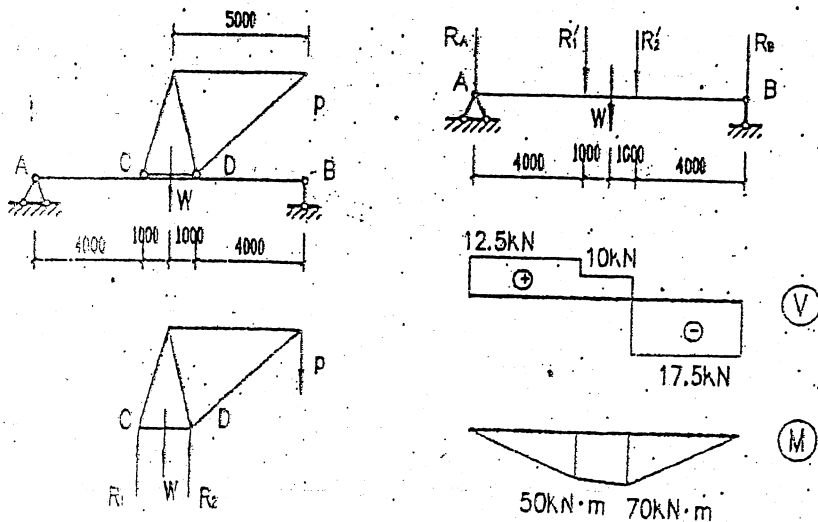
由

$$\sigma_{\max} = \frac{M_c}{I_x} \cdot \frac{h}{2} = \frac{12 \times 4.31 \times 10^3}{(0.16^4 - 0.16d^2)} \times \frac{0.16}{2} \leq 10 \times 10^6$$

得  $d \geq 115 \text{mm}$

【6-14】 图示起重机, 它的重量  $W = 50 \text{kN}$ , 行走于由两根工字形钢梁所组成的轨道上。已知起重量  $P = 10 \text{kN}$ , 且全部荷载平均分配在两根钢梁上, 钢梁的容许应力  $[\sigma] = 170 \text{MPa}$ ,  $[\tau] = 100 \text{MPa}$ 。试计算当吊车行至梁的跨中时, 需要多大的工字钢才能满足强度要求。

解: (1) 由起重机的平衡 (如图 b 示) 有:



题 6-14 图

主

$$\Sigma y = 0, R_1 + R_2 = P + W$$

$$\Sigma m_D = 0, 2R_1 + 4P = W$$

解得

$$R_1 = \frac{1}{2}(W - 4P) = \frac{1}{2}(50 - 4 \times 10) = 5 \text{ kN}$$

$$R_2 = 10 + 50 - 5 = 55 \text{ kN}$$

(2) 选择轨道工字形钢梁的型号。图 C 表示每一根轨道梁的计算简图。在图中，

$$y_B = \frac{1}{10}(2.5 \times 4 + 27.5 \times 6) = 17.5 \text{ kN}$$

$$y_A = \frac{1}{10}(27.5 \times 4 + 2.5 \times 6) = 12.5 \text{ kN}$$

绘出 AB 梁的 M 图如图 C。

显然

$$M_{\max} = M_D = 70 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

由公式

$$\frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma]$$

必有

$$W_x \geq \frac{M_D}{[\sigma]} = \frac{70 \times 10^6}{170} = 4.118 \times 10^5 \text{ mm}^3$$

查表选 I25b, 其  $W_x = 422.7 \times 10^3 \text{ mm}^3$

(3) 用腹板承受剪力进行剪应力校核。注意到该梁在 DB 段, 剪力 V 为常量且最大,

即

$$V_{\max} = 17.5 \text{ kN}$$

相应

$$\tau_{\max} = \frac{V_{\max}}{h'd} = \frac{17.5 \times 10^3}{(250 - 13) \times 10} = 8.2 \text{ MPa}$$

因为

$$\tau_{\max} < [\tau] = 100 \text{ MPa}$$

故可选 I25b 作起重机轨道是安全的。

[6-15] 图示的挡水墙由在一排正方形的截面的竖直木桩上钉上木板所做成。已知: 水深  $h = 1.5 \text{ m}$ , 木桩的排列间距  $s = 1 \text{ m}$ , 木材的受弯容许正应力  $[\sigma] = 8 \text{ MPa}$ , 容许剪应力  $[\tau] = 0.9 \text{ MPa}$ , 试求所需木桩的截面边长  $a$  和所需木板的厚度  $d$ 。

解: (1) 选取木板厚度

$d$ , 由图 c 知

设整板上的  $q_1$  相同

$$r = 9.8 \text{ kN/m}^3$$

$$q_1 = \frac{r h \cdot s h}{s} = r h^2$$

$$\text{水深底的 } q_1 = 9.8 \times 1.5^2$$

$$= 22 \text{ kN/m}$$

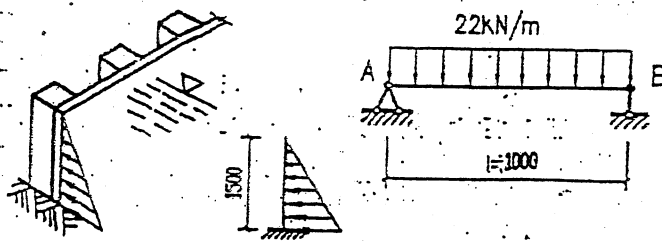


图 6-15

$$M_{\max} = \frac{1}{8} q l^2 = \frac{22 \times 10^3 \times 10^4 \times 1}{8} = 2.75 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$V_{\max} = \frac{q l}{2} = \frac{22 \times 10^3 \times 1}{2} = 11 \times 10^3 \text{ N}$$

先按正应力选, 由强度条件

$$\frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma] \text{ 有, } W_z = \frac{bh^3}{6} \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}, \text{ 板厚度 } d$$

$$d = \sqrt{\frac{6M_{\max}}{[\sigma]b}} = \sqrt{\frac{6 \times 2.75 \times 10^4}{8 \times 1.5 \times 10^3}} = 37.08 \text{ mm}$$

由校核剪应力

$$\tau_{\max} = \frac{3V}{2A} = \frac{3 \times 11 \times 10^3}{2 \times 32 \times 1500} = 0.34 \text{ MPa}$$

因为  $\tau_{\max} < [\tau] = 0.9 \text{ MPa}$ , 所以取板厚  $d = 37.08 \text{ mm}$  安全。

(2) 选取木桩的边长  $a$ 。在图中三角形分布荷载, 最大荷载集度为

$$q_0 = 9.8 \times 1.5 = 14.7 \text{ kN/m}$$

在底部与地基相接的截面上;

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{2 \times 3} = \frac{14.7 \times 1.5^2 \times 10^4}{6} = 5.513 \times 10^4 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$V_{\max} = \frac{ql}{2} = \frac{14.7 \times 1.5 \times 10^3}{2} = 1.1025 \times 10^4 \text{ N} = 11.025 \text{ kN}$$

由正应力强度条件选择截面

$$\frac{M_{\max}}{W} = \frac{M_{\max}}{\frac{a^3}{6}} \leq [\sigma], a \geq \sqrt[3]{\frac{6M_{\max}}{[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{6 \times 5.513 \times 10^4}{8}} = 160.5 \text{ mm}$$

取  $a = 162 \text{ mm}$

由剪应力强度校核

$$\tau_{\max} = \frac{3V}{2A} = \frac{3 \times 1.105 \times 10^4}{2 \times 162^2} = 0.63 \text{ MPa} < [\tau]$$

所以选  $a = 162 \text{ mm}$  符合强度要求。

✓ [6-16] 简支梁工字型钢梁, 工字型钢号为 28a, 梁上荷载如图示。已知  $l = 6 \text{ m}$ ,  $P_1 = 90 \text{ kN}$ ,  $P_2 = 60 \text{ kN}$ 。钢材的容许应力  $[\sigma] = 170 \text{ MPa}$ ,  $[\tau] = 100 \text{ MPa}$ 。试检查梁的强度。

解: (1) 作内力图  $b, c$  示:

$$M_{\max} = 85 \text{ kN} \cdot \text{m}, V_{\max} = 85 \text{ kN}$$

(2) 正应力强度校核: 查表  $W_z = 508 \text{ cm}^3$

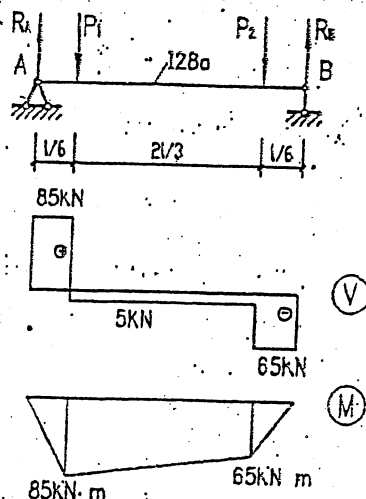
$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{85 \times 10^3}{508} = 167 \text{ MPa} < [\sigma]$$

(3) 查表  $I_z/S_z = 24.6 \text{ cm}$

$$\tau_{\max} = \frac{VS_z}{bI_z} = \frac{85 \times 10^3}{24.6 \times 10^{-2} \times 8.5 \times 10^{-3}} = 40.7 \text{ MPa} < [\tau]$$

所以, 满足强度条件。

[6-17] 图示各薄壁横截面。(1) 注明弯曲中心的大致位置; (2) 绘出形心主惯性轴的大致位置。



题 6-16 图

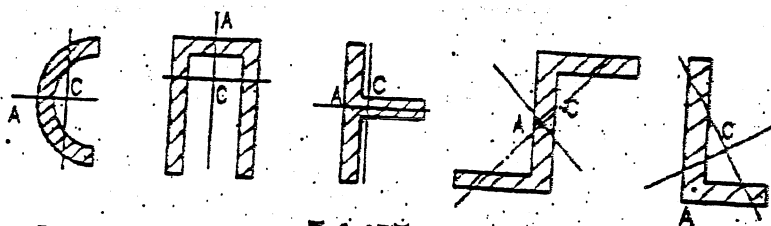


图 6-17

[6-18] 图示为一带切口的箱形截面, 试导出确定剪切中心 A 位置的公式。截面的壁厚为常数  $t$ , 且很小。

解: 由图知截面有对称轴  $z$ , 则剪切中心必位于该对称轴上。开口端 A' 和 bb 线之间的面积对  $z$  轴的面积矩

$$S_z = yz \cdot \frac{y}{2} = \frac{yz^2}{2}$$

则 bb 线处的剪应力

$$\tau = \frac{V_z S_z}{I_z} = \frac{V_z}{I_z} \left( \frac{yz^2}{2} \right) = \frac{V_z y^2}{2I_z}, \text{ 代入 } y = h/2$$

则 B 处的剪应力为

$$\tau_1 = \frac{V_z}{2I_z} \left( \frac{h}{2} \right)^2 = \frac{V_z h^2}{8I_z}$$

在 A'B 段内剪应力的合力为

$$V_1 = \int \tau dA = \int_0^{h/2} \left( \frac{V_z y^2}{2I_z} \right) t dy = \frac{V_z t h^3}{48I_z}$$

由图形的对称性可以看出, GH 段内剪应力的分布与 AB 段相对于  $z$  轴成反对称, 剪应力的合力与 A'B 大小相等, 方向相同。

开口端 A' 至 D 点间截面的面积对  $z$  轴的面积矩为

$$S_z = \left( \frac{ht}{2} \right) \frac{h}{4} + (bt) \frac{h}{2} = \frac{th}{2} \left( \frac{h}{4} + b \right)$$

则 D 处的剪应力为

$$\tau_2 = \frac{V_z S_z}{I_z} = \frac{V_z}{I_z} \left( \frac{th}{2} \right) \left( \frac{h}{4} + b \right) = \frac{V_z th}{2I_z} \left( \frac{h}{4} + b \right)$$

BD 段内剪应力的合力为

$$V_2 = (bt) \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} = \frac{bt}{2} \left[ \frac{V_z h^2}{8I_z} + \frac{V_z th}{2I_z} \left( \frac{h}{4} + b \right) \right] = \frac{V_z bth}{8I_z} (h + 2b)$$

由图形的对称性同样可以看出, FG 段内剪应力的分布与 BD 段相同, 剪应力的合力与  $V_2$  大小相等, 方向相反, DF 段内剪应力合力用  $V_3$  表示。

设剪力  $V_z$  通过剪切中心 A, 以 A 点为矩心, 则由合力矩定理可知

$$2V_1(b + e) + V_3 h = V_z e$$

$$\therefore V_2 = V_1 - 2V_1$$

所以 
$$e = \frac{2V_1 b + V_2 h}{V_1 - 2V_1} = \frac{1}{V_1} \left[ 2b \left( \frac{V_1 h^3}{48I_z} \right) + V_2 h \right]$$

$$= \frac{1}{V_1} \left[ 2b \left( \frac{V_1 h^3}{48I_z} \right) + \frac{V_1 b h}{8I_z} (h + 2b) h \right] = \frac{b h^2 \left( \frac{2h}{3} + b \right)}{4I_z}$$

截面对  $z$  轴的惯性矩为

$$I_z = 2 \left( \frac{t h^3}{12} \right) + 2 \left( \frac{b t^3}{12} + (b t) \left( \frac{h}{2} \right)^2 \right) = \frac{t h^3}{6} + \frac{b t h^3}{2}$$

计算中略去了高阶微量  $b t^3/12$ 。将  $I_z$  表达式代入上式，得出确定剪切中心  $A$  位置的距离  $e$  的公式为

$$e = \frac{b h^2 \left( \frac{2h}{3} + b \right)}{4 \left( \frac{t h^3}{6} + \frac{b t h^3}{2} \right)} = \frac{b(2h + 3b)}{2(h + 3b)}$$

[6-19] 铸铁梁如图示。已知材料的抗拉强度极限  $(\sigma_t)_l = 150 \text{ MPa}$ ，抗压强度极限  $(\sigma_c)_c = 630 \text{ MPa}$ 。试求此梁的安全系数。

解：首先求形心位置

$$y_c = \frac{160 \times 200 \times 100 - 140 \times 160 \times 120}{160 \times 200 - 160 \times 140} = 53.2 \text{ mm}$$

截面对形心轴的惯性矩

$$I_z = \frac{1}{12} \times 160 \times 200^3 + 160 \times 200 \times (100 - 53.2)^2 - \frac{1}{12} \times 140 \times 160^3 - 140 \times 160 \times (80 - 53.2)^2 = 2.9 \times 10^{-5} \text{ m}^4$$

(1) 求可能危险截面  $C$  所需的安全系数  $n_c$ 。

$C$  截面在正弯矩  $M_c = 12 \text{ kNm}$  作用下，上部受压，下部受拉。其中

$$\frac{|y|_{\max}}{|y|_{\min}} = \frac{200 - 53.2}{53.2} = 2.76, \text{ 而 } \frac{(\sigma_c)_c}{(\sigma_t)_l} = \frac{630}{150} = 4.2 > 2.76$$

所以， $C$  截面将由于拉应力先达到强度极限而破坏。

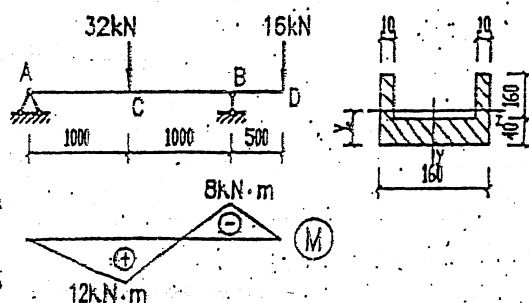
于是，由

$$\sigma_{c,l,\max} = \frac{M_c y_{c,l,\max}}{I_z} \leq [\sigma_t] = \frac{(\sigma_t)_l}{n_c}$$

$$\text{得 } n_c \leq \frac{I_z (\sigma_t)_l}{M_c y_{c,l,\max}} = \frac{2.9 \times 10^{-5} \times 150 \times 10^6}{12 \times 10^3 \times 0.0532} = 6.82$$

(2) 求可能危险截面  $B$  所需的安全系数  $n_{kc}$ 。

$B$  截面在负弯矩作用下，横截面上部受拉，下部受压。可知，此截面因上部边缘最大拉应力先达到材料强度极限而破坏。



题 6-19 图

于是,由

$$\sigma_{s, \max} = \frac{M_{s, \max} y_{s, \max}}{I_s} < [\sigma_s] = \frac{(\sigma_s)_s}{n_s}$$

得

$$n_s \leq \frac{(\sigma_s)_s I_s}{M_{s, \max} y_{s, \max}} = \frac{150 \times 10^6 \times 2.9 \times 10^{-8}}{8 \times 10^3 \times 0.147} = 3.70$$

$\therefore n_s < n_c, \therefore n = n_s = 3.70$

[6-20] 试绘图示梁内危险截面上的正应力与剪应力的分布图。

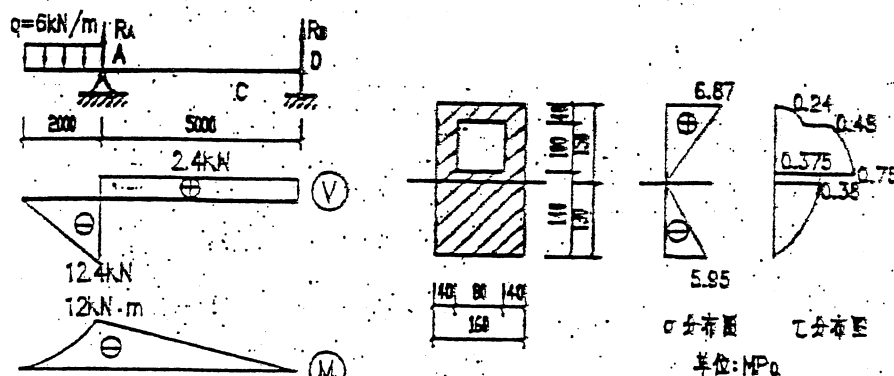


图 6-20

解: (1) 绘  $V$ 、 $M$  图, 由平衡条件可求得支反力:

$$R_A = 14.4\text{kN}, R_B = 2.4\text{kN}$$

绘  $V$ 、 $M$  图于图 b、c 中。由图中可知危险截面为  $A_x$  截面, 其上的剪力和弯矩为

$$V = -12\text{kN}, M = -12\text{kN} \cdot \text{m}$$

(2) 确定中性轴的位置, 计算截面对中性轴的惯性矩  $I_s$ , 因为截面对中性轴是非对称的, 所以必须先定出中性轴的位置, 又因中性轴一定通过截面的形心, 所以首先要确定形心位置。

根据截面图形可得: 截面面积为

$$A = 16 \times 28 - 10 \times 8 = 368 \times 10^3 \text{mm}^2$$

截面对底边水平线  $S$  的面积矩为:

$$S_s = 16 \times 28 \times 14 - 10 \times 8 \times 19 = 4750000 \text{mm}^3$$

因此, 截面形心  $O$  点距底边的距离为:

$$\bar{y}_c = \frac{S_s}{A} = \frac{4750 \times 10^3}{368 \times 10^3} = 0.13\text{m} = 130\text{mm}$$

截面对中性轴的惯性矩为

$$I_s = \left[ \frac{1}{12} \times 16 \times (28)^3 + 16 \times 28 \times (14 - 13)^2 \right] - \left[ \frac{1}{12} \times 8 \times 10^3 + 8 \times 10 \times (19 - 13)^2 \right] = 262 \times 10^{-6} \text{m}^4$$

(3) 绘正应力分布图。由  $M$  图可知  $M_{\max} = 12\text{kN} \cdot \text{m}$

$$\text{最大拉应力: } \sigma_{\max} = \frac{M}{I_s} y_{s, \max} = \frac{12.4 \times 10^3 \times 0.15}{262 \times 10^{-6}} = 6.87\text{MPa}$$

最大压应力发生在截面的下边缘, 其值为

$$\sigma_{A, \max} = \frac{M}{I_z} y = \frac{12.4 \times 10^3 \times 0.13}{262 \times 10^{-6}} = 5.95 \text{MPa} (-)$$

(4) 剪应力计算式:

$$\tau = \frac{VS_z}{bI_z} = \frac{12 \times 10^3}{262 \times 10^{-6}} \cdot \frac{S_z}{b}$$

在 1 水平线上  $S_z = 0, \therefore \tau_1 = 0$

在 2 水平线上  $S_z = 160 \times 40 \times (150 - 20) = 832 \times 10^{-6} \text{m}^3$

$$\text{当 } b = 160 \text{mm 时, } \tau_2 = \frac{12 \times 10^3}{262 \times 10^{-6}} \cdot \frac{832 \times 10^{-6}}{0.16} = 0.24 \text{MPa}$$

$$\text{当 } b = 80 \text{mm 时, } \tau_2' = \frac{12 \times 10^3}{262 \times 10^{-6}} \cdot \frac{832 \times 10^{-6}}{0.08} = 0.48 \text{MPa}$$

在 3 水平线上  $S_z = 832 + 100 \times 40 \times (150 - 90) \times 2 = 1310 \times 10^{-6} \text{m}^3$

$$\text{当 } b = 80 \text{mm 时, } \tau_3 = \frac{12 \times 10^3}{262 \times 10^{-6}} \cdot \frac{1310 \times 10^{-6}}{0.08} = 0.75 \text{MPa}$$

$$\text{当 } b = 160 \text{mm 时, } \tau_3' = \frac{12 \times 10^3}{262 \times 10^{-6}} \cdot \frac{1310 \times 10^{-6}}{0.16} = 0.375 \text{MPa}$$

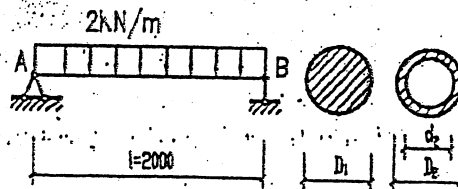
在 4 水平线上  $S_z = 1310 + 160 \times 10 \times 5 = 1320 \times 10^{-6} \text{m}^3$

$$\text{当 } b = 160 \text{mm 时, } \tau_4 = \frac{12 \times 10^3}{262 \times 10^{-6}} \cdot \frac{1320 \times 10^{-6}}{0.16} = 0.38 \text{MPa}$$

在 5 水平线上  $S_z = 0, \tau_5 = 0$

最后根据各点的  $\sigma, \tau$  值绘出应力分布图 (d), (e) 示。

[6-21] 简支梁受均布荷载如图示, 若采用两种截面面积相等的实心和空心圆截面,  $D_1 = 40 \text{mm}, d_2/D_1 = 3/5$ 。试分别计算它们的最大正应力, 空心截面比实心截面的最大正应力减少了百分之几?



题 6-21 图

$$\text{解: 梁内最大弯矩 } M_{\max} = \frac{1}{8} \times 2 \times 2^2 = 1 \text{kN} \cdot \text{m}$$

实心轴最大正应力

$$\sigma_{\max} = \frac{1 \times 10^3 \times 32}{\pi \times 0.04^3} = 159 \text{MPa}$$

由于

$$\frac{\pi}{4} (D_2^2 - d_2^2) = \frac{\pi}{4} D_1^2, d_2 = \frac{3}{5} D_2$$

故得空心轴直径  $D_2 = 50 \text{mm}, d_2 = 30 \text{mm}$

空心轴的最大正应力

$$\sigma_{\max} = \frac{1 \times 10^3}{\frac{\pi \times 0.05^3}{32} [1 - (\frac{3}{5})^4]} = 93.6 \text{MPa}$$

空心截面轴比实心截面轴的最大正应力减小了  $\frac{159 - 93.6}{159} = 41\%$

[6-22] 当荷载  $P$  直接作用在跨长为  $l = 6 \text{m}$  的简支梁  $AB$  中点时, 梁内最大正应力超过容许值 30%。为了消除此超载现象, 配置了如图所示的辅助梁  $CD$ , 试求此辅助梁的最小跨长



a.

解:未配置辅助梁时,  $M_{1, \max} = \frac{Pl}{4}$

$$\sigma_{1, \max} = \frac{M_{1, \max}}{W_z} = \frac{Pl/4}{W_z}$$

配置辅助梁后,梁 AB 的 CD 段是处于纯弯曲状态。

$$M_{2, \max} = \frac{P}{2} \cdot \frac{1}{2}(l-a) = \frac{P}{4}(l-a)$$

$$\sigma_{2, \max} = \frac{M_{2, \max}}{W_z} = \frac{P(l-a)}{4W_z}$$

根据题意有  $\sigma_1 = [\sigma]$ , 及

$$\frac{\sigma_{1, \max} - \sigma_{2, \max}}{\sigma_{2, \max}} \times 100\% = 30\%$$

$$\text{即} \left[ \frac{\frac{Pl}{4}}{\frac{P(l-a)}{4}} - \frac{P(l-a)}{4} \right] \frac{P(l-a)}{4} = 0.3$$

$$\text{得} \quad a = \frac{0.3}{1.3}l = 0.231 \times 6 = 1.39\text{m}$$

[6-23] 梁 ABCDE 尺寸及荷载如图示。已知:  $P=40\text{kN}$ ,  $q=2\text{kN/m}$ 。(1)作此梁的剪力图和弯矩图;(2)如材料的容许应力  $[\sigma]=120\text{MPa}$ ,  $[\tau]=80\text{MPa}$ , 试为此梁选择一矩形截面(设高度与宽度之比  $h:b=3:2$ )。

解:(1)绘 V、M 图。

求支座反力:  $y_c=40\text{kN}$ ,  $y_d=80\text{kN}$

$y_a=23\text{kN}$ ,  $y_b=51\text{kN}$

从 V、M 图中可看出

$$|V_{\max}| = 40\text{kN}, |M_{\max}| = 80\text{kN} \cdot \text{m}$$

(2)按正应力强度条件选择截面

$$\therefore \frac{h}{b} = \frac{3}{2}, W = \frac{bh^2}{6} = \frac{3}{8}b^3$$

$$\therefore \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma], \frac{80 \times 10^3}{\frac{3}{8}b^3} \leq 120 \times 10^6$$

$$\text{得} \quad b \geq \sqrt[3]{\frac{80 \times 10^3 \times 8}{120 \times 10^6 \times 3}} = 121.2\text{mm}$$

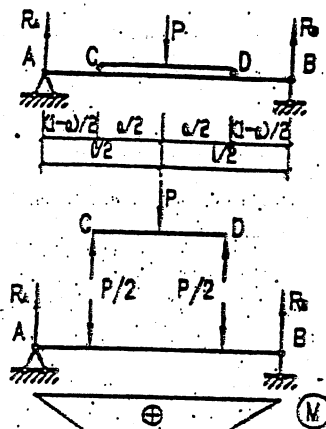
$$\text{取} \quad b=122\text{mm}, h=\frac{3}{2}b=183\text{mm}$$

(3)按剪应力强度条件校核

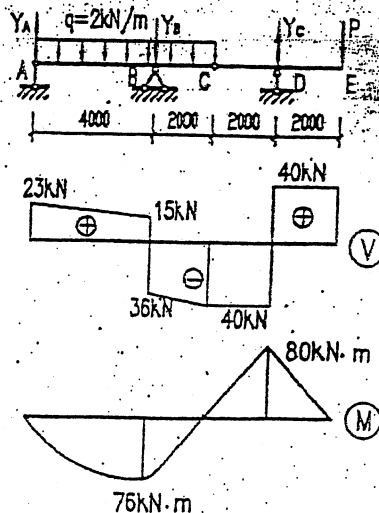
$$\tau_{\max} = \frac{V_{\max} S_{\max}}{bI_z} \leq [\tau], \tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{V_{\max}}{bh} < [\tau]$$

$$\text{即} \quad \frac{3}{2} \frac{40 \times 10^3}{122 \times 183} = 26.87 \times 10^{-1} \text{MPa} = 2.687 \text{MPa} < [\tau]$$

剪切强度足够,故取矩形截面  $b=122\text{mm}$ ,  $h=183\text{mm}$ 。



题 6-22 图



题 6-23 图

互力超过  
最小跨长

【6-24】 闸门的滚轮承受支承面轨道的反力  $P=257\text{kN}$ ，此反力由滚轮传到滚轮轴上时，可以近似地当作均匀分布的。轮轴用 45 号钢制成，其容许应力  $[\sigma]=145\text{MPa}$ ， $[\tau]=90\text{MPa}$ ， $d=85\text{mm}$ 。试校核滚轮的正应力强度和剪应力强度。

解：把轮轴受力抽象成如图 a 的计算简图。其均布荷载

$$q = \frac{P}{0.16} = \frac{257}{0.16} = 1605\text{kN/m}$$

剪力图和弯矩图分别如图 b、c 示。

$$V_{\max} = 128.5\text{kN}, M_{\max} = 8.36\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{32M_{\max}}{\pi d^3}$$

$$= \frac{32 \times 8.36 \times 10^3}{\pi \times 8.5^3 \times 10^{-6}} = 138\text{MPa} < [\sigma] = 145\text{MPa}$$

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{V_{\max}}{A} = \frac{4}{3} \cdot \frac{V_{\max}}{\frac{\pi d^2}{4}}$$

$$= \frac{16 \times 128.5 \times 10^3}{3\pi \times 8.5^3 \times 10^{-4}} = 30.2\text{MPa} < [\tau] = 90\text{MPa}$$

此轴强度足够。

【6-25】 图示一半径为  $R_c=40\text{mm}$  的钢制曲杆，杆的横截面为圆形，其直径  $d=20\text{mm}$ 。曲杆横截面  $m-m$  上的弯矩  $M=-60\text{Nm}$ 。试计算  $m-m$  横截面上的最大弯曲正应力。

解：由公式  $\rho = \frac{d^2}{4(2R_c - \sqrt{4R_c^2 - d^2})}$  计算：

$$\rho = \frac{20^2}{4(2 \times 40 - \sqrt{4 \times 40^2 - 20^2})}$$

$$= \frac{5}{4 - \sqrt{15}} = 39.37\text{mm}$$

其截面中性轴与形心轴之间的距离为

$$e = R_c - \rho = 40 - 39.37 = 0.6299\text{mm}$$

曲杆的最大弯曲正应力发生在杆的内侧，对应的  $y$

$$y = -\left(\frac{d}{2} - e\right) = -\frac{20}{2} + 0.6299 = -9.37\text{mm}$$

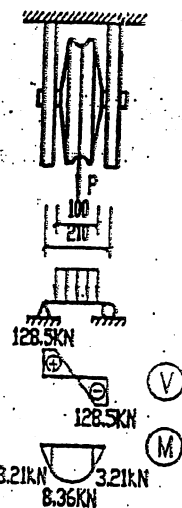
内侧的曲率半径：

$$\rho(y) = R_c - \frac{d}{2} = 40 - \frac{20}{2} = 30\text{mm}$$

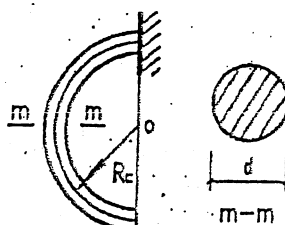
代入正应力计算公式中，内侧

$$\sigma_{\max} = \frac{M \cdot y}{S_z(\rho + y)} = \frac{-60 \times (-9.37) \times 10^{-3}}{\frac{\pi}{4} \times 20^2 \times 10^{-4} \times 0.6299 \times 10^{-3} (39.37 - 9.37) \times 10^{-3}}$$

$$= \frac{562.2 \times 10^{-3}}{5936.6676 \times 10^{-10}} = 0.0946995 \times 10^8 = 94.7\text{MPa}$$



题 6-24 图



题 6-25 图

若按直梁公式计算  $\sigma_{\max} = \frac{M}{W} = \frac{50}{\frac{\pi}{32} \times 20^3 \times 10^{-9}} = 76.4 \text{ MPa}$

两值相差甚远。

[6-26] 试验证下列截面的塑性抗弯截面模量  $W_p$  与弹性抗弯截面模量  $W_e$  的比值。

(1) 圆形截面  $W_p/W_e = 1.70$ ;

(2) 薄壁圆筒截面 (壁厚  $t \leq$  平均半径  $r_0$ ),  $W_p/W_e = 1.27$ ;

(3) 对角线尺寸为  $h$  和  $b$  的菱形截面  $W_p/W_e = 2.00$ 。

解: (1)  $W_p = 2S = 2A \cdot \frac{2d}{3\pi} = 2 \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{2d}{3\pi} = \frac{d^3}{6}$

$W_e = \frac{\pi d^3}{32}$

$W_p/W_e = \frac{d^3/6}{\pi d^3/32} = 1.7$

(2)  $W_p = 2S = 2 \left[ \frac{\pi}{2} \left( r_0 + \frac{t}{2} \right)^2 \cdot \frac{4(r_0 + \frac{t}{2})}{3\pi} - \frac{\pi}{2} \left( r_0 - \frac{t}{2} \right)^2 \cdot \frac{4(r_0 - \frac{t}{2})}{3\pi} \right] \approx 4r_0^2 t$

$W_e = \frac{1}{2} r_0 = \frac{2\pi r_0^3 t}{2 \cdot \pi r_0^3} = \pi r_0^2 t$

$W_p/W_e = 4r_0^2 t / \pi r_0^2 t = 1.27$

(3)  $W_p = 2S = 2 \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2} b \right) \left( \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{2} \right) = \frac{bh^2}{12}$

$W_e = \frac{2 \cdot \frac{b}{12} \left( \frac{h}{2} \right)^3}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{24}$

$W_p/W_e = \frac{bh^2/12}{bh^2/24} = 2.00$

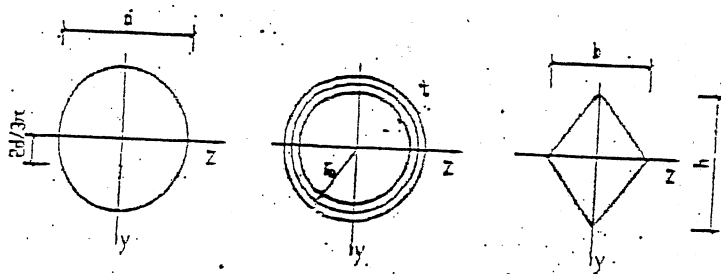


图 6-26

若按直梁公式计算  $\sigma_{\max} = \frac{M}{W} = \frac{60}{\frac{\pi}{32} \times 20^3 \times 10^{-9}} = 76.4 \text{ MPa}$

两值相差甚远。

[6-26] 试验证下列截面的塑性抗弯截面模量  $W_p$  与弹性抗弯截面模量  $W_e$  的比值。

(1) 圆形截面  $W_p/W_e = 1.70$ ;

(2) 薄壁圆筒截面 (壁厚  $t \leq$  平均半径  $r_0$ )  $W_p/W_e = 1.27$ ;

(3) 对角线尺寸为  $h$  和  $b$  的菱形截面  $W_p/W_e = 2.00$ 。

解: (1)  $W_p = 2S = 2A \cdot \frac{2d}{3\pi} = 2 \cdot \frac{\pi d^2}{8} \cdot \frac{2d}{3\pi} = \frac{d^3}{6}$

$$W_e = \frac{\pi d^3}{32}$$

$$W_p/W_e = \frac{d^3}{6} / \frac{\pi d^3}{32} = 1.7$$

$$(2) W_p = 2S = 2 \left[ \frac{\pi}{2} \left( r_0 + \frac{t}{2} \right)^2 \cdot \frac{4(r_0 + \frac{t}{2})}{3\pi} - \frac{\pi}{2} \left( r_0 - \frac{t}{2} \right)^2 \cdot \frac{4(r_0 - \frac{t}{2})}{3\pi} \right] \approx 4r_0^2 t$$

$$W_e = \frac{1}{2r_0} = \frac{2\pi r_0 t r_0^2}{2 \cdot r_0} = \pi r_0^2 t$$

$$W_p/W_e = 4r_0^2 t / \pi r_0^2 t = 1.27$$

$$(3) W_p = 2S = 2 \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot b \right) \left( \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{2} \right) = \frac{bh^2}{12}$$

$$W_e = \frac{2 \cdot \frac{b}{12} \cdot \left( \frac{h}{2} \right)^3}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{24}$$

$$W_p/W_e = \frac{bh^2}{12} / \frac{bh^2}{24} = 2.00$$

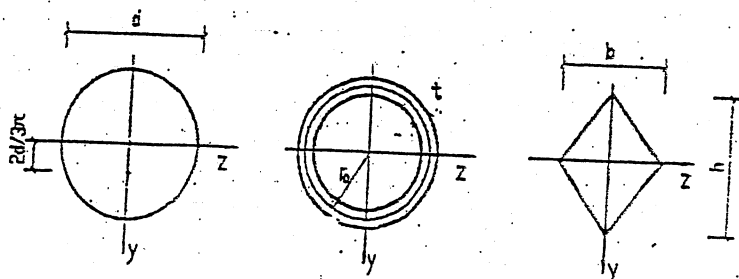


图 6-26

解得

$$C = \frac{7}{360} q_0 L^3, D = 0$$

于是

$$\theta(x) = \theta'(x) = \frac{q_0}{EI} \left( \frac{7L^3}{360} - \frac{Lx^2}{12} + \frac{x^3}{24L} \right)$$

$$v(x) = \frac{q_0}{EI} \left( \frac{7L^3}{360} x - \frac{Lx^3}{36} + \frac{x^4}{120L} \right)$$

$$\theta_A = \theta(0) = \frac{7q_0 L^3}{360EI}$$

$$\theta_B = \theta(L) = -\frac{q_0 L^3}{45EI}$$

$$v\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{5q_0 L^4}{768EI}$$

令  $\theta(x_c) = 0$ , 解得  $x_c = 0.52L$

$$v_{\max} = v(0.52L) = \frac{5.01q_0 L^4}{768EI}$$

[7-2] 试用积分法求图示各梁的指定位移。

解: (a) 支反力及坐标如图示。该梁应分两段列挠曲线近似微分方程并积分。

AC段

$$EIv_1'' = -M_1(x) = 8qa^2 - 2qax$$

$$EIv_1' = 8qa^2x - qax^2 + C_1$$

$$EIv_1 = 4qa^2x^2 - \frac{qa}{3}x^3 + C_1x + D_1$$

CD段

$$EIv_2'' = -M_2(x) = 8qa^2 - 2qax + \frac{1}{2}q(x-3a)^2$$

$$EIv_2' = 8qa^2x - qax^2 + \frac{1}{6}q(x-3a)^3 + C_2$$

$$EIv_2 = 4qa^2x^2 - \frac{1}{3}qax^3 + \frac{1}{24}q(x-3a)^4 + C_2x + D_2$$

用连续条件  $v_1'(3a) = v_2'(3a)$  和  $v_1(3a) = v_2(3a)$

解得

$$C_1 = C_2, D_1 = D_2$$

再利用边界条件  $v_1'(0) = 0$  和  $v_1(0) = 0$

解得

$$C_1 = 0, D_1 = 0$$

将积分常数的值代回挠曲线方程和转角方程后, 可得

$$v_B = v_2(5a) = \frac{59qa^4}{EI}$$

$$\theta_B = v_2'(5a) = \frac{49qa^3}{3EI}$$

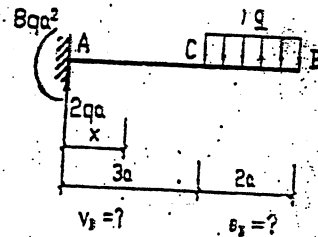


图 7-20 图

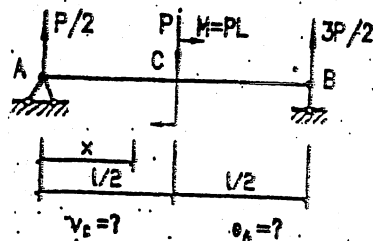
(b) 分两段列挠曲线微分方程并积分

AC 段

$$EIv_1'' = -M_1(x) = \frac{P}{2}x$$

$$EIv_1' = \frac{P}{4}x^2 + C_1$$

$$EIv_1 = \frac{P}{12}x^3 + C_1x + D_1$$



$v_c = ?$   $\theta_A = ?$

题 7-2b 图

CB 段

$$EIv_2'' = -M_2(x) = \frac{P}{2}x + P(x - \frac{L}{2}) - PL(x - \frac{L}{2})^2$$

$$EIv_2' = \frac{P}{4}x^2 + \frac{P}{2}(x - \frac{L}{2})^2 - PL(x - \frac{L}{2}) + C_2$$

$$EIv_2 = \frac{P}{12}x^3 + \frac{P}{6}(x - \frac{L}{2})^3 - \frac{PL}{2}(x - \frac{L}{2})^2 + C_2x + D_2$$

利用连续条件  $v_1'(\frac{L}{2}) = v_2'(\frac{L}{2})$  和  $v_1(\frac{L}{2}) = v_2(\frac{L}{2})$

$$C_1 = C_2, \quad D_1 = D_2$$

利用边界条件  $v_1(0) = 0$  和  $v_2(L) = 0$

解得

$$D_1 = 0, \quad C_2 = \frac{PL^2}{48}$$

于是

$$v_c = v_1(\frac{L}{2}) = \frac{PL^3}{48EI}$$

$$\theta_A = v_1'(0) = \frac{PL^2}{48EI}$$

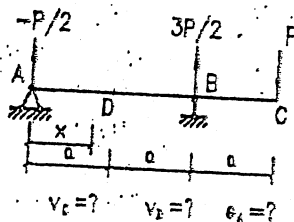
(c) 分两段列挠曲线微分方程并积分。

AB 段

$$EIv_1'' = -M_1(x) = \frac{P}{2}x$$

$$EIv_1' = \frac{P}{4}x^2 + C_1$$

$$EIv_1 = \frac{P}{12}x^3 + C_1x + D_1$$



$v_c = ?$   $v_b = ?$   $\theta_A = ?$

题 7-2c 图

BC 段

$$EIv_2'' = -M_2(x) = \frac{P}{2}x - \frac{3P}{2}(x - 2a)$$

$$EIv_2' = \frac{P}{4}x^2 - \frac{3P}{4}(x - 2a)^2 + C_2$$

$$EIv_2 = \frac{P}{12}x^3 - \frac{P}{4}(x - 2a)^3 + C_2x + D_2$$

利用连续条件  $v_1'(2a) = v_2'(2a)$  和  $v_1(2a) = v_2(2a)$

解得

$$C_1 = C_2, \quad D_1 = D_2$$

利用边界条件  $v_1(0) = 0$  和  $v_1(2a) = 0$

解得

$$D_1 = 0, C_1 = -\frac{1}{3}Pa^2$$

于是

$$v_c = v_2(3a) = -\frac{Pa^3}{EI}$$

$$v_D = v_1(a) = -\frac{Pa^3}{4EI}$$

$$\theta_A = v_1'(0) = -\frac{Pa^2}{3EI}$$

(d) 分三段列挠曲线微分方程并积分。(将  $q$  延长, 并加反向荷载如图所示)

AB 段

$$EIv_1'' = -M_1(x) = \frac{Px^2}{2a}$$

$$EIv_1' = \frac{Px^3}{6a} + C_1$$

$$EIv_1 = \frac{Px^4}{24a} + C_1x + D_1$$

BD 段

$$EIv_2'' = -M_2(x) = \frac{Px^2}{2a} - \frac{P}{2a}(x-a)^2 - \frac{3P}{4}(x-a)$$

$$EIv_2' = \frac{Px^3}{6a} - \frac{P}{6a}(x-a)^3 - \frac{3P}{8}(x-a)^2 + C_2$$

$$EIv_2 = \frac{Px^4}{24a} - \frac{P}{24a}(x-a)^4 - \frac{P}{8}(x-a)^3 + C_2x + D_2$$

DE 段

$$EIv_3'' = -M_3(x) = \frac{Px^2}{2a} - \frac{P}{2a}(x-a)^2 - \frac{3P}{4}(x-a) - \frac{5P}{4}(x-3a)$$

$$EIv_3' = \frac{Px^3}{6a} - \frac{P}{6a}(x-a)^3 - \frac{3P}{8}(x-a)^2 - \frac{5P}{8}(x-3a)^2 + C_3$$

$$EIv_3 = \frac{Px^4}{24a} - \frac{P}{24a}(x-a)^4 - \frac{P}{8}(x-a)^3 - \frac{5P}{24}(x-3a)^3 + C_3x + D_3$$

用连续条件  $v_1'(a) = v_2'(a)$ ,  $v_1(a) = v_2(a)$ ,  $v_2'(3a) = v_3'(3a)$  和  $v_2(3a) = v_3(3a)$

解得

$$C_1 = C_2 = C_3, D_1 = D_2 = D_3$$

再利用边界条件,  $v_1(a) = 0$  和  $v_2(3a) = 0$

解得

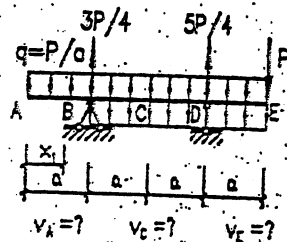
$$C_1 = -\frac{5}{6}Pa^2, D_1 = \frac{19}{24}Pa^3$$

于是

$$v_A = v_1(0) = \frac{19Pa^3}{24EI}$$

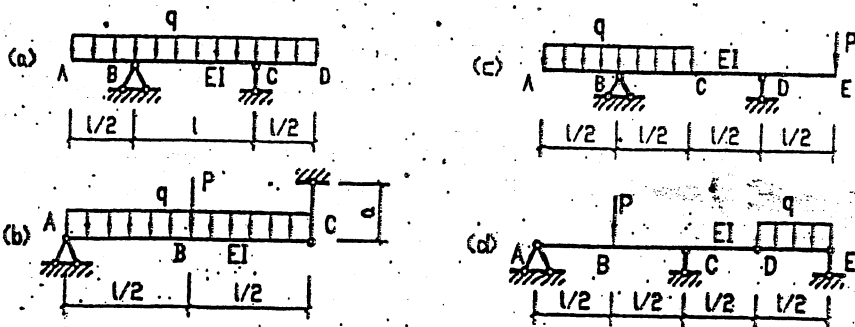
$$v_c = v_2(2a) = -\frac{3Pa^3}{8EI}$$

$$v_E = v_3(4a) = \frac{7Pa^3}{6EI}$$



题 7-2d 图

[7-3] 用积分法求位移时, 图示各梁应分几段来列挠曲线的近似微分方程式? 试分别列出确定积分常数时需用的边界条件和变形连续条件。



题 7-3 图

解: (a) 分三段。

边界条件  $v_{1A}=0, v_{2C}=0$

连续条件  $v_{1B}=v_{2B}, v'_{1B}=v'_{2B}, v_{2C}=v_{3C}, v'_{2C}=v'_{3C}$

(b) 分四段。

边界条件  $v_{1B}=0, v_{3D}=0$

连续条件  $v_{1B}=v_{2B}, v'_{1B}=v'_{2B}, v_{2C}=v_{3C}, v'_{2C}=v'_{3C}, v_{3D}=v_{4D}, v'_{3D}=v'_{4D}$

(c) 分两段。

边界条件  $v_{1A}=0, v_{2C}=\Delta l_{CD}=\frac{(P+qL)a}{2EA}$

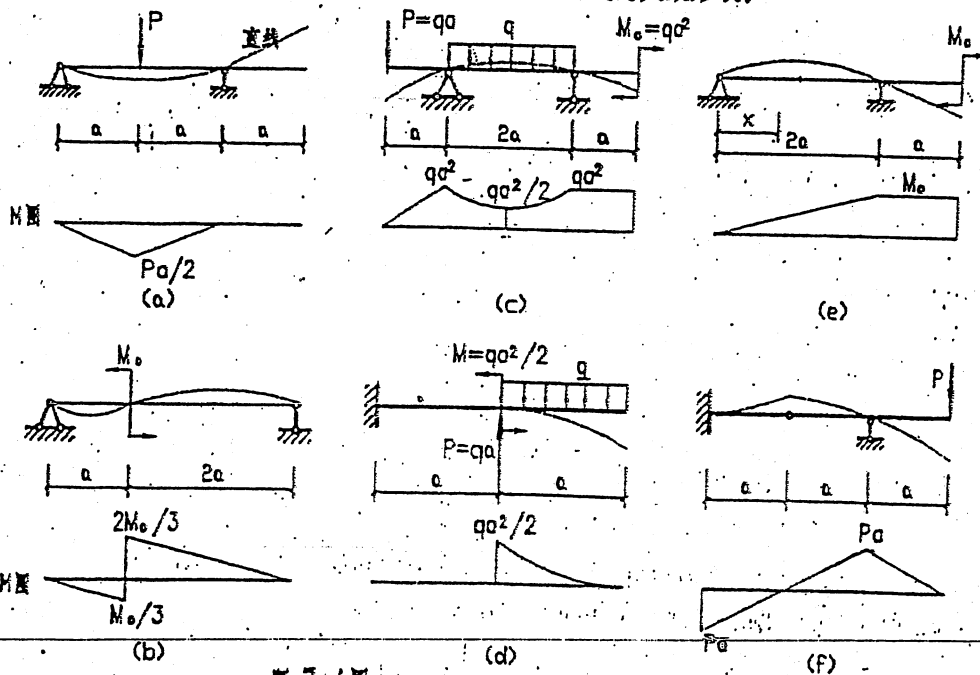
连续条件  $v_{1B}=v_{2B}, v'_{1B}=v'_{2B}$

(d) 分四段。

边界条件  $v_{1A}=0, v_{2C}=0, v_{4E}=0$

连续条件  $v_{1B}=v_{2B}, v'_{1B}=v'_{2B}, v_{2C}=v_{3C}, v'_{2C}=v'_{3C}, v_{3D}=v_{4D}$

[7-4] 根据荷载及支座情况, 绘出图示各梁挠曲线的大致形状。



题 7-4 图



解: 挠曲线的大致形状必须做到: (1) 满足边界条件及连续条件; (2) 挠曲线的凹凸性应与弯矩图的正负号一致。因为  $EIv'' = -M(x)$ , 弯矩图为正值的部分所对应的挠曲线为凹形; 弯矩图为负值部分所对应的挠曲线为凸形; 弯矩值为零的部分对应的挠曲线为直线。挠曲线拐点位置与弯矩值为零对应。

首先画出弯矩图, 同时考虑边界条件, 本题各梁挠曲线大致形状如图中虚线所示。

[7-5] 试用共轭梁法求解习题 7-2 各梁的指定位移。

(a) 解: 虚梁及其所受荷载如图示。

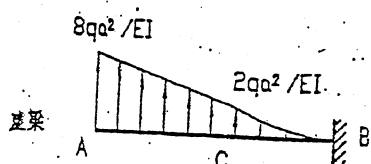
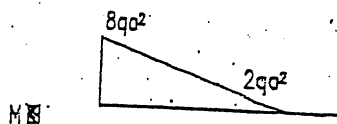
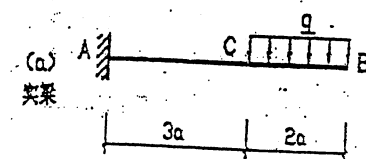
$$v_B = \bar{M}_B = \left( \frac{2qa^2}{EI} \times 3a \right) \times \left( \frac{3a}{2} + 2a \right) + \left( \frac{1}{2} \times \frac{6qa^2}{EI} \times 3a \right) \times \left( \frac{2}{3} \times 3a + 2a \right) + \left( \frac{1}{3} \times \frac{2qa^2}{EI} \times 2a \right) \times \left( \frac{3}{4} \times 2a \right) = \frac{59qa^4}{EI}$$

$$\theta_B = \bar{V}_B = \frac{1}{2} \left( \frac{8qa^2}{EI} + \frac{2qa^2}{EI} \right) \times 3a + \frac{1}{3} \times \frac{2qa^2}{EI} \times 2a = \frac{49qa^3}{3EI}$$

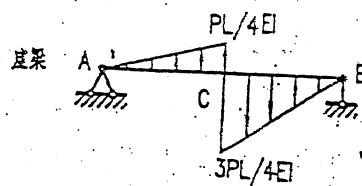
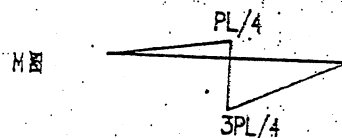
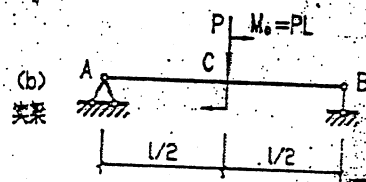
(b) 解: 虚梁及其所受荷载如图示。

$$v_C = \bar{M}_C = \frac{PL^2}{48EI} \times \frac{L}{2} + \left( \frac{1}{2} \times \frac{PL}{4EI} \times \frac{L}{2} \right) \times \left( \frac{1}{3} \times \frac{L}{2} \right) = \frac{PL^3}{48EI}$$

$$\theta_A = \bar{V}_A = \frac{PL^2}{48EI}$$



题 7-5a 图



题 7-5b 图

(c) 解: 虚梁及其所受荷载如图示。

$$v_C = \bar{M}_C = -\frac{Pa^2}{3EI} \times 3a + \left( \frac{1}{2} \times \frac{Pa}{EI} \times 2a \right) \times \left( \frac{1}{3} \times 2a + a \right) + \left( \frac{1}{2} \times \frac{Pa}{EI} \times a \right) \times \left( \frac{2}{3} \times a \right) = \frac{Pa^3}{EI}$$

$$v_D = \bar{M}_D = -\frac{Pa^2}{3EI} \times a + \frac{1}{2} \times \frac{Pa}{2EI} \times a \times \frac{a}{3} = -\frac{Pa^3}{4EI}$$

$$\theta_A = \bar{v}_A = -\frac{Pa^2}{3EI}$$

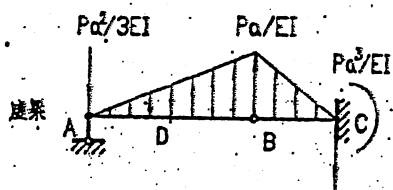
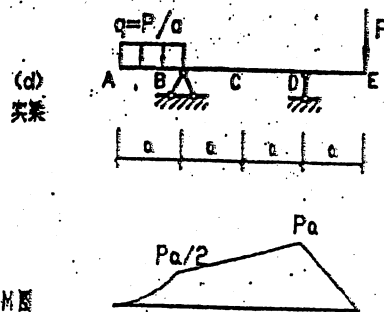
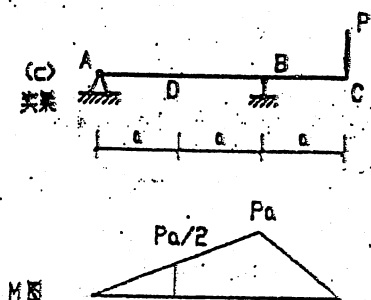


图 7-5c 图

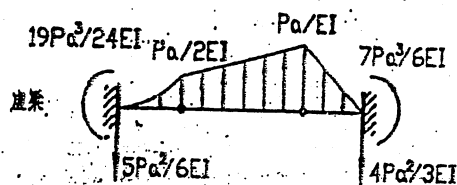


图 7-5d 图

(d) 解: 虚梁及其所受荷载如图示。

$$v_A = \bar{M}_A = \frac{19Pa^2}{24EI}$$

$$v_C = \bar{M}_C = \frac{19Pa^2}{24EI} - \frac{5Pa^2}{6EI} \times 2a + \left(\frac{1}{3} \times \frac{Pa}{2EI} \times a\right) \times \left(\frac{a}{4} + a\right) + \left(\frac{Pa}{2EI} \times a\right) \times \frac{a}{2} + \left(\frac{1}{2} \times \frac{Pa}{4EI} \times a\right) \times \frac{a}{3} = -\frac{3Pa^2}{8EI}$$

$$v_E = \bar{M}_E = \frac{7Pa^2}{6EI}$$

[7-6] 试用共轭梁法求图示变截面梁的最大挠度。

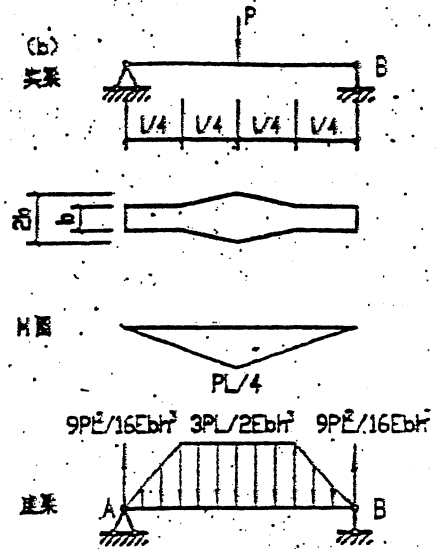
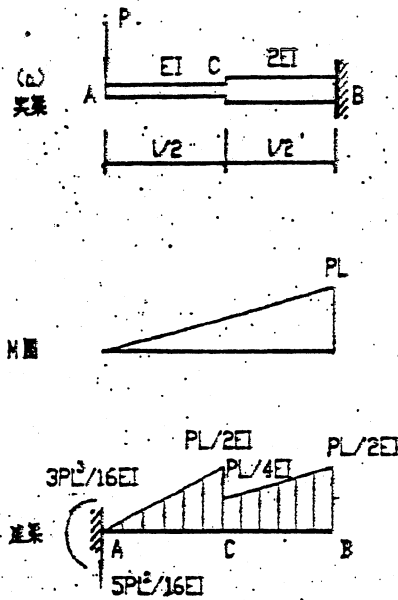
(a) 解: 虚梁及其所受荷载如图示。注意: 虚荷载  $q(x) = \frac{-M(x)}{EI(x)}$  中, 对于 AC 段  $I(x) = I$ , 而对于 CB 段  $I(x) = 2I$ 。

$$v_{\max} = v_A = \bar{M}_A = \frac{3PL^2}{16EI}$$

(b) 解: 虚梁及其所受荷载如图示。

$$v_{\max} = v_C = \bar{M}_C = \frac{9PL^2}{16Ebh^3} \times \frac{L}{2} - \left(\frac{1}{2} \times \frac{3PL}{2Ebh^3} \times \frac{L}{4}\right) \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{L}{4} + \frac{L}{4}\right)$$

$$- \left( \frac{3PL}{2Ebh^3} \times \frac{L}{4} \right) \times \left( \frac{1}{2} \times \frac{L}{4} \right) = - \frac{11PL^3}{64Ebh^3}$$



[7-7] 试用叠加法求练习题 7-2 各梁的指定位移。

(a) 解: 此梁可视为向下的满跨均布荷载与在 AC 段作用向上的均布荷载共同作用, 如图所示。

利用叠加法:

(1) 仅由向下的满跨均布荷载  $q$  作用时

$$\theta_{B_1} = \frac{q(5a)^2}{6EI} = \frac{125qa^2}{6EI}$$

$$v_{B_1} = \frac{q(5a)^4}{8EI} = \frac{625qa^4}{8EI}$$

(2) 仅在 AC 段作用向上的均布荷载时

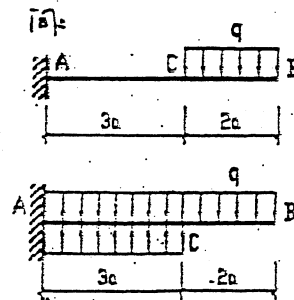
$$\theta_{C_2} = -\frac{q(3a)^2}{6EI} = -\frac{9qa^2}{2EI}$$

$$v_{C_2} = -\frac{q(3a)^4}{8EI} = -\frac{81qa^4}{8EI}$$

$$\theta_{B_2} = \theta_{C_2} = -\frac{9qa^2}{2EI}, v_{B_2} = v_{C_2} + 2a\theta_{C_2} = -\frac{81qa^4}{8EI} + 2a\left(-\frac{9qa^2}{2EI}\right) = -\frac{153qa^4}{8EI}$$

$$\therefore \theta_B = \theta_{B_1} + \theta_{B_2} = \frac{49qa^2}{3EI}$$

$$v_B = v_{B_1} + v_{B_2} = \frac{59qa^4}{EI}$$



$$(b) \text{ 解: } v_c = v_{CF} + v_{CM_c} = \frac{PL^3}{48EI} + 0 = \frac{PL^3}{48EI}$$

$$\theta_A = \theta_{AF} + \theta_{AM_c} = \frac{PL^2}{16EI} - \frac{(PL)L}{24EI} = \frac{PL^2}{48EI}$$

$$(c) \text{ 解: } \theta_A = \theta_{AF} + \theta_{AM_c} = 0 - \frac{(Pa)(2a)}{6EI} = -\frac{Pa^2}{3EI}$$

$$v_D = v_{DF} + v_{DM_c} = 0 - \frac{(Pa)(2a)^2}{16EI} = -\frac{Pa^2}{4EI}$$

$$v_c = v_{c1} + v_{c2}$$

$$v_{c1} = \frac{Pa^2}{3EI}$$

$$v_{c1} = \theta_E \cdot a = (\theta_{EF} + \theta_{EM_c}) \cdot a = \left(0 + \frac{(Pa)(2a)}{3EI}\right) \cdot a = \frac{2Pa^2}{3EI}$$

$$v_c = \frac{Pa^2}{3EI} + \frac{2Pa^2}{3EI} = \frac{Pa^2}{EI}$$

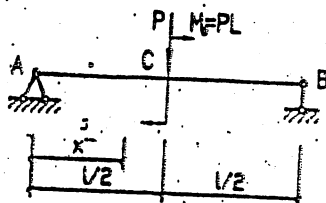


图 7-7b 图

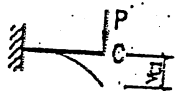
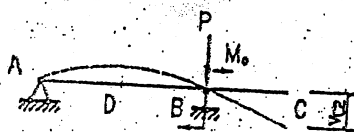
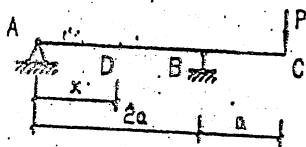


图 7-7c 图

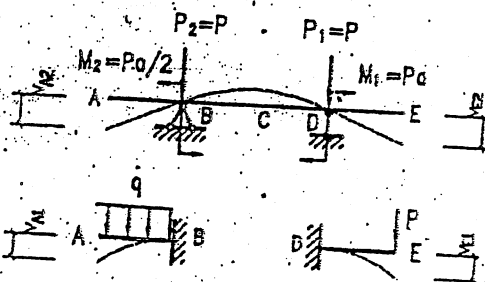
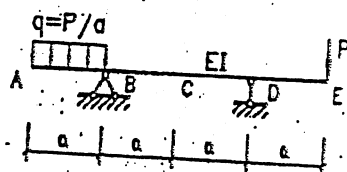


图 7-7d 图

$$(d) \text{ 解: } v_c = v_{CM_1} + v_{CM_2} + v_{CP_1} + v_{CP_2} = -\frac{(Pa)(2a)^2}{16EI} - \frac{(Pa/2)(2a)^2}{16EI} + 0 + 0 = -\frac{3Pa^2}{8EI}$$

$$\theta_E = \theta_{EM_1} + \theta_{EM_2} = -\frac{(Pa)(2a)}{6EI} - \frac{(Pa/2)(2a)}{3EI} = -\frac{2Pa^2}{3EI}$$

$$\theta_D = \theta_{DM_1} + \theta_{DM_2} = \frac{(Pa)(2a)}{3EI} + \frac{(Pa/2)(2a)}{6EI} = \frac{5Pa^2}{6EI}$$

$$v_{A_2} = -\theta_D \cdot a = \frac{2Pa^2}{3EI}, \quad v_{A_1} = \frac{(P/a)a^4}{8EI} = \frac{Pa^3}{8EI}$$

$$v_A = v_{A_1} + v_{A_2} = \frac{19Pa^2}{24EI}$$

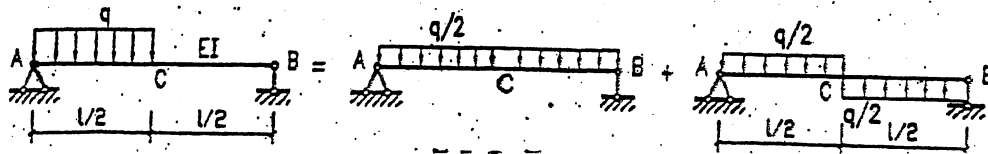
$$v_{C_2} = \theta_D \cdot a = \frac{5Pa^2}{6EI}, \quad v_{E_1} = \frac{Pa^3}{3EI}$$

$$v_E = v_{E_1} + v_{E_2} = \frac{7Pa^2}{6EI}$$

于是

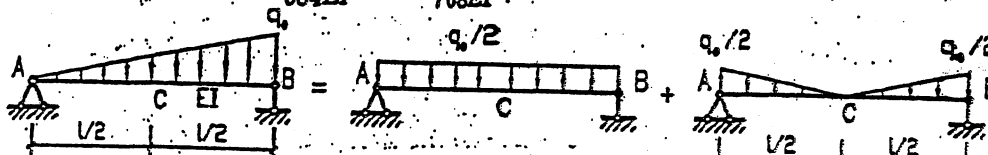
由强

[7-8] 试用叠加法求图示各梁跨度中央处的挠度。



题 7-8a 图

$$(a) \text{ 解: } v_C = v_{C_1} + v_{C_2} = \frac{5(q/2)L^4}{384EI} + 0 = \frac{5qL^4}{768EI}$$



题 7-8b 图

$$(b) \text{ 解: } v_C = v_{C_1} + v_{C_2} = \frac{5(q_0/2)L^4}{384EI} + 0 = \frac{5q_0L^4}{768EI}$$

[7-9] 试用叠加法求解习题 7-6a。

解: (1) 附加位移

$$v_{A_1} = \frac{P \cdot (L/2)^3}{3EI} = \frac{PL^3}{24EI}$$

(2) 牵连位移

$$v_{A_2} = v_C + \theta_C \cdot L/2$$

$$v_C = v_{CP} + v_{CM} = \frac{P(L/2)^3}{3E(2I)} + \frac{(PL/2)(L/2)^2}{2E(2I)} = \frac{5PL^3}{96EI}$$

$$\theta_C = \theta_{CP} + \theta_{CM} = \frac{P(L/2)^2}{2E(2I)} + \frac{(PL/2)(L/2)}{E(2I)} = \frac{3PL^2}{16EI}$$

$$v_{A_2} = \frac{5PL^3}{96EI} + \frac{3PL^2}{16EI} \cdot \frac{L}{2} = \frac{7PL^3}{48EI}$$

$$\text{于是 } v_A = v_{A_1} + v_{A_2} = \frac{PL^3}{24EI} + \frac{7PL^3}{48EI} = \frac{3PL^3}{16EI}$$

[7-10] 试求图示各梁的指定位移。

(a) 解: 取  $dP = \frac{2q_0}{L}x dx$ , 如图所示。

在  $dP$  作用下, 点 C 的位移可由附录二查到:

$$dv_C = \frac{dP \cdot x(3L^2 - 4x^2)}{48EI} = \frac{q_0 x^2(3L^2 - 4x^2)}{24EIL} dx$$

由叠加法得

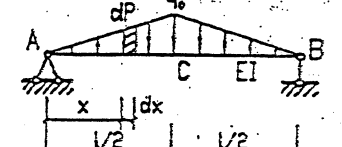
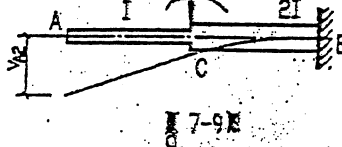
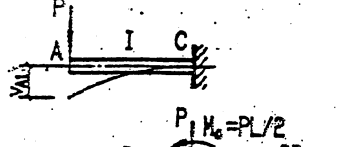
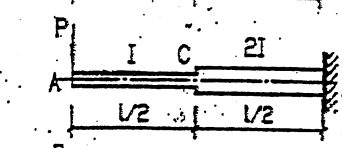
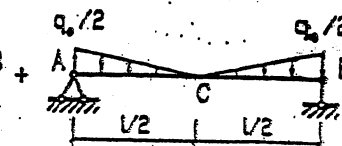
$$v_C = 2 \int_0^{L/2} dv_C = 2 \int_0^{L/2} \frac{q_0 x^2(3L^2 - 4x^2)}{24EIL} dx = \frac{q_0 L^4}{120EI}$$

(b) 解: 用共轭梁法求解, 弯矩图及虚梁图如图示。

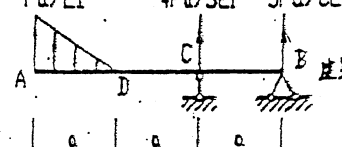
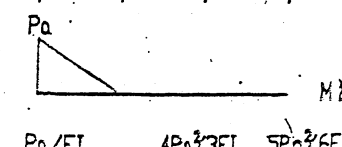
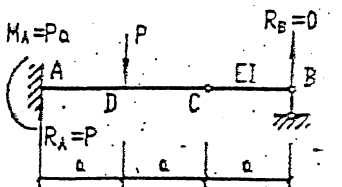
$$\theta_B = \varphi_B = -\frac{5Pa^2}{6EI}$$

(c) 解: 用叠加法求解。

(1) B 点无挠度时 C 点的挠度为



题 7-9 图



题 7-10a 图

$$v_{c1} = \frac{5qL^4}{384EI}$$

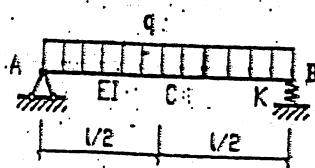
(2) B 点的挠度  $v_B$  引起 C 点的挠度为:

$$v_{c2} = \frac{1}{2} v_B$$

$$v_B = \frac{R_B}{K} = \frac{qL}{2K}$$

于是

$$v_c = v_{c1} + v_{c2} = \frac{5qL^4}{384EI} + \frac{1}{2} \times \frac{qL}{2K} = \frac{5qL^4}{384EI} + \frac{qL}{4K}$$



(d) 解: 用叠加法求解。

图 7-10c 图

(1) B 点无挠度时 A 点的挠度为  $v_A$ , 利用叠加法可求出外伸梁外伸端 A 的位移

$$v_A = \frac{Pa^3}{3EI} + \theta_B \cdot a$$

$$= \frac{Pa^3}{3EI} + \frac{(Pa)L}{3EI} \cdot a$$

$$= \frac{Pa^3}{3EI} (L+a)$$

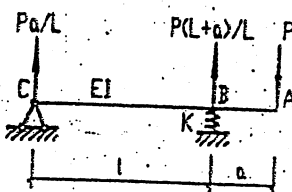


图 7-10d 图

(2) B 点的挠度  $v_B = RB/K$  引起 A 点的刚体位移为:

$$v_{A1} = \frac{L+a}{L} v_B = \frac{L+a}{L} \cdot \frac{P(L+a)}{LK}$$

$$= \frac{P(L+a)^2}{L^2 K}$$

于是

$$v_A = v_{A1} + v_{A2}$$

$$= \frac{Pa^3(L+a)}{3EI} + \frac{P(L+a)^2}{L^2 K}$$

【7-11】 试求图示折杆自由端 C 的垂直位移  $\Delta_C$  和水平位移  $\Delta_{CH}$ 。已知该杆各段的截面面积均为 A, 抗刚度均为 EI。

解: 用叠加法求解。

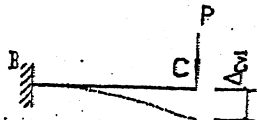
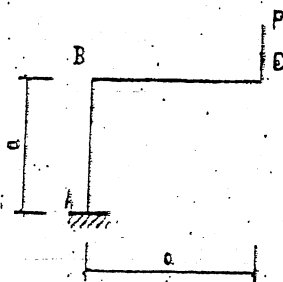
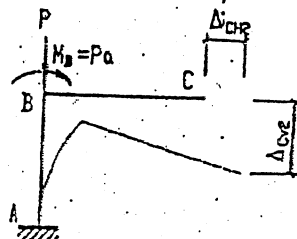


图 7-11 图



(1) B 端固定, 悬臂梁 BC 在 C 点的位移(附加位移)为

$$\Delta_{cv_1} = \frac{Pa^3}{3EI}, \Delta_{ch_1} = 0$$

(2) 由于 B 截面的位移引起 BC 的刚体位移(牵连位移)为

$$\Delta_{cv_2} = \Delta_{AB} + \theta_B \cdot a = \frac{Pa}{EA} + \frac{(Pa)a}{EI} \cdot a = \frac{Pa}{EA} + \frac{Pa^2}{EI}$$

$$\Delta_{ch_2} = v_B = \frac{(Pa)a^2}{2EI} = \frac{Pa^2}{2EI}$$

于是

$$\Delta_{cv} = \Delta_{cv_1} + \Delta_{cv_2} = \frac{4Pa^2}{3EI} + \frac{Pa}{EA} (\downarrow)$$

$$\Delta_{ch} = \Delta_{ch_1} + \Delta_{ch_2} = \frac{Pa^2}{2EI} (\rightarrow)$$

[7-12] 试求图示结构中集中力 P 作用处的挠度  $v_E$ 。已知梁 AB 和折杆 BCD 的抗弯刚度均为 EI。(忽略轴力对变形的影响)。

解: 用叠加法求解。

(1) B 端挠度为零时, 简支梁 AB 在 E 点的位移(附加位移)为

$$v_E = \frac{Pa^2}{48EI}$$

(2) 由于 B 点的挠度  $v_B$  引起 AB 的刚体位移

(牵连位移)为

$$v_E = \frac{1}{2} v_B$$

利用题 7-11 的结果, 并忽略杆的轴向变形的影响, 得

$$v_B = \frac{4(P/2)a^2}{3EI} = \frac{2Pa^2}{3EI}$$

于是

$$v_E = v_{E_1} + v_{E_2} = \frac{Pa^2}{48EI} + \frac{1}{2} \times \frac{2Pa^2}{3EI}$$

$$= \frac{17Pa^2}{48EI} (\downarrow)$$

[7-13] 图示木梁的右端由钢杆支承。已知梁的横截面为边长等于 0.2m 的正方形,  $q = 40 \text{ kN/m}$ ,  $E_1 = 10 \text{ GPa}$ ; 钢拉杆的横截面积为  $A_2 = 250 \text{ mm}^2$ ,  $E_2 = 210 \text{ GPa}$ 。试求拉杆的伸长  $\Delta L$  及梁中点 C 沿铅垂方向的位移  $\Delta$ 。

解:

$$\Delta L = \frac{N_{BD} \cdot l_{BD}}{E_2 A_2} = \frac{(q/2) \cdot l_{AB} \cdot l_{BD}}{E_2 A_2}$$

$$= \frac{40 \times (2 \times 10^3) \times (3 \times 10^3)}{2 \times (210 \times 10^9) \times 250} = 2.29 \text{ mm}$$

$$\Delta = \frac{5ql_{AB}^2}{384E_1 I_1} + \frac{1}{2} \Delta L$$

$$= 6.25 + 1.14 = 7.39 \text{ mm}$$

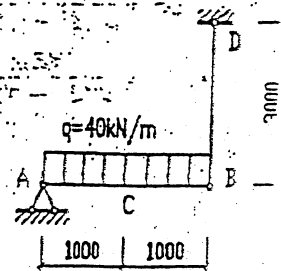


图 7-13

[7-14] 直角拐 CAB 如图所示。杆 CA 与 AB 在 A 处刚性连接。A 处为一轴承, 允许杆 CA 的端截面自由转动, 但不能上下移动。已知  $P = 60 \text{ N}$ ,  $E = 210 \text{ GPa}$ ,  $G = 0.4E$ 。试求 B 端的

直位移。

解:  $v_B = v_{B_1} + v_{B_2}$   
 $v_{B_1}$  为 A 端固定时 B 点的位移

$$v_{B_1} = \frac{Pl_{AB}^3}{3EI} = \frac{Pl_{AB}^3}{3E(bh^3/12)} = \frac{4Pl_{AB}^3}{Eb h^3}$$

$v_{B_2}$  为 A 截面产生扭转角  $\varphi_A$  引起的 B 点的位移

$$v_{B_2} = \varphi_A \cdot l_{AB}$$

$$\text{式中 } \varphi_A = \frac{M_1 \cdot l_{AC}}{GI_p} = \frac{P \cdot l_{AB} \cdot l_{AC}}{G \cdot (\pi d^4/32)} = \frac{32P \cdot l_{AB} \cdot l_{AC}}{G \pi d^4}$$

$$\text{所以 } v_{B_2} = \frac{32P \cdot l_{AB} \cdot l_{AC}}{G \pi d^4}$$

$$\text{于是 } v_B = \frac{4P \cdot l_{AB}^3}{Eb h^3} + \frac{32P \cdot l_{AB} \cdot l_{AC}}{G \pi d^4} = 6.17 + 2.05 = 8.22 \text{ mm}$$

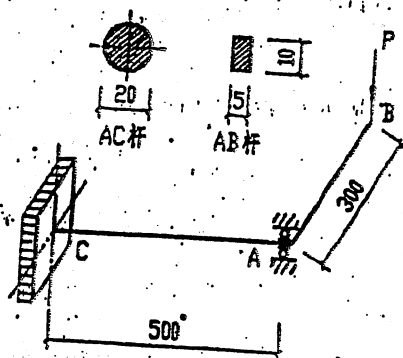


图 7-14

[7-15] 以弹性元件作为测力装置的试验机上, 卡头 A 处作用的大小是通过测量 BC 梁的挠度或应变来确定。已知 BC 梁  $L=1\text{m}$ ,  $a=0.1\text{m}$ , 梁截面宽度  $b=60\text{mm}$ , 高  $h=40\text{mm}$ , 弹性模量  $E=220\text{GPa}$ 。求: (1) 当千分表 F 的指针移动一小格 ( $1/10\text{mm}$ ) 时, 荷载 P 的增量  $\Delta P$  为多少? (2) 在 BC 梁跨度中央处的上表面处测得纵向应变  $\epsilon=7.24 \times 10^{-6}$  时, 荷载 P 的大小为多少?

解: BC 梁受力简图、弯矩图和相应的虚梁如图所示。利用共轭梁法求解:

$$\begin{aligned} (1) v_F = M_F &= -\frac{Pa(L+a)}{4EI} \cdot \frac{L+2a}{2} \\ &+ \left(\frac{1}{2} \times \frac{Pa}{2EI} \times a\right) \times \left(\frac{a}{3} + \frac{L}{2}\right) \\ &+ \left(\frac{Pa}{2EI} \times \frac{L}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{L}{2}\right) \\ &= -\frac{Pa(3L^2 + 12aL + 8a^2)}{48EI} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } \Delta P &= \frac{48EI |\Delta v_F|}{a(3L^2 + 12aL + 8a^2)} \\ &= \frac{4Eb h^3 |\Delta v_F|}{a(3L^2 + 12aL + 8a^2)} = 79.0 \text{ N} \end{aligned}$$

$$(2) \epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{M_F/W}{E} = \frac{(Pa/2)/(bh^2/6)}{E} = \frac{3Pa}{Eb h^2}$$

$$\text{于是 } P = \frac{Eb h^2 \epsilon}{3a} = 510 \text{ N}$$

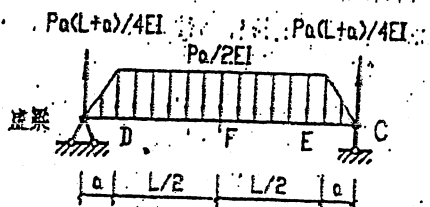
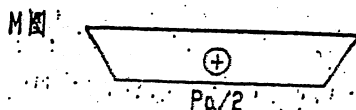
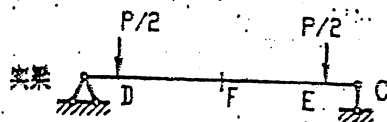
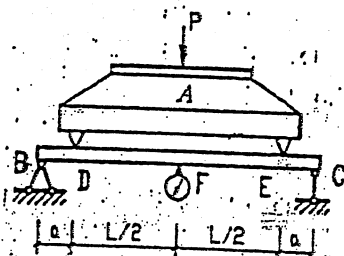


图 7-15

[7-16] 图示悬臂梁和简支梁中, 欲使滚轮在梁上移动时恰好走一条水平线, 试问需把梁的轴线预先分别弯成怎样的曲线?

解: 设梁的轴线预先弯成的曲线为  $y(x)$ , 荷载作用处的挠度为  $v(x)$ 。根据题意有:

$$y(x) + v(x) = 0$$



因此

$$y(x) = -v(x)$$

(a) 由附录二的第三种情况,  $v(x) = \frac{Px^2}{3EI}$

于是

$$y(x) = -\frac{Px^2}{3EI}$$

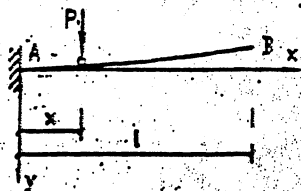


图 7-16a

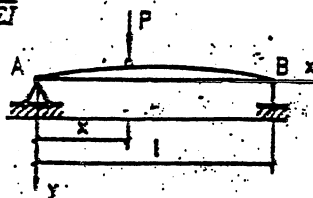


图 7-16b

(b) 在附录二的第十三种情况中, 令  $a=x, b=L-x$ , 可以得到

$$v(x) = \frac{P(L-x)x}{6EIL} [L^2 - x^2 - (L-x)^2] = \frac{Px^2(L-x)^2}{3EIL}$$

于是

$$y(x) = -\frac{Px^2(L-x)^2}{3EIL}$$

[7-17] 已知直梁的挠曲线方程为  $v = \frac{q_0 x}{360EIL} (3x^4 - 10L^2x^2 + 7L^4)$ , 梁长为  $L$ . 试求: (1)

梁跨度中央处的弯矩及最大弯矩; (2) 梁上荷载变化规律; (3) 梁的支承情况.

解: (1)  $M(x) = -EIv'' = -\frac{q_0}{6L} (L^2x - x^3)$

$$M\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{q_0}{6L} \left[ L^2 \times \frac{L}{2} - \left(\frac{L}{2}\right)^3 \right] = \frac{q_0 L^2}{16}$$

令  $\frac{dM(x)}{dx} = 0$ , 解得  $x = L/\sqrt{3}$

$$M(L/\sqrt{3}) = \frac{q_0}{6L} \left[ L^2 \times \frac{L}{\sqrt{3}} - \left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right)^3 \right] = \frac{q_0 L^2}{9\sqrt{3}}$$

$$M(0) = 0, M(L) = 0$$

比较端点  $x=0, x=L$  和极值点  $x=L/\sqrt{3}$  的弯矩值, 得出

$$M_{\max} = M\left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right) = \frac{q_0 L^2}{9\sqrt{3}} = \frac{q_0 L^2}{15.6}$$

(2)  $q(x) = \frac{d^2 M}{dx^2} = -\frac{q_0}{L} x$ , 即 分布荷载呈线性分布.

(3)  $V(x) = \frac{dM}{dx} = \frac{q_0}{6L} (L^2 - 3x^2)$

$$v(x) = \frac{q_0}{360EIL} (15x^4 - 30L^2x^2 + 7L^4)$$

$x=0$  处:  $v(0)=0, v'(0) = \frac{7q_0 L^3}{360EI}$

$$V(0) = \frac{q_0 L}{6}, M(0) = 0$$

$x=L$  处:  $v(L)=0, v'(L) = -\frac{q_0 L^3}{45EI}$

$$V(L) = -\frac{q_0 L}{3}, M(L) = 0$$

因此梁的支承情况与所受荷载如图所示.

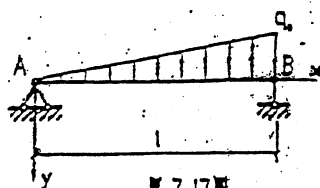


图 7-17

[7-18] 图示悬臂梁的A端固定在半径为R的圆弧形表面的平台上,自由端B处作用一集中荷载P,试求自由端B的挠度。

解:本题需分两种情况讨论。

(1)在P力作用下梁AB除A点外,均不与平台接触。其条件是

$$\frac{1}{\rho_{\max}} = \frac{M_{\max}}{EI} = \frac{PL}{EI} \leq \frac{1}{R}$$

即  $P \leq \frac{EI}{RL} = P^*$

这时可用一般悬臂梁的公式求得  $v_B = \frac{PL^3}{3EI}$

(2)  $P > P^* = \frac{EI}{RL}$ , 这时梁AB上有一段AC与平台的圆弧表面接触(如图中点划线所示)。AC段上各点的曲率半径  $\rho = R$ , CB部分的曲率半径  $\rho > R$ 。

设AC段的长度为x,则C截面的弯矩  $M_C = P(L-x)$ , 曲率为

$$\frac{1}{\rho_C} = \frac{M_C}{EI} = \frac{P(L-x)}{EI} = \frac{1}{R}$$

解得

$$x = L - \frac{EI}{PR}$$

在这种情况下B点的挠度可由叠加法求得,

即  $v_B = v_{B_1} + v_{B_2} + v_{B_3}$  (见图)

式中,  $v_{B_1}$  是由于C点的挠度引起B点的刚体位移, 即

$$v_{B_1} = v_C = R(1 - \cos\theta_C) \approx R \cdot \frac{\theta_C^2}{2} = \frac{R}{2} \cdot \left(\frac{x}{R}\right)^2 = \frac{x^2}{2R}$$

$v_{B_2}$  是由于C截面的转角引起B点的刚体位移, 即

$$v_{B_2} = (L-x)\tan\theta_C \approx (L-x)\theta_C = \frac{x}{R}(L-x)$$

$v_{B_3}$  是以C作为固定端, 悬臂梁CB在集中力P作用下引起的挠度, 即

$$v_{B_3} = \frac{P(L-x)^3}{3EI}$$

于是  $v_B = \frac{x^2}{2R} + \frac{x(L-x)}{R} + \frac{P(L-x)^3}{3EI} = \frac{2xL-x^2}{2R} + \frac{P(L-x)^3}{3EI}$

将  $x = L - \frac{EI}{PR}$  代入上式, 化简后得

$$v_B = \frac{L^3}{2R} - \frac{(EI)^2}{6P^2R^2}$$

当然, 以上分析仅对小变形(即  $x \ll R$ )时才适用。

[7-19] 图示等截面直梁AB的长度为L, 重量为P, 放在水平刚性基础上。若在梁端作用向上的拉力为P/3, 未提起的一部分梁仍与基础密切接触, 试求梁从基础上被提起的长度α及梁端A处的挠度。

解: 梁弯曲时曲率  $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$ , BC部分为直线, 故曲率为零,

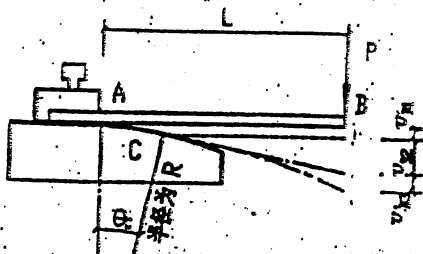


图 7-18

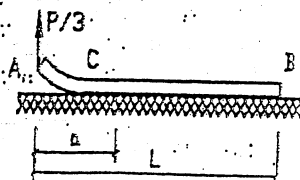


图 7-19

作用

有  $\frac{1}{\rho_c} = 0$ 。因此,  $M_c = 0$ ,

以 AC 段为脱离体, 考虑 AC 段的自重, 其荷载集度  $q = P/L$ 。

则

$$M_c = \frac{P}{3} \times a - q \times a \times \frac{a}{2} = 0$$

解得

$$a = \frac{2P}{3q} = \frac{2}{3}L$$

利用叠加法可求出梁端 A 处的挠度为

$$v_A = \frac{(P/3)a^3}{3EI} - \frac{qa^4}{8EI} = \frac{Pa^3}{9EI} - \frac{(P/L)a^4}{8EI}$$

所示)

将  $a = \frac{2}{3}L$  代入上式, 得  $v_A = \frac{2PL^3}{243EI}$

[7-20] 图示吊车梁 AB 由 32a 号工字钢制成, 已知跨长  $L = 8.76\text{m}$ , 材料的弹性模量  $E = 210\text{GPa}$ , 吊车的最大起重量  $P = 20\text{kN}$ , 容许相对挠度  $[\frac{v}{L}] = 1/500$ 。试校核该梁的刚度。

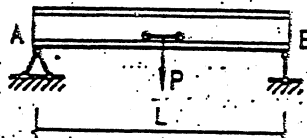


图 7-20

解: 当吊车移到跨中央时, 最大挠度取极值,  $v_{\max} = \frac{PL^3}{48EI}$

查表得 32a 工字钢的轴惯性矩  $I = 1.11 \times 10^8 \text{mm}^4$

$$v_{\max} = \frac{(20 \times 10^3) \times (8.76 \times 10^3)^3}{48 \times (210 \times 10^9) \times (1.11 \times 10^8)} = 12.0 \text{mm}$$

$$\frac{v_{\max}}{L} = \frac{12.0}{8.76 \times 10^3} = \frac{1}{730} < [\frac{v}{L}] = \frac{1}{500}$$

该梁满足刚度条件。

[7-21] 悬臂梁承受荷载如图所示。已知  $q = 15\text{kN/m}$ ,  $L = 2\text{m}$ ,  $E = 200\text{GPa}$ ,  $[\sigma] = 160\text{MPa}$ ,  $[\frac{v}{L}] = 1/500$ , 试选取工字钢的型号。

解: (1) 强度条件为

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma]$$

$$M_{\max} = q \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{3L}{4} = \frac{3qL^2}{8}$$

$$W \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{3qL^2}{8[\sigma]} = 141 \text{cm}^3$$

初选工字钢 No. 16,  $W_z = 141 \text{cm}^3$

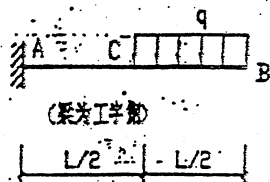
(2) 刚度条件为:  $v_{\max} = v_B$ , 利用荷载叠加法求  $v_B$ , 如图所示。

① 在向下的  $q$  作用下

$$v_B = \frac{qL^4}{8EI}$$

② 在向上  $q$  作用下

$$\theta_C = -\frac{q(L/2)^3}{6EI} = -\frac{qL^3}{48EI}, v_C = -\frac{q(L/2)^4}{8EI} = -\frac{qL^4}{128EI}$$



(系为工字钢)

图 7-21

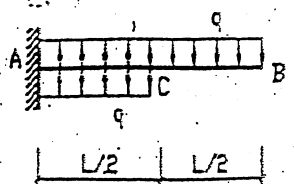


图 7-21

$$v_{B_1} = v_{C_1} + \frac{L}{2} \cdot \theta_{C_2} = -\frac{7qL^4}{384EI}$$

$$v_B = v_{B_1} + v_{B_2} = \frac{41qL^4}{384EI}$$

因此

$$\frac{v_{\max}}{L} = \frac{41qL^3}{384EI} \leq \left[\frac{v}{L}\right]$$

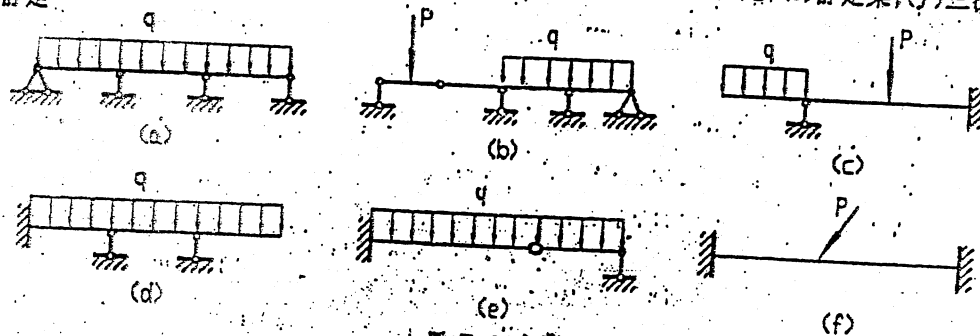
$$I \geq \frac{41qL^3}{384E\left[\frac{v}{L}\right]} = 3.20 \times 10^4 \text{ cm}^4$$

可选工字钢 22a,  $I = 3.40 \times 10^4 \text{ cm}^4$

刚度条件和强度条件应同时满足,最后选择工字钢型号为 22a。

[7-22] 在图示各梁中,指明哪些是超静定梁,并判定超静定次数。

解: (a) 二次超静定; (b) 一次超静定; (c) 一次超静定; (d) 二次超静定; (e) 静定梁; (f) 三次超静定



题 7-22 图

[7-23] 试求图各超静定梁的支反力。

(a) 解: 去掉 B 端约束, 代之以约束反力  $R_B$ , 得到静定基本结构如图所示。

变形协调条件为  $v_B = v_{B_{R_B}} + v_{B_P} = 0$

$$\text{其中: } v_{B_{R_B}} = -\frac{R_B(3a)^3}{3EI} = -\frac{9R_B a^3}{EI}$$

$$v_{B_P} = v_{C_P} + \theta_{C_P} \cdot a = \frac{P \cdot (2a)^3}{3EI} + \frac{P \cdot (2a)^2}{2EI} \cdot a = \frac{14Pa^3}{3EI}$$

$$v_B = \frac{9R_B a^3}{EI} + \frac{14Pa^3}{3EI} = 0$$

解得

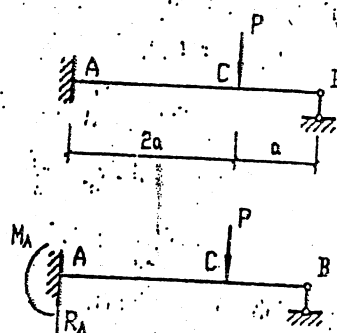
$$R_B = \frac{14}{27}P$$

利用平衡方程求得  $R_A = P - R_B = \frac{13}{27}P$

$$M_A = P \cdot 2a - R_B \cdot 3a = \frac{4}{9}Pa$$

(b) 解: 去掉 B 支座约束, 代之以约束反力  $R_B$ , 得到静定基本结构如图所示。

变形协调条件为  $v_B = v_{B_{R_B}} + v_{B_P} = 0$



题 7-23a 图

其中:  $v_{Bx} = \frac{-R_B L^3}{3EI}$

$$v_B = \frac{qL^4}{8EI} + \frac{(q \cdot L/2) \cdot L^3}{3EI} + \frac{(q \cdot L^2/8) \cdot L^2}{2EI} = \frac{17qL^4}{48EI}$$

$$\therefore v_B = -\frac{R_B L^3}{3EI} + \frac{17qL^4}{48EI} = 0$$

解得  $R_B = \frac{17qL}{16}$

利用平衡方程求得  $R_A = q \cdot \frac{3L}{2} - R_B = \frac{7qL}{16}$

$$M_A = q \cdot \frac{3L}{2} \cdot \frac{3L}{4} - R_B L = \frac{qL^2}{16}$$

(c) 解: 静定基本结构如图所示。

变形协调条件为:  $v_B = v_{Bx} + v_{Bq} = 0$

其中:  $v_{Bx} = \frac{R_B (2a)^3}{3EI} = \frac{8R_B a^3}{3EI}$

$$v_{Bq} = -\frac{M \cdot (2a)^3}{2EI} = -\frac{2Ma^3}{EI}$$

$$\therefore v_B = \frac{8R_B a^3}{3EI} - \frac{2Ma^3}{EI} = 0$$

解得  $R_B = \frac{3M}{4a}$

$$\therefore R_A = R_B = \frac{3M}{4a}$$

$$M_A = R_A \cdot 2a - M = \frac{M}{2}$$

(d) 解: 静定基本结构如图所示。

变形协调条件为  $v_B = v_{Bx} + v_{BP} = 0$

其中:  $v_{Bx} = -\frac{R_B \cdot (4a)^3}{48EI} = -\frac{4R_B a^3}{3EI}$

$$v_{BP} = \frac{P \cdot a[3(4a)^2 - 4a^2]}{48EI} = \frac{11Pa^3}{12EI}$$

$$v_B = -\frac{4R_B a^3}{3EI} + \frac{11Pa^3}{12EI} = 0$$

解得  $R_B = \frac{11P}{16}$

$$R_A = \frac{P \cdot 3a - R_B \cdot 2a}{4a} = \frac{13P}{32}$$

$$R_C = P - R_B - R_A = -\frac{3P}{32}$$

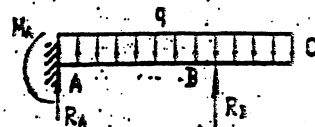
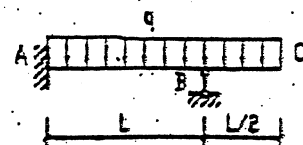


图 7-23b

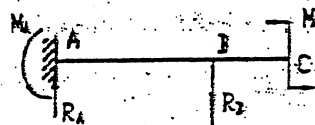
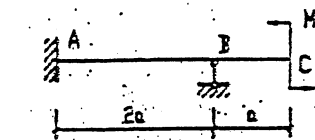


图 7-23c

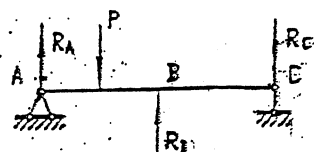
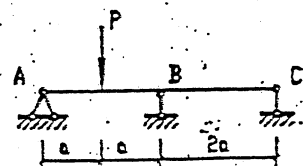


图 7-23d

(e) 解: 该梁为二次超静定, 去掉两端对转动的约束, 代之以力偶  $M_A$  和  $M_B$ , 得到基本静定梁如图所示。

变形协调条件为  $\theta_A = 0$  和  $\theta_B = 0$

$$\theta_A = \theta_{Ax} + \theta_{Ay} = \frac{qL^3}{24EI} - \frac{M_A L}{3EI} - \frac{M_B L}{6EI} = 0$$

由于对称性,  $M_A = M_B, R_A = R_B$ , 由上式求得

$$M_A = M_B = qL^2/12$$

( $\theta_B = 0$  亦满足)

由平衡方程可得,  $R_A = R_B = qL/2$

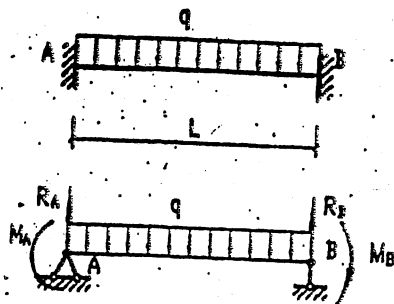


图 7-23e

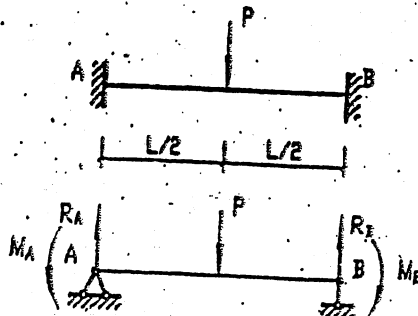


图 7-23f

(c) 解: 该梁为二次超静定, 相应的静定基本梁如图所示。

由于对称性,  $M_A = M_B, R_A = R_B$

变形协调条件为  $\theta_A = \theta_B = 0$

由 
$$\theta_A = \theta_{AP} + \theta_{AM_A} + \theta_{AM_B} = \frac{PL^3}{16EI} - \frac{M_AL}{3EI} - \frac{M_BL}{6EI} = 0$$

解得 
$$M_A = M_B = \frac{PL}{8} \quad (\theta_B = 0 \text{ 亦满足})$$

由平衡方程解得:  $R_A = R_B = P/2$

[7-24] 试求图示各结构中竖向杆的内力。

解: (a) AB 梁为一次超静定梁, 去掉杆 BC 的约束, 代之以轴力  $N_{BC}$ , 得到静定基本梁如图所示。

变形协调条件为  $v_B = \Delta_{BC}$

其中: 
$$v_B = v_{B1} + v_{BN_{BC}} = \frac{qL^4}{8EI} - \frac{N_{BC} \cdot L^3}{3EI}$$

$$\Delta_{BC} = \frac{N_{BC} \cdot a}{EA}$$

$$\therefore \frac{qL^4}{8EI} - \frac{N_{BC} \cdot L^3}{3EI} = \frac{N_{BC} a}{EA}$$

解得 
$$N_{BC} = \frac{3AL^4}{8(AL^3 + 3aI)} q$$

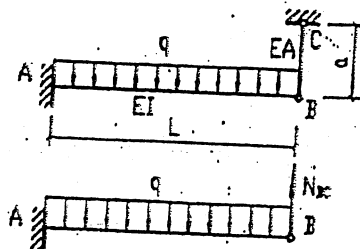


图 7-24a

(b) 此结构为一次超静定, 以杆 BD 作为多余约束, 得到相应的静定基本结构如图所示。

变形协调条件为  $v_D - v_B = \Delta_{BD}$

其中: 
$$v_D = v_{D1} + v_{DN_{BD}} = \frac{5qL^4}{384EI} - \frac{N_{BD}L^3}{48EI}$$

$$v_B = \frac{N_{BD} \cdot (L/2)^3}{3EI} = \frac{N_{BD}L^3}{24EI}$$

$$\Delta_{BD} = \frac{N_{BD}a}{EA}$$

$$\therefore \frac{5qL^4}{384EI} - \frac{N_{BD}L^3}{48EI} - \frac{N_{BD}L^3}{24EI} = \frac{N_{BD}L^3}{EA}$$

$$\text{解得 } N_{BD} = \frac{5AL^4}{24(AL^3 + 16aI)q}$$

[7-25] 试求图示各结构中力  $P$  作用点处的位移, 已知图中各梁的材料相同, 弹性模量为  $E$ 。

解: (a) 本结构为一次超静定, 设梁  $AB$  和  $CD$  在连接处的相互作用力为  $R$ , 其受力如图所示。

变形协调条件为  $v_B = v_C$ 。

$$\text{其中 } v_B = v_{BR} + v_{BP} = \frac{(P-R)L_1^3}{3EI_1}$$

$$v_C = \frac{RL_2^3}{3EI_2}$$

$$\therefore \frac{(P-R)L_1^3}{3EI_1} = \frac{RL_2^3}{3EI_2}$$

解得

$$R = \frac{P}{1 + \frac{I_1}{I_2} \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^3}$$

$$\therefore v_B = v_C = \frac{PL_2^3}{3EI_2 \left[1 + \frac{I_1}{I_2} \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^3\right]}$$

(b) 设两梁在接触处的作用力为  $R$ , 如图所示。

变形协调条件为:

$AB$  梁在  $C$  处的挠度  $v_C$  与  $AC$  梁在  $C$  处的挠度  $v_C$  相

等。

利用叠加法可以求出  $v_C$  为

$$v_C = \frac{(P-R)(L/2)^3}{3EI} + \frac{(P \cdot L/2)(L/2)^2}{2EI}$$

$$= \frac{5PL^3}{48EI} - \frac{RL^3}{24EI}$$

$$v_C = \frac{R(L/2)^3}{3EI} = \frac{RL^3}{24EI}$$

$$\frac{5PL^3}{48EI} - \frac{RL^3}{24EI} = \frac{RL^3}{24EI}$$

$$\text{解得 } R = \frac{5}{4}P$$

所示。

$$\therefore v_B = v_{BR} + v_{BP} = \frac{PL^3}{3EI} - \frac{R(L/2)^3}{3EI} - \frac{R(L/2)^2}{2EI} \times \frac{L}{2}$$

$$= \frac{PL^3}{3EI} - \frac{5L^3R}{48EI} = \frac{13PL^3}{64EI}$$

[7-26] 图示为两个水平交叉放置的简支梁, 在两梁交叉点作用有集中荷载  $P$ 。试问在两梁间荷载是怎样分配的?

解: 该结构为一次超静定。设两梁之间的相互作用力为  $R$ , 其受力如图所示。

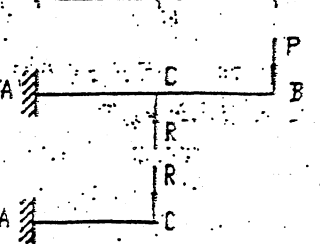
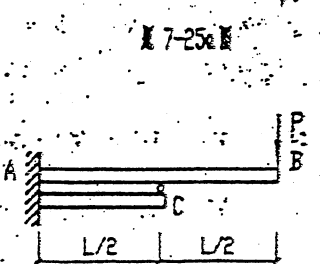
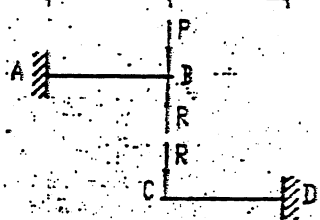
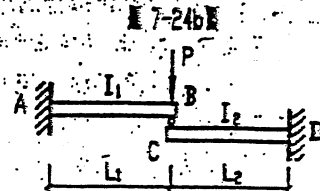
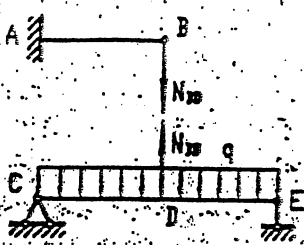
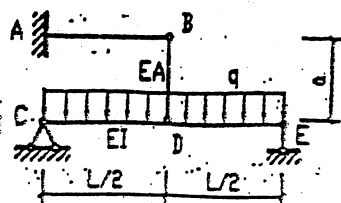


图 7-25d

变形协调条件为两梁在  $E$  处的挠度相等,即

$$\frac{(P-R)L_1^3}{48EI_1} = \frac{RL_2^3}{48EI_2}$$

解得

$$R = \frac{I_2 L_1^3}{I_1 L_2^3 + I_2 L_1^3} P$$

因此,  $AB$  梁所受荷载为  $P_1 = P - R = \frac{I_1 L_2^3}{I_1 L_2^3 + I_2 L_1^3} P$

$CD$  梁所受荷载为  $P_2 = R = \frac{I_2 L_1^3}{I_1 L_2^3 + I_2 L_1^3} P$

[7-27] 图示三个水平放置的悬臂梁在自由端处自由叠置在一起。(1)分析该梁的超静定次数;(2)画各梁的受力图;(3)求三个梁在其固定端处的弯矩值。

解:(1)该结构为二次超静定。

(2)设  $AB$  梁与  $EF$  梁之间的相互作用力为  $R_1$ ,  $CD$  梁与  $EF$  梁之间的相互作用力为  $R_2$ , 各梁受为如图所示。

变形协调条件为

$$v_B = v_E \quad (1)$$

$$v_E = v_D \quad (2)$$

$$\text{即 } \frac{(P-R_1)a^3}{3EI} = \frac{(R_1-R_2)(2a)^3}{3EI} \quad (1')$$

$$\frac{(R_1-R_2)(2a)^3}{3EI} = \frac{R_2 a^3}{3EI} \quad (2')$$

$$\text{由 } (1') \text{ 得 } 9R_1 - 8R_2 = P \quad (1'')$$

$$\text{由 } (2') \text{ 得 } 8R_1 - 9R_2 = 0 \quad (2'')$$

$$\text{解 } (1'') \text{ 和 } (2'') \text{ 得 } R_1 = \frac{9}{17}P, R_2 = \frac{8}{17}P$$

$$\text{于是 } M_F = (R_1 - R_2) \cdot 2a = \frac{2}{17}Pa$$

$$M_A = (P - R_1) \cdot a = \frac{8}{17}Pa$$

$$M_C = R_2 \cdot a = \frac{8}{17}Pa$$

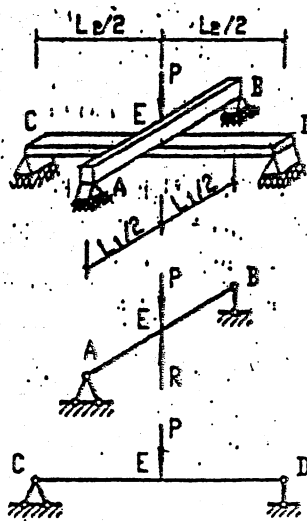


图 7-26

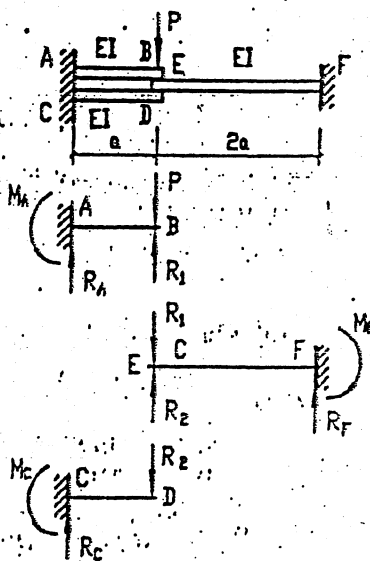


图 7-27

[7-28] 图示三支座等截面轴,由于制造不精确,轴承不在同一轴线上,设  $EI$ 、 $\delta$  和  $L$  均为已知,试求最大弯矩。

解:(a)此梁为一次超静定,由于制造不精确会在梁内产生弯曲内力。去掉  $C$  处约束,以约束力  $R_C$  代之,其基本静定梁如图所示。

变形协调条件为  $v_C = -\delta$

利用叠加法求出外伸梁在  $C$  处的挠度为

$$v_C = -\frac{R_C L^3}{3EI} + \theta_B \cdot L = -\frac{R_C L^3}{3EI} - \frac{(R_C L)L}{3EI} \cdot L = -\frac{2R_C L^3}{3EI}$$



$$\therefore -\frac{2R_c L^3}{3EI} = -\delta$$

$$\text{解得 } R_c = \frac{3EI}{2L^3} \delta$$

$$\therefore M_{\max} = M_1 = R_c L = \frac{3EI}{2L^2} \delta$$

(b) 去掉多余约束, 以约束力  $R_c$  代之, 得到基本静定梁如图所示。

变形协调条件为  $v_c = -\delta$

$$\text{即 } v_c = -\frac{R_c (2L)^3}{48EI} = -\frac{R_c L^3}{6EI} = -\delta$$

$$\therefore R_c = \frac{6EI}{L^3} \delta$$

$$M_{\max} = |M_2| = \frac{R_c \cdot (2L)}{4} = \frac{3EI}{L^2} \delta$$

[7-29] 梁 AB 的两端均为固定端, 当其左端固定端转动了一个微小角度  $\theta$  如图所示时, 试确定此梁的约束力  $M_A$ 、 $R_A$ 、 $M_B$  和  $R_B$ 。

解: 此梁为二次超静力, 去掉 A 端约束, 代之以约束反力  $R_A$  及反力偶  $M_A$ , 得到基本静定梁为一悬臂梁, 如图所示。

变形协调条件为  $v_A = 0$ ,  $\theta_A = -\theta$

$$\text{即 } v_A = v_{AR} + v_{AM} = -\frac{R_A L^3}{3EI} + \frac{M_A L^3}{2EI} = 0 \quad (1)$$

$$\theta_A = \theta_{AR} + \theta_{AM} = \frac{R_A L^2}{2EI} - \frac{M_A L}{EI} = -\theta \quad (2)$$

解①和②得

$$M_A = \frac{4EI}{L} \theta$$

$$R_A = \frac{6EI}{L^2} \theta$$

由平衡方程可得:

$$R_B = -R_A = -\frac{6EI}{L^2} \theta$$

$$M_B = R_A L - M_A = \frac{2EI}{L} \theta$$

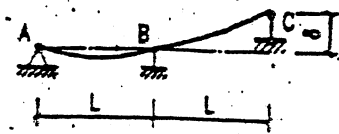


图 7-28a

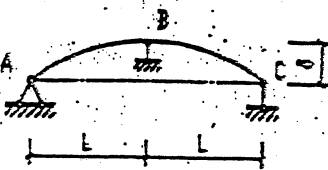


图 7-28b

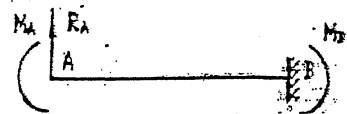
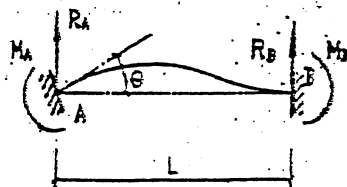


图 7-29

[7-30] 图示两端固定梁 AB 在安装好以后, 其顶面和底面温度分别由安装时的  $T_0$  上升为  $T_1$  和  $T_2$ 。梁材料的弹性模量  $E$ 、线膨胀系数  $\alpha$ 、梁截面高度  $h$ 、面积  $A$  和惯性矩  $I$  均为已知。试确定此梁的约束反力。

解: 此梁为三次超静定, 由于温度变化会在梁内产生轴力与弯曲内力。去掉 B 端约束, 代之以反力  $R_B$ 、 $H_B$  和  $M_B$ , 基本静定系统如图所示。

变形协调条件为

$$\begin{cases} \theta_B = 0 & ① \\ v_B = 0 & ② \\ \Delta_{AB} = 0 & ③ \end{cases}$$

杆的变形由外力及温度引起。根据式(7-12),由温度变化引起梁的挠曲线近似微分方程为

$$\frac{d^2 v_T}{dx^2} = -\frac{\alpha(T_2 - T_1)}{h}$$

对上式连续积分两次,并利用固定端 A 处的边界条件  $v_T(0) = v_T'(0) = 0$ ,得到温差引起的转角及的挠度方程为

$$\begin{aligned} \theta_T = v_T' &= -\frac{\alpha(T_2 - T_1)}{h}x \\ v_T &= -\frac{\alpha(T_2 - T_1)}{2h}x^2 \end{aligned}$$

因此 B 截面的转角及挠度为

$$\begin{cases} \theta_{BT} = -\frac{\alpha(T_2 - T_1)}{h}L \\ v_{BT} = -\frac{\alpha(T_2 - T_1)}{2h}L^2 \end{cases}$$

根据式(2-32),由于温度变化引起杆的伸长为

$$\Delta_T = \alpha \cdot \Delta T \cdot L$$

式中,  $\Delta T = T_m - T_0 = \frac{T_1 + T_2}{2} - T_0$  ( $T_m$  为杆在安装后的平均温度)

$$\Delta_T = \alpha L \frac{T_1 + T_2 - 2T_0}{2}$$

在  $R_B$  和  $M_B$  作用下, B 截面的转角和挠度为

$$\begin{cases} \theta_{BP} = \theta_{BR_B} + \theta_{BM_B} = -\frac{R_B L^2}{2EI} + \frac{M_B L}{EI} \\ v_{BP} = v_{BR_B} + v_{BM_B} = -\frac{R_B L^3}{3EI} + \frac{M_B L^2}{2EI} \end{cases}$$

在  $H_B$  作用下,梁的伸长为

$$\Delta_N = -\frac{H_B L}{EA}$$

利用叠加原理,将式④~⑨分别代入式①~③,得

$$\begin{cases} \theta_B = \theta_{BT} + \theta_{BP} = -\frac{(T_2 - T_1)}{h}L - \frac{R_B L^2}{2EI} + \frac{M_B L}{EI} = 0 & ⑩ \\ v_B = v_{BT} + v_{BP} = -\frac{\alpha(T_2 - T_1)}{2h}L^2 - \frac{R_B L^3}{3EI} + \frac{M_B L^2}{2EI} = 0 & ⑪ \\ \Delta_{AB} = \Delta_T + \Delta_N = \alpha \cdot L \cdot \frac{T_1 + T_2 - 2T_0}{2} - \frac{H_B L}{T_2 A} = 0 & ⑫ \end{cases}$$

解⑩、⑪和⑫得

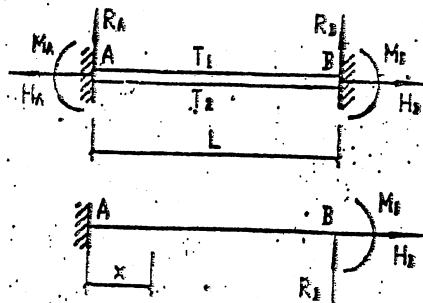


图 7-30

$$M_B = \frac{eEI(T_2 - T_1)}{h}$$

$$R_B = 0$$

$$H_B = \frac{eEA}{2}(T_1 + T_2 - 2T_0)$$

$$\text{于是 } M_A = M_B - R_B L = M_B, \quad R_A = -R_B = 0, \quad H_A = H_B$$

## 第八章 弹性地基梁

[8-1] 图示弹性地基短梁, 两端简支并沿全长受有均布荷载作用。试导出梁的位移及内力计算公式。

解: 在一般解(8-7)式中, 按式(8-10)取附加项  $\Delta w \sim \Delta V$ , 并注意到在本题中, 有初参数  $v_0 = M_0 = 0$ , 荷载参数  $a_0 = \Delta q = 0, \bar{a}_0 = l$  后, 得计算公式为:

$$\left. \begin{aligned} v &= \frac{\theta_0}{2\alpha^2} \bar{p}_2 - V_0 \frac{\alpha}{bk} \bar{p}_1 + \frac{q}{bk} (1 - \bar{p}_1) \\ \theta &= \theta_0 \bar{p}_1 - V_0 \frac{2\alpha^2}{bk} \bar{p}_2 + \frac{aq}{bk} \bar{p}_1 \\ M(x) &= \theta_0 \frac{bk}{4\alpha^2} \bar{p}_1 + V_0 \frac{1}{2\alpha} \bar{p}_2 - \frac{q}{2\alpha^2} \bar{p}_2 \\ V(x) &= \theta_0 \frac{bk}{2\alpha^2} \bar{p}_2 + V_0 \bar{p}_1 - \frac{q}{2\alpha} \bar{p}_1 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

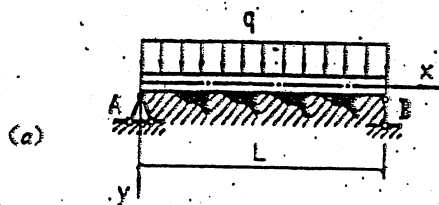


图 8-1

其余两个初参数  $\theta_0, V_0$  由 B 端处的边界条件  $[v, M(x)]_{x=l} = 0$ , 即

$$\left. \begin{aligned} \theta_0 \bar{p}_2 - V_0 \frac{2\alpha^2}{bk} \bar{p}_1 + \frac{2aq}{bk} (1 - \bar{p}_1) &= 0 \\ \theta_0 \bar{p}_1 + V_0 \frac{2\alpha^2}{bk} \bar{p}_2 - \frac{2aq}{bk} \bar{p}_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

式中  $\bar{p}_1 \sim \bar{p}_2$  为  $x=l$  时, 按式(8-4)计算的  $p_1 \sim p_2$  值。求解式(b), 得

$$\begin{aligned} \theta_0 &= n_1 \frac{aq}{bk}, \quad n_1 = \frac{2(\bar{p}_1 \bar{p}_2 + \bar{p}_2 \bar{p}_1 - \bar{p}_2)}{\bar{p}_2^2 + \bar{p}_1^2} \\ V_0 &= n_2 \frac{q}{\alpha}, \quad n_2 = \frac{\bar{p}_1 + \bar{p}_2 \bar{p}_1 - \bar{p}_1 \bar{p}_2}{\bar{p}_2^2 + \bar{p}_1^2} \end{aligned}$$

将  $\theta_0, V_0$  代入式(a), 即得本题的计算公式。

[8-2] 图示弹性地基短梁, 两端简支, 在左支座 A 处作用一集中力偶  $M$ 。试求支座 A 处的反力  $R_A$  及转角  $\theta_A$ 。

解: 本题属梁跨间无荷载情形, 应按式(8-6)进行计算。这时的初参数  $v_0 = 0, M_0 = M$ , 其余两个初参数  $\theta_0$  及  $V_0$  由 B 端处的边界条件  $[v, M(x)]_{x=l} = 0$  确定, 即

$$\begin{aligned} \theta_0 \frac{1}{2\alpha} \bar{p}_2 - V_0 \frac{\alpha}{bk} \bar{p}_1 - M \frac{2\alpha^2}{bk} \bar{p}_2 &= 0 \\ \theta_0 \frac{bk}{4\alpha^2} \bar{p}_1 + V_0 \frac{1}{2\alpha} \bar{p}_2 + M \bar{p}_1 &= 0 \end{aligned}$$

解得

$$\theta_0 = \frac{4\alpha^2 M}{bk} \frac{\bar{p}_1 \bar{p}_2 + \bar{p}_2 \bar{p}_1}{\bar{p}_2^2 + \bar{p}_1^2}, \quad V_0 = -2\alpha M \frac{\bar{p}_1 \bar{p}_2 + \bar{p}_2 \bar{p}_1}{\bar{p}_2^2 + \bar{p}_1^2}$$

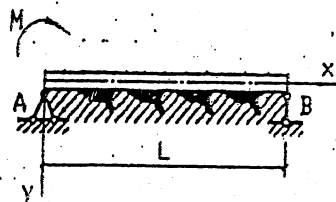


图 8-2

则该弹性地基梁左支座 A 处的反力  $R_A = V_0(\downarrow)$ , 转角  $\theta_A = \theta_0(\downarrow)$

[8-3] 求图示弹性地基无限长梁在三角形分布荷载作用下, 荷载区内任意点 A 处的挠度  $v_A$ 。

解: 求 A 点处的挠度时, 将荷载划分为 A 点以左及 A 点以右两部分, 再分别计算这两部分荷载在 A 点处的挠度, 然后叠加。以  $x_1, x_2$  表示两个荷载区内任一点至 A 点的距离, 其对应处

的荷载集度分别为:

$$\frac{a+u}{l}q, \quad \frac{a-u}{l}q$$

则作用在  $du, du$  微段上的荷载应为

$$\frac{a+u}{l}qdu, \quad \frac{a-u}{l}qdu \quad (a)$$

以式(a)的荷载, 代替式(8-14)中的  $P$ , 便得到式(a)荷载引起  $A$  处的挠度。因此, 图示三角形荷载下任意  $A$  点处的挠度  $v_A$  为:

$$v_A = \int_0^a \frac{a}{2bk} \cdot \frac{a-u}{l} q du + \int_0^b \frac{a}{2bk} \cdot \frac{a+u}{l} q du$$

$$= \frac{q}{2bk} \left\{ a \left[ \int_0^a \varphi_1 d(au) + \int_0^b \varphi_1 d(au) \right] - \left[ \int_0^a u \varphi_1 d(au) + \int_0^b u \varphi_1 d(au) \right] \right\} \quad (b)$$

当注意到式(8-13)的第五式, 即

$$\varphi_1 dx = -\frac{d\varphi_1}{2a}, \quad \varphi_1 d(ax) = -d\varphi_1$$

并利用分部积分  $\int u dv = uv - \int v du$  后, 式(b)变为

$$v_A = \frac{q}{2bk} \left\{ a \left[ (-\varphi_1)_0^a - (-\varphi_1)_0^b \right] - \left[ -u_1 \varphi_1 - \frac{\varphi_1^2}{2a} \right]_0^a + \left[ -u \varphi_1 - \frac{\varphi_1^2}{2a} \right]_0^b \right\}$$

$$= \frac{q}{2bk} \left[ -a\varphi_1(a) + a - a\varphi_1(b) + a + a\varphi_1(a) + \frac{\varphi_1(a)^2}{2a} - \frac{1}{2a} - b\varphi_1(b) - \frac{\varphi_1(b)^2}{2a} + \frac{1}{2a} \right]$$

$$= \frac{q}{4bk} \cdot \frac{1}{a} [\varphi_1(a) - \varphi_1(b) - 2a\varphi_1(b) + 4aa]$$

[8-4] 图示无限长弹性地基梁, 在长度  $l$  范围内受均布荷载  $q$  作用。试求荷载区内任一点  $A$  处的挠度  $v_A$ 。

解: 用  $qdx$  代替(8-14)式中的  $P$ , 得荷载  $qdx$  在  $A$  点处产生的挠度为

$$dv_A = \frac{aq}{2bk} \varphi_1 dx$$

应用叠加法, 得图示荷载时  $A$  点处的总挠度为

$$v_A = \int_0^a dv_A + \int_0^b dv_A = \frac{q}{2bk} [2 - \varphi_1(a) - \varphi_1(b)]$$

[8-5] 图示半无限长弹性地基梁, 梁的  $A$  端铰支并受一集中力偶  $M$  作用。试求梁的挠曲线方程。

解: 在式(8-16)中取初参数  $M_0 = -M$ , 并由边界条件  $x=0$  时  $v_A=0$ , 得另一个初参数  $V_0$  为

$$V_0 = aM$$

将  $M_0, V_0$  值代入(8-16)式的第一式, 得挠曲线方程为

$$v = \frac{2a}{bk} (aM\varphi_1 - aM\varphi_2) = \frac{2a^2 M}{bk} \varphi_1$$

$$(\varphi_1 = e^{-ax} \cos ax) - (\varphi_2 = e^{-ax} (\cos ax - \sin ax)) = -\varphi_1$$

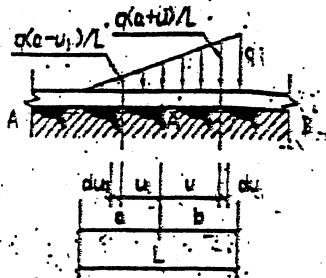


图 8-3

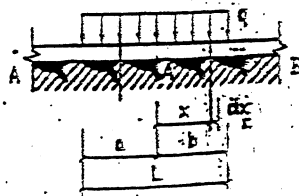


图 8-4



图 8-5

【8-6】 图示一端固定并受有均布荷载作用的半无限长弹性地基梁，试求固定端处的反力。

解：将图示半无限长梁的支座移去后，把荷载及梁均向左边延伸为虚构的无限长梁。显然，虚构无限长梁的挠曲线方程应为

$$v = \frac{q}{bk} \quad (a)$$

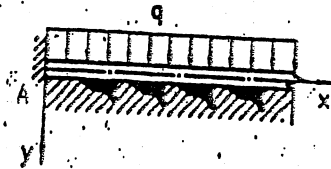


图 8-6

将式(a)与式(8-16)叠加，便得到除 A 端有剪力  $V_0$  和弯矩  $M_0$  作用外，还有均布荷载  $q$  作用的半无限长梁的挠曲线及转角方程为

$$v = \frac{2a}{bk} (V_0 e^{\alpha x} + a M_0 e^{\alpha x}) + \frac{q}{bk}$$

$$\theta = -\frac{2a^2}{bk} (V_0 e^{\alpha x} + 2a M_0 e^{\alpha x})$$

由边界条件  $x=0$  时有  $v=0, \theta=0$ ，得

$$\frac{2a}{bk} (V_0 + a M_0) + \frac{q}{bk} = 0$$

$$V_0 + 2a M_0 = 0$$

解得  $V_0 = -\frac{q}{2a}$ ,  $M_0 = \frac{q}{4a}$ ，则 A 支座的反力为  $R_A = V_0 = -\frac{q}{2a}$  (↑);  $M_A = M_0 = \frac{q}{4a}$  (反时针)。



## 第九章 应力状态理论及应变状态理论

[9-1] 图示拉杆, 在斜截面  $pq$  上的应力为  $\sigma_\alpha = 80\text{MPa}$ ,  $\tau_\alpha = 30\text{MPa}$ , 试求横截面  $mn$  上的正应力  $\sigma_x$  及角度  $\alpha$ 。

解: 这时, 单元体上有  $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ , 由式

(9-1) 得

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha, \quad \tau_\alpha = \sigma_x \sin \alpha \cos \alpha$$

则有

$$\alpha = \arctan \frac{\tau_\alpha}{\sigma_\alpha} = \arctan \frac{30}{80} = \arctan 0.375 = 20.556^\circ$$

$$= 20^\circ 33.4'$$

于是横截面  $mn$  上的正应力  $\sigma_x$  为

$$\sigma_x = \frac{\sigma_\alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{80}{\cos^2 20.556^\circ} = \frac{80}{0.8767} = 91.3\text{MPa}$$

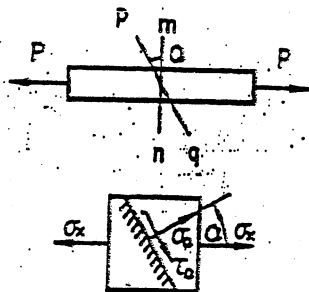


图 9-1

[9-2] 图示拉杆是用两块材料沿  $mn$  线粘合在一起。由于实际的原因,  $\alpha$  角被限制在  $0^\circ \sim 60^\circ$  间。假设杆的强度由结合缝强度控制, 结合缝上的容许剪应力  $[\tau] = 7\text{MPa}$ , 容许正应力  $[\sigma] = 14\text{MPa}$ , 杆的横截面积为  $A = 960\text{mm}^2$ , 试求最大容许荷载  $P$ 。

解: 与题 9-1 相同, 由式 (9-1) 得

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha, \quad \tau_\alpha = \sigma_x \sin \alpha \cos \alpha$$

按题意, 强度条件为 (引入  $\sigma_x = P/A$  后):

$$\frac{P}{A} \cos^2 \alpha \leq [\sigma], \quad \frac{P}{A} \sin \alpha \cos \alpha \leq [\tau]$$

取强度条件的极限情形, 有

$$\frac{P}{A} \cos^2 \alpha = [\sigma], \quad \frac{P}{A} \sin \alpha \cos \alpha = [\tau]$$

解得:

$$\tan \alpha = \frac{[\tau]}{[\sigma]} = \frac{7}{14} = 0.5, \quad \alpha = 26.565^\circ = 26^\circ 34'$$

$$P = \frac{[\sigma]A}{\cos^2 \alpha} = \frac{14 \times 960}{\cos^2 26.565^\circ} = 16.8\text{kN}$$

为了考察上述条件求得的  $P$  值是否为最大容许荷载, 再描绘  $\sigma_\alpha = [\sigma]$  及  $\tau_\alpha = [\tau]$  两条曲线, 如右图所示。从图中看出, 满足条件  $\sigma_\alpha \leq [\sigma]$  及  $\tau_\alpha \leq [\tau]$  的容许荷载应位于图示阴影区。可见最大容许荷载时的  $\alpha$  角应为上述条件求得的  $\alpha = 26^\circ 34'$ , 其所求最大容许荷载应为  $P = 16.8\text{kN}$ 。

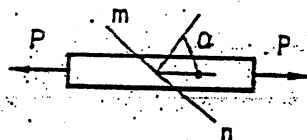


图 9-2

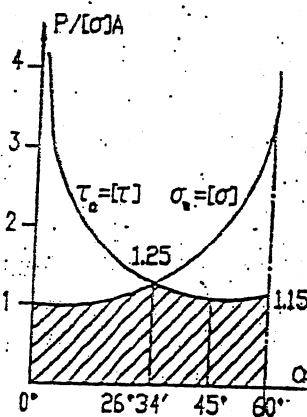


图 9-2 解图

[9-3] 试用解析法计算图示各单元体指定截面上的应力(应力单位为 MPa)。

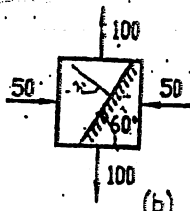
解: 按式 (9-1) 计算, 即

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

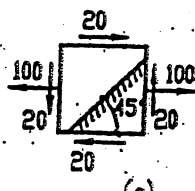
$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha$$



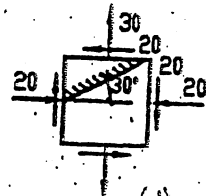
(a)



(b)



(c)



(d)

(a)  $\sigma_x = \tau_{xy} = 0, \sigma_y = 100 \text{ MPa}, \alpha = 30^\circ$  图 9-3 (单位 MPa)

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha = \frac{0 + 100}{2} + \frac{0 - 100}{2} \cos(2 \times 30^\circ) = 25 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\alpha} = -\frac{\sigma_y}{2} \sin 2\alpha = -\frac{100}{2} \sin(2 \times 30^\circ) = -43.3 \text{ MPa}$$

(b)  $\sigma_x = -50 \text{ MPa}, \sigma_y = 100 \text{ MPa}, \tau_{xy} = 0, \alpha = 150^\circ$

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha = \frac{-50 + 100}{2} + \frac{-50 - 100}{2} \cos(2 \times 150^\circ) = -12.5 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha = \frac{-50 - 100}{2} \sin(2 \times 150^\circ) = 65.0 \text{ MPa}$$

(c)  $\sigma_x = 100 \text{ MPa}, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = -20 \text{ MPa}, \alpha = 135^\circ$

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha = \frac{100 + 0}{2} + \frac{100 - 0}{2} \cos(2 \times 135^\circ) + 20 \sin(2 \times 135^\circ) = 30 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha = \frac{100 - 0}{2} \sin(2 \times 135^\circ) - 20 \cos(2 \times 135^\circ) = -50 \text{ MPa}$$

(d)  $\sigma_x = -20 \text{ MPa}, \sigma_y = 30 \text{ MPa}, \tau_{xy} = 20 \text{ MPa}, \alpha = -60^\circ$

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(-2 \times 60^\circ) - 20 \sin(-2 \times 60^\circ) = 34.8 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin(-2 \times 60^\circ) + 20 \cos(-2 \times 60^\circ) = 11.6 \text{ MPa}$$

[9-4] 图示各单元体各面上的应力单位为 MPa, 试用解析法:

(1) 求主应力  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  的数值及  $\sigma_1$  的方位;

(2) 在单元体上绘出图示面内的两个主应力方向及其对应的主平面位置。

解: 平面内的正应力极值  $\sigma_{\max}, \sigma_{\min}$  按式 (9-4) 计算, 其中  $\sigma_{\max}$  与  $x$  轴的夹角  $\alpha_0$  按式 (9-3) 确定, 即

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$



三个主应力之一为零, 另外两个为  $\sigma_{\max}$ 、 $\sigma_{\min}$ , 其  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  的次序, 按它们的代数值大小排列。

(a)  $\sigma_x = 130 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_y = 0$ ,  $\tau_{xy} = -70 \text{ MPa}$

$$\sigma_{\max} = \frac{130}{2} + \sqrt{\left(\frac{130}{2}\right)^2 + (-70)^2} = 160.5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\min} = \frac{130}{2} - \sqrt{\left(\frac{130}{2}\right)^2 + (-70)^2} = -30.5 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{-2(-70)}{130} = \frac{140}{130} = +1.0769$$

根据  $\sin 2\alpha_0$ 、 $\cos 2\alpha_0$ 、 $\tan 2\alpha_0$  均为正, 可见  $2\alpha_0$

应在第一象限,  $2\alpha_0 = 47.12^\circ$ , 则  $\alpha_0 = 23.56^\circ = 23^\circ 33.6'$ 。

因此,  $\sigma_1 = 160.5 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_3 = -30.5 \text{ MPa}$ , 其中  $\sigma_1$  与  $x$  轴夹角  $\alpha_0 = 23^\circ 33.6'$ 。  $\sigma_1$ 、 $\sigma_3$  的方位如图示。

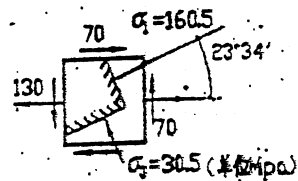


图 9-4a 解图

(b)  $\sigma_x = 80 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_y = 160 \text{ MPa}$ ,  $\tau_{xy} = 30 \text{ MPa}$

$$\sigma_{\max} = \frac{80+160}{2} + \sqrt{\left(\frac{80-160}{2}\right)^2 + 30^2} = 170 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\min} = \frac{80+160}{2} - \sqrt{\left(\frac{80-160}{2}\right)^2 + 30^2} = 70 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{-2 \times 30}{80-160} = \frac{-60}{-80} = 0.75$$

因为  $\sin 2\alpha_0$ 、 $\cos 2\alpha_0$  均为负, 而  $\tan 2\alpha_0$  为正, 可见  $2\alpha_0$  位于第三象限, 有  $2\alpha_0 = 216.87^\circ$ ,  $\alpha_0 = 108.435^\circ = 108^\circ 26'$ , 因此,

$\sigma_1 = 170 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_2 = 70 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_3 = 0$ , 而  $\sigma_1$  与  $x$  轴成  $108^\circ 26'$ , 其方位如图示。

(c)  $\sigma_x = 0$ ,  $\sigma_y = 120 \text{ MPa}$ ,  $\tau_{xy} = 50 \text{ MPa}$

$$\sigma_{\max} = \frac{120}{2} + \sqrt{\left(\frac{-120}{2}\right)^2 + 50^2} = 138.1 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\min} = \frac{120}{2} - \sqrt{\left(\frac{-120}{2}\right)^2 + 50^2} = -18.1 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{-2 \times 50}{-120} = \frac{-100}{-120} = 0.833$$

同 (b),  $2\alpha_0$  位于第三象限,  $2\alpha_0 = 219.8^\circ$ ,  $\alpha_0 = 109.9^\circ = 109^\circ 54'$ 。因此,  $\sigma_1 = 138.1 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_3 = -18.1 \text{ MPa}$ , 而  $\sigma_1$  与  $x$  轴成  $109^\circ 54'$ , 如图示。

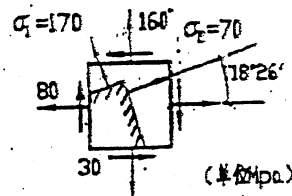


图 9-4b 解图

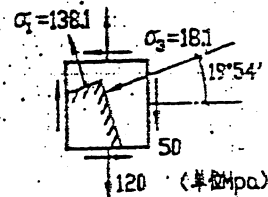


图 9-4c 解图

(d)  $\sigma_x = -20 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_y = 30 \text{ MPa}$ ,  $\tau_{xy} = -20 \text{ MPa}$

$$\sigma_{\max} = \frac{-20+30}{2} + \sqrt{\left(\frac{-20-30}{2}\right)^2 + (-20)^2} = 37 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\min} = \frac{-20+30}{2} - \sqrt{\left(\frac{-20-30}{2}\right)^2 + (-20)^2} = -27 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{-2 \times (-20)}{-20-30} = \frac{40}{-50} = -0.8$$

因  $\sin 2\alpha_0$  为正,  $\cos 2\alpha_0$ 、 $\tan 2\alpha_0$  为负, 则  $2\alpha_0$  位于第二象限, 并有  $2\alpha_0 = 141.34^\circ$ ,  $\alpha_0 = 70.67^\circ = 70^\circ 40.2'$ 。因此,  $\sigma_1 = 37 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_3 = -27 \text{ MPa}$ , 而  $\sigma_1$  与  $x$  轴成  $70^\circ 40.2'$ , 如图示。

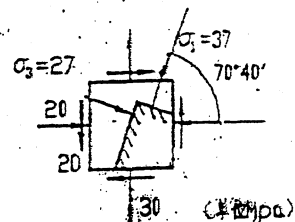


图 9-4d 解图

[9-5] 已知一点 A 处两斜交面上的应力如图示(应力单位为 MPa), 试用解析法求主应力

$\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $\sigma_3$  及图示面内两个主应力方向。

解: 图示的每一种情形, 须先设定一个面 (ab 面或 bc 面) 为  $\sigma$  面, 而取另一个面 (bc 面或 ab 面) 为坐标面 (x 面或 y 面), 从而确定  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ 、 $\tau_{xy}$ , 再求解  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$  等。这样,

每一情形都有四种途径求  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ 、 $\tau_{xy}$ ，即

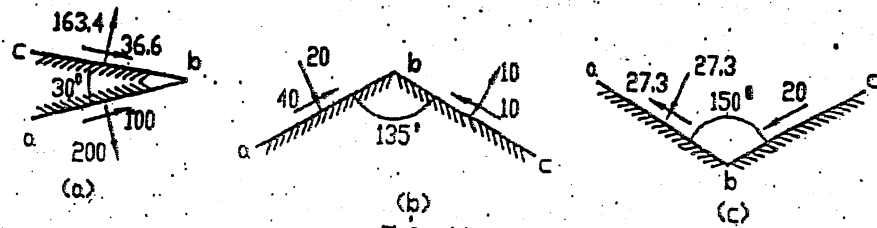


图 9-5 图 (单位: MPa)

- (1) 以  $ab$  面为  $x$  面，以  $bc$  面为  $y$  面，这时  $\sigma_a$ 、 $\tau_a$ 、 $\alpha$ 、 $\sigma_b$ 、 $\tau_b$  已知，求  $\sigma_y$ ；
- (2) 以  $ab$  面为  $x$  面，以  $bc$  面为  $y$  面，这时  $\sigma_a$ 、 $\tau_a$ 、 $\alpha$ 、 $\sigma_b$ 、 $\tau_b$  已知，求  $\sigma_x$ ；
- (3) 以  $bc$  面为  $x$  面，以  $ab$  面为  $y$  面，这时  $\sigma_a$ 、 $\tau_a$ 、 $\alpha$ 、 $\sigma_b$ 、 $\tau_b$  已知，求  $\sigma_y$ ；
- (4) 以  $bc$  面为  $x$  面，以  $ab$  面为  $y$  面，这时  $\sigma_a$ 、 $\tau_a$ 、 $\alpha$ 、 $\sigma_b$ 、 $\tau_b$  已知，求  $\sigma_x$ ；

求  $\sigma_x$  或  $\sigma_y$  时，应利用式 (9-1)，即

$$\sigma_x = \frac{\sigma_a + \sigma_b}{2} + \frac{\sigma_a - \sigma_b}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \quad (1)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_a - \sigma_b}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \quad (2)$$

用式 (1) 求  $\sigma_x$  或  $\sigma_y$  时，应该用式 (2) 校核，这时有

$$\sigma_x = \frac{1}{1 + \cos 2\alpha} [2\sigma_a - \sigma_b(1 - \cos 2\alpha) + 2\tau_{xy} \sin 2\alpha] \quad (3)$$

$$\sigma_y = \frac{1}{1 - \cos 2\alpha} [2\sigma_a - \sigma_b(1 + \cos 2\alpha) + 2\tau_{xy} \sin 2\alpha] \quad (4)$$

当用式 (2) 求  $\sigma_x$  或  $\sigma_y$  时，应该用式 (1) 校核，这时有

$$\sigma_x = \sigma_b + \frac{2(\tau_{xy} - \tau_{xy} \cos 2\alpha)}{\sin 2\alpha} \quad (5)$$

$$\sigma_y = \sigma_b - \frac{2(\tau_{xy} - \tau_{xy} \cos 2\alpha)}{\sin 2\alpha} \quad (6)$$

已知  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ 、 $\tau_{xy}$  后，便按式 (9-4)、(9-3) 求正应力极值  $\sigma_{\max}$ 、 $\sigma_{\min}$  及  $\sigma_{\max}$  与  $x$  轴的夹角  $\alpha_0$ ，即

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (7)$$

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (8)$$

(a) 图 a 的解——四种途径的单元体如下图所示。

下面给出 (a-1)、(a-3) 两情形的解法：

图 a-1 时的解：这时已知  $\sigma_a = 163.4 \text{ MPa}$ ， $\tau_a = 36.6 \text{ MPa}$ ， $\alpha = 60^\circ$ ， $\sigma_b = 200 \text{ MPa}$ ， $\tau_b = 100 \text{ MPa}$ ，由式 (5) 得

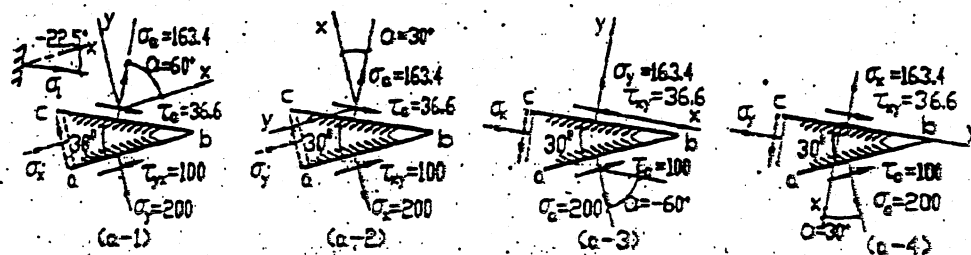


图 9-5a 解图

$$\sigma_x = \sigma_y + \frac{2(\tau_x - \tau_{xy} \cos 2\alpha)}{\sin 2\alpha} = 200 + \frac{2(36.6 - 100 \cos 120^\circ)}{\sin 120^\circ} = 400 \text{ MPa}$$

用式(1)校核,有

$$\sigma_\alpha = \frac{400 + 200}{2} + \frac{400 - 200}{2} \cos 120^\circ - 100 \sin 120^\circ = 163.4 \text{ MPa} \quad (\text{正确})$$

因此由式(7)、(8)得

$$\sigma_{\max} = \frac{400 + 200}{2} + \sqrt{\left(\frac{400 - 200}{2}\right)^2 + 100^2} = 441.4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\min} = \frac{400 + 200}{2} - \sqrt{\left(\frac{400 - 200}{2}\right)^2 + 100^2} = 158.6 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{-2 \times 100}{400 - 200} = -1$$

因为  $\sin 2\alpha_0$ 、 $\tan 2\alpha_0$  为负,  $\cos 2\alpha_0$  为正, 则  $2\alpha_0$  位于第四象限, 有  $2\alpha_0 = -45^\circ$ ,  $\alpha_0 = -22.5^\circ$ 。因而,  $\sigma_1 = 441.4 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_2 = 158.6 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_3 = 0$ ,  $\sigma_1$  与  $ab$  面夹角  $-22.5^\circ$ 。(1)

图 a-3 时的解: 这时, 已知  $\sigma_x = 200 \text{ MPa}$ ,  $\tau_x = 100 \text{ MPa}$ ,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\sigma_y = 163.4 \text{ MPa}$ ,  $\tau_y = 36.6 \text{ MPa}$ 。

由式(5)得

$$\sigma_x = \sigma_y + \frac{2(\tau_x - \tau_{xy} \cos 2\alpha)}{\sin 2\alpha} = 163.4 + \frac{2[-100 + 36.6 \cos(-120^\circ)]}{\sin(-120^\circ)} = 436.6 \text{ MPa}$$

用式(1)校核有

$$\sigma_\alpha = \frac{436.6 + 163.4}{2} + \frac{436.6 - 163.4}{2} \cos(-120^\circ) - (-36.6) \sin(-120^\circ) = 200 \text{ MPa} \quad (\text{正确})$$

$$\text{则 } \sigma_{\max} = \frac{436.6 + 163.4}{2} + \sqrt{\left(\frac{436.6 - 163.4}{2}\right)^2 + (-36.6)^2} = 441.4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\min} = \frac{436.6 + 163.4}{2} - \sqrt{\left(\frac{436.6 - 163.4}{2}\right)^2 + (-36.6)^2} = 158.6 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{-2 \times (-36.6)}{436.6 - 163.4} = 0.26794$$

因为  $\sin 2\alpha_0$ 、 $\cos 2\alpha_0$ 、 $\tan 2\alpha_0$  均为正, 则  $2\alpha_0$  位于第一象限, 有  $2\alpha_0 = 15^\circ$ ,  $\alpha_0 = 7.5^\circ$ 。即  $\sigma_{\max}$  与  $bc$  面成  $7.5^\circ$  (1), 可见  $\sigma_{\max}$  与  $ab$  面成  $-22.5^\circ$  (1)。因此, 所得解与图 a-1 的解一致。

(b) 图 b 的解——与它对应的四种途径单元体如下图所示。

这里只给出图 (b-1)、(b-3) 两情形的解

图 b-1 时的解: 这时, 已知  $\sigma_x = 10 \text{ MPa}$ ,  $\tau_x = -10 \text{ MPa}$ ,  $\alpha = -135^\circ$ ,  $\sigma_y = -20 \text{ MPa}$ ,  $\tau_y = -47.7 \text{ MPa}$ 。

由式(5)得

$$\sigma_x = \sigma_y + \frac{2(\tau_x - \tau_{xy} \cos 2\alpha)}{\sin 2\alpha} = -20 + \frac{2[-10 + 40 \cos(-270^\circ)]}{\sin(-270^\circ)} = -10 \text{ MPa}$$

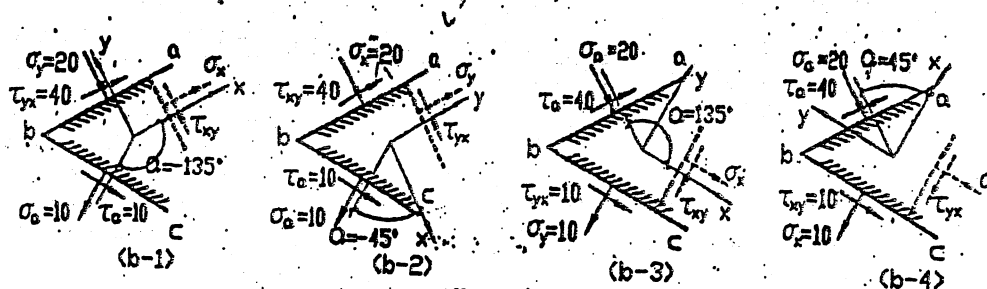


图 9-5b 解

用式(1)校核, 得

$$\sigma_c = \frac{-40-20}{2} + \frac{-40+20}{2} \cos(-270^\circ) + 40 \sin(-270^\circ) = 10 \text{ MPa} \quad (\text{正确})$$

由式(7)、(8)得

$$\sigma_{\max} = \frac{-40-20}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-40+20}{2}\right)^2 + (-40)^2} = 11.2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\min} = -71.2 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{-2 \times (-40)}{-40+20} = -4$$

因  $\sin 2\alpha_0$  为正,  $\cos 2\alpha_0$  及  $\tan 2\alpha_0$  均为负, 则  $2\alpha_0$  位于第二象限, 有  $2\alpha_0 = 104^\circ$ ,  $\alpha_0 = 52^\circ$ . 即  $\sigma_{\max}$  的指向与  $ab$  面成  $52^\circ$  (上). 而  $\sigma_1 = 11.2 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_3 = -71.2 \text{ MPa}$

图 b-3 时的解: 这时, 已知  $\sigma_x = -20 \text{ MPa}$ ,  $\tau_{xy} = 40 \text{ MPa}$ ,  $\alpha = 135^\circ$ ,  $\sigma_y = 10 \text{ MPa}$ ,  $\tau_{yx} = 10 \text{ MPa}$ , 由式(5)得

$$\sigma_x = \sigma_y + \frac{2(\tau_{xy} - \tau_{yx} \cos 2\alpha)}{\sin 2\alpha} = 10 + \frac{2(40 - 10 \cos 270^\circ)}{\sin 270^\circ} = -70 \text{ MPa}$$

用式(1)校核, 有

$$\sigma_x = \frac{-70+10}{2} + \frac{-70-10}{2} \cos 270^\circ - 10 \sin 270^\circ = -20 \text{ MPa} \quad (\text{正确})$$

由式(7)、(8)得

$$\sigma_{\max} = \frac{-70+10}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-70-10}{2}\right)^2 + 10^2} = 11.2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\min} = -71.2 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{-2 \times 10}{-70-10} = 0.25$$

因  $\sin 2\alpha_0$  及  $\cos 2\alpha_0$  均为负,  $\tan 2\alpha_0$  为正, 则  $2\alpha_0$  位于第三象限, 有  $2\alpha_0 = 194^\circ$ ,  $\alpha_0 = 97^\circ$ . 即  $\sigma_{\max}$  与  $ab$  面成  $97^\circ - 45^\circ = 52^\circ$ . 其结果与图 b-1 一致

(c) 图 c 的解——与它对应的四种途径单元体如下图所示

图 c-1 的解: 这时, 已知  $\sigma_x = 0$ ,  $\tau_{xy} = -20 \text{ MPa}$ ,  $\alpha = 120^\circ$ ,  $\sigma_y = 27.3 \text{ MPa}$ ,  $\tau_{yx} = 27.3 \text{ MPa}$ , 由式(5)得

$$\sigma_x = \sigma_y + \frac{2(\tau_{xy} - \tau_{yx} \cos 2\alpha)}{\sin 2\alpha} = 27.3 + \frac{2(-20 - 27.3 \cos 240^\circ)}{\sin 240^\circ} = -12.6 \text{ MPa}$$

用式(1)校核, 有

$$\sigma_x = \frac{-12.6-27.3}{2} + \frac{-12.6+27.3}{2} \cos 240^\circ - 27.3 \sin 240^\circ = 0 \quad (\text{正确})$$

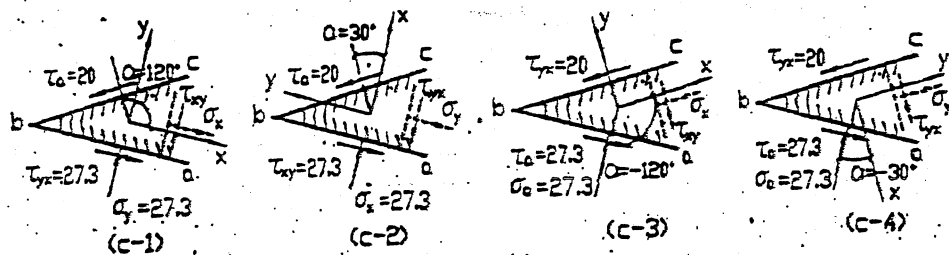


图 9-5c 续前

由式(7)、(8),得

$$\sigma_{\max} = \frac{-12.6 - 27.3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-12.6 + 27.3}{2}\right)^2 + 27.3^2} = 8.3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\min} = \frac{-12.6 - 27.3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-12.6 + 27.3}{2}\right)^2 + 27.3^2} = -48.2 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{-2 \times 27.3}{-12.6 + 27.3} = -3.714$$

因  $\sin 2\alpha_0$  及  $\tan 2\alpha_0$  均为负,  $\cos 2\alpha_0$  为正, 则  $2\alpha_0$  位于第四象限, 有  $2\alpha_0 = -74.93^\circ$ ,  $\alpha_0 = -37.47^\circ$ . 即  $\sigma_{\max}$  的指向与  $ab$  面成  $37.47^\circ$  (↓), 而  $\sigma_1 = 8.3 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_3 = -48.2 \text{ MPa}$

图 c-3 的解: 这时, 已知  $\sigma_x = \tau_{xy} = 27.3 \text{ MPa}$ ,  $\alpha = 120^\circ$ ,  $\sigma_y = 0$ ,  $\tau_{yx} = 20 \text{ MPa}$ , 由式(5)得

$$\sigma_x = \sigma_y + \frac{2(\tau_{xy} - \tau_{yx} \cos 2\alpha)}{\sin 2\alpha} = \frac{2[-27.3 - 20 \cos(-240^\circ)]}{\sin(-240^\circ)} = -40 \text{ MPa}$$

用式(1)校核,有

$$\sigma_x = \frac{-40 + 0}{2} + \frac{-40 - 0}{2} \cos(-240^\circ) - 20 \sin(-240^\circ) = -27.3 \text{ MPa} \quad (\text{正确})$$

由式(7)、(8),得

$$\sigma_{\max} = \frac{-40 + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-40 - 0}{2}\right)^2 + 20^2} = 8.3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\min} = \frac{-40 + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-40 - 0}{2}\right)^2 + 20^2} = -48.3 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{-2 \times 20}{-40 - 0} = 1$$

因  $\sin 2\alpha_0$  及  $\cos 2\alpha_0$  均为负,  $\tan 2\alpha_0$  为正, 则  $2\alpha_0$  位于第三象限, 有  $2\alpha_0 = 225^\circ$ ,  $\alpha_0 = 112.5^\circ$ . 故  $\sigma_{\max}$  的指向与  $ab$  面成  $112.5^\circ - 90^\circ = 22.5^\circ$  (↓), 或  $112.5^\circ - 90^\circ = -22.5^\circ$  (↓). 而  $\sigma_1 = 8.3 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_3 = -48.3 \text{ MPa}$  与图 c-1 的结果一致。

[9-6] 试用图 9-6b 示应力圆, 证明式 (9-3) 及式 (9-4). (略)

[9-7] 试用图解法求解题 9-4.

解:

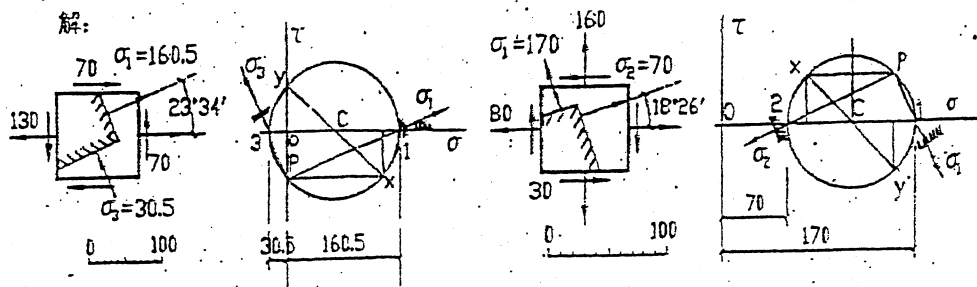


图 9-7a 图 (单位 MPa)

图 9-7b 图 (单位 MPa)

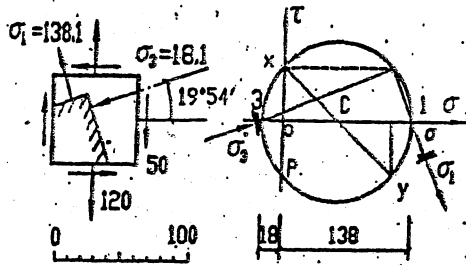


图 9-7c (单位: pa)

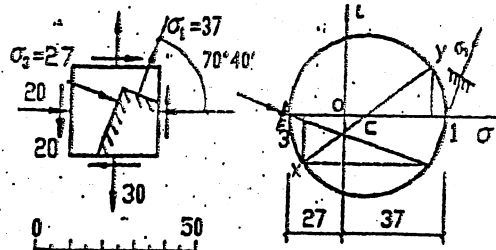


图 9-7d (单位: pa)

[9-8] 试用图解法求解题 9-5:

解:

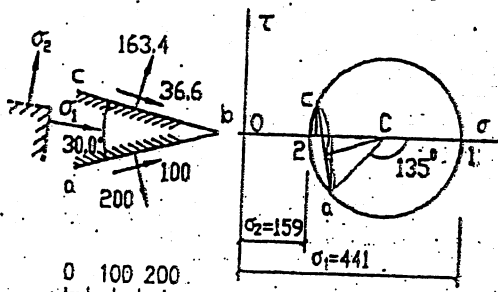


图 9-8a

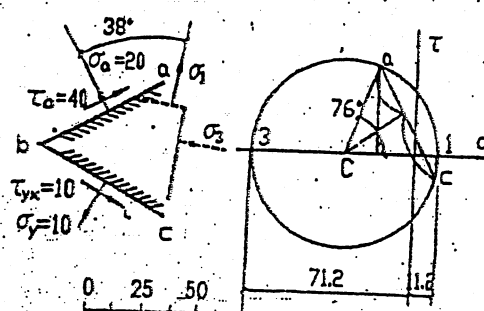


图 9-8b

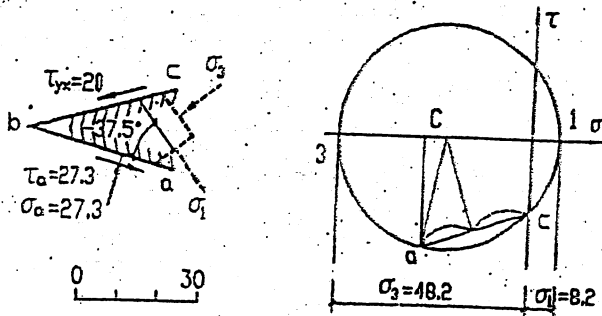


图 9-8c

注: 求解本题时, 按拉应力为正的应力, 外法线顺时针转  $90^\circ$  方向为正的剪应力约定。以  $ab$  面上的正应力、剪应力为坐标, 在  $\sigma - \tau$  坐标系中确定  $a$  点, 以  $bc$  面上的应力为坐标, 确定  $c$  点,  $a$ 、 $c$  为应力圆上的两个点, 作  $ac$  线的中垂线与  $\sigma$  轴交于  $C$  点, 以  $C$  为

原点, 以  $\overline{Ca}$  或  $\overline{Cc}$  为半径, 绘出应力圆。确定主应力等方法与教材内容相同。

[9-9] 试证明图示板件  $A$  点处各截面的正应力及剪应力均为零。

解：因为A点处，两个外表面上的应力为零，则按题9-8解法所示应力圆为 $\sigma-\tau$ 坐标系中的原点，故过A点各截面上的正应力及剪应力均为零。

[9-10] 试求图示各单元体的主应力及最大剪应力（应力单位为MPa）。

解：(a) 显然，该单元体为纯剪平面应力状态。由式(9-4)得平面应力状态的正应力极值为

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \pm 25 \text{MPa}$$

$$\sigma_{\min}$$

因此，单元体主应力为 $\sigma_1 = 25 \text{MPa}$ ， $\sigma_2 = 0$ ， $\sigma_3 = -25 \text{MPa}$ 。其最大剪应力按式(9-9)计算，有

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{25 - (-25)}{2} = 25 \text{MPa}$$

(b) 这时，Z面为主平面，对应的主应力为50MPa，另外两个主应力，仍由式(9-4)确定，其值为 $\pm 50 \text{MPa}$ ，可见单元体的主应力为 $\sigma_1 = \sigma_2 = 50 \text{MPa}$ ， $\sigma_3 = -50 \text{MPa}$ 。由式(9-9)得单元体的最大剪应力为

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{50 - (-50)}{2} = 50 \text{MPa}$$

(c) 这时，Z面为主平面，对应的主应力为50MPa，另外两个主应力按 $\sigma_x = -80 \text{MPa}$ ， $\sigma_y = 0$ ， $\tau_{xy} = -20 \text{MPa}$ 的平面应力状态，用式(9-4)计算，有：

$$\sigma_{\max} = \frac{-80 + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-80 - 0}{2}\right)^2 + (-20)^2} = 4.72 \text{MPa}$$

$$\sigma_{\min} = -84.72 \text{MPa}$$

则单元体主应力为 $\sigma_1 = 50 \text{MPa}$ ， $\sigma_2 = 4.7 \text{MPa}$ ， $\sigma_3 = -84.7 \text{MPa}$ ，而最大剪应力按式(9-9)计算，有

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{50 - (-84.7)}{2} = 67.4 \text{MPa}$$

[9-11] 已知平面应力状态单元体的 $\sigma_3 = 0$ ， $\varepsilon_1 = 1.7 \times 10^{-4}$ ， $\varepsilon_2 = 0.4 \times 10^{-4}$ ，材料泊松比 $\nu = 0.3$ 。求主应变 $\varepsilon_3$ 。

解：由式(9-16)知：

$$\varepsilon_3 = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = -\frac{0.3}{1-0.3}(1.7 \times 10^{-4} + 0.4 \times 10^{-4}) = -0.9 \times 10^{-4}$$

[9-12] 已知图示圆轴表面上一点处沿某两个互成 $45^\circ$ 方向的线应变分别为 $\varepsilon' = 3.75 \times 10^{-4}$ ， $\varepsilon'' = 5 \times 10^{-4}$ 。设材料的 $E = 200 \text{GPa}$ ， $\nu = 0.25$ ，轴的直径 $D = 100 \text{mm}$ 。试求外力偶T。

解：设 $\varepsilon'$ 向与圆轴的纵向成 $\alpha$ 角，则 $\varepsilon''$ 向与轴的纵向成 $\alpha + 45^\circ$ 。在本题中，根据式(9-1)或图示应力圆，可得 $\varepsilon'$ 向、 $\varepsilon''$ 向及其与它们正交方向的正应力为：

$\varepsilon'$ 向时： $\sigma' = \tau \sin 2\alpha$

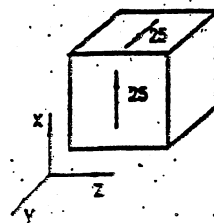


图 9-10a

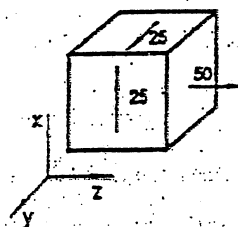


图 9-10b

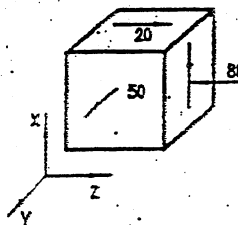


图 9-10c

L

$$\sigma''_{90} = \tau \sin 2(\alpha + 90^\circ) = -\tau \sin 2\alpha$$

$$\epsilon' \text{ 向时: } \sigma' = \tau \sin 2(\alpha + 45^\circ) = \tau \cos 2\alpha$$

$$\sigma''_{90} = \tau \sin 2(\alpha + 45^\circ + 90^\circ) = -\tau \cos 2\alpha$$

可见, 在纯剪时, 单元体任意两垂直面上的正应力是等值反号的。根据胡克定律式 (9-15), 有

$$\epsilon'' = \frac{1}{E} (\sigma'' - \nu \sigma''_{90}) = \frac{1}{E} [\sigma'' - \nu(-\sigma'')] = \frac{1+\nu}{E} \sigma''$$

则

$$\sigma'' = \frac{E}{1+\nu} \epsilon'' = \frac{200 \times 10^3}{1+0.25} \times 5 \times 10^{-4} = 80 \text{ MPa}$$

同理

$$\sigma' = \frac{E}{1+\nu} \epsilon' = \frac{200 \times 10^3}{1+0.25} \times 3.75 \times 10^{-4} = 60 \text{ MPa}$$

另外, 由式 (1) 得  $(\sigma')^2 + (\sigma'')^2 = \tau^2$  则

$$\tau = \sqrt{(\sigma')^2 + (\sigma'')^2} = \sqrt{60^2 + 80^2} = 100 \text{ MPa}$$

按扭转剪应力公式有外力偶 T 为

$$T/\tau W_t = 100 \times \frac{\pi \times 100^3}{16} = 19.63 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm} = 19.63 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

✓ [9-13] 边长为 20mm 的正立方体, 材料的  $E=200\text{GPa}$ ,  $\nu=0.3$ , 正立方体放入槽宽 20mm 的不变形刚性模子中, 均匀加压, 总压力为 40kN, 设立方体与刚模间的摩擦系数为零。试求正立方体中的应力及 y 方向的边长缩短值。

解: 立方体 z 向自由变形, 无应力, 即  $\sigma_z = 0$ , 它的

y 向受均匀压力, 其应力  $\sigma_y = \frac{-40 \times 10^3}{20 \times 20} = -100 \text{ MPa}$ 。在 xy 面内, x 向应变为零, 按式 (9-10) 或 (9-12), 有

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = 0$$

则

$$\sigma_x = \nu(\sigma_y + \sigma_z) = 0.3(-100 + 0) = -30 \text{ MPa},$$

y 向的边长缩短  $\Delta l_y$  为

$$\Delta l_y = l \epsilon_y = \frac{l}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] = \frac{20}{200 \times 10^3} [-100 - 0.3(-30 + 0)] = -9.1 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

[9-14] 已知钢梁表面上某点处  $\epsilon_x = 500 \times 10^{-6}$ ,  $\epsilon_y = -465 \times 10^{-6}$ , 材料的  $E=210\text{GPa}$ ,  $\nu=0.33$ 。试求  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$  值及该点处的体应变  $\theta$  值。

解: 由式 (9-12), 有

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)]$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

在本题中,  $\sigma_z = 0$ , 则

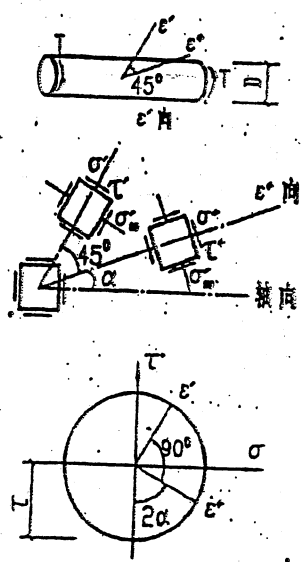


图 9-12

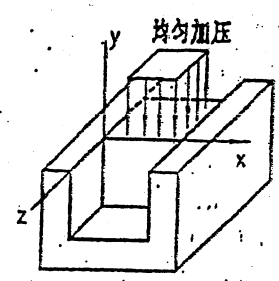


图 9-13



$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) = \frac{210 \times 10^3}{1-0.33^2} [500 \times 10^{-6} + 0.33(-465 \times 10^{-6})] = 81.7 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) = \frac{210 \times 10^3}{1-0.33^2} [-465 \times 10^{-6} + 0.33 \times 500 \times 10^{-6}] = -70.7 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{0.33}{210 \times 10^3} (81.7 - 70.7) = -17.3 \times 10^{-6}$$

由式 (9-19) 得该点处的体应变  $\theta$  为

$$\theta = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1-2 \times 0.33}{210 \times 10^3} (81.7 - 70.7 + 0) = 17.8 \times 10^{-6}$$

或

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 500 \times 10^{-6} - 465 \times 10^{-6} - 17.3 \times 10^{-6} = 17.7 \times 10^{-6}$$

两者不相等是计算误差造成的。

[9-15] 直径为 25mm 的实心钢球, 受压强为 14MPa 的静水压力, 钢球的  $E=210\text{GPa}$ ,  $\nu=0.3$ , 试问体积减少若干?

解: 按式 (9-18), 钢球的体应变为:

$$\theta = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1-2 \times 0.3}{210 \times 10^3} (-14 - 14 - 14) = -80 \times 10^{-6}$$

钢球的体积为  $V = \frac{\pi D^3}{6} = \frac{\pi}{6} \times 25^3 = 8.181 \times 10^3 \text{ mm}^3$  则钢球的体积减少为

$$\Delta V = \theta V = -80 \times 10^{-6} \times 8.181 \times 10^3 = -0.654 \text{ mm}^3$$

[9-16] 图示钢杆, 矩形截面  $20\text{mm} \times 40\text{mm}$ , 材料的  $E=200\text{GPa}$ ,  $\nu=0.3$ , 已知 A 点与杆轴成  $30^\circ$  方向的线应变  $\varepsilon_n = 270 \times 10^{-6}$ , 试求荷载  $P$  值。

解: 设杆的应力为  $\sigma = P/A$ , 由式 (9-1) 或本题应力圆 (图示), 得 mn 方向及与 mn 垂直方向的正应  $\sigma'$ 、 $\sigma''$  为

$$\sigma' = \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2} \cos[2(-30^\circ)] = \frac{3\sigma}{4}$$

$$\sigma'' = \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2} \cos[2(-30^\circ - 90^\circ)] = \frac{\sigma}{4}$$

根据胡克定律, 有

$$\varepsilon' = \frac{1}{E} (\sigma' - \nu \sigma'') = \frac{1}{E} \left( \frac{3\sigma}{4} - \nu \frac{\sigma}{4} \right) = \frac{\sigma}{4E} (3 - \nu)$$

由题给定条件, 有  $\varepsilon' = \varepsilon_n = 270 \times 10^{-6}$ , 则

$$\sigma = \frac{4E}{3-\nu} \varepsilon_n = \frac{4 \times 200 \times 10^3}{3-0.3} \times 270 \times 10^{-6} = 80 \text{ MPa}$$

因此

$$P = Ar = 20 \times 40 \times 80 = 64 \times 10^3 \text{ N} = 64 \text{ kN}$$

[9-17] 直径  $D=40\text{mm}$  的铝圆柱, 放置在壁厚为  $t=2\text{mm}$  的钢套筒内, 二者之间无间隙。圆柱受有压力  $P=40\text{kN}$ 。若铝的  $E=70\text{GPa}$ ,  $\nu=0.35$ , 钢的  $E=210\text{GPa}$ 。当不计圆柱与钢筒间的摩擦影响时, 试求钢筒内的周向应力  $\sigma_\theta$ 。

提示: 当圆柱沿径向受均匀压力  $P$  时, 柱内任一点的径向及周向应力均匀  $p$ 。

解: 设  $E_s$ 、 $E_a$  为钢、铝的弹性模量,  $p$  为钢筒与铝柱之间的压力 (图 b、d),  $D_0$  为钢筒的平均直径, 有 (图 a)

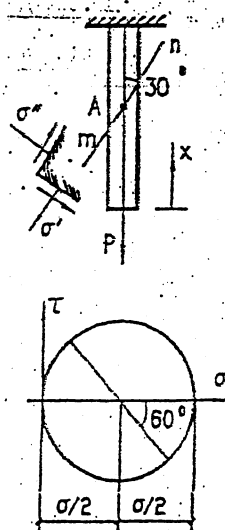


图 9-16

$$D_s = D + t = 40 + 2 = 42 \text{ mm} \quad (1)$$

铝柱的应力状态如图 c 所示, 有

$$\sigma_r = -\frac{p}{A} = -\frac{4P}{\pi D^2}$$

铝柱的径向应变  $\varepsilon_r$ , 由广义胡克定律得

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E_s} [-p - \nu(\sigma_r - p)] = \frac{1}{E_s} [p(\nu - 1) + \frac{4\nu P}{\pi D^2}]$$

铝柱的直径增加为

$$\Delta D = \varepsilon_r D = \frac{D}{E_s} [p(\nu - 1) + \frac{4\nu P}{\pi D^2}] \quad (2)$$

钢筒内的周向应力为  $\sigma_t$  时, 则单位长度筒壁内力为  $t\sigma_t$ , 取图 d 示微段, 由径向平衡条件得

$$p \cdot \frac{D+t}{2} \cdot d\theta = 2 \cdot t\sigma_t \cdot \sin \frac{d\theta}{2} \approx t\sigma_t d\theta$$

解得

$$\sigma_t = \frac{p(D+t)}{2t} = \frac{pD_s}{2t}$$

由于  $D \gg t$ , 则  $\sigma_t \gg p$ , 其筒的周向应变可略去内壁径向压力  $p$  的影响, 仅考虑  $\sigma_t$  的效应, 即

$$\varepsilon_t = \frac{\sigma_t}{E_s} = \frac{pD_s}{2tE_s} \quad (4)$$

另外, 从几何上考虑, 设筒的直径  $D_s$  增加了  $\Delta D_s$ , 则周向线应变应为

$$\varepsilon_t = \frac{\pi(D_s + \Delta D_s) - \pi D_s}{\pi D_s} = \frac{\Delta D_s}{D_s} \quad (5)$$

由式 (4)、(5), 得

$$\Delta D_s = D_s \varepsilon_t = \frac{pD_s^2}{2tE_s} \quad (6)$$

根据变形协调关系  $\Delta D = \Delta D_s$ , 代入式 (2)、(6) 后, 得

$$\frac{D}{E_s} [p(\nu - 1) + \frac{4\nu P}{\pi D^2}] = \frac{pD_s^2}{2tE_s}$$

求解后, 有

$$p = \frac{4\nu P}{\left( \frac{D_s^2 E_s}{2DtE_s} - \nu + 1 \right) \pi D^2} = \frac{4 \times 0.35 \times 40 \times 10^3}{\left( \frac{42^2 \times 70 \times 10^3}{2 \times 40 \times 2 \times 210 \times 10^3} - 0.35 + 1 \right) \pi \times 40^2} = 2.58 \text{ MPa}$$

代  $p$  值入 (3) 式, 得钢筒内的周向应力  $\sigma_t$  为

$$\sigma_t = \frac{pD_s}{2t} = \frac{2.58 \times 42}{2 \times 2} = 27.1 \text{ MPa}$$

[9-18] 在图示 128a 工字钢梁的中性层上某点 C 处, 沿与轴线成  $45^\circ$  方向粘有电阻应变计, 测得线应变  $\varepsilon = -2.6 \times 10^{-5}$ , 试求梁上的荷载  $P$ 。已知钢的  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.3$ 。

解: 在图示情形, C 点处于纯剪应力状态, 通过 C 点梁的剪力  $V = \frac{2P}{3}$ , 其剪应力为

$$\tau = \frac{S_z V}{bI_z}, \text{ 由附录三查得 128a}$$

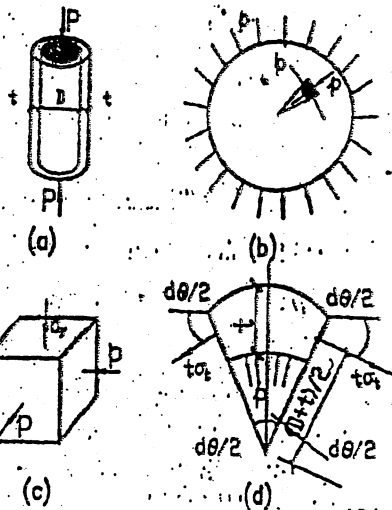


图 9-17

工字钢的  $b=8.5\text{mm}$ ,  $I_z=246\text{mm}^4$ , 则

$$\tau = \frac{2P}{3 \times 8.5 \times 246} = \frac{P}{3136.5} \text{ MPa}$$

由 C 点的应力圆(图示)知  $45^\circ$  方向为主应力  $\sigma_3 = -\tau$ , 另一主应力为  $\sigma_1 = \tau$ . 根据胡克定律, 有

$$\begin{aligned} \epsilon_3 &= \frac{1}{E}(\sigma_3 - \nu\sigma_1) = \frac{1}{E}(-\tau - \nu\tau) = -\frac{(1+\nu)\tau}{E} \\ &= -\frac{(1+\nu)P}{3136.5E} \end{aligned}$$

解得(按题给条件  $\epsilon_3 = -2.6 \times 10^{-5}$ )

$$P = -\frac{3136.5E\epsilon_3}{1+\nu} = -\frac{3136.5 \times 200 \times 10^3 \times (-2.6 \times 10^{-5})}{1+0.3} = 12546 \text{ N} = 12.5 \text{ kN}$$

[9-19] 作梁的弯曲实验时, 在 I18 工字钢梁腹板的 A 点处, 贴三片与梁轴成  $0^\circ$ 、 $45^\circ$  及  $90^\circ$  的电阻应变计(即三轴  $45^\circ$  应变花), 如图所示. 已知钢的  $E=210\text{GPa}$ ,  $\nu=0.28$ . 试问当荷载增量  $\Delta P=15\text{kN}$  时, 每一电阻应变计的读数(线应变)增量应为若干?

解: 由附录三查得 I18 工字钢的几何特性,  $h=180\text{mm}$ ,  $b=94\text{mm}$ ,  $d=6.5\text{mm}$ ,  $I_z=1660 \times 10^4 \text{ mm}^4$ ,  $I_z=10.7\text{mm}$ . 则可算得 A 点以下部分截面对中性轴静矩为:

$$\begin{aligned} S_A &= 94 \times 10.7 \times \left(90 - \frac{10.7}{2}\right) + \\ &+ \left(\frac{180}{4} - 10.7\right) \times 6.5 \times \\ &\times \left(\frac{180}{2} - \frac{10.7}{2} + \frac{180}{4}\right) = 99 \times 10 \text{ mm}^3 \end{aligned}$$

当  $\Delta P=15\text{kN}$  时, A 截面上的内力为:

$$\Delta M = \frac{\Delta P}{2} \times 0.25 = 7.5 \times 0.25 = 1.875 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\Delta F = -\frac{\Delta P}{2} = -7.5 \text{ kN}$$

则 A 点处的应力增量  $\sigma_A$  及  $\tau_A$  为

$$\sigma_A = \frac{My}{I_z} = \frac{1.875 \times 10^6 \times 180}{1660 \times 10^4} = 5.08 \text{ MPa}$$

$$\tau_A = \frac{FS_z}{bI_z} = \frac{-7.5 \times 10^3 \times 99 \times 10^3}{6.5 \times 1660 \times 10^4} = -6.88 \text{ MPa}$$

A 点的应力状态如图所示, 按式 (9-1) 得图中  $\sigma_{45}$  及  $\sigma_{-45}$  为

$$\sigma_{45} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha = \frac{5.08}{2} + \frac{5.08}{2} \cos 90^\circ + 6.88 \sin 90^\circ = 9.22 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{-45} = \frac{5.08}{2} + \frac{5.08}{2} \cos(-90^\circ) - (-6.88) \sin(-90^\circ) = -4.24 \text{ MPa}$$

由胡克定律, 得  $0^\circ$ 、 $45^\circ$  及  $90^\circ$  电阻应变计读数增量应为

$$\epsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E} = \frac{5.08}{210 \times 10^3} = 2.42 \times 10^{-5}$$

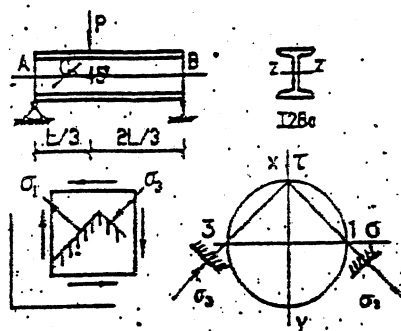


图 9-18

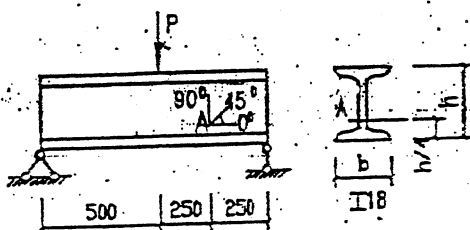


图 9-19

$$\varepsilon_{45} = \frac{1}{E}(\sigma_{45} - \nu\sigma_{45}) = \frac{1}{210 \times 10^3} (9.42 + 0.28 \times 4.34) = 5.06 \times 10^{-5}$$

$$\varepsilon_{90} = \frac{1}{E}(-\nu\sigma_{45}) = -\frac{0.28 \times 5.08}{210 \times 10^3} = -0.677 \times 10^{-5}$$

[9-20] 已知某点处的  $\varepsilon_x = 5 \times 10^{-4}$ ,  $\varepsilon_y = 3 \times 10^{-4}$ ,  $\gamma_{xy} = 10.5 \times 10^{-4}$ 。试用解析法求  $x$ 、 $y$  面内的主应变  $\varepsilon_1$ 、 $\varepsilon_2$  及它们的方向。

解: 由式 (9-28) 得

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1,2} &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} \\ &= \frac{5 \times 10^{-4} + 3 \times 10^{-4}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(5 \times 10^{-4} - 3 \times 10^{-4})^2 + (10.5 \times 10^{-4})^2} = \frac{9.34 \times 10^{-4}}{2} \pm \frac{1.34 \times 10^{-4}}{2} \end{aligned}$$

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \frac{10.5 \times 10^{-4}}{5 \times 10^{-4} - 3 \times 10^{-4}} = \frac{10.5}{2} = 5.25$$

因为  $\sin 2\alpha_0$ 、 $\cos 2\alpha_0$  及  $\tan 2\alpha_0$  均为正, 则  $2\alpha_0$  位于第一象限, 有  $2\alpha_0 = 79.2^\circ$ ,  $\alpha_0 = 39.6^\circ$ , 即主应变  $\varepsilon_1$  与  $x$  轴成  $39.6^\circ$  ( $^\circ$ )。

[9-21] 试用图解法求解题 9-20。

解:

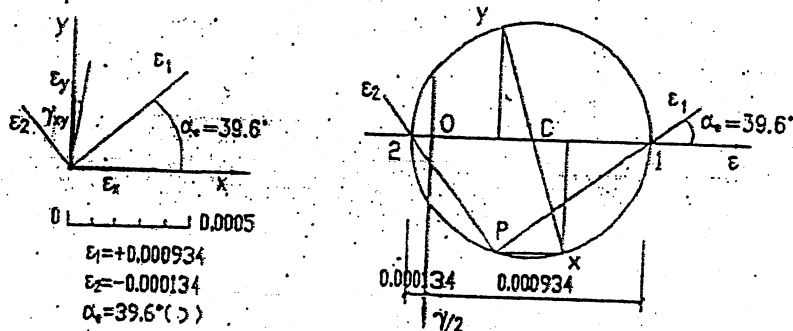
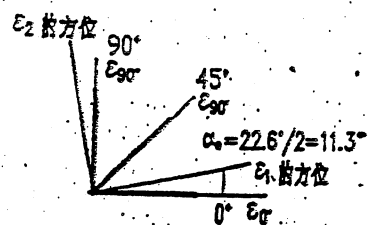


图 9-21

以  $(5 \times 10^{-4}, 10.5 \times 10^{-4}/2)$ 、 $(3 \times 10^{-4}, -10.5 \times 10^{-4}/2)$  为坐标确定  $x$ 、 $y$  两点, 联结  $xy$  交  $\varepsilon$  轴于  $C$  点, 以  $C$  为圆心, 以  $Cy$  或  $Cx$  为半径, 绘出应变圆。应变圆与  $\varepsilon$  轴交点 1、2 的横坐标即为  $\varepsilon_1$ 、 $\varepsilon_2$ 。过  $x$  点引  $xP$  平行于  $\varepsilon$  轴交应变圆于  $P$  点, 以  $P$  点为极点, 引射线  $P1$ 、 $P2$  分别表示  $\varepsilon_1$ 、 $\varepsilon_2$  的方向。

[9-22] 用三轴  $45^\circ$  应变花测得构件表面上一点处三个方向的应变分别为  $\varepsilon_0 = 700 \times 10^{-6}$ ,  $\varepsilon_{45} = 350 \times 10^{-6}$ ,  $\varepsilon_{90} = -500 \times 10^{-6}$ 。试用图解法求该点处的主应变及其方向。

解: 在选定  $\gamma/2$  轴后, 按选用的比例尺按  $\varepsilon_0$ 、 $\varepsilon_{45}$ 、 $\varepsilon_{90}$  值引三条与  $\gamma/2$  轴平行的直线  $L_0$ 、 $L_{45}$ 、 $L_{90}$ 。在  $L_{45}$  线上任选一点  $b'$ , 过  $b'$  点按  $45^\circ \rightarrow 0^\circ$ 、 $45^\circ \rightarrow 90^\circ$  的转向引直线  $b'a'$ 、 $b'c'$  交  $L_0$ 、 $L_{90}$  于  $a$ 、 $c$ 。作  $b'a'$  及  $b'c'$  的中垂线相交于  $C$ 。过  $C$  点作  $\varepsilon$  轴, 以  $Ca$  或  $Cb'$  或  $Cc$  为半径, 以  $C$  为圆心绘应变圆。应变圆与  $L_{45}$  相交于  $b$ , 与  $\varepsilon$  轴交于 1、2 点。则  $a$ 、 $b$ 、 $c$  三点为与  $0^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $90^\circ$  方向的应变对应。1、2 点的横坐标即为  $\varepsilon_1$ 、 $\varepsilon_2$ 。从  $a$  点至 1 点的圆周角, 即为  $\varepsilon_1$  方向与  $0^\circ$  方向间的夹角, 夹角的转向按  $a$  点  $\rightarrow$  1 点的方向。



0 ————— 0.0005

$$\varepsilon_1 = +0.00075$$

$$\varepsilon_2 = -0.00055$$

$$\alpha_0 = 11.3^\circ (>)$$

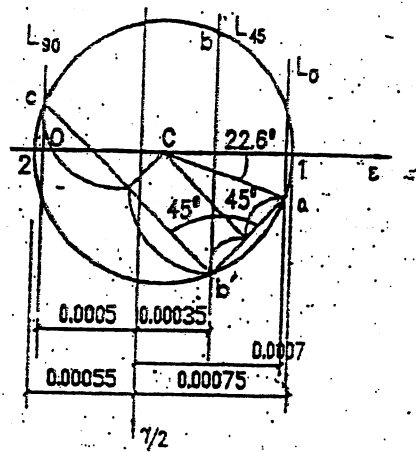


图 9-22 画

## 第十章 强度理论

[10-1] 将沸水倒入厚玻璃杯里，玻璃杯内外壁的受力情况如何？若因此而发生破裂，问破坏是从内壁开始，还是从外壁开始，为什么？

解：因为玻璃是脆性材料，其抗拉强度低于抗压强度，厚玻璃杯内倒入沸水后，内壁温度  $T_{内}$  大于外壁温度  $T_{外}$ ，因而内壁的膨胀受到外壁的约束，故内壁受压；内壁膨胀又迫使外壁伸长，因而外壁受拉。所以若发生破裂，必从外壁开始。

[10-2] 图示两端封闭的铸铁薄壁圆筒，其内径  $D=100\text{mm}$ ，壁厚  $t=10\text{mm}$ ，承受内压力  $p=5\text{MPa}$ ，且在两端受轴向压力  $P=100\text{kN}$  的作用。材料的容许拉伸应力  $[\sigma_t]=40\text{MPa}$ ，横向变形系数  $\nu=0.25$ ，试用第二强度理论校核其强度。

解：圆筒径向截面上的正应力

$$\sigma_r = \frac{pD}{2t} = \frac{5 \times 10^6 \times 100 \times 10^{-3}}{2 \times 10 \times 10^{-3}} = 25\text{MPa}$$

圆筒横截面上的正应力

$$\begin{aligned} \sigma_z &= -\frac{P}{A} + \frac{pD}{4t} = \frac{-100 \times 10^3}{\pi \times 100 \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{-3}} + \\ &+ \frac{5 \times 10^6 \times 100 \times 10^{-3}}{4 \times 10 \times 10^{-3}} = -31.8 + 12.5 = -19.3\text{MPa} \end{aligned}$$

可见， $\sigma_1 = \sigma_r = 25\text{MPa}$ ， $\sigma_2 \approx -5\text{MPa}$ ， $\sigma_3 = -19.3\text{MPa}$ 。

根据第二强度理论

$$\sigma_{\text{Fe}} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) = 25 - 0.25(-5 - 19.3) = 31.1\text{MPa}$$

因  $\sigma_{\text{Fe}} < [\sigma_t]$  故满足强度条件。

[10-3] 图示简支工字型截面梁，由钢板焊接而成。已知： $P=500\text{kN}$  求：(1) 在危险截面上位于翼缘与腹板的交界处  $a$ 、 $b$  两点的主应力值，并指出它们的作用面的方位；(2) 根据第三、第四强度理论，求出相当应力值。

解：(1) 内力：由内力图知

$$V_{\text{max}} = \frac{P}{2} = 250\text{kN}$$

$$M_{\text{max}} = \frac{Pl}{4} = 500\text{kNm}$$

(2) 应力：惯性矩

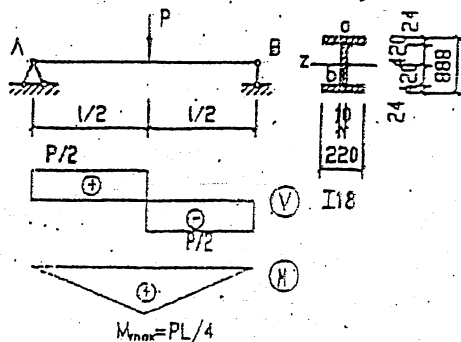


图 10-3

$$I_z = \frac{bh^3}{12} + Aa^2 \times 2 + \frac{b'h'^3}{12} \times 2$$

$$= \frac{1 \times 840^3}{12} + 2 \left[ 220 \times 24 \times \left( 420 + \frac{24}{2} \right) \right] +$$

$$+ \frac{2}{12} \times 220 \times 24^3 = 248 \times 10^{-5} \text{ m}^4$$

$e$  点:  $y_e = 420 \text{ mm}$

$$S_{z0} = Ay_e = 220 \times 24 \times \left( 420 + \frac{24}{2} \right) = 2281 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$\sigma_a = \frac{My_e}{I_z} = \frac{500 \times 10^3 \times 0.42}{248 \times 10^{-5}} = -86 \text{ MPa}$$

$$\tau_a = \frac{FS_z}{bl_z} = \frac{250 \times 10^3 \times 2281 \times 10^{-6}}{1 \times 10^{-2} \times 248 \times 10^{-5}} = 23 \text{ MPa}$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{\sigma}{2} \right)^2 + \tau^2} = \left[ -\frac{86}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{86}{2} \right)^2 + 23^2} \right] = \begin{cases} 5.8 \\ -91.8 \end{cases} \text{ MPa}$$

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_a}{\sigma_a} = -\frac{2 \times 23 \times 10^6}{-86 \times 10^6} = 0.535, \quad \alpha_0 = 14^\circ 18'$$

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_2 = 5.8 - (-91.8) = 97.6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} = \sqrt{5.8^2 + (-91.8)^2 - 5.8 \times (-91.8)} = 94.8 \text{ MPa}$$

因  $B$  点与  $a$  点对称, 有

$$\sigma_b = 86 \text{ MPa}; \quad \tau_b = 23 \text{ MPa}; \quad \sigma_1 = 91.8 \text{ MPa}; \quad \sigma_2 = -5.8 \text{ MPa};$$

$$\tan 2\alpha_0 = -0.535, \quad \alpha_0 = -14^\circ 18', \quad \sigma_{r3} = 97.6 \text{ MPa}, \quad \sigma_{r4} = 94.8 \text{ MPa}$$

[10-4] 图示紧螺旋联结, 当拧动螺帽时, 螺杆受到拉力  $P$  以及为了克服摩擦而产生的摩擦扭矩  $M_f$  的共同作用。根据研究, 由扭矩引起的最大剪应力  $\tau$  为由拉力  $P$  所引起的正应力  $\sigma$  的一半。已知: 拉力  $P=10 \text{ kN}$ , 螺杆直径  $D=20 \text{ mm}$ , 容许应力  $[\sigma]=50 \text{ MPa}$ ; 试按第三强度理论校核强度 (不考虑钢板的滑移)。

解: (1) 由拉力  $P$  引起的应力:

$$\sigma_r = \frac{P}{A} = \frac{10 \times 10^3 \times 4}{\pi \times 2^2 \times 10^{-4}} = 31.8 \text{ MPa}$$

(2) 由扭转  $M_f$  引起的应力:

$$\tau = \frac{\sigma_r}{2} = \frac{31.8}{2} = 15.9 \text{ MPa}$$

(3) 主应力:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{\sigma}{2} \right)^2 + \tau^2}$$

(4) 按第三强度理论的相当应力:

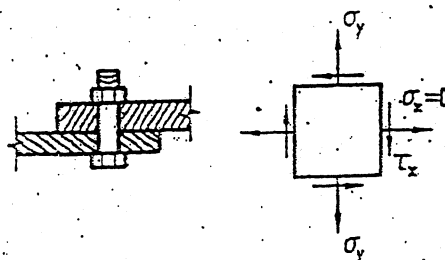


图 10-4

$$\sigma_{1,3} = \sigma_1 - \sigma_3 = 2 \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = 2 \sqrt{15.9^2 + 15.9^2} = 44.9 \text{ MPa} < [\sigma]$$

∴ 螺栓强度足够。

[10-5] 图示简支钢板梁受荷载如图所示。已知钢材容许应力为  $[\sigma] = 170 \text{ MPa}$ ,  $[\tau] = 100 \text{ MPa}$ 。试校核梁内的最大正应力和最大剪应力，并按第四强度理论对截面上的  $\alpha$  点作强度校核。

注：通常在计算  $\alpha$  点的应力时近似地按  $\alpha$  点的位置计算。

解：(1) 作内力图，可得

$$F_{\max} = 660 \text{ kN}; M_{\max} = 820 \text{ kNm}$$

$$(2) I_z = \frac{240}{12} \times 840^3 \times 10^{-12} - 2 \times \frac{15}{12} \times 800^3 \times 10^{-12} = 2.04 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$S_{z\max} = 240 \times 20 \times 410 \times 10^{-9} + 10 \times 400 \times 200 \times 10^{-9} = 2.77 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$S_{\alpha} = 240 \times 20 \times 4 \times 10^{-9} = 1.97 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

(3) 梁内最大正应力发生在跨中截面的

上、下边缘

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} \cdot V_{\max}}{I_z} = \frac{870 \times 10^3 \times 420 \times 10^{-3}}{2.04 \times 10^{-3}} = 169 \text{ MPa}$$

(4) 梁内最大剪应力发生在支承截面的中性轴处

$$\tau_{\max} = \frac{F_{\max} S_{z\max}}{b I_z} = \frac{710 \times 10^3 \times 2.77 \times 10^{-3}}{10 \times 10^{-3} \times 2.04 \times 10^{-3}} = 90 \text{ MPa} < [\tau]$$

(5) 在集中荷载作用处偏外横截面上校核  $\alpha$  点的强度

$$M_c = M_D = 640 \text{ kNm}, F_{c\pm} = F_{D\pm} = 620 \text{ kN}$$

$$\sigma_c^{\alpha} = \frac{640 \times 10^3 \times 400 \times 10^{-3}}{2.04 \times 10^{-3}} = 125 \text{ MPa}$$

$$\tau_c^{\alpha} = \frac{62 \times 10^3 \times 1.97 \times 10^{-3}}{10 \times 10^{-3} \times 2.04 \times 10^{-3}} = 60 \text{ MPa}$$

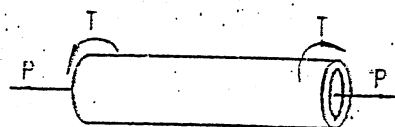
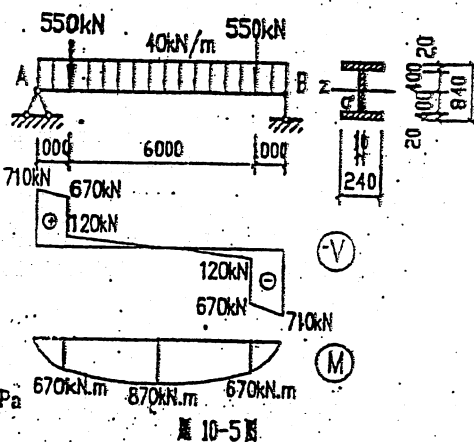
$$\sigma_{1,3} = \sqrt{\sigma_c^2 + 3\tau_c^2} = \sqrt{125^2 + 3 \times 60^2} = 163 \text{ MPa} < [\sigma]$$

[10-6] 图示空心圆轴同时承受拉力和扭矩作用，拉力  $P = 100 \text{ kN}$ ，扭矩  $M_t = 10 \text{ kNm}$ ，轴的外径  $D = 100 \text{ mm}$ ，内径  $d = 80 \text{ mm}$ ，钢材的容许应力  $[\sigma] = 180 \text{ MPa}$ ，试校核强度（按第三和第四强度理论分别校核。）

解：拉应力

$$\sigma_1 = \frac{P}{A} = \frac{P}{\pi(D^2 - d^2)} = \frac{100 \times 10^3 \times 4}{\pi(100^2 - 80^2)} = 35.6 \text{ MPa}$$

扭矩引起的剪应力





$$\tau = \frac{M_t}{W_t} = \frac{10000}{\frac{\pi}{16} D^3 (1-a^4)} = 86.3 \text{ MPa}$$

强度校核:

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{35.6^2 + 4 \times 86.26^2} = 176 \text{ MPa} < [\sigma]$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{35.6^2 + 3 \times 86.26^2} = 154 \text{ MPa} < [\sigma]$$

故强度足够。

【10-7】 单拐曲轴之结构尺寸和荷载如图, 各段轴的直径为  $d=30\text{mm}$ , 若容许应力  $[\sigma]=120\text{MPa}$ , 试用第三强度理论校核其强度。其中  $M_t=30\text{Nm}$ ,  $P=200\text{N}$ 。

解: 作弯矩图和扭矩图。

从图中可见危险截面在 D 处。

(1) 由弯矩引起的正应力

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z}$$

(2) 由扭矩引起的剪应力

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t}$$

(3) 由第三强度理论强度满足要求。

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{M_{\max}}{W_z}\right)^2 + 4\left(\frac{M_{t\max}}{W_t}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{300^2 \times 32}{\pi \times 30^3}\right)^2 + 4\left(\frac{300 \times 16}{\pi \times 30^3}\right)^2}$$

$$= 15.7 \text{ MPa} < [\sigma]$$

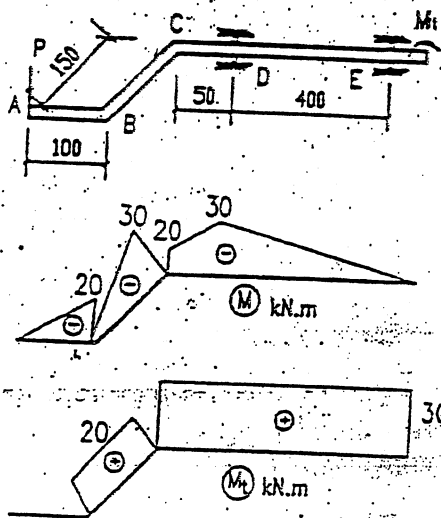


图 10-7

【10-8】 内径  $D=60\text{mm}$ , 壁厚  $t=1.5\text{mm}$ , 两端封闭的薄壁圆筒, 用来作内压力和扭转的联合试验。要求内压引起的最大正应力值等于外扭矩所引起的横截面剪应力值的两倍。当内压  $p=10\text{MPa}$  时筒壁的材料出现屈服现象。求此时筒壁中的最大剪应力及形状改变比能值。已知材料的  $E=2.1 \times 10^5 \text{ MPa}$ ,  $\nu=0.3$ 。

解: 内压力  $p$  引起的径向截面上的正应力  $\sigma_r = pD_0/2t$ , 引起横截面上的正应力

$$\sigma_x = pD_0/4t, \sigma_r = 10 \times 60 / (2 \times 1.5) = 200 \text{ MPa}, \sigma_z = 100 \text{ MPa}, \text{按题意, } \tau_x = \frac{\sigma_1}{2} = 100 \text{ MPa}$$

这样, 主应力

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + 4\tau_x^2} = \frac{100 + 200}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{100 - 200}{2}\right)^2 + 100^2} =$$

$$= 150 \pm 111.8 = \begin{matrix} +262 \\ +38.2 \end{matrix} \text{ MPa}$$

$\sigma_3 = p = -10 \text{ MPa}$ , 于是

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{261.8 - (-10)}{2} = 135.9 \approx 136 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{261.8 - (-10)}{2} = 135.9 \approx 136 \text{ MPa}$$

$$\begin{aligned} u_d &= \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \\ &= \frac{1+0.3}{6 \times 2.1 \times 10^{11}} [(261.8 - 38.2)^2 + (38.2 - (-10))^2 + (-10 - 261.8)^2] \times (10^6)^2 \\ &= 130 \times 10^3 \frac{\text{Nm}}{\text{m}^3} = 130 \text{ kNm/m}^3 \end{aligned}$$

[10-9] 试按强度理论建立纯剪切应力状态的强度条件, 并寻求塑性材料容许剪应力 $[\tau]$ 与容许拉应力 $[\sigma]$ 之间的关系。

解: 在纯剪应力状态中:

$$\sigma_x = 0, \sigma_y = 0, \sigma_z = 0, \tau_x = -\tau_y$$

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \tau_x, \quad \sigma_2 = 0 \\ \sigma_3 &= -\tau_x \end{aligned}$$

由第三强度理论:

为确定材料的容许剪应力, 令 $\tau_x = [\tau]$ , 则 $2[\tau] \leq [\sigma]$

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = \tau_x - (-\tau_x) = 2\tau_x \leq [\sigma]$$

故容许应力为:  $[\tau] = 0.5[\sigma]$

由形状改变比能理论:

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3} = \sqrt{\tau_x^2 + 0 + \tau_x^2 + 0 + 2\tau_x^2} = \sqrt{3}\tau_x < [\sigma]$$

同理 先令 $[\tau] = \tau$ ,

即可得容许剪应力:

$$[\tau] = \frac{1}{\sqrt{3}}[\sigma]$$

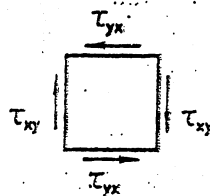


图 10-9

## 第十一章 组合变形

[11-1] 图示简支梁由 20a 号槽钢制成, 集中力  $P$  作用线通过截面弯心  $A$  点, 材料的  $[\sigma] = 160 \text{ MPa}$ , 试校核梁的正应力。

解: 力  $P$  沿截面形心主轴  $y$  轴和  $z$  轴的分量

$$P_z = P \sin 20^\circ = 10 \times \sin 20^\circ = 3.42 \text{ kN}$$

$$P_y = P \cos 20^\circ = 10 \times \cos 20^\circ = 9.40 \text{ kN}$$

在跨中央截面处弯矩最大为

$$M_z \max = \frac{1}{4} P_y l = \frac{1}{4} \times 9.40 \times 4.0 = 9.40 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_y \max = \frac{1}{4} P_z l = \frac{1}{4} \times 3.42 \times 4.0 = 3.42 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

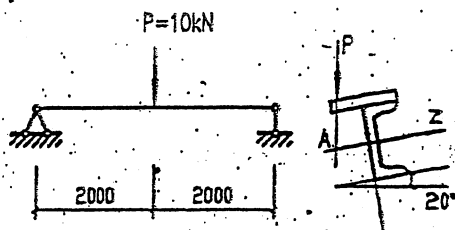
查型钢表,  $W_z = 1.78 \times 10^5 \text{ mm}^3$

$$W_{y \max} = 0.638 \times 10^5 \text{ mm}^3, \quad W_{y \min} = 0.242 \times 10^5 \text{ mm}^3$$

在槽钢截面的上翼右上角处有最大应力, 即

$$\sigma_{\max} = |\sigma| = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_{y \min}} = \frac{9.40 \times 10^6}{1.78 \times 10^5} + \frac{3.42 \times 10^6}{0.242 \times 10^5} = 194.1 \text{ MPa}$$

因为  $\sigma_{\max} > [\sigma]$ , 所以不满足强度条件。



题 11-1 图

[11-2] 图示悬臂木梁, 在自由端受集中力  $P = 2 \text{ kN}$ ,  $P$  与  $y$  轴夹角  $\varphi = 22^\circ$ , 木材的  $[\sigma] = 10 \text{ MPa}$ ,  $E = 9 \text{ GPa}$ , 若矩形截面  $h/b = 2$ , 试确定截面尺寸, 并计算最大挠度值。

解: 力  $P$  沿端面形心主轴方向的分量

$$P_y = P \cos \varphi = 2 \times \cos 22^\circ = 1.854 \text{ kN}$$

$$P_z = P \sin \varphi = 2 \times \sin 22^\circ = 0.749 \text{ kN}$$

危险截面在左端邻近约束处, 该面上

$$M_z \max = P_y l, \quad M_y \max = P_z l,$$

$$\text{且, } W_z = 2W_y = \frac{4}{6} b^3, \quad \text{最大正应力}$$

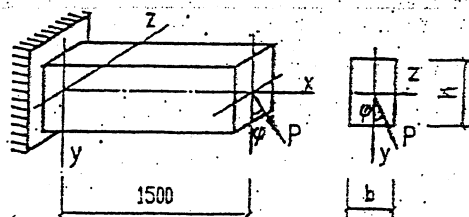
$$\sigma_{\max} = \frac{M_z \max}{W_z} + \frac{M_y \max}{W_y} = (P_y + 2P_z) \frac{3l}{2b^3}$$

由  $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$  得

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{(P_y + 2P_z) 3l}{2[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{(1.854 + 2 \times 0.749) \times 10^3 \times \frac{3 \times 1500}{2 \times 10}}{2 \times 10}} = 91.03 \text{ mm}$$

选用  $b = 92 \text{ mm}$ ,  $h = 184 \text{ mm}$

相应, 最大挠度将发生在右端面处



题 11-2 图

$$\delta = \sqrt{\left( \frac{P_y l^3}{3EI_z} \right)^2 + \left( \frac{P_z l^3}{3EI_y} \right)^2} = \sqrt{\left( \frac{1.854 \times 1500^3 \times 10^3}{3 \times 9 \times 10^3 \times \frac{92 \times 184^3}{12}} \right)^2 + \left( \frac{0.749 \times 10^3 \times 1500^3}{3 \times 9 \times 10^3 \times \frac{184 \times 92^3}{12}} \right)^2} = 9.22 \text{ mm}$$

[11-3] 32a 号工字钢制成的简支梁如图示受集中力  $P$  作用, 当  $P$  力沿  $y$  方向时如图  $b$ , 截面上最大正应力达到材料的  $[\sigma] = 170 \text{ MPa}$  的 40%, 但若力  $P$  如图  $c$  通过形心, 而与  $y$  轴

成夹角  $\varphi = 10^\circ$ ，这根梁的强度是否符合要求。

解：(1) 确定集中力  $P$

在图 a 和 b 中， $M_{\max} = pl/4$ ，相应

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{pl}{4W_z} = 0.4[\sigma]$$

得  $\frac{Pl}{4W_z} = 0.4[\sigma]$

即  $P = \frac{4W_z}{l} \times 0.4[\sigma] = \frac{1.6}{l} W_z [\sigma]$

由型钢表查得  $W_z = 6.925 \times 10^5 \text{ mm}^3$ ，代入上式

$$P = \frac{1.6}{4000} \times 6.925 \times 10^5 \times 170 \times 10^{-3} = 47.09 \text{ kN}$$

(2) 在  $P$  如图 c 作用时，校核梁的强度

在跨中央截面， $M_{z\max} = \frac{Pl \cos \varphi}{4}$ ，

$M_{y\max} = \frac{Pl \sin \varphi}{4}$ 。梁截面的  $W_y = 0.706 \times 10^5 \text{ mm}^3$ ，

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{z\max}}{W_z} + \frac{M_{y\max}}{W_y} = \frac{Pl \cos \varphi}{4W_z} + \frac{Pl \sin \varphi}{4W_y} = \frac{47.09 \times 4 \times \cos 10^\circ \times 10^6}{4 \times 6.925 \times 10^5} + \frac{47.09 \times 4 \times \sin 10^\circ \times 10^6}{4 \times 0.706 \times 10^5}$$

$$= 66.97 + 115.82 = 182.8 \text{ MPa} > [\sigma]$$

∴ 梁的强度不符合要求。

[11-4] 图示悬臂梁自由端受集中力  $P$ ， $P$  力作用线过角型截面的竖边中线，若采用  $\angle 100 \times 100 \times 10$  角钢，材料的  $[\sigma] = 160 \text{ MPa}$ 。试按强度确定所能承受的最大  $P$  值，并计算该梁的最大挠度（材料的  $E = 210 \text{ GPa}$ ）。

解：(1) 查表得几何数据

$I_{y0} = 2.8468 \times 10^6 \text{ mm}^4$ ， $W_{y0} = 4.026 \times 10^4 \text{ mm}^3$ ；

$I_{z0} = 0.7435 \times 10^6 \text{ mm}^4$ ，形心距肢外边  $z_0 = 28.4 \text{ mm}$

可算得角点  $b$  的  $y_b = 40.16 \text{ mm}$ ，肢端角点  $c$  和  $a$  的

$r_c = 30.55 \text{ mm}$ ，相应  $W_{z0b} = 1.854 \times 10^4 \text{ mm}^3$ ，

$W_{z0c} = 2.434 \times 10^4 \text{ mm}^3$

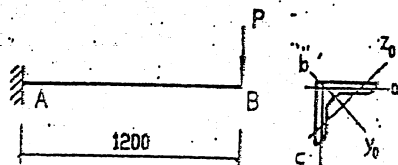


图 11-4 图

(2) 确定  $[P]$  在  $A$  截面上的角点  $C$  处，有

$$\sigma_{\max} = |\sigma_c| = \frac{P_{y0} l}{W_{z0c}} + \frac{P_{z0} l}{W_{y0}} \leq [\sigma], \quad \text{式中, } P_{y0} = P_{z0} = 0.707P, \text{ 代入数据有}$$

$$P \leq \frac{[\sigma]}{0.707l \left( \frac{1}{W_{z0c}} + \frac{1}{W_{y0}} \right)} = \frac{160}{0.707 \times 1200 \times \left( \frac{1}{2.434 \times 10^4} + \frac{1}{4.026 \times 10^4} \right)} \times 10^{-3}, \quad \text{得 } [P] = 2.86 \text{ kN}$$

(3) 计算  $\delta_{\max}$

$$\delta_{\max} = \frac{0.707 Pl^3}{3EI_{y0}} = \frac{0.707 \times 2.861 \times 1.2^3 \times 10^{12}}{3 \times 210 \times 10^3 \times 0.7435 \times 10^6} = 7.462 \text{ mm}$$

$$W_{\max} = \frac{0.707 Pl^3}{3EI_{z0}} = \frac{0.707 \times 2.861 \times 1.2^3 \times 10^{12}}{3 \times 210 \times 10^3 \times 2.8468 \times 10^6} = 1.949 \text{ mm}$$

$$\therefore \delta = \sqrt{V_{\max}^2 + W_{\max}^2} = 7.71 \text{ mm}$$

[11-5] 图示曲拐受铅垂荷载  $P$  作用。若  $P=20 \text{ kN}$ ，材料的  $[\sigma]=160 \text{ MPa}$ ，试按第四强度理论确定轴  $AB$  的直径  $d$ 。

解：(1)  $AB$  杆的内力。危险截面  $A$  上

$$M_A = M_{\max} = 20 \times 0.2 = 4 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_A = 20 \times 0.15 = 3 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

(2) 按第四强度理论选定  $d$ ，由

$$\sigma_{r3} = \frac{M_{r3}}{W} = \frac{1}{W} \sqrt{M_A^2 + 0.75 M_A^2} \leq [\sigma]$$

$$\text{得 } d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \sqrt{M_A^2 + 0.75 M_A^2}}{\pi [\sigma]}}$$

$$\text{即 } d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \times \sqrt{4^2 + 0.75 \times 3^2} \times 10^6}{\pi \times 160}} = 67.21 \text{ mm}$$

选  $d = 67.2 \text{ mm}$

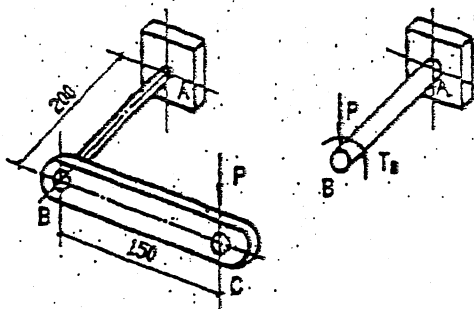


图 11-5

[11-6] 某工地设置的道路标志板，受到水平风载  $q=0.8 \text{ kN/m}^2$  作用。该板安装在空心钢管立柱上，钢管上的内外直径比  $d/D=0.8$ ，材料的  $[\sigma]=80 \text{ MPa}$ ，试按第三强度理论选定钢管截面尺寸。

解：风载合力  $p=q \times 0.8^2 = 0.512 \text{ kN}$ 。

立柱各截面扭矩和底部截面弯矩为

$$M_1 = p \times 0.4 = 0.2048 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_2 = M_{\max} = p \times (3 - 0.4) = 1.331 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

(2) 按第三强度理论选取  $d$  和  $D$ 。

$$\sigma_{r3} = \frac{M_{r3}}{W} = \frac{1}{W} \sqrt{M_2^2 + M_1^2} \leq [\sigma]$$

$$\text{即 } \frac{32}{\pi D^3 (1 - \alpha^4)} \sqrt{M_2^2 + M_1^2} \leq [\sigma]$$

$$\text{得 } D \geq \sqrt[3]{\frac{32 \sqrt{M_2^2 + M_1^2}}{\pi (1 - \alpha^4) [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \times \sqrt{1.331^2 + 0.2048^2} \times 10^6}{\pi (1 - 0.8^4) \times 80}} = 66.23 \text{ mm}$$

选  $D = 66 \text{ mm}$ ， $d = 52.8 \text{ mm}$ ，取  $d = 53 \text{ mm}$ 。

(注：选  $D = 66 \text{ mm}$ ， $d = 53 \text{ mm}$  时， $\sigma_{r3} = 81.7 \text{ MPa}$ ，超过  $[\sigma]$  为 2.1% 故允许)

[11-7] 实心圆轴直径  $d=60 \text{ mm}$ ，其受力情况如图所示。设材料  $[\sigma]=100 \text{ MPa}$ ，试按第三强度理论校核圆轴的强度。

解：(1) 计算简图与内力分析

轴的计算简图如图 a， $T_C = T_D = 5 \times 0.2 = 1.0 \text{ kN}$ 。

在  $xy$  面内

$$M_{z,D} = P_D \cdot l_1 = 3.64 \times 0.1 = 0.364 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{z,C} = \frac{P_C l_1}{4} - \frac{1}{2} M_{z,D} = \frac{1}{4} \times 5 \times 0.6 - \frac{1}{2} \times 0.364 = 0.568 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

在  $yz$  面内，

$$M_{y,C} = -P_D \cdot l_1 = -10 \times 0.1 = -1.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

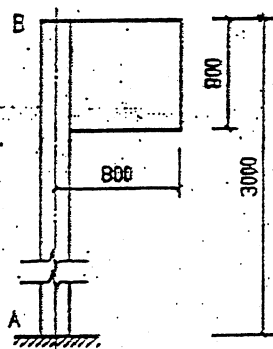


图 11-6

$$M_{yC} = \frac{1}{4}P_{C2}l + \frac{1}{2}M_{yD} = \frac{1}{4} \times 1.82 \times 0.6 - \frac{1}{2} \times 1.0 = -0.227 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

相应  $M_z$ ,  $M_y$  如图 b、c, 在轴段 CD, 扭矩  $M_x$  为常量 (不另图示), 等于  $1.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 。

(2) 危险点的应力。

比较截面 C 与 B 处的内力, 由合弯矩

$$M_C = \sqrt{M_{zC}^2 + M_{yC}^2} = \sqrt{0.568^2 + 0.227^2} = 0.612$$

$$M_B = \sqrt{M_{zB}^2 + M_{yB}^2} = \sqrt{0.364^2 + 1.0^2} = 1.064 > M_C$$

可知, 截面 B 为危险截面, 该面上危险点有

$$\begin{aligned} \sigma_{r3} &= \frac{M_{B3}}{W} = \frac{32}{\pi d^3} \sqrt{M_{zB}^2 + M_{yB}^2} \\ &= \frac{32}{\pi \times 60^3} \times \sqrt{1.064^2 + 1.0^2} \times 10^6 \\ &= 68.86 \text{ MPa} \end{aligned}$$

因为  $\sigma_{r3} < [\sigma] = 100 \text{ MPa}$  故圆轴强度符合要求。

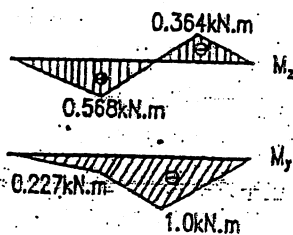
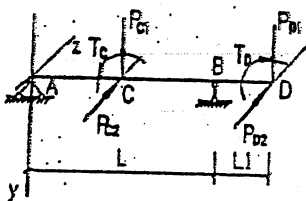
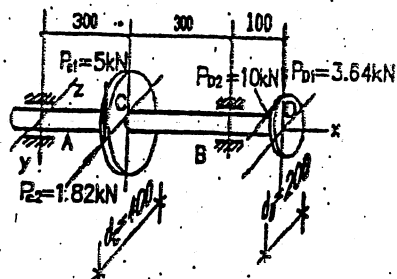


图 11-7 图

[11-8] 手动铰车如图示, 轴 AB 为实心圆轴, 直径  $d = 30 \text{ mm}$ ,  $[\sigma] = 80 \text{ MPa}$ , 试按第三强度理论确定其最大吊起重量  $P_1$ 。

解: (1) 内力分析。AC 段扭矩  $M_t = T_c = 0.18P_1 \text{ (kN} \cdot \text{m)}$ , 最大弯矩在跨中央 C 截面处

$$M_C = \frac{P_1 l}{4} = \frac{P_1 \times 0.8}{4} = 0.2P_1 \text{ (kN} \cdot \text{m)}$$

在 C 稍左截面处,  $M_t$  与  $M_z$  均最大。

(2) 确定  $P_1$

$$\begin{aligned} \sigma_{r3} &= \frac{1}{W} \sqrt{M_C^2 + M_t^2} \\ &= \frac{32}{\pi \times 60^3} \sqrt{(0.2P_1)^2 + (0.18P_1)^2} \times 10^6 \\ &= 12.685P_1 \text{ (MPa)} \end{aligned}$$

由  $\sigma_{r3} \leq [\sigma]$ ,

得

$$12.685P_1 \leq 80$$

$$\text{故 } P_1 \leq \frac{80}{12.685} = 6.31 \text{ kN}$$

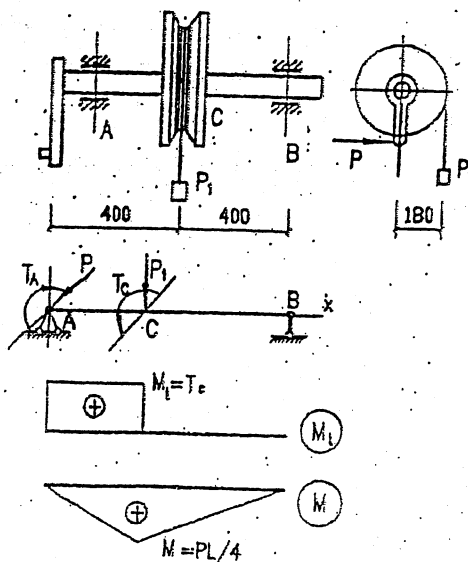


图 11-8 图

[11-9] 某工程挑出阳台边梁为  $b \times h = 250 \times 400 \text{ mm}^2$  矩形截面, 竖向荷载  $q = 20 \text{ kN/m}$ ,  $P = 10 \text{ kN}$  扭转集中力偶  $T = 0.75 \text{ kN} \cdot \text{m}$ , 均布外力偶  $m = 2.59 \text{ kN} \cdot \text{m/m}$ , 试计算矩形梁危险截面上点  $a, c, d, e$  处的应力。

解: (1) 危险截面内力  
A 截面上扭矩、弯矩和剪力为  
 $M_A = 0.75 + 2.59 \times 1.5 = 4.635 \text{ kN} \cdot \text{m}$

$$M_A = \frac{20 \times 1.5^2}{2} + 10 \times 1.5 = 37.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$V_A = 20 \times 1.5 = 30 \text{ kN}$$

(2) A 截面上  $a, d, c, e$  处的弯曲应力 (图 a)

$$\sigma_a = -\sigma_d = \frac{M_A}{W} = \frac{6 \times 37.5 \times 10^6}{250 \times 400^2} = 5.63 \text{ MPa}$$

$$\tau_c = \tau_e = \frac{3}{2} \times \frac{40 \times 10^3}{250 \times 400} = 0.60 \text{ MPa}$$

(3) 上述四点的扭转剪应力 (图 b)

在长边中点  $\tau_c, \tau_e$  大小相等方向如图示, 由  $h/b = 400/250 = 1.6$ , 查表 3-1 得  $\beta = 0.346 + 0.2 \times (0.493 - 0.346) = 0.375$ , 有

$$\tau_c = \tau_e = \frac{M_t}{W_t} = \frac{M_t}{\beta b^3} = \frac{4.635 \times 10^6}{0.375 \times 250^3} = 0.791 \text{ MPa}$$

在短边中点, 查表得,  $\mu = 0.858 - 0.2 \times (0.858 - 0.796) = 0.846$

$$\text{于是 } \tau_a = \tau_d = \mu \tau_c = 0.846 \times 0.791 = 0.669 \text{ MPa}$$

(4) 各点的应力

$$a \text{ 点, } \sigma_a = 5.63 \text{ MPa; } \tau_a = \tau_d = 0.67 \text{ MPa} \quad (-)$$

$$d \text{ 点, } \sigma_d = -5.63 \text{ MPa; } \tau_d = \tau_a = 0.67 \text{ MPa} \quad (+)$$

$$c \text{ 点, } \sigma_c = 0, \quad \tau_c = \tau_e - \tau_c = 0.60 - 0.79 = -0.19 \text{ MPa} \quad (1)$$

$$e \text{ 点, } \sigma_e = 0, \quad \tau_e = \tau_c + \tau_c = 0.60 + 0.79 = 1.39 \text{ MPa} \quad (1)$$

[11-10] 矩形立柱受力如图示, 试求固定端截面角点  $a, b, c$  和  $d$  的正应力, 并确定该截面中性轴的位置。

解: (1) 固端截面内力

$$M_y = m_y = 4 \text{ kN} \cdot \text{m},$$

$$M_z = m_z + P_z H = 8 + 8 \times 3 = 32 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$N = P_1 = 800 \text{ kN (压)}$$

(2) 角点应力

$$\sigma_a = -\frac{N}{A} - \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z}$$

$$\sigma_b = -\frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z}$$

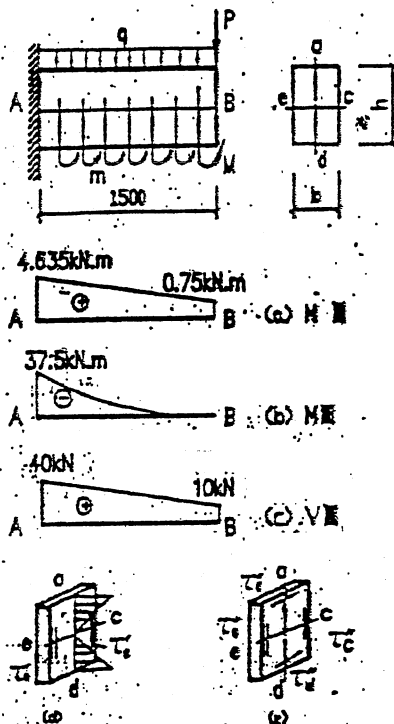


图 11-9

$$\sigma_c = -\frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_y} - \frac{M_z}{W_z}$$

$$\sigma_d = -\frac{N}{A} - \frac{M_y}{W_y} - \frac{M_z}{W_z}$$

各式中,  $\frac{N}{A} = \frac{800 \times 10^3}{400 \times 600} = 3.33 \text{ MPa}$

$$\frac{M_y}{W_y} = 4 \times 10^6 \times \frac{6}{600 \times 400^2} = 0.25 \text{ MPa}$$

$$\frac{M_z}{W_z} = 32 \times 10^6 \times \frac{6}{400 \times 600^2} = 1.33 \text{ MPa}$$

所以  $\sigma_c = -3.33 - 0.25 + 1.33 = -2.25 \text{ MPa}$

$$\sigma_b = -3.33 + 0.25 + 1.33 = -1.75 \text{ MPa}$$

$$\sigma_e = -3.33 + 0.25 - 1.33 = -4.41 \text{ MPa}$$

$$\sigma_d = -3.33 - 0.25 - 1.33 = -4.91 \text{ MPa}$$

(3) 中性轴的位置

取第一象限内的点  $k(y, z)$ , 则

$$\sigma_k = -\frac{N}{A} + \frac{M_y z}{I_y} - \frac{M_z y}{I_z} = \frac{N}{A} \left( -1 + \frac{M_y}{N} \times \frac{z}{I_y^2} - \frac{M_z}{N} \times \frac{y}{I_z^2} \right)$$

在中性轴上各点  $k_0(y_0, z_0)$  处, 由  $\sigma_{k_0} = 0$  有,

$$-1 + \frac{M_y}{N I_y^2} z_0 - \frac{M_z}{N I_z^2} y_0 = 0, \text{ 式中,}$$

$$M_y / N I_y^2 = (4 \times 10^6) / \left( 800 \times 10^3 \times \frac{400^2}{12} \right) = \frac{1}{2667}$$

$$M_z / N I_z^2 = (32 \times 10^6) / \left( 800 \times 10^3 \times \frac{600^2}{12} \right) = \frac{1}{750}$$

代回前式得  $-\frac{z_0}{2667} + \frac{y_0}{750} = 0$

得中性轴在  $z$  轴与  $y$  轴上截距分别为  $a_z = 2667 \text{ mm}$ ;  $a_y = -750 \text{ mm}$ . 所有角点应力小于零, 表明中性轴在截面之外。

[11-11] 图示悬臂吊车梁, 横梁  $AB$  为工字钢, 起重集中力  $P = 25 \text{ kN}$ . 材料的  $[\sigma] = 100 \text{ MPa}$ , 当横梁用 18 号工字钢时, 试校核其强度是否符合要求。

解: (1) 横梁内力分析 (图 a)

由  $\sum M_A = 0$ , 可求得节点  $B$  受的集中力

$$N_y = \frac{1}{2.5} \times p \times 1.25 = 0.5p$$

$$N_x = N_y \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} p$$

$AB$  杆的  $N$  图、 $M$  图和  $V$  图分别如图 b、c、d。

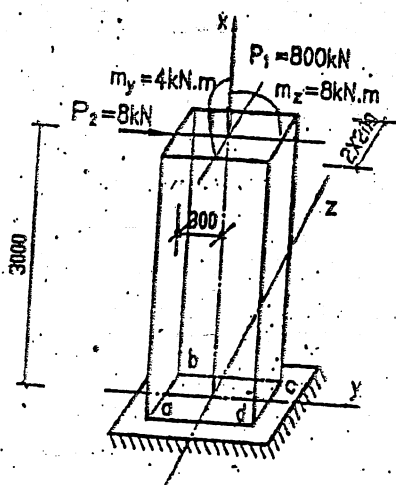


图 11-10

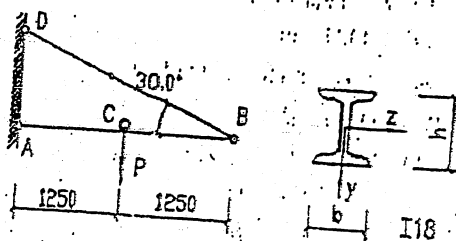


图 11-11



$$M_c = \frac{pl}{4} = \frac{25 \times 2.5}{4} = 15.625 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

AC段和CB段的剪力

$$V_{AC} = -V_{CB} = \frac{P}{2} = 12.5 \text{ kN}$$

(2) 强度校核

查型钢表, I18的截面如图e, 且

$$I_z = 1.669 \times 10^7 \text{ mm}^4, W_z = 1.854 \times 10^5 \text{ mm}^3$$

$$A = 3074 \text{ mm}^2$$

在C截面的上边缘

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= |\sigma_{\max}| = \frac{N}{A} + \frac{M_c}{W_z} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \times 25 \times 10^3}{3074} + \frac{15.625 \times 10^6}{1.854 \times 10^5} \\ &= 91.32 \text{ MPa} \end{aligned}$$

因  $\sigma_{\max} < [\sigma]$ , 这些点强度合格。

在腹板与翼缘交界处

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_c \times (90 - 10.7)}{I_z} = 7.043 + \frac{15.625 \times 10^6 \times 79.3}{1.669 \times 10^7} = 81.283 \text{ MPa}$$

该处弯曲剪应力

$$\tau = \frac{V_{CB}}{I_z} = \frac{0.5 \times 2.5 \times 10^3 \times 94 \times 10.7 \times [90 - (10.7/2)]}{1.669 \times 10^7 \times 6.5} = 9.810 \text{ MPa}$$

在这些点, 按第三或第四强度理论有相当应力

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{81.283^2 + 9.810^2 \times 4} = 83.62 \text{ MPa} < [\sigma]$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{81.283^2 + 3 \times 9.810^2} = 83.04 \text{ MPa} < [\sigma]$$

这表明, 交界处各点的强度也满足, 故梁的强度符合要求。

[11-12] 图示砖烟囱, 地面以上自重  $G_1 = 1500 \text{ kN}$ , 受到  $q = 1.0 \text{ kN/m}$  的风荷载作用。烟囱的混凝土圆形基础的底板直径为  $D$ , 设地面以下填土及基础的平均容重  $\gamma = 23 \text{ kN/m}^3$ , 基底的允许压应力  $[\sigma] = 250 \text{ kPa}$ , 试设计基础底板直径  $D$ 。

解: (1) 基底最大压应力表达式

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{G_1}{A} + \frac{\gamma Ah}{A} + \frac{qH(\frac{H}{2} + h)}{1.1F} \\ &= \frac{4G_1}{\pi D^2} + \gamma h + \frac{32qH(\frac{H}{2} + h)}{\pi D^3} \\ &= \frac{4 \times 1500 \times 10^3}{\pi D^2} + 23 \times 4 \times 10^{-3} + \frac{32 \times 1.0 \times 30 \times (15 + 4) \times 10^6}{\pi D^3} \\ &= 1.9099 \times 10^6 D^{-2} + 0.092 + 5.8060 \times 10^6 D^{-3} \end{aligned}$$

(2) 设计基础底板直径  $D$

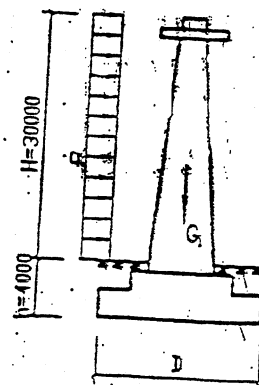
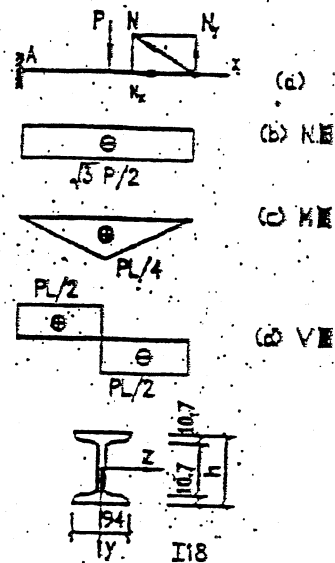


图 11-12 图

$$M_c = \frac{Pl}{4} = \frac{25 \times 2.5}{4} = 15.625 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

AC 段和 CB 段的剪力

$$V_{AC} = -V_{CB} = \frac{P}{2} = 12.5 \text{ kN}$$

(2) 强度校核

查型钢表, I18 的截面如图 e, 且

$$I_z = 1.669 \times 10^7 \text{ mm}^4, W_z = 1.854 \times 10^5 \text{ mm}^3$$

$$A = 3074 \text{ mm}^2$$

在 C 截面的上边缘

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= |\sigma_{\min}| = \frac{N}{A} + \frac{M_c}{W_z} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \times 25 \times 10^3}{3074} + \frac{15.625 \times 10^6}{1.854 \times 10^5} \\ &= 91.32 \text{ MPa} \end{aligned}$$

因  $\sigma_{\max} < [\sigma]$ , 这些点强度合格。

在腹板与翼缘交界处

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_c \times (90 - 10.7)}{I_z} = 7.043 + \frac{15.625 \times 10^6 \times 79.3}{1.669 \times 10^7} = 81.283 \text{ MPa}$$

该处弯曲剪应力

$$\tau = \frac{V_{CB} \cdot S_z}{I_z \cdot t} = \frac{0.5 \times 2.5 \times 10^3 \times 94 \times 10.7 \times [90 - (10.7/2)]}{1.669 \times 10^7 \times 6.5} = 9.810 \text{ MPa}$$

在这些点, 按第三或第四强度理论有相当应力

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{81.283^2 + 9.810^2 \times 4} = 83.62 \text{ MPa} < [\sigma]$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{81.283^2 + 3 \times 9.810^2} = 83.04 \text{ MPa} < [\sigma]$$

这表明, 交界处各点的强度也满足, 故梁的强度符合要求。

[11-12] 图示砖烟囱, 地面以上自重  $G_1 = 1500 \text{ kN}$ , 受到  $q = 1.0 \text{ kN/m}$  的风荷载作用。烟囱的混凝土圆形基础的底板直径为  $D$ , 设地面以下填土及基础的平均容重  $\gamma = 23 \text{ kN/m}^3$ , 基底的容许压应力  $[\sigma] = 250 \text{ kPa}$ , 试设计基础底板直径  $D$ 。

解: (1) 基底最大压应力表达式

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{G_1}{A} + \frac{\gamma Ah}{A} + \frac{qH(\frac{H}{2} + h)}{W} \\ &= \frac{4G_1}{\pi D^2} + \gamma h + \frac{32qH(\frac{H}{2} + h)}{\pi D^3} \\ &= \frac{4 \times 1500 \times 10^3}{\pi D^2} + 23 \times 4 \times 10^{-3} + \frac{32 \times 1.0 \times 30 \times (15 + 4) \times 10^6}{\pi D^3} \\ &= 1.9099 \times 10^6 D^{-2} + 0.092 + 5.8060 \times 10^8 D^{-3} \end{aligned}$$

(2) 设计基础底板直径  $D$

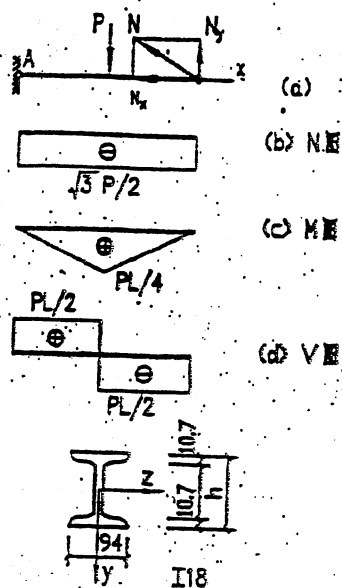


图 11-11 解图

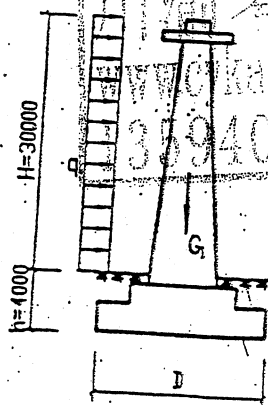


图 11-12 解图

$$W_1: e_1 = -1.10 + 0.3 = -0.80 \text{ m} \quad (\text{偏向 } A)$$

$$W_2: e_2 = -1.10 + 0.6 + \frac{1.60}{3} = 0.033 \text{ m} \quad (\text{偏向 } B)$$

$$P \text{ 的竖向分量 } P_y = P \cos 45.7^\circ = 137 \times \cos 45.7^\circ = 95.68 \text{ kN}$$

$$\text{其偏心距 } e_3 = 1.10 - \frac{1.10}{4.0} \times 1.60 = 0.70 \text{ m} \quad (\text{偏向 } B)$$

$$P \text{ 的水平分量, } P_x = P \sin 45.7^\circ = 98.05 \text{ kN, 它距 } AB \text{ 面距离 } y_4 = 1.0 \text{ m}$$

该面承担轴向压力和弯矩 (设逆时针为正)

$$N_1 = W_1 + W_2 + P_y = 23 \times 0.6 \times 4.0 \times 1.0 + 23 \times \frac{1}{2} \times 1.6 \times 4.0 \times 1.0 + 95.68 = 55.20 + 73.60 + 95.68 = 224.48 \text{ kN}$$

$$M_1 = -W_1 e_1 - W_2 e_2 - P_y e_3 + P_x y_4 = 55.2 \times 0.80 - 73.6 \times 0.033 - 95.68 \times 0.7 + 98.05 \times 1.0 = 72.80 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\text{于是, } \sigma_A = -\frac{N_1}{A_1} - \frac{M_1}{W_1} = -\frac{224.48 \times 10^3}{1000 \times 2200} - \frac{72.80 \times 10^6 \times 6}{1000 \times 2200^2} = -0.102 - 0.090 = -0.192 \text{ MPa}$$

$$\sigma_B = -\frac{N_1}{A_1} + \frac{M_1}{W_1} = -0.102 + 0.090 = -0.012 \text{ MPa}$$

(2) 计算基底上 C、D 点处的应力

除  $W_1 = 55.2 \text{ kN}$ ,  $W_2 = 73.6 \text{ kN}$ ,  $P_y = 95.68 \text{ kN}$ ,  $P_x = 98.05 \text{ kN}$  外, 尚有基础自重

$$W_3 = 23.5 \times 0.5 \times 3.0 \times 1.0 = 35.25 \text{ kN}$$

基底总轴力是

$$N_2 = N_1 + W_3 = 224.48 + 35.25 = 259.73 \text{ kN}$$

为计算 CD 面作用的合为矩, 除  $P_x$  有力臂  $y_5 = 1.0 + 0.5 = 1.5 \text{ m}$  外, 其余各力对 CD 连线中点有偏心如下

$$W_1: e_1 = -1.50 + 0.5 + 0.3 = -0.70 \text{ m} \quad (\text{偏向 } C)$$

$$W_2: e_2 = -1.50 + 0.5 + 0.6 + \frac{1.6}{3} = 0.133 \text{ m} \quad (\text{偏向 } D)$$

$$W_3: e_3 = 0, \quad P_y \text{ 的 } e_3 = 1.5 - 0.3 - 0.4 = 0.8 \text{ m} \quad (\text{偏向 } D)$$

这些力对 CD 中点简化之合力矩  $M_2$  是

$$M_2 = -W_1 e_1 - W_2 e_2 - P_y e_3 + P_x y_5 = 55.2 \times 0.7 - 73.6 \times 0.133 - 95.68 \times 0.8 + 98.05 \times 1.5 = 99.38 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\text{最后, } \sigma_C = -\frac{N_2}{A_2} - \frac{M_2}{W_2} = -\frac{259.73 \times 10^3}{1000 \times 3000} - \frac{99.38 \times 10^6 \times 6}{1000 \times 3000^2} = -0.0868 - 0.0663 = -0.153 \text{ MPa}$$

$$\sigma_D = -\frac{N_2}{A_2} + \frac{M_2}{W_2} = -0.0868 + 0.0663 = -0.020 \text{ MPa}$$

[11-16] 某结构中一根立柱选用  $\angle 140 \times 90 \times 10$  角钢, 受到图 a 示偏心压力  $P = 80 \text{ kN}$  作用,  $P$  力作用点  $A$  为角钢两边中线交点, 试计算立柱内的最大压应力, 并与  $P$  力通过形心

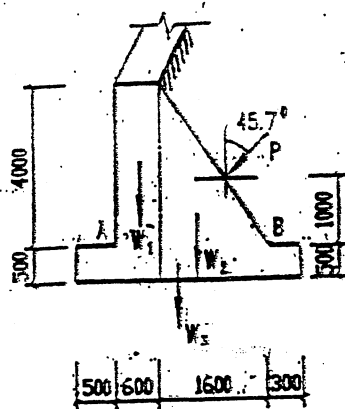


图 11-15

受轴向压缩时的应力相比较。

解: (1) 立柱横截面几何数据 (查表)

$$I_y = 4.455 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_z = 1.4003 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{z_0} = 0.8582 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_0} = I_y + I_z - I_{z_0} = 4.997 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\alpha = \arctan(0.409) = 22.24^\circ$$

$$A = 2.226 \times 10^3 \text{ mm}^2$$

$$i_{y_0} = \sqrt{I_{y_0}/A} = 47.58 \text{ mm}$$

$$i_{z_0} = 19.64 \text{ mm}$$

形心 C 距两肢中心线的

$$\bar{y} = 21.5 - 5 = 16.2 \text{ mm}$$

$\bar{z} = 45.8 - 5 = 40.8 \text{ mm}$  的角钢的  
肢宽、厚度表示于图中。

(2) 横截面内力分析

偏心为 P 作用点 A 在  $y_0z_0$  坐标系中的坐标为  $(y_{0P}, z_{0P})$ , 可由大样图实量得到, 或者计算。图中

$$\tan(\alpha + \beta) = \bar{z}/\bar{y} = 40.8/16.2 = 2.5185$$

$$\text{得 } \alpha + \beta = 68.34^\circ, \quad \beta = 68.34^\circ - \alpha = 68.34^\circ - 22.24^\circ = 46.10^\circ$$

$$\text{又 } AC = \sqrt{\bar{y}^2 + \bar{z}^2} = \sqrt{16.2^2 + 40.8^2} = 43.90 \text{ mm}$$

$$\text{于是, } y_{0P} = AC \cdot \cos \beta = 43.90 \times \cos 46.10^\circ = 30.44 \text{ mm}$$

$$z_{0P} = AC \cdot \sin \beta = 43.90 \times \sin 46.10^\circ = 31.63 \text{ mm}$$

由偏心压力引起的弯矩是

$$M_{y_0} = P \cdot z_{0P}$$

$$M_{z_0} = P \cdot y_{0P}$$

(3) 横截面上最大压应力

由图量看出, 在  $y_0z_0$  坐标系里的第一象限内任意点  $(y_0, z_0)$  的应力是

$$\sigma = -\left(\frac{P}{A} + \frac{M_{y_0}z_0}{I_{y_0}} + \frac{M_{z_0}y_0}{I_{z_0}}\right) = -\frac{P}{A} \left(1 + \frac{z_{0P}}{i_{y_0}^2} z_0 + \frac{y_{0P}}{i_{z_0}^2} y_0\right) \quad (a)$$

关于横截面最大压应力所在点的具体位置, 可以定性地判定它关于形心在 P 力作用的同一侧的角点 D 处(图 b)(这是有棱角截面具有的特点)也可以先定出中性轴再来判定最大压应力作用点。此时, 中性轴有截距:

$$a_y = -i_y^2/y_{0P} = -19.64^2/30.44 = -12.67 \text{ mm}$$

$$a_z = -i_z^2/z_{0P} = -47.58^2/31.63 = -70.97 \text{ mm}$$

依此画出中性轴 nm 如图。可见角点 D 在受压区且距 nm 直线最远, 故是最大压应力作用点。

D 点在  $y_0z_0$  坐标系中的坐标  $y_{0D}$  和  $z_{0D}$ , 可由大样图量得, 或者作如下计算:

$$\overline{CD} = \sqrt{(\bar{y}+5)^2 + (\bar{z}+5)^2} = \sqrt{(16.2+5)^2 + (40.8+5)^2} = 50.47 \text{ mm}$$

$\overline{CD}$  与 y 轴夹角

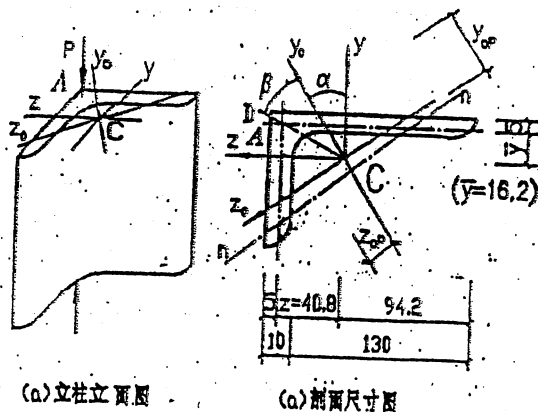


图 11-16

$$\angle DCy = \tan^{-1}[(40.8+5)/(16.2+5)] = 65.16^\circ$$

$\overline{CD}$  与  $y_0$  轴夹角

$$\angle DCy_0 = \angle DCy - \alpha = 65.16^\circ - 22.24^\circ = 42.92^\circ$$

D 点的坐标

$$y_{0D} = \overline{CD} \cdot \cos \angle DCy_0 = 50.47 \times \cos 42.92^\circ = 36.97 \text{ mm}$$

$$z_{0D} = \overline{CD} \cdot \sin \angle DCy_0 = 50.47 \times \sin 42.92^\circ = 34.37 \text{ mm}$$

将式 (b) 及其它有关数据代入式 (a) 得

$$\sigma_D = -\frac{80 \times 10^3}{2.226 \times 10^3} \left( 1 + \frac{31.63}{47.38^2} \times 34.37 + \frac{30.44}{19.64^2} \times 36.97 \right) = -35.939(1 + 0.479 + 2.918) = -158.3 \text{ MPa}$$

(4) 立柱在  $P=60$  的中心压力作用下的应力与前述偏心受压时最大应力的比较。中心受压时,  $\sigma_D^0 = \sigma = -\frac{P}{A} = -35.94 \text{ MPa}$  两种应力之比,  $\sigma_D / \sigma_D^0 = 4.40$  倍即偏心压缩时最大压应力增大了 3.40 倍。

[11-17] 试确定图示箱形截面的截面核心。

解:

$$I_y = I_z = \frac{280 \times 280^3}{12} - \frac{200 \times 200^3}{12} = 3.789 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

$$A = 280^2 - 200^2 = 3.84 \times 10^4 \text{ mm}^2$$

$$i_y^2 = i_z^2 = I_y / A = 9.867 \times 10^3 \text{ mm}^2$$

设  $l_1, l_2, l_3, l_4$  为与截面外边界相切的中性轴, 其中  $l_1$  的截距  $(a_{y1}, a_{z1}) = (\infty, 140)$ , 相应的压力作用点 1 的坐标是

$$y_{p1} = -i_z^2 / a_{y1} = 0 \quad z_{p1} = -i_y^2 / a_{z1} = -9.867 \times 10^3 / 140 = -70.5 \text{ mm}$$

由对称性, 易定出与  $l_2, l_3, l_4$  对应的点 2、3、4。

四边形 1234, 即为截面核心 (对角线长为 141 mm)。

[11-18] 试确定图示十字形截面的截面核心。

解: (1) 分析。图形有两根以上对称轴, 故

$$I_y = I_z = I_{y1} = I_{z1} = \frac{200 \times 600^3}{12} + 2 \times \frac{200 \times 200^3}{12}$$

$$= 3.867 \times 10^9 \text{ mm}^4$$

$$A = 200 \times 600 + 2 \times 200^2 = 2 \times 10^5 \text{ mm}^2$$

$$i_y^2 = i_z^2 = i_{y1}^2 = i_{z1}^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{3.867 \times 10^9}{2 \times 10^5} = 1.9335 \times 10^4 \text{ mm}^2$$

与截面图形边界相切共 8 条直线  $l_1 \sim l_8$ 。其中  $l_1 \sim l_4$  情况类同, 而  $l_5 \sim l_8$  的情况又相类同。

(2)  $l_1 \sim l_4$  作为中性轴时, 相应的压力作用点为 1~4。

直线  $l_1$  有截距  $(a_{y1}, a_{z1}) = (300, \infty)$ , 对应的压力作用点 1 的坐标为

$$y_{p1} = -i_z^2 / a_{y1} = -1.9335 \times 10^4 / 300 = -64.45 \text{ mm}$$

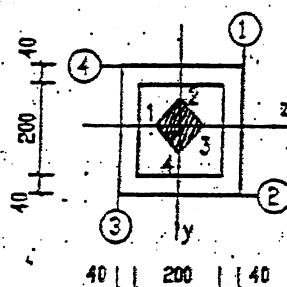


图 11-17

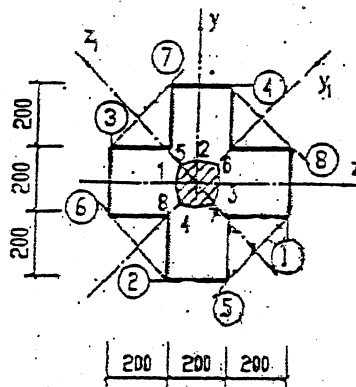


图 11-18

$$z_{p1} = -i_y^2 / a_{z1} = 0$$

另外的点 2、3、4 类似定出（它们距形心  $C$  均为  $64.45\text{mm}$ ，分别在  $y$ 、 $z$  轴上。

(3) 直线  $l_3 \sim l_8$  作为中性轴时相应的压力作用点为 5~8。

因为情况相类同，以直线  $l_5$  为例。在  $y_1, z_1$  坐标中， $l_5$  有截距

$$a_{y5} = \infty, \quad a_{z5} = -\left(\sqrt{2} \times 100 + 200 \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -200\sqrt{2}$$

相应的压力作用点 5 的坐标

$$y_{p5} = 0, \quad z_{p5} = -i_y^2 / a_{z5} = -1.9335 \times 10^4 / 400\sqrt{2} = +68.36\text{mm}$$

同样， $l_6$  对应的点 6 在  $y_1$  轴上， $y_{p6} = +68.36\text{mm}$ ， $l_7$  对应的点 7 在  $z_1$  轴上，

$z_{p7} = -68.36\text{mm}$ ， $l_8$  对应的点 8 在  $y_1$  轴上， $y_{p8} = -68.36\text{mm}$ 。

结论：截面核心为形心附近八边形， $y$ 、 $z$  轴上对角线长  $128.9\text{mm}$ ， $y_1$ 、 $z_1$  轴上对角线长  $136.72\text{mm}$ 。

[11-19] 试确定图示 L 形截面的截面核心。

解：(1) 确定形心位置

在图 a 中取  $yz$  坐标系作参考，由对称性知，

$$\bar{y}_c = \bar{z}_c = \frac{150 \times 50 \times 25 + 50 \times 100 \times 100}{150 \times 50 + 50 \times 100} = 55\text{mm}$$

(2) 计算图形对形心坐标系  $y, z$  的惯性矩和惯性积

$$\begin{aligned} I_{yy} = I_{zz} &= \frac{1}{12} \times 150 \times 50^3 + 150 \times 50 \times (55 - 25)^2 + \\ &+ \frac{1}{12} \times 50 \times 100^3 + 50 \times 100 \times (50 + 50 - 55)^2 \\ &= 2.260 \times 10^7 \text{mm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{yz} &= 0 + 150 \times 50 \times 20 \times (-30) + 0 + 50 \times 100 \times (-30) \times 45 \\ &= -1.125 \times 10^7 \text{mm}^4 \end{aligned}$$

(3) 求形心主惯性矩及主惯性半径。

由对称性易知  $y_0, z_0$  坐标系（见图）就是形心主惯性轴，按公式

$$\frac{I_{y_0}}{I_{z_0}} = \frac{I_{yy} + I_{zz}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{yy} - I_{zz}}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} = I_{yy} \pm |I_{yz}|$$

$$I_{y_0} = (2.260 + 1.125) \times 10^7 = 3.385 \times 10^7 \text{mm}^4$$

$$I_{z_0} = (2.260 - 1.125) \times 10^7 = 1.135 \times 10^7 \text{mm}^4$$

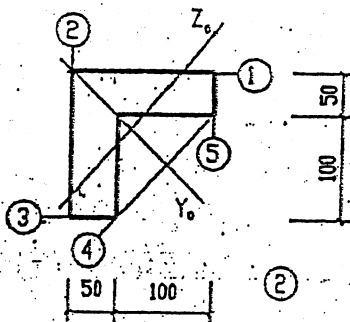
$$\text{相应, } i_{y_0}^2 = \frac{I_{y_0}}{A} = \frac{3.385 \times 10^7}{2 \times 50 \times 100 + 50 \times 50} = \frac{3.385 \times 10^7}{1.25 \times 10^4} = 2708 \text{mm}^2$$

$$i_{z_0}^2 = I_{z_0} / A = 1.135 \times 10^7 / 1.25 \times 10^4 = 908 \text{mm}^2$$

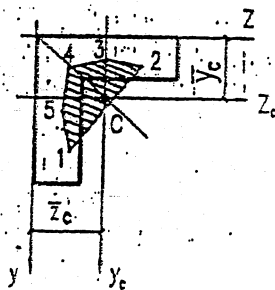
(4) 计算与截面边界相切的  $l_1 \sim l_5$  作为中性轴时的截面核心边界角点（即点 1~5）的坐标。

根据公式  $y_{pi} = -i_{z_0}^2 / a_{yi}$ ， $z_{pi} = -i_{y_0}^2 / a_{zi}$

式中， $(y_{pi}, z_{pi})$  即核心边界角点坐标， $(a_{yi}, a_{zi})$  是直线  $l_i$  在  $y_0, z_0$  坐标系的截距。



题 11-19 图



题 11-19 解图

直线  $l_1$ ,  $a_{y1} = -55\sqrt{2}$ ,  $a_{z1} = 55\sqrt{2}$

相应  $y_{p1} = -i_{y0}^2 / a_{y1} = -908 / -55\sqrt{2} = 11.67 \text{ mm}$

$$z_{p1} = -i_{y0}^2 / a_{y2} = -2708 / 55\sqrt{2} = -34.82 \text{ mm}$$

直线  $l_2$  与  $l_1$  关于  $y_0$  轴对称, 故  $y_{p2} = 11.67$ ,  $z_{p2} = 34.82 \text{ mm}$

直线  $l_3$ ,  $(a_{y3}, a_{z3}) = (95\sqrt{2}, -95\sqrt{2})$

得  $y_{p3} = -i_{y0}^2 / a_{y3} = -908 / 95\sqrt{2} = -6.76 \text{ mm}$

$$z_{p3} = -i_{y0}^2 / a_{z3} = -2708 / -95\sqrt{2} = 20.16 \text{ mm}$$

直线  $l_4$  与  $l_3$  关于  $y_0$  轴对称, 故  $y_{p4} = -6.76 \text{ mm}$ ,  $z_{p4} = -20.16 \text{ mm}$

直线  $l_5$ ,  $a_{y4} = 100 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 5 \times \sqrt{2} = 45\sqrt{2}$ ,  $a_{z4} = \infty$

相应  $y_{p4} = -i_{y0}^2 / a_{y4} = -908 / 45\sqrt{2} = -14.27 \text{ mm}$ ,  $z_{p4} = -i_{y0}^2 / a_{z4} = 0$

于是, 由点 1 (11.67, 34.82), 点 2 (11.67, -34.82), 点 3 (-6.76, 20.16), 点 4 (-14.27, 0) 和点 5 (-6.76, -20.16) 可作形心附近截面核心边界曲线 (五边形), 该曲线关于  $y_0$  轴有对称性。

## 第十二章 开口薄壁杆件

[12-1] 求图示圆弧形开口薄壁截面的弯心位置。

解：由公式， $\alpha_y = \int_A \omega_B z dA / I_y$

$$\alpha_z = \int_A \omega_B y dA / I_z$$

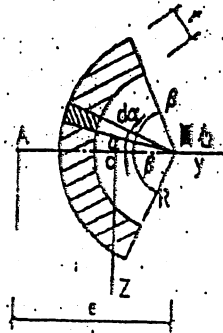
其中：  $I_y = 2 \int_0^\beta (R \sin \alpha)^2 (R d\alpha) = 2R^3 \int_0^\beta \sin^2 \alpha d\alpha$

$$= R^3 \int_0^\beta (1 - \cos 2\alpha) d\alpha$$

$$\int_A \omega_B z dA = \int_{-\beta}^\beta \frac{1}{2} R(R-2\alpha)(R \sin \alpha)(R d\alpha)$$

$$= R^4 \int_{-\beta}^\beta \alpha \sin \alpha d\alpha = 2R^4 (\sin \beta - \beta \cos \beta)$$

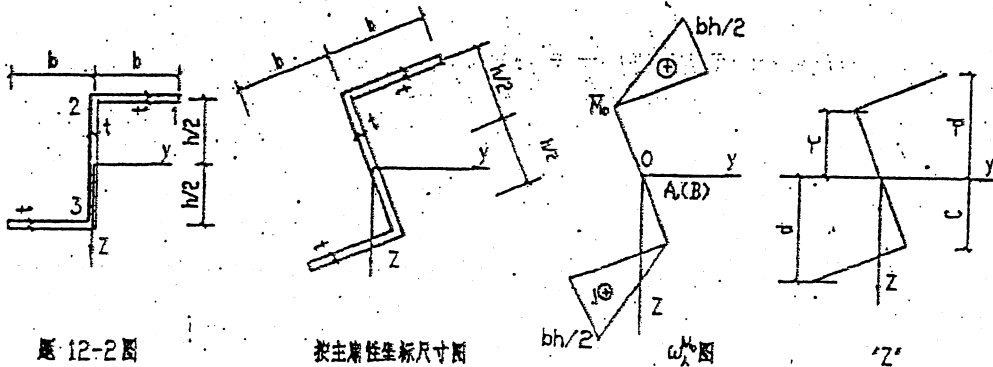
$$\therefore \alpha_y = e = \frac{2R(\sin \beta - \beta \cos \beta)}{\beta - \sin \beta \cos \beta} \quad \alpha_z = 0$$



题 12-1 图

[12-2] 求图示 Z 形截面的主惯性面积图和主惯性静矩图。

解：(1) 求弯心。

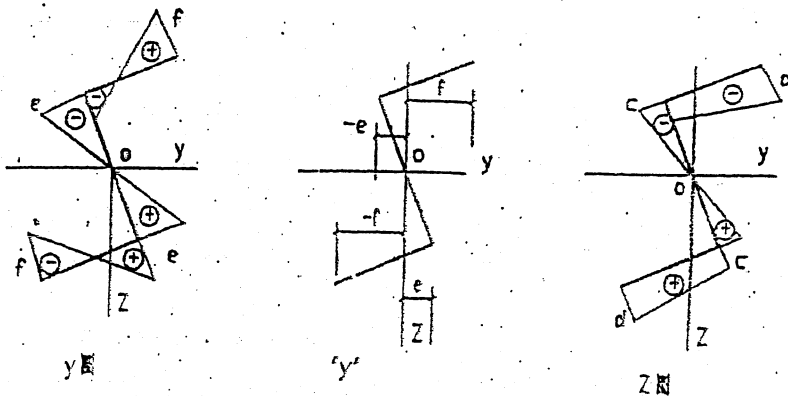


题 12-2 图

按主惯性坐标尺寸图

$\omega_A$  图

$S_z$



y 图

$y'$

z 图

题 12-2 的尾图和静矩图



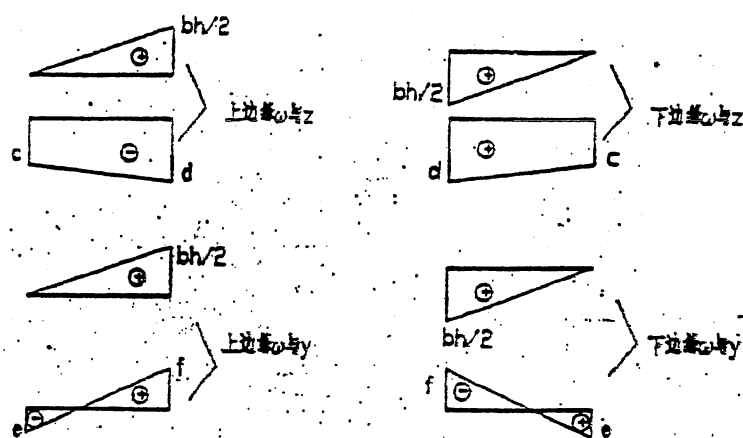


图 12-2 解图

由图形互乘法可知  $\int_A \omega_A^{M_0} z dA = 0$

由图形互乘法可知  $\int_A \omega_A^{M_0} y dA = 0$

$$\therefore a_y = a_y - b_y = \int_A \omega_A^{M_0} z dA / I_y = 0, \quad \text{即 } a_y = b_y = 0$$

$$\text{又 } a_z = a_z - b_z = -\int_A \omega_A^{M_0} y dA / I_z = 0, \quad \text{即 } a_z = b_z = 0$$

即 弯心与形心  $(0, 0)$  重合。

$$(2) \text{ 求 } \omega^* \quad \text{因 } \int_A \omega_A^{M_0} z dA = 2 \cdot t \left( \frac{b}{2} \cdot \frac{bh}{2} \right) = \frac{tb^2h}{2}, \quad A = t(2b+h)$$

$$\therefore \omega^* = \int_A \omega_A^{M_0} dA / A = \frac{1}{t(2b+h)} \cdot \frac{tb^2h}{2} = \frac{b^2h}{2(2b+h)}$$

(3) 求主扇性面积  $\omega$  及其图形

$$\omega_1 = \omega_{1A}^{M_0} - \omega^* = \frac{1}{2}bh - \frac{b^2h}{2(2b+h)} = \frac{bh(b+h)}{2(2b+h)}$$

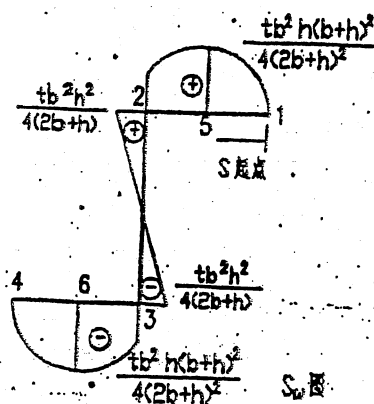
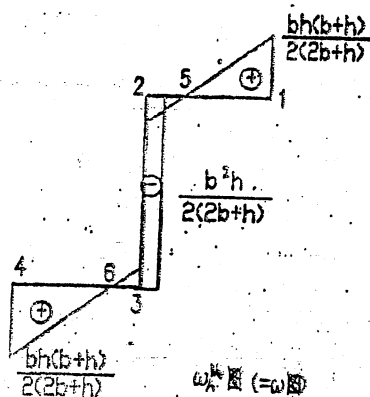
$$\omega_2 = \omega_{2A}^{M_0} - \omega^* = 0 - \frac{b^2h}{2(2b+h)} = \frac{-b^2h}{2(2b+h)}$$

$$\omega_3 = \omega_{3A}^{M_0} - \omega^* = \omega_2 = \frac{-b^2h}{2(2b+h)}$$

$$\omega_4 = \omega_{4A}^{M_0} - \omega^* = \omega_1 = \frac{bh(b+h)}{2(2b+h)}$$

于是可作出主扇性面积  $\omega$  图

(4) 求主扇性静矩  $s_\omega$  及其图形



题 12-2 第3 原图

取开口边 1 为  $S$  起点, 按公式  $s_\omega = \int_0^s \omega ds$  进行计算, 由  $\omega$  图从三角形相似可得

$$\frac{bh(b+h)}{2(2b+h)} : \frac{b^2h}{2(2b+h)} = S : (b-s), \quad \text{即 } S = \frac{b(b+s)}{2b+h}, \quad \text{于是 } S_{\omega 1} = 0, \quad S_{\omega 5} = \int_1^5 \omega ds =$$

$$= \frac{S}{2} \frac{bh(b+h)}{2(2b+h)} = \frac{b^2h(b+h)^2}{4(2b+h)^2}; \quad S_{\omega 2} = S_{\omega 5} + \int_5^2 \omega ds = \frac{b^2h(b+h)^2}{4(2b+h)^2} - \int_5^2 \frac{b-s}{2} \frac{b^2h}{2(2b+h)} ds = \frac{b^2h^2}{4(2b+h)}$$

$S_{\omega 6} = S_{\omega 2} + \int_2^6 \omega ds = 0$ , 同样可得  $S_{\omega 3} = -S_{\omega 2}$ ,  $S_{\omega 4} = -S_{\omega 5}$ ,  $S_{\omega 4} = S_{\omega 1}$ , 于是可作出主扇性静矩  $S_\omega$  图。

[12-3] 图示简支开口薄壁梁  $AD$ , 跨中受扭矩  $T$  作用, 试求截面扭角  $\varphi(x)$  和双力矩  $B_\omega(x)$ , 并作出  $B_\omega(x)$  图和扭矩  $M_x(x)$  图。

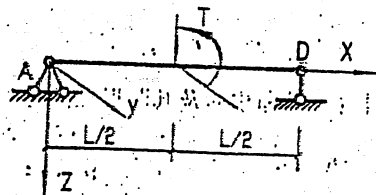
$$\text{解: } \varphi(x) = \varphi_0 \frac{\sinh kx}{k} + M_{x0} \frac{kx - \sinh kx}{kGI_t} + \frac{1}{2} T \frac{k(x - \frac{l}{2}) - \sinh k(x - \frac{l}{2})}{kGI_t} \quad (a)$$

当  $x=l$  时  $\varphi(l) = 0$ , 代入上式得

$$\varphi_0 \frac{\sinh kl}{k} + M_{x0} \frac{kl - \sinh kl}{kGI_t} + T \frac{k \frac{l}{2} - \sinh \frac{kl}{2}}{kGI_t} = 0$$

又按平衡条件  $M_{x0} = -T/2$  代入上式, 并整理得

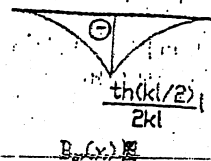
$$\varphi_0 = \frac{T}{2GI_t} \left( \frac{1}{\cosh \frac{kl}{2}} - 1 \right)$$



题 12-3 图

$$\text{代入 (a) 得 } \varphi(x) = \frac{T}{2GI_t} \left( \frac{1}{\cosh \frac{kl}{2}} - 1 \right) \frac{\sinh kx}{k} - \frac{T}{2} \frac{kx - \sinh kx}{kGI_t} + \frac{1}{2} T \frac{k(x - l/2) - \sinh k(x - l/2)}{kGI_t}$$

$$\text{即 } \varphi(x) = \frac{T}{2kGI_t} \left( \frac{\sinh kx}{\cosh \frac{kl}{2}} - kx \right) + \frac{1}{2} \frac{T}{kGI_t} \left[ k \left( x - \frac{l}{2} \right) - \sinh k \left( x - \frac{l}{2} \right) \right]$$



$B_\omega(x)$  图

$$\therefore B_w(x) = -EI_w \varphi''(x) \quad \text{又} \quad k = \sqrt{\frac{GI_t}{EI_w}} \quad \text{即} \quad GI_t = k^2 EI_w$$

$$\therefore B_w(x) = -\frac{T}{2k} \frac{\sinh kx}{\cosh \frac{hl}{2}} + \frac{1}{2} \frac{T}{k} \sinh k(x - \frac{l}{2})$$

其相应的  $B_w(x)$  图和扭矩

$M_x(x)$  图如下:

[12-4] 图示一槽形截面薄壁梁, 已知  $P = 10 \text{ kN}$ ,  $l = 2 \text{ m}$ ,  $e = 45 \text{ mm}$ ,  $b = 73 \text{ mm}$ ,  $h = 200 \text{ mm}$ ,  $t_1 = 11 \text{ mm}$ ,  $t_2 = 7 \text{ mm}$ ,  $G = 0.4E$ 。试求梁中的最大正应力及最大剪应力。

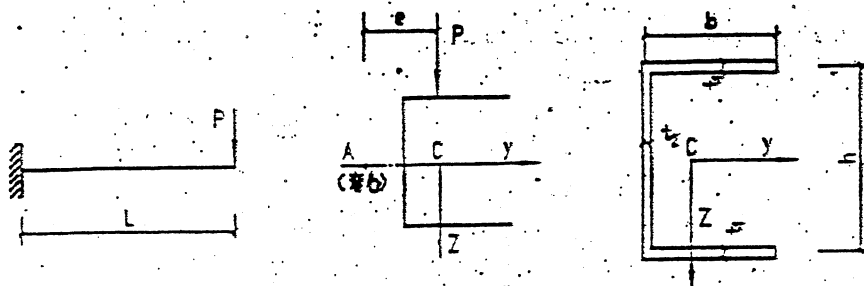
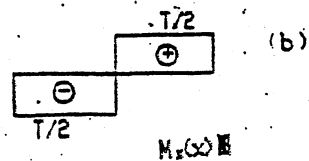


图 12-4

解: (1) 求弯心位置  
先作  $w_B$  图和  $y, z$  图

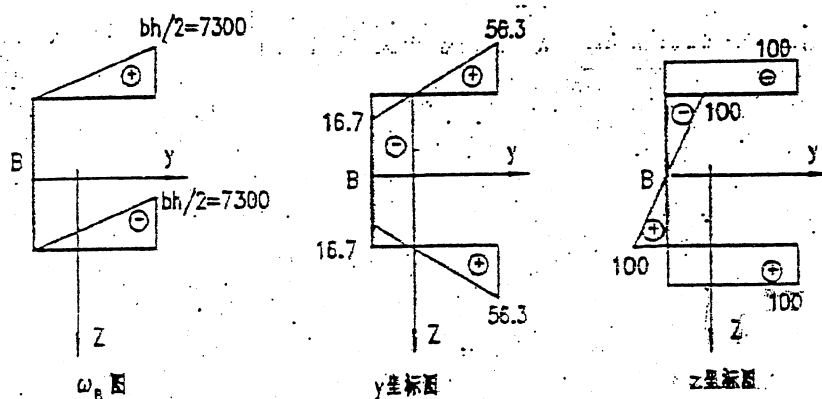


图 12-4 解

由图形互乘法可求出

$$I_{w,y} = \int_A w_B z dA = -2 \times 11 \times \frac{1}{2} \times 73 \times 7300 \times 100 = 5.86 \times 10^8 \text{ mm}^5$$

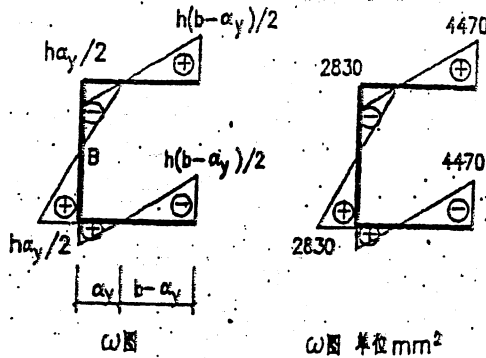
$$I_y = \int_A z^2 dA = 2 \times \frac{73 \times 11}{3} [100^2 + 100^2 + 100 \times 100] + \frac{200 \times 7}{3} [100^2 + 100^2 - 100 \times 100] = 2.073 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

代入

$$\sigma_y = \int_A w_B z dA / I_y = \frac{5.86 \times 10^8}{2.073 \times 10^7} = 28.3 \text{ mm}, \quad \sigma_z = \int_A w_B y dA / I_z = 0$$

(2) 求主扇性坐标

以弯心  $A$  为极点, 以  $B$  点为扇性零点  $M_0$ , 于是可作出主扇性坐标  $\omega_x^{M_0}$  (即  $\omega$ ) 的图形。



$$\frac{h}{2}(b-\alpha_y) = \frac{200}{2}(73-28.3) = 4470 \text{ mm}^2$$

$$\frac{1}{2}\alpha_y h = \frac{1}{2} \times 28.3 \times 200 = 2830 \text{ mm}^2$$

(3) 求主扇性惯性矩, 按图形互乘法

$$I_\omega = 2 \times \frac{73 \times 11}{3} [4470^2 + (-2830)^2 + (4470)(-2830)] + \frac{1}{3} \times 200 \times 7 \times [(-2830)^2 + (2830)^2 + (-2830) \times 2830] = 1.19 \times 10^{10} \text{ mm}^6$$

(4) 求截面自由扭转的惯性矩

$$I_t = \frac{1.12}{3} (200 \times 7^3 + 2 \times 73 \times 11^3) = 0.982 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

(5) 求系数  $k$

$$k = \sqrt{\frac{GI_t}{EI_\omega}} = \sqrt{0.4 \times \frac{0.982 \times 10^8}{1.19 \times 10^{10}}} = 0.00182 \text{ mm}^{-1}$$

(6) 求双力矩和弯曲扭转力矩

$$\text{因 } B_\omega(x) = -\varphi_0 \frac{GI_t \sinh kx}{k} + B_{\omega 0} \cosh kx + M_{x0} \frac{\sinh kx}{k}$$

$$\text{由边界条件, 当 } x=0 \text{ 时, } \varphi_0=0 \text{ 代入得 } B_\omega(x) = B_{\omega 0} \cosh kx + M_{x0} \frac{\sinh kx}{k}$$

再利用边界条件  $x=l$  时,  $B_\omega(l)=0$  得  $B_\omega(x) = -M_{x0} \frac{\sinh kl}{k \cosh kl}$ , 于是求出

$$B_\omega(x) = -\frac{M_{x0}}{k} \left[ \frac{\sinh k(l-x)}{\cosh kl} \right]$$

$$M_\omega = M_{x0} \left[ \frac{\cosh k(l-x)}{\cosh kl} \right], \quad M_t = M_{x0} \left[ 1 - \frac{\cosh k(l-x)}{\cosh kl} \right]$$

$$(B_\omega)_{\max} = B_\omega \Big|_{x=0} = -\frac{M_{x0}}{k} \tanh kl, \quad (M_\omega)_{\max} = M_\omega \Big|_{x=0} = M_{x0}$$

$$\text{当 } x=l \text{ 时, } (M_t)_{\max} = M_0 \left[ 1 - \frac{1}{\cosh kl} \right]$$

$$\text{又 } M_{x0} = Pe = 10 \times 10^3 \times 45 = 450000 \text{ Nmm}$$

$$\text{得 } (B_\omega)_{\max} = -\frac{M_{x0}}{k} \tanh kl = -\frac{450000}{0.00182} \times 0.9986 = -246900000 \text{ Nmm}^2$$

$$(M_w)_{\max} = M_{x0} = 450000 \text{ Nmm}$$

$$(M_t)_{\max} = M_{x0} \left(1 - \frac{1}{\cosh kl}\right) = 426390 \text{ Nmm}$$

$$\text{最大弯矩 } M_{\max} = pl = 10000 \times 2000 = 20 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

(7) 应力计算

1、正应力计算

1° 扇性正应力 (在  $(B_w)_{\max}$  所在截面上)

$$(\sigma_w)_1 = \frac{(B_w)_{\max}}{I_w} \omega_1 = \frac{-24.69 \times 10^7}{1.19 \times 10^{10}} \times 4470$$

$$= -92.74 \text{ MPa}$$

$$(\sigma_w)_2 = \frac{(B_w)_{\max}}{I_w} \omega_2 = \frac{(-24.69 \times 10^7)}{1.19 \times 10^{10}} \times (-2830)$$

$$= 58.72 \text{ MPa}$$

$$(\sigma_w)_3 = -(\sigma_w)_2 = -58.72 \text{ MPa}$$

$$(\sigma_w)_4 = -(\sigma_w)_1 = 92.74 \text{ MPa}$$

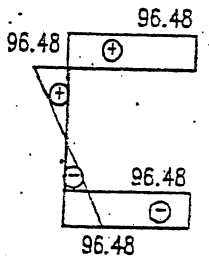
2° 弯曲正应力 (在  $M_{\max}$  所在截面上)

$$(\sigma_x)_1 = \frac{M_{\max}}{I_y} Z_1 = \frac{2 \times 10^7}{2.073 \times 10^7} \times 100 = 96.48 \text{ MPa}$$

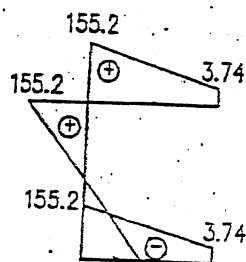
$$(\sigma_x)_2 = \frac{M_{\max}}{I_y} Z_2 = \frac{2 \times 10^7 \times 100}{2.073 \times 10^7} = 96.48 \text{ MPa}$$

$$(\sigma_x)_3 = -96.48 \text{ MPa} = (\sigma_x)_4$$

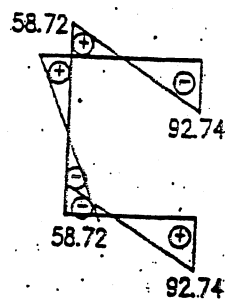
$$\text{即 } \sigma_{\max} = 155.2 \text{ MPa}$$



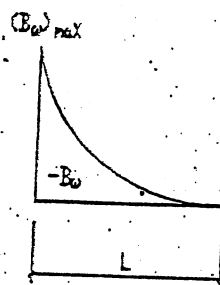
$\sigma_x$  图 (单位: MPa)



$\sigma_w$  图 (单位: MPa)



$\sigma_w$  图 (单位: MPa)



2、剪应力计算

1° 扇性剪应力

$$(S_w)_{\max} = (S_w)_s = \frac{1}{4} (b - \alpha_y)^2 h l_1$$

$$= \frac{1}{4} (73 - 28.3)^2 \times 200 \times 11 = 1100000 \text{ mm}^4$$

$$(S_w)_2 = (S_w)_{\max} - \frac{1}{2} \alpha_y \times \frac{\alpha_y h}{2} \times l_1$$

$$= 1100000 - \frac{1}{2} \times 28.3^2 \times 200 \times 11 = 659510 \text{ mm}^4$$

$$(S_w)_s = (S_w)_2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{\alpha_y h}{2} \cdot l_2$$

$$= 69510 - \frac{1}{8} \times 28.3 \times 200^2 \times 7 = -330990 \text{ mm}^4$$

最大扇性剪应力发生在固定端

$$(\tau_w)_6 = \frac{-(M_\omega)_{\max} (S_w)_{\max 6}}{I_\omega l_1}$$

$$= -\frac{450000 \times 1100000}{1.19 \times 10^{10} \times 11} = -3.78 \text{ MPa}$$

$$(\tau_w)_s = \frac{-(M_\omega)_{\max} (S_w)_{\max 5}}{I_\omega l_2} = \frac{-450000 \times 330990}{1.19 \times 10^{10} \times 7} = -1.79 \text{ MPa}$$

2° 自由端处的自由扭转剪应力

$$(\tau_t)_{\max} = \frac{(M_t)_{\max}}{I_t} \cdot l_{\max} = \frac{426390 \times 11}{0.982 \times 10^5} = 47.76 \text{ MPa}$$

3° 由弯曲引起的剪应力

$$(\tau_v)_{\max} = \frac{V(S_y)_{\max}}{I_y l_2} = \frac{(10 \times 10^3) \times [73 \times 11 \times 100 + 100 \times 7 \times 50]}{2.073 \times 10^7 \times 7}$$

$$= 7.95 \text{ MPa}$$

自由端处的最大剪应力为

$$\tau_{\max} = (\tau_t)_{\max} + (\tau_v)_{\max} = 47.76 + 7.95 = 55.71 \text{ MPa}$$

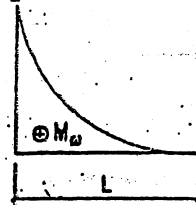
固定端处的最大剪应力为

$$\tau_{\max} = (\tau_w)_s + (\tau_v)_s = -1.79 + 7.95 = 6.16 \text{ MPa}$$

及

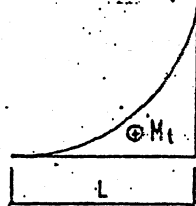
$$\tau_{\max} = 55.71 \text{ MPa}$$

$(M_\omega)_{\max}$

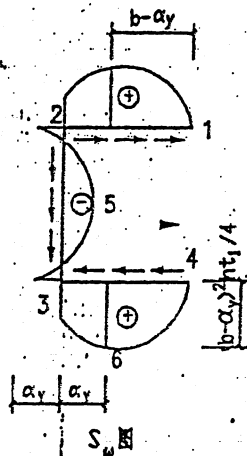


$M_\omega$  图

$(M_t)_{\max}$



$M_t$  图



$\tau_v$  图

### 第十三章 压杆稳定

[13-1] 有一张硬纸卡片，用图示的三种方式竖在桌面上，试比较三者的稳定性。

解：设卡片的重力为  $W$ ，桌面给卡片的支反力为  $R$ 。

方式 (a)：当卡片竖直， $R$  与  $W$  成共线力系而平衡。但稍有倾侧， $W$  与  $R$  即形成倾侧力偶使卡片倒下，所以这种平衡不稳定，与刚体小球在峰顶的平衡类似。

方式 (b)：当卡片竖直平衡后以小干扰使其倾侧，则反力之合力  $R$  与重力  $W$  所形成的力矩使卡片回到原位置，所以这种平衡是稳定的，但干扰要充分小才行（以上讲的是刚体稳定）。

方式 (c)：卡片竖直后，其平衡也是稳定的，若在 (b) 和 (c) 的上端加上砝码来

比较它们的弹性变形的稳定性，则由于  $(I_x)_c > (I_y)_L$ ，(c) 能承受更大的砝码， $\therefore$  (c) 更稳定。

[13-2] 一中心压杆的横截面为等腰三角形，如图所示，试说明压杆失稳时将绕何轴弯曲？图中  $C$  点是截面形心。

$$\text{解： } I_z : I_y = \frac{bh^3}{36} : \frac{hb^3}{48} = \frac{1}{3} \tan^2 \alpha$$

当  $\alpha > 60^\circ$ ， $I_z > I_y$ ，绕  $Y$  轴弯曲。

当  $\alpha < 60^\circ$ ， $I_z < I_y$ ，绕  $Z$  轴弯曲。

当  $\alpha = 60^\circ$ ， $I_z = I_y$ ，可绕任一形心轴弯曲，不仅  $Y$  轴和  $Z$  轴。

[13-3] 试用微分方程法求一端固定一端自由的中心压杆的临界荷载。

解：在所设坐标系中，( $v < 0$ )，

$v' < 0$ ， $v'' > 0$ ， $M_x > 0$ ，

$\therefore v''$  与  $M_x$  同号， $\therefore M_x = EI v''$

平衡方程  $M_x - P(-v) = 0$

弹性曲线方程  $EI v'' + P v = 0$

$$v'' + k^2 v = 0$$

$$v = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx$$

$$v' = k(-C_1 \sin kx + C_2 \cos kx)$$

边界条件 ①  $v_{x=0} = 0$ ， $C_1 = 0$ ， $v = C_2 \sin kx$ ， $v' = k C_2 \cos kx$

②  $v'_{x=L} = 0$ ， $\cos kL = 0$  (稳定方程)

$$kL = \pm \frac{(2n+1)}{2} \pi, \quad (n=0, 1, 2, \dots), \quad \text{若取 } n=0, \text{ 则 } kL = \pm \frac{\pi}{2} = \sqrt{P/(EI)} \cdot L$$

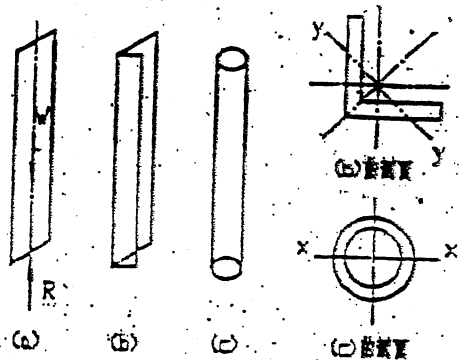


图 13-1

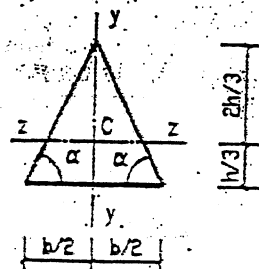


图 13-2

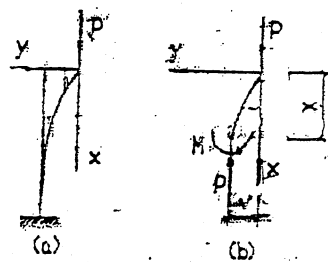


图 13-3

$$\therefore P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2}$$

[13-4] 试用微分方程法求一端固定一端夹支的中心压杆的临界荷载。

解：在所设坐标系中  $v > 0$ ,  $v_1' > 0$ ,

$v'' > 0$ ,  $M_x > 0$

$\therefore M_x$  与  $v''$  同号,  $\therefore M_x = EI v''$

平衡方程  $M_x + Pv = M_0$

弹性曲线微分方程

$$EI v'' + Pv = M_0$$

$$v'' + k^2 v = M_0 / (EI)$$

$$v = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx + \frac{M_0}{P}$$

$$v' = k(-C_1 \sin kx + C_2 \cos kx)$$

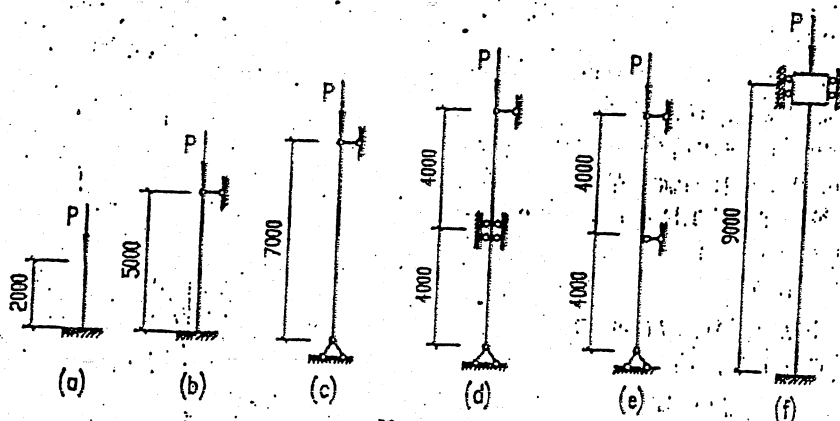
边界条件 ①  $v'_{x=0} = 0$ ,  $C_2 = 0$ ,  $v' = -kC_1 \sin kx$

②  $v'_{x=l/2} = 0$ ,  $\sin \frac{kl}{2} = 0$ , (稳定方程)

$$k(\frac{l}{2}) = \pm n\pi \quad (n=1, 2, 3, \dots), \text{ 取 } n=1, k = \pi / (l/2),$$

$$\therefore P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(l/2)^2}$$

[13-5] 图示诸压杆抗弯刚度  $EI$  之值均相同, 试比较它们临界力的大小, 并从大到小排出顺序。



题 13-5 图

解:  $l_{0,a} = 2 \times 2 = 4 \text{ m}$ ,  $l_{0,b} = 0.7 \times 5 = 3.5 \text{ m}$ ,  $l_{0,c} = 7 \text{ m}$ ,  $l_{0,d} = 0.7 \times 4 = 2.8 \text{ m}$ ,  $l_{0,e} = 4 \text{ m}$ ,

$$l_{0,f} = \frac{9}{2} = 4.5 \text{ m}$$

由大到小排列  $P_{cr}$ :

$$P_{cr,d} : P_{cr,b} : P_{cr,a} : P_{cr,e} : P_{cr,f} : P_{cr,c} = (2.8)^{-2} : (3.5)^{-2} : (4.0)^{-2} : (4.0)^{-2} : (4.5)^{-2} : (7.0)^{-2}$$



[13-6] 一木柱长3m, 截面直径 $d=100\text{mm}$ , 弹性模量 $E=1\text{GPa}$  比例极限 $\sigma_p=20\text{MPa}$ , 求其运用欧拉公式求临界力的最小柔度 $\lambda_p$ , 及临界力 $P_{cr}$ .

解:  $\lambda_p = \pi \sqrt{E/\sigma_p} = \pi \sqrt{10 \times 10^3 / 20} = 70.25, i = d/4 = 100/4 = 25\text{mm}$

$\lambda = l_0/i = 3000/25 = 120 > \lambda_p$  欧拉公式可用

$P_{cr} = \frac{\pi^2 \times 10}{3000^2} \times \frac{\pi}{64} (100)^4 = 53.83\text{kN}$

[13-7] 一两端铰支压杆, 长 $l=4\text{m}$ , 截面为 $I_{20a}$ , 材料的比例极限 $\sigma_p=200\text{MPa}$ , 弹性模量 $E=200\text{GPa}$ , 求其临界荷载及临界应力.

解:  $\lambda_p = \pi \sqrt{200 \times 10^3 / 200} = 99.35$

$I_{20a}: I_{min} = I_y = 2.12\text{cm}^4, A = 35.578\text{cm}^2, I_z = 158\text{cm}^4$

$\lambda = 400/2.12 = 188.7 > \lambda_p$

$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \times 200 \times 10^3}{188.7^2} = 55.447\text{MPa}$

$P_{cr} = 3557.8 \times 55.447 \times 10^{-3} = 197\text{kN}$

校核:  $P_{cr} = \pi^2 EI / l^2 = \pi^2 \times 200 \times 158 \times 10^4 / (4000)^2 = 195\text{kN}$

[13-8] 图示支架中压杆 $AB$ 的长度为1m, 直径28mm. 材料是3号钢, 试求其临界力及相应的荷载 $Q$ 之值.

解:  $I = \pi(28)^4 / 64 = 30172\text{mm}^4, l = 1000\text{mm}$

$E = 200\text{kN/mm}^2$

$(N_{AB})_{cr} = \pi^2 \times 200 \times 30172 / 1000^2 = 59.45\text{kN}$

$\sum M_C = 0, 900Q = (N_{AB})_{cr} \times (800/1000) \times 600$

$Q = 59.45 \times 0.8 \times 600 / 900 = 31.71\text{kN}$

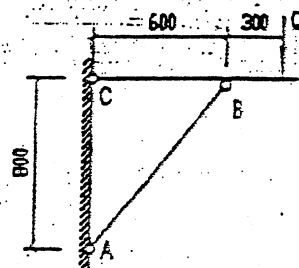


图 13-8 图

[13-9] 五杆互相铰接组成一正方形加一条对角线的结构如图所示, 设五杆材料相同, 截面相同, 对角线杆 $BD$ 长度为 $l$ , 求图示两种荷载情况下的临界荷载.

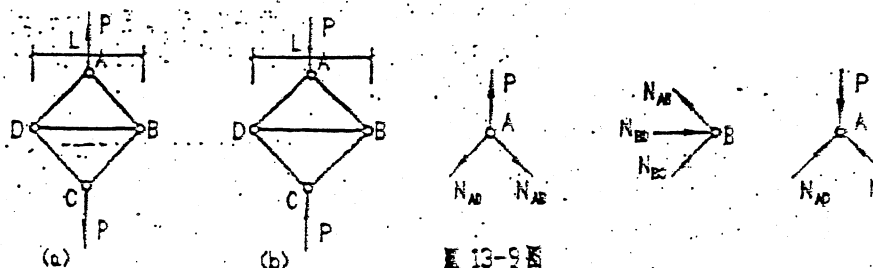


图 13-9 图

解: (a) 考虑结点 $A$ 和 $B$ 的平衡先后得到

$2N_{AB} \cos 45^\circ = P, 2N_{AB} \cos 45^\circ = N_{BD}$

$$\therefore N_{BD} = P \quad (\text{压力})$$

$$\therefore P_{cr} = (N_{BD})_{cr} = \pi^2 EI / l^2$$

$$(b) \quad l_{AB} = l \cos 45^\circ, \quad P_{cr} = 2(N_{AB})_{cr} \cos 45^\circ = 2 \frac{\pi^2 EI}{l_{AB}^2} \cos 45^\circ$$

$$\therefore P_{cr} = 2\sqrt{2} \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

[13-10] 三根直径为  $d$  的钢杆铰接于  $D$  点，居中的杆 1 下端铰接，两侧的杆 2 下端固定，顶端承受竖向荷载如图示。设结构因在图平面内失稳而丧失承载能力，求  $Q$  的临界值。

提示：无论杆 1 和杆 2 谁先失稳，其轴力均即停留于相应的临界值不再增大（这是因为图 13-3b 的  $ABL$  曲线的  $AB$  段实际上相当长（曲线平坦），故在稳定理论上一般认为在失稳过程中  $P = P_{cr}$  保持不变），荷载  $Q$  的增量由尚未失稳的杆承担。这样，直到三杆全部失稳，结构才丧失承载能力。

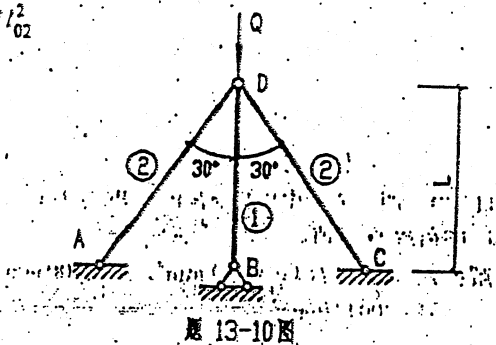
$$\text{解：} (N_1)_{cr} = \pi^2 EI / l^2; \quad (N_2)_{cr} = \pi^2 EI / l_{02}^2$$

$$\text{其中} \quad l_{02} = 0.7l_2 = 0.7 \frac{l}{\cos 30^\circ} = \frac{0.7}{\sqrt{3}/2} l$$

$$\text{于是} \quad (N_2)_{cr} = \left( \frac{\sqrt{3}}{2 \times 0.7} \right)^2 \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

考虑结点  $D$  的平衡，得

$$Q_{cr} = (N_1)_{cr} + (N_2)_{cr} \times 2 \cos 30^\circ = \\ = \left[ 1 + \left( \frac{\sqrt{3}}{2 \times 0.7} \right)^2 \times \sqrt{3} \right] \frac{\pi^2 EI}{l^2} = 3.65 \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

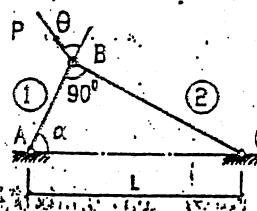


题 13-10 图

[13-11] 图示杆 1 杆 2 材料相同，截面相同。设结构因在图平面内失稳而丧失承载能力。求能使  $P$  值为最大的  $\theta$  角。

$$\text{解：} P \cos \theta = \frac{\pi^2 EI}{(l \cos \alpha)^2}; \quad P \sin \theta = \frac{\pi^2 EI}{(l \sin \alpha)^2}$$

$$\tan \theta = \cot^2 \alpha; \quad \theta = \arctan(\cot^2 \alpha)$$



题 13-11 图

[13-12] 以一 6m 长的工字钢 150b 制成一两端铰支的压杆，钢材的比例极限  $\sigma_p = 200 \text{ MPa}$ ，弹性模量  $E = 200 \text{ GPa}$ ，若杆的中点有初挠度  $a = 6 \text{ mm}$ ，试求恰使弹性阶段结束（中点凹边边缘应力等于  $\sigma_p$ ）的荷载  $P$ 。

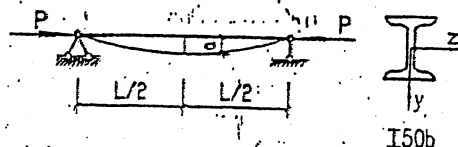
解：查型钢表，150b：

$$W_x = 1860 \text{ cm}^3, \quad A = 129.304 \text{ cm}^2, \quad I_x = 19.4 \text{ cm}^4$$

$$\text{于是有} \quad S = \frac{W}{A} = \frac{1860}{129.304} = 13.385 \text{ cm}$$

$$a/s = 6/133.85 = 0.044826, \quad \lambda = l/i = 6000/194 = 30.928$$

$$\sigma_E = \pi^2 \times (200 \times 10^3) / 30.928^2 = 1981 \text{ MPa}$$



题 13-12 图

$$\sigma_0 = \frac{1}{2} \left[ \sigma_p + \left( 1 + \frac{a}{s} \right) \sigma_E \right] - \sqrt{\frac{1}{4} \left[ \left( 1 + \frac{a}{s} \right) \sigma_E + \sigma_p \right]^2 - \sigma_E \sigma_p}$$

代入上面给出的数据后, 得  $\sigma_0 = 190.55 \text{ MPa}$ ,  $P = 190.55 \times (129.304 \times 10^2) = 24641 \text{ kN}$

[13-13] 图示一两端铰支压杆受有偏心压力  $P$  作用, 偏心距为  $e$ , 当  $e=0$  时有欧拉荷载  $P_E = \pi^2 EI / l^2$ , 当  $e \neq 0$  时一开始加力就有挠曲, 设中点挠度为  $\delta$ , 求证正割公式。

$\delta = e \left[ \sec \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_E}} \right) - 1 \right]$ , 并证明其强度条件为  $\frac{np}{A} + \frac{npe}{W} \sec \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{np}{P_E}} \right) \geq f_y$ , 式中,  $f_y$  — 材料的

屈服强度,  $W$  — 截面的截面模量,

$n$  — 安全系数。

$$EI v'' + p(e+v) = 0 \quad (a)$$

$$v'' + k^2 v = -k^2 e \quad (k^2 = \frac{P}{EI})$$

$$v = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx - e \quad (b)$$

但当  $x=0$ ,  $v=0$ ,  $\therefore C_1 = e$

$$\text{当 } x=l, v=0, \therefore C_2 = e \frac{1 - \cos kl}{\sin kl}$$

于是  $v = e \left( \cos kx - \frac{1 - \cos kl}{\sin kl} \sin kx - 1 \right)$

当  $x=l/2$ ,  $v = \delta$ , 所以

$$\delta = e \left( \cos \frac{kl}{2} - \frac{1 - \cos kl}{\sin kl} \sin \frac{kl}{2} - 1 \right)$$

$$\text{但 } \cos kl = 1 - 2 \sin^2 \frac{kl}{2}, \sin kl = 2 \sin \frac{kl}{2} \cos \frac{kl}{2}$$

$$\therefore \delta = e \left( \sec \frac{kl}{2} - 1 \right)$$

$$\text{或 } \delta = e \left[ \sec \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_E}} \right) - 1 \right], \quad (P_E = \frac{\pi^2 EI}{l^2}), \quad (c)$$

中点截面弯矩为  $M = P(e + \delta)$  即

$$M = P e \left[ 1 + \sec \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_E}} \right) - 1 \right] = P e \sec \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_E}} \right), \quad (d)$$

$$\text{其凹边纤维的压应力为 } \sigma = \frac{P}{A} + \frac{Pe}{W} \sec \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_E}} \right), \quad (e)$$

式中,  $W$  — 杆件中点截面的截面模量。

偏心压杆的强度条件与通常的容许应力的强度条件的形式不同, 以  $n$  表安全系数, 把荷载  $P$  放大  $n$  倍, 即以  $np$  代替式 (e) 中的  $p$  之后, 所得  $\sigma$  不能超过材料强度的极限应力, 以  $f_y$  (屈服极限) 作为极限应力, 则强度条件是

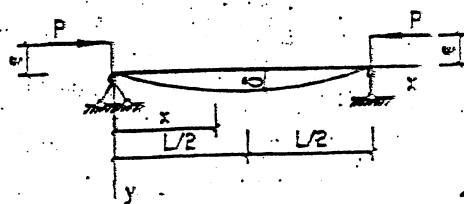
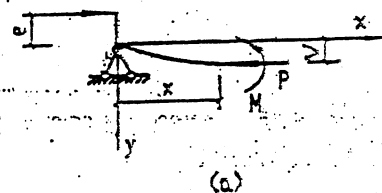
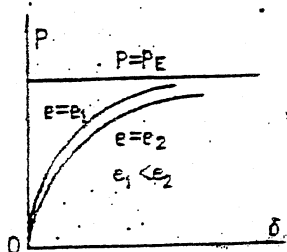


图 13-13



(a)



(b)

图 13-13

$$\frac{nP}{A} + \frac{nPe}{W} \sec\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{nP}{P_E}}\right) \leq f_y$$

不难理解，因为最后一个  $n$  处于正割函数而且是根号之内，不可能把式子左边的  $n$  移到右边去作分母。

[13-14] 一柱下端固定，上端自由，受偏心距为  $e$  的压力  $P$  作用，试求其自由端挠度  $\delta$ 。

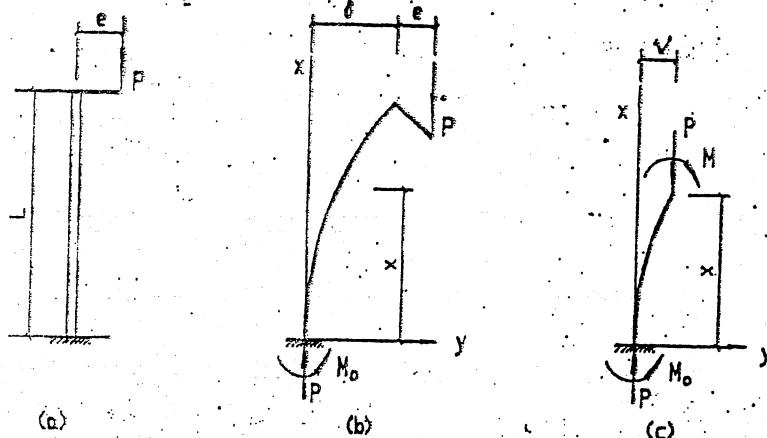


图 13-14

解：在图示坐标系内，当  $M > 0$  有  $v > 0$ ， $v'' > 0$ ， $\therefore M = EIv''$  由整体的平衡得  $M_0 = P(\delta + e)$ ，由分离体的平衡得

$$EIv'' + Pv = P(\delta + e)$$

$$v'' + k^2 v = k^2(\delta + e) \quad \left(k^2 = \frac{P}{EI}\right)$$

$$v = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx + \delta + e$$

边界条件，当  $x = 0$ ， $v = 0$ ， $\therefore C_1 = -(\delta + e)$

当  $x = l$ ， $v' = 0$ ， $\therefore C_2 = 0$

于是  $v = (\delta + e)(1 - \cos kx)$ ， $\delta = (\delta + e)(1 - \cos kl)$   
 $\delta = e(1 - \sec kl)$

[13-15] 求题 13-8 的容许荷载  $[Q]$ 。

解：由表 13-2，AB 杆钢材应属于第 2 组，由表 13-3，得  $f = 200 \text{ MPa}$ ，

$$i = \frac{d}{4} = \frac{28}{4} = 7 \text{ mm} \quad \lambda = \frac{l_0}{i} = \frac{1000}{7} = 142.86$$

由 b 类截面  $\varphi$  值表，当  $\lambda = 142.86$ ， $\varphi = 0.337$ 。

$$[N_{AB}] = \varphi A f = 0.337 \times \frac{\pi}{4} (28)^2 \times 200 \times 10^{-3} = 41.5 \text{ kN}$$

$$[Q] = 41.5 \times \frac{0.8 \times 600}{900} = 22.13 \text{ kN}$$

[13-16] 一组合钢柱长  $l = 6 \text{ m}$ ，两端铰交，由 4 根角钢  $L80 \times 80 \times 6$  用缀板缀合而成，缀板与缀板的间距为  $l_1$ ，钢的强度设计值为  $f = 200 \text{ MPa}$ ，柱受中心压力  $P = 50 \text{ kN}$ ，试求 (a) 横

截面宽度  $a$ , (b) 缀板的间距  $l$ 。

解:  $L80 \times 80 \times 6$  有  $Z_0 = 2.19 \text{ cm}$ ,  $A = 7.912 \text{ cm}^2$ ,

$$I_{z_0} = 57.35 \text{ cm}^4$$

$$(a) \text{ 计算: } \varphi = \frac{N}{fA} = \frac{450 \times 10^3}{200 \times (4 \times 791.2)} = 0.711$$

查 b 类截面  $\varphi$  值得  $\lambda = 76$

$$\text{但 } \lambda = \frac{l_0}{i_z} = \frac{l_0}{\sqrt{(4I_{z_0} + 4A)}} \cdot I_z = I_{z_0} + Ah^2$$

$$\text{因而 } I_z = (l_0 / \lambda)^2 \cdot A = \left( \frac{6 \times 10^3}{76} \right)^2 \times 791.2 = 4931300 \text{ mm}^4$$

$$h \geq \sqrt{\frac{I_z - I_{z_0}}{A}} = \sqrt{\frac{4931300 - 573500}{791.2}} = 74.2 \text{ mm}, a \geq 2(z_0 + h) = 2(21.9 + 74.2) = 192.2 \text{ mm}$$

(b) 查型钢表  $L80 \times 80 \times 6$  有  $i_{\min} = 1.59 \text{ cm}$ , 令单个角钢的柔度  $\lambda_L = \frac{l_1}{i_{\min}} = \lambda = 76$ , 得

$$l_1 = \lambda_L i_{\min} = 76 \times 1.59 = 1208.4 \text{ mm}$$

$$\therefore l_1 = 1200 \text{ mm}$$

[13-17] 图示一简单托架, 其斜撑  $AB$  为西南云杉圆木杆。  $f_c = 12 \text{ MPa}$ , 两端铰接, 试确定其直径  $d$ 。

$$\text{解: } l_{AB} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} \text{ m} = 4472 \text{ mm}$$

取水平杆为分离体, 考虑其平衡

$$\sum M_C = 0; N_{AB} \times \frac{4}{\sqrt{20}} \times 2 = 3 \times 50 \times \frac{3}{2}$$

$$N_{AB} = 126 \text{ kN}$$

西南云杉:  $f_c = 12 \text{ MPa}$

一、试: 设  $\varphi = 0.6$

$$A \geq \frac{N_{AB}}{\varphi f_c} = \frac{126 \times 10^3}{0.6 \times 12} = 17500 \text{ mm}^2$$

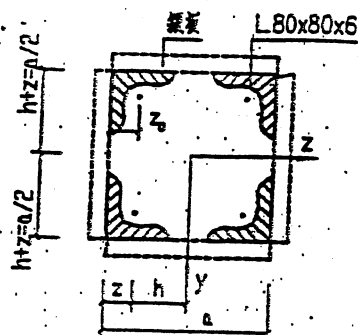
$$d \geq \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = 150 \text{ mm}$$

$$i = \frac{150}{4} = 37.5 \text{ mm}, \lambda = \frac{4472}{37.5} = 119.25$$

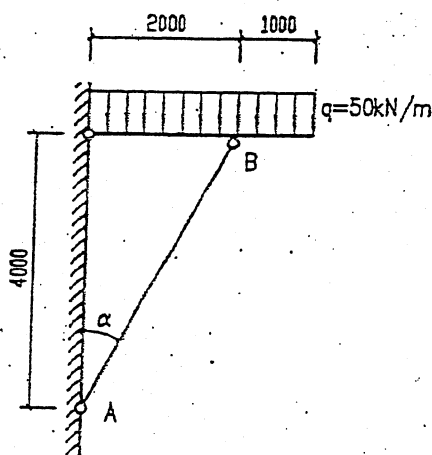
$$\varphi = \frac{3000}{\lambda^2} = \frac{3000}{119.25^2} = 0.211$$

$$\text{二、试: } \varphi = \frac{0.6 + 0.211}{2} = 0.4$$

$$d \geq \sqrt{\frac{4N}{\pi \varphi f_c}} = \sqrt{\frac{1.4N}{\varphi \pi f_c}} = \sqrt{\frac{1.4 \times 126 \times 10^3}{0.4 \times 12 \times \pi}} = \sqrt{\frac{13369}{0.4}} = 183 \text{ mm}$$



题 13-16 图



题 13-17 图

$$l = \frac{183}{4} = 45.7 \quad \lambda = 4472 / 45.7 = 97.855 \quad \varphi = \frac{3000}{97.855^2} = 0.313$$

三试:  $\varphi = \frac{1}{2}(0.4 + 0.313) = 0.3575$

$$d \geq \sqrt{\frac{13369}{0.354}} = 193.34 \text{ mm} \quad l = 193.34 / 4 = 48.345 \quad \lambda = \frac{4472}{48.345} = 92.5$$

$$\varphi = \frac{3000}{92.5^2} = 0.350$$

四试:  $\varphi = \frac{1}{2}(0.3575 + 0.350) = 0.354$

$$d \geq \sqrt{\frac{13369}{0.354}} = 194 \text{ mm} \quad \text{与三试结果基本一样}$$

$$\therefore d \geq 194 \text{ mm}$$

## 第十四章 杆件的应变能及其应用

[14-1] 图示阶形杆 ABC, 抗拉刚度分别为  $EA$  和  $2EA$ , 试求杆的应变能。

解: 杆 AB、BC 段中的轴力, 分别为  $2P$ 、 $P$ 。

按式 (14-3), 阶形杆的应变能为

$$U = \sum_{i=1}^n \frac{N_i^2 l_i}{2E_i A_i} = \frac{(2P)^2 l}{2 \times 2EA} + \frac{P^2 l}{2EA} = \frac{3P^2 l}{2EA}$$

[14-2] 试求例 14-1 等截面直杆, 除自重外, 在下端还有集中力  $P$  作用时的总应变能。

解: 在下端  $P$  力及自重作用下, 杆中轴力  $N(x) = P + \gamma Ax$ , 按式 (14-4) 杆的应变能为:

$$\begin{aligned} U &= \int_0^l \frac{N^2(x)}{2EA} dx = \frac{1}{2EA} \int_0^l (P + \gamma Ax)^2 dx \\ &= \frac{1}{2EA} \int_0^l (P^2 + 2P\gamma Ax + \gamma^2 A^2 x^2) dx \\ &= \frac{1}{6EA} (3P^2 + 3P\gamma Al + \gamma^2 A^2 l^2) \end{aligned}$$

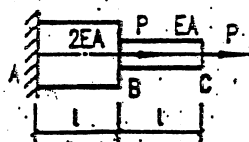


图 14-1

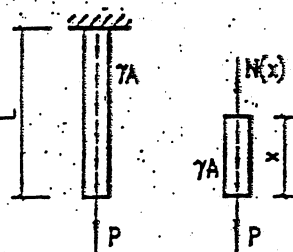


图 14-2

[14-3] 图示厚度为  $t$ 、截面为矩形的锥形杆, 下端作用有集中力  $P$ 。试用功能原理求下端的位移。

解: 杆的轴力为  $N(x) = P$ , 其截面积为

$A(x) = (b_2 + \frac{b_1 - b_2}{l}x)t$ , 式中  $x$  为截面至下端的距离 (图示), 按式 (14-4) 杆的应变能为

$$\begin{aligned} U &= \int_0^l \frac{N^2(x)}{2EA} dx \\ &= \frac{1}{2Et} \int_0^l \frac{P^2}{\left(b_2 + \frac{b_1 - b_2}{l}x\right)} dx \\ &= \frac{1}{2Et} \cdot \frac{P^2 l}{b_1 - b_2} \left[ \ln \left( b_2 + \frac{b_1 - b_2}{l}x \right) \right]_0^l \\ &= \frac{P^2 l}{2Et(b_1 - b_2)} \ln \frac{b_1}{b_2} \end{aligned}$$

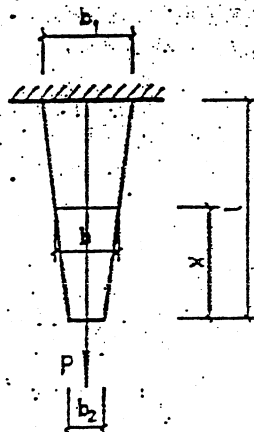


图 14-3

根据功能原理  $U = \frac{1}{2} P \delta$ , 得杆下端的位移 (杆的伸长值) 为

$$\delta = \frac{2U}{P} = \frac{2}{P} \cdot \frac{P^2 l}{2Et(b_1 - b_2)} \ln \frac{b_1}{b_2} = \frac{Pl}{Et(b_1 - b_2)} \ln \frac{b_1}{b_2}$$

[14-4] 试通过第九章图 9-14a 示纯剪应力状态的比能, 等于该应力状态三单元体比能

的条件, 推导  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ 。

解: 对于图示纯剪平面应力状态, 按式 (14-7) 其比能为

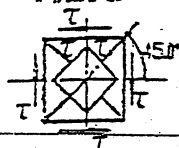


图 14-4

$$u = \frac{\tau^2}{2G} \quad (a)$$

由第九章式(9-4)知, 该单元体的正应力极值应为:

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \pm \tau$$

则单元体的主应力为  $\sigma_1 = \tau$ ,  $\sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_3 = -\tau$ . 因此, 根据式(9-20)得主应力比能为

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] \\ &= \frac{1}{2E} [\tau^2 + 0^2 + (-\tau)^2 - 2\nu[\tau \cdot 0 + 0 \cdot (-\tau) + (-\tau) \cdot \tau]] \\ &= \frac{\tau^2}{E} (1 + \nu) \end{aligned} \quad (b)$$

由于式(a)、(b)均为同一点处的比能, 两者应相等, 即

$$\frac{\tau^2}{2G} = \frac{\tau^2}{E} (1 + \nu)$$

解得:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

[14-5] 两根相同长度的实心圆杆, 由同一材料制成, 其截面积分别为  $A_1$  和  $A_2$ . 若两杆上作用有相同扭矩  $M_t$ , 试求两杆中的应变能比值.

解: 设  $d_1$ 、 $d_2$  分别为与  $A_1$ 、 $A_2$  对应的圆杆直径, 则对应的极惯性矩  $I_{p1}$ 、 $I_{p2}$  分别为:

$$I_{p1} = \frac{\pi d_1^4}{32} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\pi d_1^2}{4} \right)^2 = \frac{A_1^2}{2\pi}, \quad I_{p2} = \frac{\pi d_2^4}{32} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\pi d_2^2}{4} \right)^2 = \frac{A_2^2}{2\pi}$$

按(14-9)式, 两杆的应变能为

$$U_1 = \frac{M_t^2 l}{2GI_{p1}}, \quad U_2 = \frac{M_t^2 l}{2GI_{p2}}$$

$$\text{则} \quad \frac{U_1}{U_2} = \frac{M_t^2 l / 2GI_{p1}}{M_t^2 l / 2GI_{p2}} = \frac{I_{p2}}{I_{p1}} = \frac{A_2^2}{A_1^2}$$

[14-6] 一端固定的圆杆, 长度为  $l$ , 截面直径为  $d$ , 受集度为  $m$  的外扭转力偶作用, 试求杆的应变能.

解: 杆截面上的扭矩  $M_t(x) = mx$ , 按式(14-11)

杆的应变能为

$$U = \int_0^l \frac{M_t^2(x)}{2GI_p} dx = \int_0^l \frac{(mx)^2}{2GI_p} dx = \frac{m^2 l^3}{6GI_p}$$

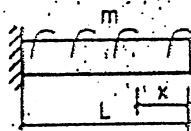


图 14-6 题

[14-7] 试求图示各梁的应变能及与集中荷载相应的位移. 设梁的抗弯刚度为常数  $EI$ .

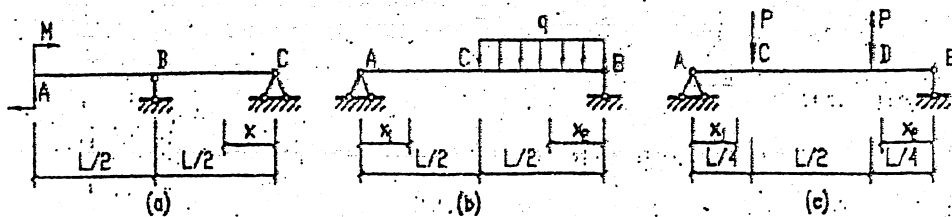


图 14-7 题



解: (a) AB 段的弯矩为  $M(x) = M$ , BC 段的弯矩为  $M(x) = \frac{2Mx}{l}$ . 按式 (14-14) 梁的应变能为

$$U = \int_0^l \frac{M^2(x)}{2EI} dx = \int_0^{l/2} \frac{1}{2EI} \left( \frac{2Mx}{l} \right)^2 dx + \int_{l/2}^l \frac{M^2}{2EI} dx = \frac{M^2 l}{12EI} + \frac{M^2 l}{4EI} = \frac{M^2 l}{3EI}$$

根据功能原理有  $U = \frac{M}{2} \theta_A$ , 则集中力偶作用处的转角  $\theta_A$  为

$$\theta_A = \frac{2U}{M} = \frac{2}{M} \cdot \frac{M^2 l}{3EI} = \frac{2Ml}{3EI} \quad (1)$$

(b) 梁的支反力为  $R_A = ql/8$  (T),  $R_B = 3ql/8$  (T); 则 AC 段的弯矩为  $M(x_1) = qlx_1/8$ , BC 段的弯矩为  $M(x_2) = \frac{3qlx_2}{8} - \frac{qx_2^2}{2}$ . 按式 (14-14) 梁的应变能为:

$$\begin{aligned} U &= \int_0^l \frac{M^2(x)}{2EI} dx = \int_0^{l/2} \frac{1}{2EI} \left( \frac{qlx_1}{8} \right)^2 dx_1 + \int_{l/2}^l \frac{1}{2EI} \left( \frac{3qlx_2}{8} - \frac{qx_2^2}{2} \right) dx_2 \\ &= \frac{1}{2EI} \cdot \frac{q^2 l^2}{64} \cdot \frac{1}{3} \left( \frac{l}{2} \right)^3 + \frac{1}{2EI} \left[ \frac{9q^2 l^2}{64} \cdot \frac{1}{3} \left( \frac{l}{2} \right)^3 - 2 \cdot \frac{3ql}{8} \cdot \frac{q}{2} \cdot \frac{1}{4} \left( \frac{l}{2} \right)^4 + \frac{q^2}{4} \cdot \frac{1}{5} \left( \frac{l}{2} \right)^5 \right] \\ &= \frac{ql^5}{128 \times 24EI} + \frac{ql^5}{128EI} \left( \frac{9}{24} - \frac{3}{8} + \frac{1}{10} \right) = \frac{ql^5}{128 \times 24EI} + \frac{ql^5}{128 \times 10EI} \\ &= \frac{ql^5}{128 \times 12 \times 2EI} + \frac{ql^5}{128 \times 2 \times 5EI} = \frac{17ql^5}{15360EI} \end{aligned}$$

(c) 梁 AC 段的弯矩为  $M(x) = Px$ , CD 段的弯矩为  $M(x) = Pl/4$ , DB 段的弯矩与 AC 段对称. 按式 (14-14) 梁的应变能为

$$\begin{aligned} U &= \int_0^l \frac{M^2(x)}{2EI} dx = 2 \int_0^{l/4} \frac{(Px)^2}{2EI} dx + \int_{l/4}^{3l/4} \frac{1}{2EI} \left( \frac{Pl}{4} \right)^2 dx \\ &= \frac{P^2}{EI} \cdot \frac{1}{3} \left( \frac{l}{4} \right)^3 + \frac{P^2 l^3}{64EI} = \frac{P^2 l^3}{48EI} \end{aligned}$$

根据功能原理 (14-1) 式,  $U = W = \frac{F_{xc}}{2} + \frac{Pv_D}{2} = P \cdot v_C$  (因  $v_C = v_D$ ), 则集中力  $P$  处的挠度为

$$v_C = v_D = \frac{U}{P} = \frac{1}{P} \cdot \frac{P^2 l^3}{48EI} = \frac{Pl^3}{48EI} \quad (14-8)$$

[14-8] 求图示杆件或结构的应变能及与集中荷载相应的位移. 设杆件的刚度相同均为同一常量  $EA$  或  $EI$ .

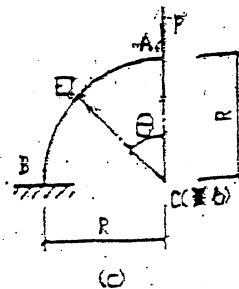
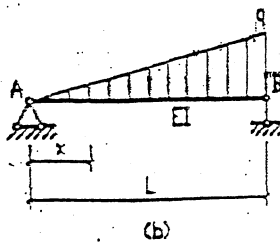
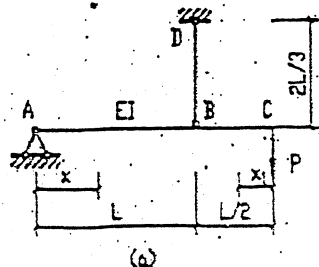


图 14-8

解: (a) 结构的支反力为  $R_A = P/2$  (↑),  $R_D = 1.5P$  (↑), 则 AB 段的弯矩为  $M(x) = -\frac{Px}{2}$ , BC 段的弯矩为  $M(x_1) = -Px_1$ , BD 杆的轴力为  $N_{BD} = 1.5P$ , 因此, 结构 AC 部分的应变能, 按式 (14-14) 为

$$U_{AC} = \int_0^l \frac{M^2(x)}{2EI} dx = \int_0^l \frac{1}{2EI} \left( -\frac{Px}{2} \right)^2 dx + \int_0^{l/2} \frac{1}{2EI} (-Px_1)^2 dx_1$$

$$= \frac{P^2 l^3}{24EI} + \frac{P^2 l^3}{48EI} = \frac{P^2 l^3}{16EI}$$

BD 杆的应变能, 按式 (14-2) 计算, 为

$$U_{BD} = \frac{N^2 l}{2EA} = \frac{(1.5P)^2 \cdot 2l}{2EA \cdot 3} = \frac{3P^2 l}{4EA}$$

则结构的应变能为

$$U = U_{AC} + U_{BD} = \frac{P^2 l^3}{16EI} + \frac{3P^2 l}{4EA}$$

根据功能原理 (14-1) 式, 有  $U = W = \frac{Pv_c}{2}$ , 因此, 集中力  $P$  处的挠度  $v_c$  为

$$v_c = \frac{2U}{P} = \frac{2}{P} \left( \frac{P^2 l^3}{16EI} + \frac{3P^2 l}{4EA} \right) = \frac{Pl^3}{8EI} + \frac{3Pl}{2EA}$$

(b) 梁的支反力  $R_A = \frac{ql}{6}$  (↑), 弯矩为  $M(x) = \frac{qlx}{6} - \frac{qx^3}{6l}$ , 按式 (14-14) 梁的应变能为

$$U = \int_0^l \frac{M^2(x)}{2EI} dx = \int_0^l \frac{1}{2EI} \left( \frac{qlx}{6} - \frac{qx^3}{6l} \right)^2 dx = \frac{q^2}{72EI} \left( l^2 \cdot \frac{l^3}{3} - 2l \cdot \frac{l^5}{5} + \frac{1}{l^2} \cdot \frac{l^7}{7} \right)$$

$$= \frac{q^2 l^5}{72EI} \left( \frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7} \right) = \frac{q^2 l^5}{945EI}$$

(c) 曲杆的弯矩为  $M(\theta) = -PR \sin \theta$ , 按式 (14-14) 该杆的应变能为

$$U = \int_0^{\pi/2} \frac{M^2(\theta)}{2EI} R d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{(-PR \sin \theta)^2}{2EI} R d\theta = \frac{P^2 R^3}{2EI} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta$$

$$= \frac{P^2 R^3}{4EI} \left[ \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi P^2 R^3}{8EI}$$

根据功能原理 (14-1) 或,  $U = W = \frac{P\delta_A}{2}$ , 得集中力  $P$  处的位移  $\delta_A$  为

$$\delta_A = \frac{2U}{P} = \frac{\pi P R^3}{4EI}$$

[14-9] 试对图示简支梁验证位移互等定理 (数值上相等) 提示: 利用附录二。

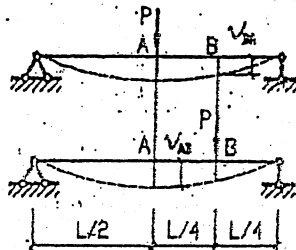


图 14-9a 图

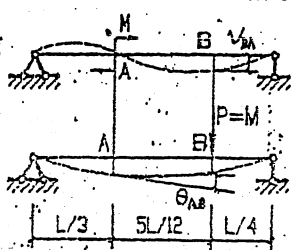


图 14-9b 图

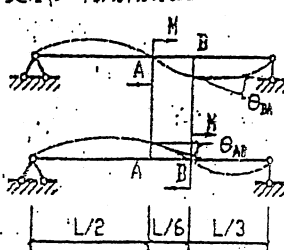


图 14-9c 图

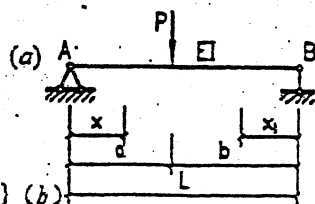
解: 从附示二知, 简支梁受集中力  $P$  时的挠度及转角为 (图  $d$ )

$$0 \leq x \leq a \text{ 时 } v = \frac{Pbx}{6EI} (l^2 - x^2 - b^2) \quad (\downarrow)$$

$$\theta = \frac{Pb}{6EI} (l^2 - 3x^2 - b^2) \quad (\text{顺时针})$$

$$a \leq x \leq l \text{ 时 } v = \frac{Pb}{6EI} \left[ \frac{l}{b} (x-a)^3 + (l^2 - b^2)x - x^3 \right] \quad (\downarrow)$$

$$\theta = \frac{Pb}{6EI} \left[ \frac{3l}{b} (x-a)^2 + l^2 - b^2 - 3x^2 \right] \quad (\text{顺时针})$$



(d) 题14-9引图

简支梁受集中力偶时的挠度及转角为 (图  $e$ )

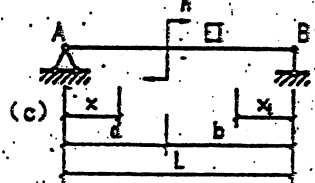
$$0 \leq x \leq a \text{ 时 } v = \frac{Mx}{6EI} (x^2 + 2l^2 + 3a^2 - 6al) \quad (\downarrow)$$

$$\theta = \frac{M}{6EI} (3x^2 + 2l^2 + 3a^2 - 6al) \quad (\text{顺时针})$$

$$a \leq x \leq l \text{ 时 } v = \frac{Mx_1}{6EI} (6bl - 3b^2 - 2l^2 - x_1^2) \quad (\downarrow)$$

$$(0 \leq x_1 \leq b \text{ 时})$$

$$\theta = \frac{M}{6EI} (3x_1^2 + 2l^2 + 3b^2 - 6bl) \quad (\text{顺时针})$$



(e) 题14-9引图

(a) 由式 (b), 取  $x = 3l/4$ ,  $a = b = l/2$ , 得

$$\begin{aligned} v_{ba} &= \frac{P}{6EI} \cdot \frac{l}{2} \left[ \frac{1}{1/2} \left( \frac{3l}{4} - l/2 \right)^3 + (l^2 - l^2/4) \cdot 3l/4 - 27l^3/64 \right] \\ &= \frac{Pl^3}{12EI} \left( \frac{1}{32} + \frac{9}{16} - \frac{27}{64} \right) = \frac{11Pl^3}{768EI} \end{aligned}$$

由式 (a), 取  $a = 3l/4$ ,  $b = l/4$ ,  $x = l/2$  得

$$v_{ab} = \frac{P}{6EI} \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{l}{2} \left[ l^2 - \frac{l^2}{4} - \frac{l^2}{6} \right] = \frac{11Pl^3}{768EI}$$

可见  $v_{ba} = v_{ab}$ , 位移互等定理成立。

(b) 在式 (d) 中, 取  $x_1 = l/4$ ,  $b = 2l/3$ , 得

$$\begin{aligned} v_{ba} &= \frac{M}{6EI} \cdot \frac{l}{4} \left( 6 \cdot \frac{2l}{3} \cdot l - 3 \cdot \frac{4l^2}{9} - 2l^2 - \frac{l^2}{16} \right) \\ &= \frac{Ml^2}{24EI} \left( 4 - \frac{4}{3} - 2 - \frac{1}{16} \right) = \frac{31Pl^2}{1152EI} \end{aligned}$$

在式 (a) 中, 取  $a = 3l/4$ ,  $b = l/4$ ,  $x = l/3$ , 得

$$\begin{aligned} \theta_{ab} &= \frac{P}{6EI} \cdot \frac{l}{4} \left( l^2 - 3 \cdot \frac{l^2}{9} - \frac{l^2}{16} \right) \\ &= \frac{Pl^2}{24EI} \left( 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{16} \right) = \frac{31Pl^2}{1152EI} \end{aligned}$$

因  $P = M$ , 则  $v_{ba} = v_{ab}$  (数值上), 位移互等定理成立。

(c) 在式 (d) 中取  $x_1 = l/3$ ,  $a = b = l/2$ , 得

$$\theta_{ba} = \frac{M}{6EI} \left[ 3 \cdot \frac{l^2}{9} + 2l^2 + 3 \cdot \frac{l^2}{4} - 6 \cdot \frac{l}{2} \cdot l \right]$$

$$= \frac{Ml^2}{6EI} \left( \frac{1}{3} + 2 + \frac{3}{4} - 3 \right) = \frac{Ml^2}{72EI}$$

在式 (c) 中取  $x=1/2$ ,  $a=2l/3$ ,  $b=l/3$ , 得

$$\begin{aligned} \theta_{ab} &= \frac{M}{6EI} \left[ 3 \cdot \frac{l^2}{4} + 2l^2 + 3 \cdot \frac{4l^2}{9} - 6 \cdot \frac{2l}{3} \cdot l \right] \\ &= \frac{Ml^2}{6EI} \left( \frac{3}{4} + 2 + \frac{4}{3} - 4 \right) = \frac{Ml^2}{72EI} \end{aligned}$$

可见,  $\theta_{ba} = \theta_{ab}$ , 位移互等定理成立。

[14-10] 试利用简支梁受满跨均布荷载和跨度中央处作用集中力两种加载情况, 验证功的互等定理。

解: 图 a 荷载在图 b 处位移上所做的功为

$$W'_{qp} = \int_0^{l/2} qv dx + \int_{l/2}^l qv dx = 2q \int_0^{l/2} v dx$$

由前题式 (a), 取  $a=b=l/2$ , 得图 b,  $0 \leq x \leq l/2$  段的挠度方程为

$$v = \frac{Px}{6EI} \cdot \frac{l}{2} (l^2 - x^2 - l^2/4) = \frac{P}{48EI} (3l^2x - 4x^3)$$

将它代入上式, 有

$$W'_{qp} = 2q \int_0^{l/2} \frac{P}{48EI} (3l^2x - 4x^3) dx = \frac{Pq}{24EI} \left[ \frac{3l^2}{2} \cdot \left( \frac{l}{2} \right)^2 - \left( \frac{l}{2} \right)^4 \right] = \frac{5Pql^4}{384EI}$$

图 a 荷载在图 b 荷载 (跨度中央) 处的挠度, 由附录二查得为  $\frac{5ql^4}{384EI}$  (1), 则图 b 荷载在图 a 位移上所做的功为

$$W'_{pq} = P \cdot \frac{5ql^4}{384EI} = \frac{5Pql^4}{384EI}$$

可见,  $W'_{qp} = W'_{pq}$ , 功的互等定理成立。

[14-11] 图示圆杆抗扭刚度为  $GI_p$ , 试用卡氏第一定理求 B 处的扭转角。

解: 设 B 处相对于 A 处的扭转角为  $\varphi_B$ , 则相对于 C 处的扭转角为  $-\varphi_B$ , 由式 (3-23)  $\varphi = M_t l / (GI_p)$ , 得用扭转角  $\varphi_B$  表示的 AB、BC 段的扭矩为

$$M_t = \frac{GI_p \varphi_B}{a} \quad (\text{AB 段})$$

$$M_t = -\frac{GI_p \varphi_B}{b} \quad (\text{BC 段})$$

按式 (14-10), 圆杆扭转时的应变能为

$$U = \sum_{i=1}^n \frac{M_i^2 l_i}{2GI_p} = \frac{a}{2GI_p} \left( \frac{GI_p \varphi_B}{a} \right)^2 + \frac{b}{2GI_p} \left( -\frac{GI_p \varphi_B}{b} \right)^2 = \frac{GI_p \varphi_B^2}{2ab} (a+b)$$

按卡氏第一定理式 (14-27), 得与扭转角  $\varphi_B$  相应的外扭转力偶  $T$  为:

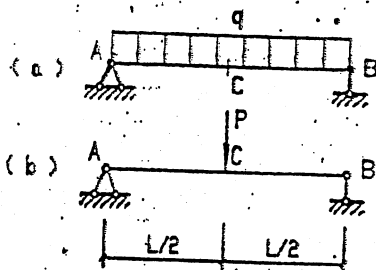


图 14-10

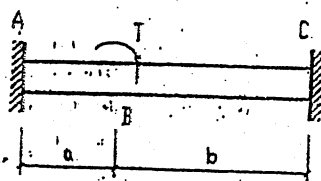


图 14-11

$$T = \frac{\partial U}{\partial \varphi_B} = \frac{\partial}{\partial \varphi_B} \left[ \frac{GI_p \varphi_B}{2ab} (a+b) \right] = \frac{GI_p \varphi_B}{ab} (a+b)$$

解得 B 处的扭转角  $\varphi_B$  为

$$\varphi_B = \frac{abT}{GI_p(a+b)}$$

[14-12] 有一顶端悬挂的等直杆, 假设材料的应力—应变关系为  $\sigma^n = B\varepsilon$ , 式中  $B$  和  $n$  均为常数, 杆长为  $l$ , 材料单位体积重度为  $\gamma$ 。试用克罗蒂—恩盖塞定理求该杆在自重作用下的伸长值  $\delta$ 。

解: 为了求杆在自重作用下的伸长  $\delta$ ; 在杆的下端加一虚构力  $P$ , 如图所示, 则杆的轴力为

$$N(x) = \gamma Ax + P$$

式中  $A$  为杆的横截面积, 则杆中应力为

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A} = \gamma x + \frac{P}{A}$$

根据式 (14-24), 杆单位体积的余能为

$$u^* = \int_0^{\sigma(x)} \varepsilon d\sigma = \int_0^{\sigma(x)} \frac{\sigma^n}{B} d\sigma = \frac{[\sigma(x)]^{n+1}}{(n+1)B} = \frac{1}{(n+1)B} \left( \gamma x + \frac{P}{A} \right)^{n+1}$$

则杆的余能, 按式 (14-25b) 为

$$\begin{aligned} U^* &= \int_V u^* dV = A \int_0^l u^* dx = A \int_0^l \frac{1}{(n+1)B} \left( \gamma x + \frac{P}{A} \right)^{n+1} dx \\ &= \frac{A}{(n+1)(n+2)B} \left( \gamma + \frac{P}{A} \right)^{n+2} \end{aligned}$$

应用克罗蒂—恩盖塞定理式 (14-28), 得与  $P$  相对应的位移  $\delta$  为

$$\delta = \frac{\partial U^*}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} \left[ \frac{A}{(n+1)(n+2)B} \left( \gamma + \frac{P}{A} \right)^{n+2} \right] = \frac{1}{(n+1)B} \left( \gamma + \frac{P}{A} \right)^{n+1}$$

令  $P=0$ , 即得杆在自重作用下的伸长  $\delta$  为

$$\delta = \frac{\gamma^{n+1} l^{n+1}}{B(n+1)}$$

[14-13] 试用卡氏第二定理计算图示悬臂梁 C 处的挠度  $v_C$ 。

解: 为了求 C 处的挠度, 在 C 处加一虚构集中力  $P_0$ , 得梁的弯矩  $M(x)$  为

$$\begin{aligned} M(x) &= -M - Px \\ &= -M - Px - P_0(x-l/2) \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{(AC 段)} \\ \text{(CB 段)} \end{array}$$

按式 (14-14), 得梁的应变能为

$$\begin{aligned} U &= \int_0^l \frac{M^2(x)}{2EI} dx = \frac{1}{2EI} \left[ \int_0^{l/2} (-M - Px)^2 dx + \int_{l/2}^l \left[ -\left( M - \frac{P_0 l}{2} \right) - (P + P_0)x \right]^2 dx \right] \\ &= \frac{1}{2EI} \left[ \int_0^{l/2} (M^2 + 2PMx + P^2 x^2) dx + \int_{l/2}^l \left[ \left( M - \frac{P_0 l}{2} \right)^2 + 2(P + P_0) \left( M - \frac{P_0 l}{2} \right) x + (P + P_0)^2 x^2 \right] dx \right] \end{aligned}$$

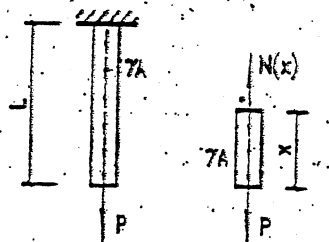


图 14-12

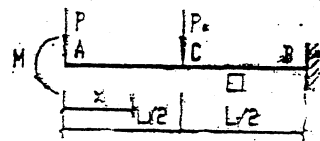


图 14-13

$$= \frac{1}{2EI} \left\{ \frac{M^2}{2} l + \frac{PMl^2}{4} + \frac{P^2 l^3}{24} + (M - \frac{P_0 l}{2})^2 (l - \frac{l}{2}) + (P + P_0)(M - \frac{P_0 l}{2})(l^2 - \frac{l^2}{4}) + (P + P_0)^2 \frac{1}{3} (l^3 - \frac{l^3}{8}) \right\}$$

$$= \frac{l}{48EI} \{ (12M^2 + 6PMl + P^2 l^2) + 12(M - \frac{P_0 l}{2})^2 + 18(P + P_0)(M - \frac{P_0 l}{2}) + 7l^2(P + P_0)^2 \}$$

应用卡氏第二定理(14-29), 得与  $p_0$  相对应的挠度  $v_c$ 。

$$v_c = \frac{\partial U}{\partial P_0} = \frac{l}{48EI} \left[ -12(M - \frac{P_0 l}{2}) + 18(M - \frac{P_0 l}{2} - P_0 l) + 14l^2(P + P_0) \right]$$

令  $P_0 = 0$ , 即得悬臂梁自由端在  $P$ 、 $M$  作用下, 梁中央  $C$  处的挠度为

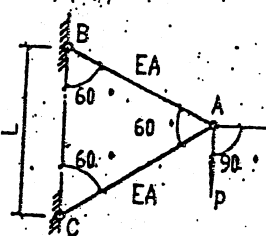
$$v_c = \frac{l}{48EI} \left[ -12M + 18(M - \frac{Pl}{2}) + 14Pl^2 \right] = \frac{Ml^2}{8EI} + \frac{5Pl^3}{48EI}$$

[14-14] 试用卡氏第二定理计算图示简单桁架  $A$  处的竖向及水平位移。各杆的  $EA$  均相同。

解: 为求  $A$  处的水平位移, 在  $C$  处加一虚构水平力  $H$ 。求得各杆的轴力为

$$AB \text{ 杆 } N_{AB} = \frac{H}{\sqrt{3}} + P$$

$$AC \text{ 杆 } N_{AC} = \frac{H}{\sqrt{3}} - P$$



题 14-14 图

按式(14-3), 桁架的应变能为

$$U = \sum_{i=1}^n \frac{N_i^2 l_i}{2E_i A_i} = \frac{l}{2EA} \left[ \left( \frac{H}{\sqrt{3}} + P \right)^2 + \left( \frac{H}{\sqrt{3}} - P \right)^2 \right] = \frac{l}{2EA} \left( \frac{2H^2}{3} + 2P^2 \right)$$

则按卡氏第二定理(14-29)式, 得  $A$  点的位移(在  $P$ 、 $H$  作用下)

$$\text{竖向位移} = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{2Pl}{EA}$$

$$\text{水平位移} = \frac{\partial U}{\partial H} = \frac{2Hl}{3EA}$$

令  $H=0$ , 得在  $A$  处受  $P$  作用时,  $A$  处的位移

$$\text{竖向位移} = \frac{2Pl}{EA}$$

$$\text{水平位移} = 0$$

[14-15] 图示梁支承在弹簧刚度(引起单位位移所需的力)分别为  $k_1$  和  $k_2$  的两个弹簧上, 已知梁的抗弯刚度  $EI$ , 试求  $C$  处的挠度  $v_c$ 。

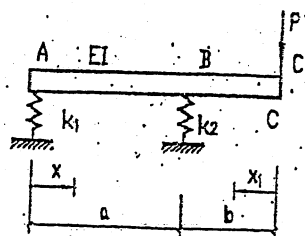
解: 梁的支反力为  $R_A = \frac{Pb}{a}$  (1),

$$R_B = \frac{P(a+b)}{a} \text{ (1)}, \text{ 梁的弯矩为:}$$

$$M(x) = -\frac{Pb}{a} x \quad (AB \text{ 段})$$

$$= -Px_1 \quad (CB \text{ 段})$$

梁  $AC$  中的应变能, 按式(14-14)计算, 为



题 14-15 图

$$U_1 = \int_0^a \frac{M^2(x)}{2EI_z} dx = \frac{1}{2EI} \left[ \int_0^a \left( \frac{-Pbx}{a} \right)^2 dx + \int_a^b (-Px_1)^2 dx \right] = \frac{P^2 b^2}{6EI} (a+b)$$

两个弹簧的应变能, 用功能原理 (14-1) 式计算, 这时, 弹簧 A ( $k_1$ )、B ( $k_2$ ) 的位移 (变形) 分别为  $\delta_A = R_A/k_1$ ,  $\delta_B = R_B/k_2$ , 其弹簧的应变能为

$$\text{弹簧 A: } U_2 = \frac{1}{2} R_A \delta_A = \frac{1}{2k_1} R_A^2 = \frac{P^2 b^2}{2a^2 k_1}$$

$$\text{弹簧 B: } U_3 = \frac{1}{2} R_B \delta_B = \frac{1}{2k_2} R_B^2 = \frac{P^2 (a+b)^2}{2a^2 k_2}$$

则图示结构 (两个弹簧、一根梁组成) 的总应变能为

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = \frac{P^2 b^2}{6EI} (a+b) + \frac{P^2 b^2}{2a^2 k_1} + \frac{P^2 (a+b)^2}{2a^2 k_2}$$

应用卡氏第二定理 (14-29) 式, 得与 P 力相对应的 C 处挠度  $v_c$  为

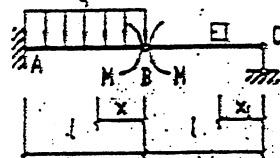
$$v_c = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{Pb^2(a+b)}{3EI} + \frac{P}{a^2} \left[ \frac{b^2}{k_1} + \frac{(a+b)^2}{k_2} \right]$$

[14-16] 已知梁的抗弯刚度 EI, 求中间铰 B 左、右两截面的相对转角  $\Delta\theta_B$ 。

解: 为了求 B 处的相对转角加一对等值反向的虚构力偶 M。不难求得梁 BC 的内力。

$$\text{弯矩 } M(x_1) = -\frac{M}{l} x_1$$

$$\text{剪力 } V(x_1) = \frac{M}{l}$$



题 14-16 图

可见附属梁 BC 作用于 AB 梁 B 处的力为  $M/l$  ( $\downarrow$ ), 则 AB 梁的弯矩为

$$M(x) = -M - \frac{M}{l} x - \frac{qx^2}{2}$$

按式 (14-14), 得全梁的总应变能为:

$$\begin{aligned} U &= \int_0^l \frac{M^2(x)}{2EI_z} dx = \frac{1}{2EI} \left[ \int_0^l \left( -M - \frac{M}{l} x - \frac{qx^2}{2} \right)^2 dx + \int_0^l \left( -\frac{M}{l} x_1 \right)^2 dx_1 \right] \\ &= \frac{1}{2EI} \left[ \int_0^l \left( M^2 + \frac{M^2}{l^2} x^2 + \frac{q^2 x^4}{4} + \frac{2M^2}{l} x + qMx^2 + \frac{Mqx^3}{l} \right) dx + \frac{M^2 l^3}{3l^3} \right] \\ &= \frac{1}{2EI} \left( M^2 l + \frac{M^2 l^3}{3l^2} + \frac{q^2 l^5}{20} + \frac{M^2 l^2}{l} + \frac{qMl^3}{3} + \frac{Mql^4}{4l} + \frac{M^2 l^3}{3l^2} \right) \\ &= \frac{1}{2EI} \left( M^2 + \frac{M^2}{3} + \frac{q^2 l^4}{20} + M^2 + \frac{qMl^2}{3} + \frac{qMl^2}{4} + \frac{M^2}{3} \right) \\ &= \frac{1}{2EI} \left( \frac{8}{3} M^2 + \frac{7qM}{12} l^2 + \frac{q^2 l^4}{20} \right) \end{aligned}$$

应用卡氏第二定理 (14-29) 式, 得与一对 M 相对应的相对转角为

$$\Delta\theta_B = \frac{\partial U}{\partial M} = \frac{1}{2EI} \left( \frac{16M}{3} + \frac{7q}{12} l^2 \right)$$

令  $M=0$ , 得所求的解

$$\Delta\theta_B = \frac{7ql^4}{24EI}$$

[14-17] 求图示框架 A、B 间的相对位移，设 EI 为常数。

解：框架各杆的弯矩为

AC 杆  $M(x) = Px$  (左边受拉)

CD 杆  $M(x_1) = Ph$  (下边受拉)

BD 杆  $M(x) = Px$  (右边受拉)

按式 (14-14) 框架的应变能为

$$U = \int_0^h \frac{M^2(x)}{2EI_z} dx = \frac{1}{2EI} \left[ \int_0^h (Px)^2 dx + \int_0^a (Ph)^2 dx_1 + \int_0^h (Px)^2 dx \right]$$

$$= \frac{P^2}{2EI} \left( \frac{2h^3}{3} + h^2 a \right) = \frac{P^2 h^2}{2EI} \left( \frac{2h}{3} + a \right)$$

应用卡氏第二定理，得与一对 P 力相对应的相对位移为

$$\delta_{ab} = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{Ph^2}{EI} \left( \frac{2h}{3} + a \right) \quad (---)$$

[14-18] 试用卡氏第二定理求图示梁变形过程中梁轴线所扫过的面积。

解：为了求梁轴线扫过的面积，沿梁加一满

跨虚构均布荷载 q，如图所示，则梁的弯矩为

$$M(x) = \frac{q}{2}(lx - x^2) + \frac{M}{l}x$$

按式 (14-14) 得梁的应变能为

$$U = \int_0^l \frac{M^2(x)}{2EI_z} dx = \frac{1}{2EI} \int_0^l \left( \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2} + \frac{Mx}{l} \right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{2EI} \int_0^l \left( \frac{q^2 l^2 x^2}{4} + \frac{q^2 x^4}{4} + \frac{M^2 x^2}{l^2} - \frac{q^2 lx^3}{2} + qMx^2 - \frac{qMlx^3}{l} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2EI} \left( \frac{q^2 l^4}{12} + \frac{q^2 l^4}{20} + \frac{M^2}{3} - \frac{q^2 l^4}{8} + \frac{qMl^2}{3} - \frac{qMl}{4} \right) = \frac{1}{2EI} \left( \frac{q^2 l^4}{120} + \frac{qMl^2}{12} + \frac{M^2}{3} \right)$$

应用卡氏第二定理 (14-29) 式，得与 q 相对应的位移，即变形过程中梁轴线所扫过的面积

$\int_0^l v dx$  为

$$\int_0^l v dx = \frac{\partial U}{\partial q} = \frac{1}{EI} \left( \frac{ql^5}{120} + \frac{Ml^3}{24} \right)$$

令  $q=0$ ，得梁 B 端仅受 M 作用时，变形过程中梁轴线所扫过的面积

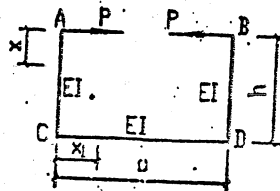
$$\text{扫过的面积} = \frac{Ml^3}{24EI}$$

说明：上述卡氏第二定理的应用，也可以用功能原理证明。设  $v_q$  为均布荷载 q 单独作用时梁的挠曲线方程， $v_M$ 、 $\theta_{BM}$  为梁 B 端仅受力偶 M 时梁的挠曲线方程及梁 B 端沿 M 向的转角。假设先加均布荷载 q，后加梁 B 端力偶 M，由于结构的应变能与加线先后次序无关，按照功能原理 (14-1) 式，这时应变能又可表达为：

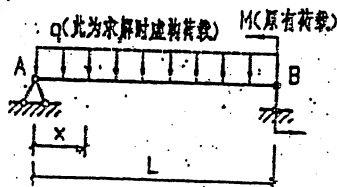
$$U = W = \int_0^l \frac{1}{2} q v_q dx + \int_0^l q v_M dx + \frac{1}{2} M \theta_{BM}$$

则

$$\frac{\partial U}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q} \left( \int_0^l \frac{1}{2} q v_q dx \right) + \int_0^l v_M dx = \int_0^l (v_q + v_M) dx = \int_0^l v dx$$



题 14-17 图



题 14-18 图



## 第十五章 动荷载

[15-1] 图示两杆件, 其长度  $l$ 、截面面积  $A$  及材料的重度  $\gamma$  均相等, 仅约束情况不同: 一杆放置在光滑平面上, 另一杆则一端固定。试求两杆离右端为  $x$  处截面上的轴力各为多少?

解: (a) 该杆作匀加速直线运动,

$$\text{加速度为 } a = \frac{P}{m} = \frac{Pg}{Al\gamma}$$

利用动静法, 杆的受力如图所示。惯性力为分布线荷载  $q$ , 其集度为

$$q = \frac{l \cdot A \cdot \gamma}{g} \cdot a = \frac{P}{l}$$

$$\therefore N(x) = P - qx = (1 - \frac{x}{l})P$$

(b) 该杆受静载  $P$ ,  $N(x) = P$

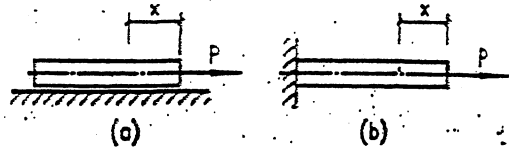


图 15-1 题

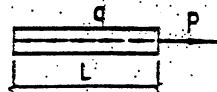


图 15-1 解图 (b) 所示杆件受力图

[15-2] 图示起重机构 A 的重量为 20kN, 装在三根 No30b 工字钢组成的梁上。今用绳索起吊重物 60kN, 并以等加速度  $2.5\text{m/s}^2$  上升。求绳内所受力及梁内最大正应力 (考虑梁自重)。

解: 利用动静法。绳索受力  $N_d$ , 起吊物及梁受力如图所示。

$$F = \frac{P}{g}a \text{ 为作用在起吊重物上的惯性力, } q$$

为梁的自重产生的分布荷载集度。

$$N_d = P + F = \left(1 + \frac{a}{g}\right)P = 75.3\text{ kN}$$

$$\text{梁内最大正应力 } \sigma_d = \frac{M_{d\max}}{W}$$

$$\text{式中 } M_{d\max} = \frac{ql^2}{8} + \frac{(Q + N_d)l}{4}$$

其中  $l = 2.5\text{m} \times 2 = 5\text{m}$ ,  $Q = 20\text{kN}$ ,  $N_d = 75.3\text{kN}$ 。

查附录三 (型钢表), No30b 工字钢的理论重量为

$$\frac{q}{2} = 52.79\text{ kg/m} = 517.3\text{ N/m}$$

抗弯截面模量为:  $W/2 = 627\text{ cm}^3 = 6.27 \times 10^5\text{ mm}^3$

将以上数据代入, 得

$$\sigma_{d\max} = \frac{\frac{ql^2}{8} + \frac{(Q + N_d)l}{4}}{W} = 97.6\text{ MPa}$$

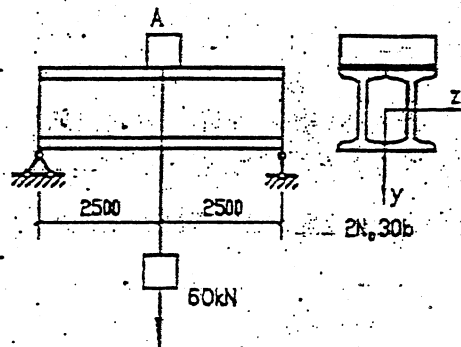


图 15-2 题

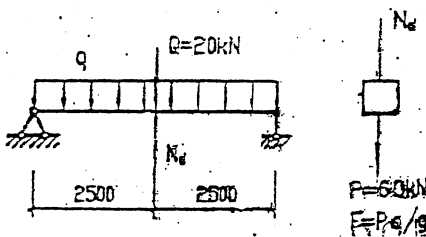


图 15-2 解图

[15-3] 在直径为 100mm 的轴上装有转动惯量  $I = 0.5\text{ kN} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2$  的飞轮, 轴的转速为 300 转/分。制动器开始作用后, 在 20 转内将飞轮刹停, 试求轴内的最大剪应力。设在制动前, 轴已与驱动装置脱开, 且轴承内的摩擦力可以不计。

解: 刹车前的角速度  $\omega_0 = \frac{2\pi n}{60} = 10\pi (1/\text{s})$  飞轮在 20 转内刹住, 假设所花时间为  $t$ , 并作匀减速运动。由理论

$$\omega_1 = \omega_0 + \varepsilon t = 0$$

力学可知:  $\begin{cases} \varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon t^2 = 20 \times 2\pi \end{cases}$

联立以上两式求解, 得  $\varepsilon = -\frac{\omega_0^2}{2\varphi} = -\frac{5\pi}{4} (1/s^2)$

根据式 (15-8),  $\tau_{d\max} = \frac{M_{d\max}}{W_t} = \frac{l|\varepsilon|}{\pi d^3/16} = \frac{16l|\varepsilon|}{\pi d^3} = 10 \text{ MPa}$

[15-4] 飞轮作等角速度转动, 最大圆周速度  $v = 30 \text{ m/s}$ , 材料的重度  $\gamma = 72.6 \text{ kN/m}^3$ . 若不计轮辐的影响, 试求轮缘内的正应力。

解: 根据式 (15-10), 轮缘内的正应力为

$$\sigma_d = \frac{\gamma v^2}{g} = \frac{(72.6 \times 10^{-6}) \times (30 \times 10^3)^2}{9.8 \times 10^3} = 6.67 \text{ MPa}$$

[15-5] 一杆以角速度  $\omega$  绕铅垂轴在水平面内转动。已知杆长为  $L$ , 横截面积为  $A$ , 重量为  $W$ , 材料的弹性模量为  $E$ ; 另有一重量为  $W$  的重物连接在杆的端点, 如图所示。试求杆的伸长。

解: 利用动静法求解, 杆受力如图所示。

作用在重物  $W$  上的离心力  $F = \frac{W}{g} a = \frac{W}{g} \omega^2 L$

作用在杆上的离心力为分布荷载, 集度为

$$q = \frac{W_1}{Lg} \omega^2 x$$

用截面法可求得杆任一截面  $x$  上的轴力为:

$$N(x) = F + \int_x^L q dx = \frac{W}{g} \omega^2 L + \int_x^L \frac{W_1}{Lg} \omega^2 x dx = \frac{W}{g} \omega^2 L + \frac{W_1 \omega^2}{2Lg} (L^2 - x^2)$$

因此, 杆的伸长为:

$$\Delta l = \int_0^L \frac{N(x) dx}{EA} = \frac{1}{EA} \int_0^L \left[ \frac{W}{g} \omega^2 L + \frac{W_1 \omega^2}{2Lg} (L^2 - x^2) \right] dx$$

$$= \frac{\omega^2 L^2}{3EA} (3W + W_1)$$

[15-6] 试写出图示各种冲击情况下, 动荷系数  $K_d$  中的静位移  $\Delta_s$  的表达式。已知各梁的抗弯刚度均为  $EI$ 。(图  $d$  中忽略杆的轴向变形。)

解: (a)  $\Delta_s = v_A = \frac{Pl^3}{3EI}$

(b)  $\Delta_s = v_B = \frac{P(l/2)^3}{3EI} = \frac{Pl^3}{24EI}$

(c)  $\Delta_s = \Delta_C = \frac{Pl^3}{48EI} + \frac{1}{2} v_B$

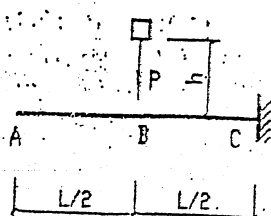
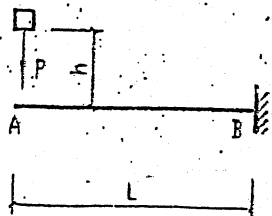


图 15-6a 图

图 15-6b 图

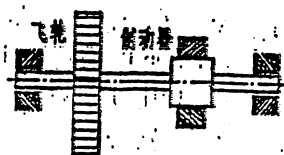


图 15-3 图

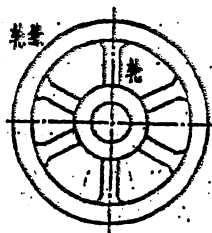


图 15-4 图

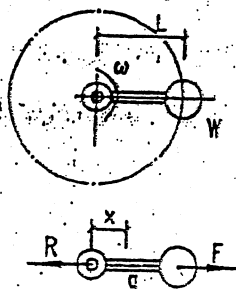


图 15-5 图

$$= \frac{Pl^3}{48EI} + \frac{1}{2} \frac{Pl}{K}$$

$$= \frac{Pl^3}{48EI} + \frac{Pl}{4K}$$

$$(d) \Delta_s = v_c = \frac{Pa^3}{3EI} + \theta_B \cdot a$$

$$= \frac{Pa^3}{3EI} + \frac{(Pa) \cdot a}{EI} \cdot a = \frac{4Pa^3}{3EI}$$

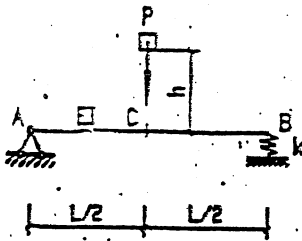


图 15-6c

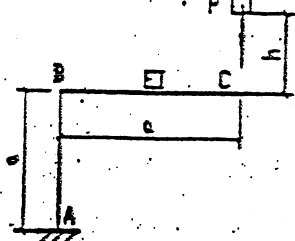


图 15-6d

[15-7] 图示圆截面钢杆的直径  $d=30\text{mm}$ , 杆长  $l=2\text{m}$ , 材料的弹性模量  $E=200\text{GPa}$ . 冲击物的重量  $W=500\text{N}$ , 自高度  $h=50\text{mm}$  处沿杆轴自由落下, 使杆受到冲击. 试求在下列两种情况下杆横截面上的动应力.

(a) 圆盘上无弹簧 (图 a), 重物直接落在圆盘上.

(b) 圆盘上放一弹簧 (图 b), 弹簧刚度  $K=1\text{kN/mm}$ , 重物落在弹簧上.

解:  $\sigma_d = K_d \sigma_s$  根据式 (15-13), 自由落体冲击时的动荷系数为

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_s}}$$

$$(a) \sigma_s = \frac{N}{A} = \frac{W}{A} = \frac{500}{(\pi/4) \times 30^2} = 0.7074 \text{ MPa}$$

$$\Delta_s = \Delta_{AB} = \frac{NI}{EA} = \frac{500 \times (2 \times 10^3)}{(200 \times 10^3) \times (\pi \times 30^2 / 4)}$$

$$= 7.074 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

$$\therefore K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 50}{7.074 \times 10^{-3}}} = 120$$

$$\sigma_d = 120 \times 0.7074 = 84.9 \text{ MPa}$$

$$(b) \sigma_s = \frac{N}{A} = \frac{W}{A} = 0.7074 \text{ MPa}$$

$$\Delta_s = \Delta' + \frac{W}{K} = \frac{NI}{EA} + \frac{W}{K} = 7.074 \times 10^{-3} + \frac{500}{1 \times 10^3}$$

$$= 7.074 \times 10^{-3} + 500 \times 10^{-3} = 5.071 \times 10^{-1} \text{ mm}$$

$$\therefore K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 50}{5.071 \times 10^{-1}}} = 15.1$$

$$\sigma_d = 15.1 \times 0.7074 = 10.7 \text{ MPa}$$

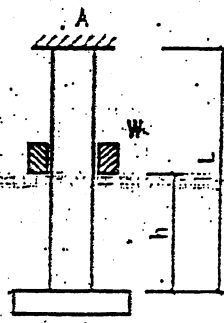


图 15-7a

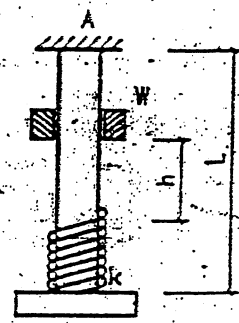


图 15-7b

[15-8] 试求图示各梁受自由落体重物冲击时, 在指定截面的最大位移.

解: (a)  $(\Delta_s)_c = K_d (\Delta_s)_s$

$$\text{由附录二, } (\Delta_s)_c = v_c = \frac{Q(1/3)3l^2 - 4(1/3)^2}{48EI}$$

$$= \frac{23Ql^3}{1296EI}$$

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{(\Delta_s)_D}}$$

$$\text{由附录二, } (\Delta_s)_D = v_D = \frac{Q(1/3)(2l/3)^2 - (2l/3)^2 - (l/3)^2}{6EI} = \frac{4Ql^3}{243EI}$$

$$\text{于是 } (\Delta_s)_C = \left(1 + \sqrt{1 + \frac{243Eih}{2Ql^3}}\right) \cdot \frac{23Ql^3}{1296EI}$$

$$(b) \quad (\Delta_s)_D = K_d (\Delta_s)_D$$

$$(\Delta_s)_D = v_D = -\frac{(Wl)^2}{16EI} = -\frac{Wl^3}{16EI}$$

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{(\Delta_s)_C}}$$

$$(\Delta_s)_C = v_C = \frac{Wl^3}{3EI} + 0_B \cdot l = \frac{Wl^3}{3EI} + \frac{(Wl)^2}{3EI} \cdot l = \frac{2Wl^3}{3EI}$$

$$\therefore (\Delta_s)_D = -\left(1 + \sqrt{1 + \frac{3Eih}{Wl^3}}\right) \cdot \frac{Wl^3}{16EI} \quad (1)$$

[15-9] 一重量  $P=1\text{kN}$  的物体以水平速度  $v=1.5\text{m/s}$  冲击竖立的木桩, 如图所示。已知  $l=6\text{m}$ ,  $a=4\text{m}$ , 截面尺寸  $h=200\text{mm}$ ,  $b=100\text{mm}$ , 木材的弹性模量  $E=10\text{GPa}$ 。(1) 试求木桩横截面的最大动应力  $\sigma_s$ ; (2) 若  $P$  值增大一倍, 动应力为多少?

解:  $\sigma_{s\max} = K_d \sigma_{s\max}$  根据式 (15-16),

$$K_d = \sqrt{\frac{v^2}{g\Delta_s}}$$

$$\sigma_{s\max} = \frac{M_{\max}}{W_{11}} = \frac{Pa}{hb^2/6} = \frac{6Pa}{hb^2}$$

$\Delta_s$  为  $P$  作为静荷载沿水平方向作用在  $C$  点时  $C$  点的挠度, 即

$$\Delta_s = \frac{Pa^3}{3EI} = \frac{Pa^3}{3E(hb^3/12)} = \frac{4Pa^3}{Ehb^3}$$

(1)  $P=1\text{kN}$  时,

$$\sigma_{s\max} = \frac{6 \times (1 \times 10^3) \times (4 \times 10^3)}{200 \times 100^2} = 12 \text{ MPa}$$

$$\Delta_s = \frac{4 \times (1 \times 10^3) \times (4 \times 10^3)^3}{(10 \times 10^3) \times 200 \times 100^3} = 128 \text{ mm}$$

$$K_d = \sqrt{\frac{(1.5 \times 10^3)^2}{(9.8 \times 10^3) \times 128}} = 1.34$$

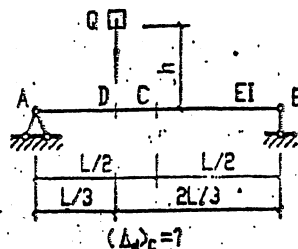
$$\therefore \sigma_{d\max} = 1.34 \times 12 = 16.1 \text{ MPa}$$

(2)  $P$  增大一倍, 则静应力及静位移也相应增大一倍, 即

$$\sigma_{s\max} = 2 \times 12 = 24 \text{ MPa}, \quad \Delta_s = 2 \times 128 = 256 \text{ mm}$$

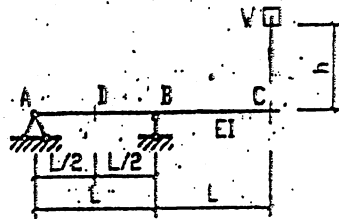
但是动荷系数为原来的  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ , 即  $K_d = \frac{1.34}{\sqrt{2}} = 0.9475$

$$\therefore \sigma_{d\max} = 0.9475 \times 24 = 22.7 \text{ MPa}$$



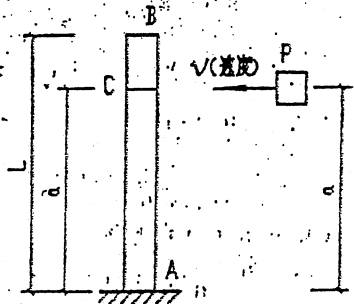
$(\Delta_s)_C = ?$

题 15-8a 图



$(\Delta_s)_B = ?$

题 15-8b 图



题 15-9 图

[15-10] 图示钢吊索的下端悬挂一重量  $Q=25\text{kN}$  的重物，并以速度  $v=0.5\text{m/s}$  下降。当吊索长为  $l=5\text{m}$  时，滑轮突然被卡住，试求吊索受到的冲击荷载  $P_d$ 。设钢吊索的横截面积  $A=414\text{mm}^2$ ，弹性模量  $E=170\text{GPa}$ ，滑轮和吊索的质量可略去不计。

解：  $P_d = K_d \cdot Q$ ，根据式 (15-17)，

$$K_d = 1 + \sqrt{\frac{v^2}{g\Delta_s}}$$

$$\text{式中 } \Delta_s = \Delta_{AB} = \frac{Ql}{EA} = \frac{(25 \times 10^3) \times (5 \times 10^3)}{(170 \times 10^9) \times 414} = 1.776 \text{ mm}$$

$$K_d = 1 + \sqrt{\frac{(0.5 \times 10^{-3})^2}{9.8 \times 10^2 \times 1.776}} = 4.79$$

$$\therefore P_d = 4.79 \times 25 = 120 \text{ kN}$$

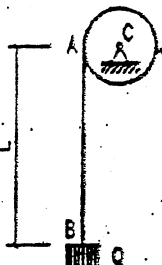


图 15-10

[15-11] 图示圆轴的 B 端装有飞轮，轴和飞轮以等角速度  $\omega$  旋转，飞轮的转动惯量为  $I$ ，轴的质量可以忽略不计。轴的另一端 A 装有刹车离合器，试求 A 端突然刹车时，轴内的最大剪应力  $(\tau)_{\max}$ 。设轴的直径为  $d$ ，长度为  $L$ ，材料的剪切弹性模量为  $G$ 。

解：当 A 端突然刹车时，由于惯性 B 端的飞轮继续转动，因而 AB 轴受到冲击，发生扭转变形。这类问题是冲击扭转，可从基本方程 (15-12) 出发求解。

飞轮的角速度从  $\omega$  最后降到零，

其动能损失为  $T = \frac{1}{2} I \omega^2$ ，位能不变。

设轴受冲击后产生的最大扭转角为  $\varphi_d$ ，相应的最大扭矩为  $M_d$ ，则弹性应变能增加为  $U_d = \frac{1}{2} M_d \cdot \varphi_d$

$$\text{其中 } \varphi_d = \frac{M_d \cdot L}{GI_p}$$

$$\therefore U_d = \frac{M_d^2 L}{2GI_p}$$

将以上式子代入式 (15-12)，得  $\frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{M_d^2 L}{2GI_p}$

$$\therefore M_d = \sqrt{\frac{GI_p I}{L}} \cdot \omega$$

$$\tau_{d\max} = \frac{M_d}{W_t} = \sqrt{\frac{GI_p I}{L}} \cdot \frac{\omega}{W_t}$$

$$\text{圆轴的 } W_t = \pi d^3 / 16, \quad I_p = \pi d^4 / 32$$

$$\therefore \tau_{d\max} = \sqrt{\frac{G \cdot (\pi d^4 / 32) \cdot I}{L}} \cdot \frac{\omega}{\pi d^3 / 16} = \frac{4\omega}{d} \sqrt{\frac{GI}{2\pi L}}$$

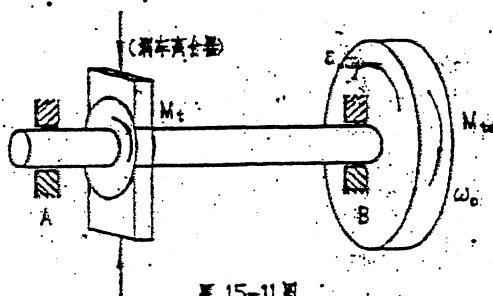


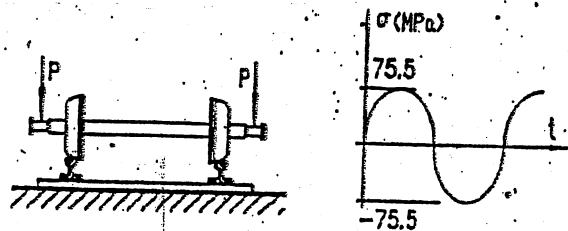
图 15-11

## 第十六章 循环应力下的疲劳强度计算

【16-2】 火车车轴受力如图所示。已知  $a=500\text{mm}$ ,  $L=1435\text{mm}$ , 车轴中段直径  $d=150\text{mm}$ 。若  $P=50\text{kN}$ , 试求车轴中段截面边缘上任一点的最大应力  $\sigma_{\max}$ 、最小应力  $\sigma_{\min}$  和循环特征  $R$ , 并作出  $\sigma-t$  曲线。

解:

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} &= -\sigma_{\min} = \frac{M}{W} \\ &= \frac{Pa}{\pi d^3 / 32} = \frac{32Pa}{\pi d^3} = 75.5 \text{ MPa} \\ R &= \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = \frac{-75.5}{75.5} = -1\end{aligned}$$



题 16-2 图

【16-3】 试求出图示各种循环应力情况下的平均应力  $\sigma_m$ , 应力幅  $\sigma_a$  和循环特征  $R$ 。

解:  $\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}$      $\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$      $R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$

(a)  $\sigma_m = \frac{80 + (-80)}{2} = 0$

$\sigma_a = \frac{80 - (-80)}{2} = 80 \text{ MPa}$

$R = \frac{-80}{80} = -1$

(b)  $\sigma_m = \frac{120 + (-40)}{2} = 40 \text{ MPa}$

$\sigma_a = \frac{120 - (-40)}{2} = 80 \text{ MPa}$

$R = \frac{-40}{120} = -\frac{1}{3}$

(c)  $\sigma_m = \frac{160 + 0}{2} = 80 \text{ MPa}$

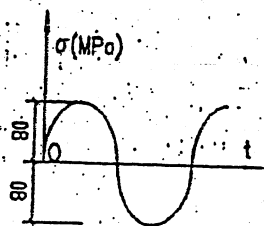
$\sigma_a = \frac{160 - 0}{2} = 80 \text{ MPa}$

$R = \frac{0}{160} = 0$

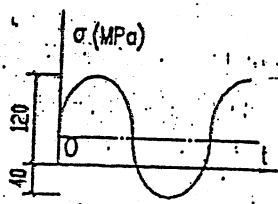
(d)  $\sigma_m = \frac{200 + 40}{2} = 120 \text{ MPa}$

$\sigma_a = \frac{200 - 40}{2} = 80 \text{ MPa}$

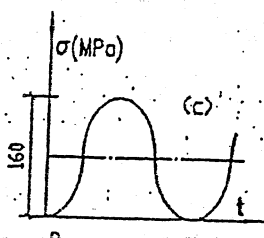
$R = \frac{40}{200} = \frac{1}{5}$



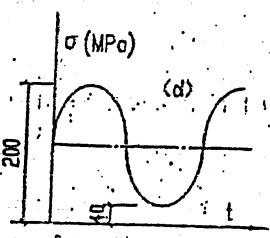
题 16-3a 图



题 16-3b 图



题 16-3c 图



题 16-3d 图

【16-4】 一根受纯弯曲的旋转圆轴如图所示。已知  $D=60\text{mm}$ ,  $d=50\text{mm}$ ,  $r=5\text{mm}$ 。轴的材料为碳钢, 其强度极限  $\sigma_b=800\text{MPa}$ ,  $\sigma_s=280\text{MPa}$ , 轴的表面经过精车加工。试确定该轴的疲劳极限  $\sigma_0$ 。

解:  $R=1$ ,  $\sigma_{-1}^0 = \frac{\varepsilon_\sigma \beta}{K_\sigma} \sigma_{-1}$  (见式 (16-8))

轴的几何特征:  $D/d=60/50=1.2$ ,  $r/d=5/50=0.1$

由图 16-8 查得  $D/d=2$ ,  $r/d=0.1$  时的

应力集中系数为:  $\sigma_s=500\text{MPa}$  时,  $(K_\sigma)_0=1.55$

$\sigma_s=1200\text{MPa}$  时,  $(K_\sigma)_0=1.80$

利用线性插值,  $\sigma_s=800\text{MPa}$  时,

$$(K_\sigma)_0 = 1.55 + \frac{1.80-1.55}{1200-500} \times (800-500) = 1.66$$

由图 16-11 的曲线 1 查得修正系数  $\xi=0.78$ , 由式 (16-5), 得

$$K_\sigma = 1 + \xi[(K_\sigma)_0 - 1] = 1 + 0.78 \times (1.66 - 1) = 1.51$$

由图 16-12 的曲线 2 查得  $\varepsilon_\sigma=0.75$ , 由图 16-13 查得  $\beta=0.90$

将以上数据代入式 (16-8), 得

$$\sigma_{-1}^0 = \frac{0.75 \times 0.90}{1.51} \times 280 = 125\text{MPa}$$

[16-5] 图示旋转阶梯轴, 作用一不变的弯矩  $M=1\text{kN}\cdot\text{m}$ , 轴表面精加工。已知轴的材料为碳钢,  $\sigma_s=600\text{MPa}$ ,  $\sigma_{-1}=250\text{MPa}$ , 试求轴的工作安全系数  $n_\sigma$ 。

解:  $R=1$ , 由式 (16-11)

$$n_\sigma = \frac{\varepsilon_\sigma \beta \sigma_{-1}}{K_\sigma \sigma_{\max}}$$

轴的几何特征:  $D/d=70/50=1.4$ ,  $r/d=7.5/50=0.15$

由图 16-8:  $\sigma_s=500\text{MPa}$  时,  $(K_\sigma)_0=1.35$

$\sigma_s=1200\text{MPa}$  时,  $(K_\sigma)_0=1.50$

利用线性插值,  $\sigma_s=600\text{MPa}$  时,

$$(K_\sigma)_0 = 1.35 + \frac{1.50-1.35}{1200-500} \times (600-500) = 1.37$$

由图 16-11 的曲线 J,  $\xi=0.95$ , 由式 (16-5), 得

$$K_\sigma = 1 + \xi[(K_\sigma)_0 - 1] = 1 + 0.95 \times (1.37 - 1) = 1.35$$

由图 16-12 的曲线 2,  $\varepsilon_\sigma=0.75$ ; 由图 16-13,  $\beta=0.93$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_{\min}} = \frac{M}{\pi d^3 / 32} = \frac{32M}{\pi d^3} = \frac{32 \times (1 \times 10^6)}{\pi \times 50^3} = 81.5\text{MPa}$$

$$\text{将以上数据代入式(16-11), 得 } n_\sigma = \frac{0.75 \times 0.93 \times 250}{1.35 \times 81.5} = 1.58$$

[16-6] 图示一精炼碳钢制成的阶梯形圆轴, 其表面为粗车加工, 受对称循环的转矩  $M_t$  作用。已知  $M_{t\max}=300\text{N}\cdot\text{m}$ , 规定安全系数  $n=2.0$ , 材料的  $\sigma_s=400\text{MPa}$ ,  $\sigma_{-1}=100\text{MPa}$ , 校核疲劳强度。

解:  $R=1$ , 轴的几何特征:

$$D/d = \frac{50}{40} = 1.25, \quad \frac{r}{d} = \frac{5}{40} = 0.125$$

由图 16-9,  $\sigma_s=500\text{MPa}$  时,  $(K_\tau)_0=1.20$

$\sigma_s=1200\text{MPa}$  时,  $(K_\tau)_0=1.35$

利用线性插值,  $\sigma_s=400\text{MPa}$  时,

$$(K_\tau)_0 = 1.20 + \frac{1.35-1.20}{1200-500} \times (500-400) = 1.18$$

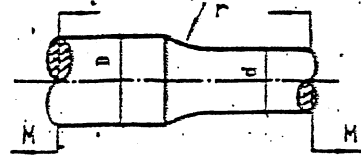


图 16-4

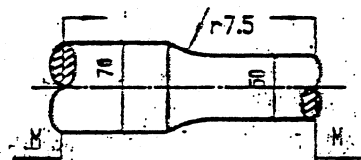


图 16-5

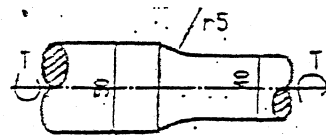


图 16-6

由图 16-11 的曲线 2,  $\xi=0.78$ 。由式 (16-5), 得

$$K_f = 1 + \xi[(K_f)_0 - 1] = 1 + 0.78 \times (1.18 - 1) = 1.14$$

由图 16-12 的曲线 2,  $\varepsilon_r=0.78$ ; 由图 16-13,  $\beta=0.90$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{t\max}}{W_{t\min}} = \frac{M_{t\max}}{\pi d^3 / 16} = \frac{16M_{t\max}}{\pi d^3} = \frac{16 \times (300 \times 10^3)}{\pi \times 40^3} = 23.9 \text{ MPa}$$

将以上数据代入式 (16-11), 得

$$n_t = \frac{\varepsilon_r \beta \tau_{-1}}{K_f \tau_{\max}} = \frac{0.78 \times 0.90 \times 100}{1.14 \times 23.9} = 25.8 > n = 2.0$$

该轴满足疲劳强度条件。

【16-7】 图示一精炼碳钢制成的阶梯圆轴, 其表面经磨削加工。已知  $\sigma_b=900\text{MPa}$ ,  $\sigma_s=410\text{MPa}$ ,  $\tau_s=240\text{MPa}$ 。作用于轴上的弯矩变化于  $-1\text{kN}\cdot\text{m}$  到  $+1\text{kN}\cdot\text{m}$  之间; 扭矩变化于 0 到  $1.5\text{kN}\cdot\text{m}$  之间。已知材料的敏感系数  $\psi_t=0.05$ 。若规定安全系  $n=2$ , 试校核轴的疲劳强度。

解: 这属弯扭组合循环应力。

(1) 求该轴在弯矩单独作用下的工作安全系数  $n_\sigma$ 。

$$\sigma_{\max} = -\sigma_{\min} = \frac{\lambda M_{\max}}{W_{\min}} = \frac{32M_{\max}}{\pi d^3} = \frac{32 \times (1 \times 10^6)}{\pi \times 50^3} = 81.5 \text{ MPa}$$

$$R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = -1, \text{ 属对称循环。}$$

轴的几何特征  $D/d=60/50=1.2$ ,  $r/d=5/50=0.1$

由图 16-8,  $\sigma_b=500\text{MPa}$  时,  $(K_\sigma)_0=1.55$

$\sigma_b=1200\text{MPa}$  时,  $(K_\sigma)_0=1.80$

利用线性插值,  $\sigma_b=900\text{MPa}$  时,

$$(K_\sigma)_0 = 1.55 + \frac{1.80 - 1.55}{1200 - 500} \times (900 - 500) = 1.69$$

由图 16-11 的曲线 1,  $\xi=0.78$ 。由式 (16-5), 得

$$K_\sigma = 1 + \xi[(K_\sigma)_0 - 1] = 1 + 0.78 \times (1.69 - 1) = 1.54$$

由图 16-12 的曲线 2,  $\varepsilon_\sigma=0.75$ ; 由图 16-13 的曲线 2,  $\beta=1.0$

将以上数据代入式 (16-11), 得

$$n_\sigma = \frac{\varepsilon_\sigma \beta \sigma_{-1}}{K_\sigma \sigma_{\max}} = \frac{0.75 \times 1.0 \times 410}{1.54 \times 81.5} = 2.45$$

(2) 求该轴在扭矩单独作用下的工作安全系数  $n_\tau$ 。

$$\tau_{\max} = \frac{\lambda T_{\max}}{W_{t\min}} = \frac{16T_{\max}}{\pi d^3} = \frac{16 \times (1.5 \times 10^6)}{\pi \times 50^3} = 61.1 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\min} = \frac{\lambda T_{\min}}{W_{t\min}} = 0$$

$$R = \frac{\tau_{\min}}{\tau_{\max}} = 0, \text{ 属非对称循环, } \tau_m = \tau_a = \frac{\tau_{\max}}{2} = 30.6 \text{ MPa}$$

由图 16-9,  $\sigma_b=500\text{MPa}$  时,  $(K_\tau)_0=1.25$

$\sigma_b=1200\text{MPa}$  时,  $(K_\tau)_0=1.45$

利用线性插值,  $\sigma_b=900\text{MPa}$  时,

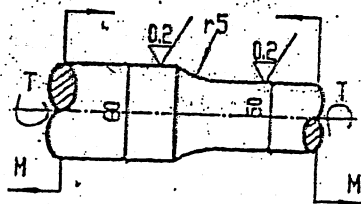


图 16-7



$$(K_f)_0 = 1.25 + \frac{1.45 - 1.25}{1200 - 500} \times (900 - 500) = 1.36$$

由图 16-11 的曲线 2,  $\xi = 0.71$ 。由式 (16-5), 得

$$K_f = 1 + \xi [(K_f)_0 - 1] = 1 + 0.71 \times (1.36 - 1) = 1.26$$

由图 16-12 的曲线 2 和图 16-13 的曲线 2, 同样可得  $\varepsilon_r = 0.75, \beta = 1.0$

将以上数据代入式 (16-14), 得

$$n_t = \frac{\tau_{-1}}{K_f \varepsilon_r \beta \tau_a + \psi_r \tau_m} = \frac{240}{1.26 \times 0.75 \times 1.0 \times 30.6 + 0.05 \times 30.6} = 4.53$$

(3) 求弯扭组合循环应力下的工作安全系数  $n_{\sigma}$ 。由式 (16-17), 得

$$n_{\sigma} = \frac{n_e n_t}{\sqrt{n_e^2 + n_t^2}} = \frac{2.45 \times 4.53}{\sqrt{2.45^2 + 4.53^2}} = 2.16 > n = 2$$

该轴满足疲劳强度条件。

