重庆大学

近三年考题 Date

08年 结构力学笔记（位移法、矩阵计算、稳定不考）

赵更新授

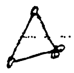
§1. 平面几何组成分析 （6分）

一、几何不变体系

任意荷载
不考虑材料应变 } 保持几何形状和位置不变

应有：① 足够的约束；② 约束布置合理。

二、几何不变体系的组成规则。（计算自由度个数不考）

 基本规则

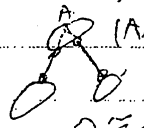
1. 二元体规则 （铰链不能共）

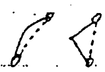
二元体：① 单铰 ② 不共线的两根链杆

2. 两刚片规则

3. 三刚片规则

注意：① 组成虚铰的两根链杆应是连接相同的两个刚片。

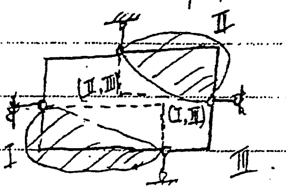

（A不是虚铰）

② 等效链杆 

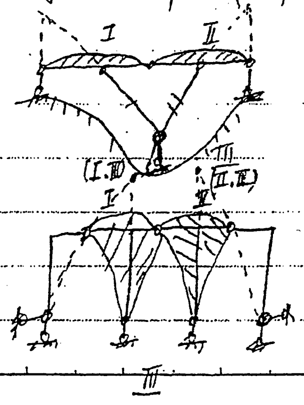
三、几何组成分析的途径

1. 直接应用二刚片或三刚片的规则 （往年考试、难度一般）

(1)



(2)



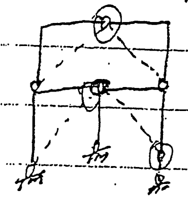
考题：变化刚片结构。

刚片：一杆根 △ 地基

约束：／ 铰

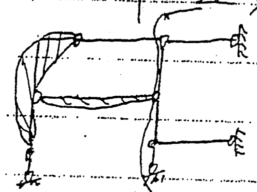
1

2、去二元体简化结构

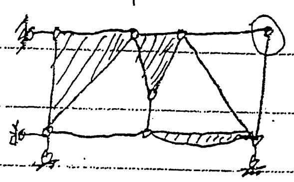


3、先确定一部分，逐步扩大到整体 (比较难的题)

(1)



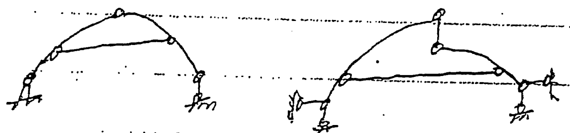
(2)



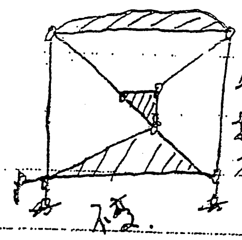
几何不变无多余约束。

4、有的体系只有3根支杆，有的多余3根

分析体系本身　　　往往要将体系本身和地基一起分析。

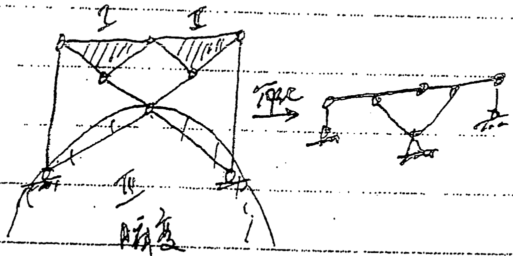


(1)



链杆多先
找几何不变
部分

不变.



瞬变

注意： 1. 关键是合理选择刚片和约束

2. 所有的构件都要用到，也不能重复使用

3. 关键于多余约束的个数 (刚片内部有多余约束)

§2、静定结构的内力计算（基础）比例小（考试）

一、静定结构内力计算基本方法

1、截取隔离体：一个结点、一根杆件或N个杆件。

根据切断杆件的类型，代以相应的约束力

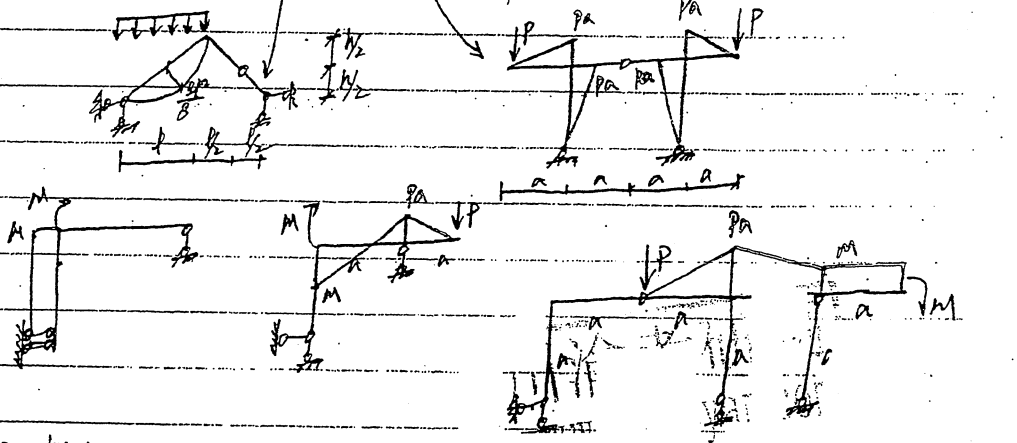
对复杂结构，宜先作组成分析：主从结构、两刚片结构（先取连接部分）

三刚片结构（切断刚片间连接处）

主从：先从后主。　两、三刚片：一般先求连接刚片的链杆或铰的约束力

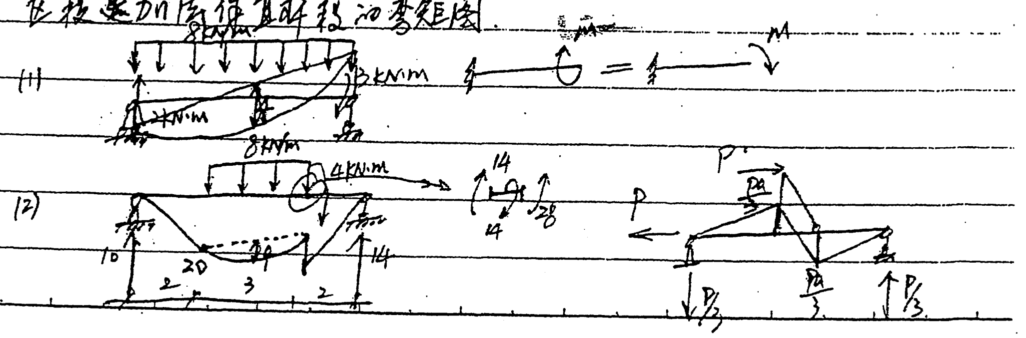
应用平衡方程计算反力和内力，尽可能每个方程求一个未知力。

注意利用构造和荷载特点先对某些杆件内力的性质或大小作出判断，例如零杆、二力杆、对称性、静定结构特性等。

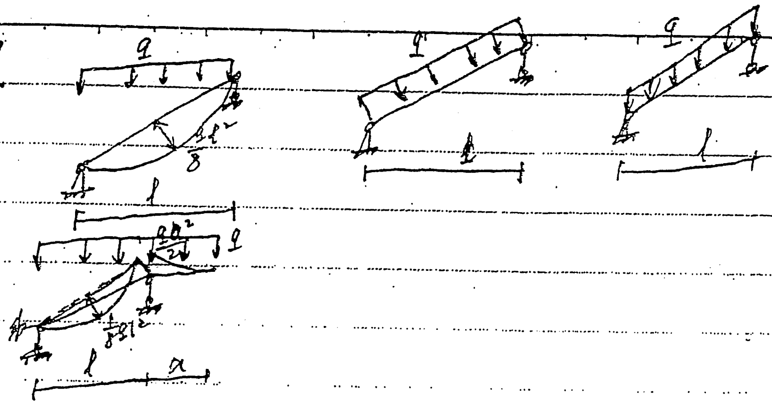


二、单跨静定梁

1、区段叠加法作直杆段的弯矩图



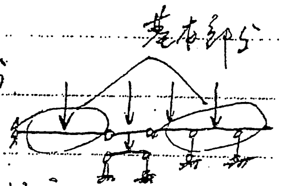
2. 斜梁

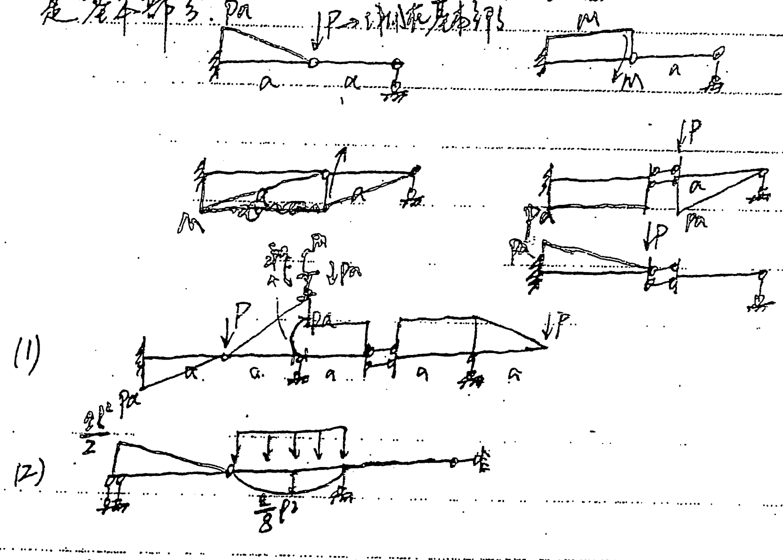


三. 多跨静定梁

分清基本部分和附属部分

能独立维持平衡的部分就是基本部分





四. 静定平面刚架 (11-2节)

1. 求作内力图的一般步骤

(1) 计算支反力和铰结处的相互作用力

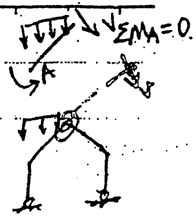
(2) 求各杆杆端截面内力

(3) 逐杆作内力图

1. 作弯矩图用区段叠加法

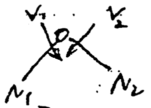
求杆端剪力方法：① 根据截面一边的外力直接计算

② 取杆件，利用杆端弯矩求杆端剪力



求杆端轴力方法：① 同上①

② 取结点，利用杆端剪力求轴力



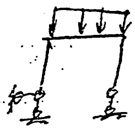
$\left.\begin{array}{l}\Sigma X=0\\ \Sigma Y=0\end{array}\right\}$ 求 $N_1 N_2$

2. 注意：直杆在集中力、均布荷载作用时内力图形状特点，及某些截面的内力图特点。

3. 对称性的利用。（静定结构教材未讲）

(1) 对称的静定结构

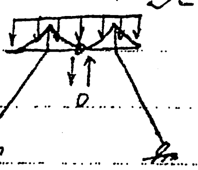
几何形状对称，支座反力对称（无刚度对称）



（支座不对称，支反力对称）

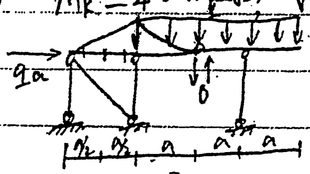
(2) 特点：对称结构，对称荷载，内力对称

对称结构，反对称荷载，内力反对称

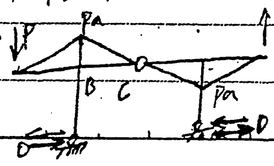


4. 对某些杆件或截面的内力作出判断。

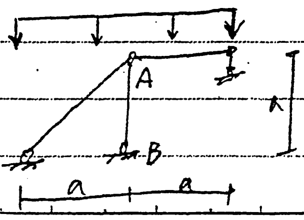
(1) $M_K=\frac{qa^2}{4}$（上侧受拉） $V_K=-\frac{qa}{2}$，$N_K=0$



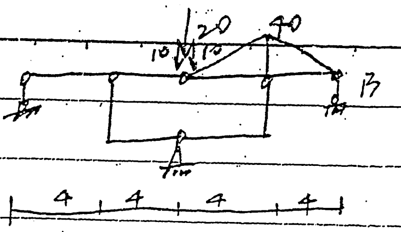
(2)



(3)



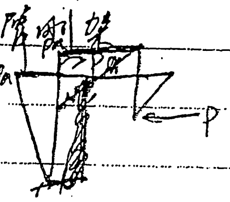
$N_{AB}=-qa$（压力）



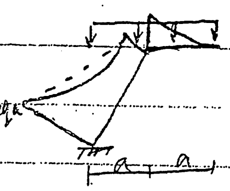
$R_B = -10kN(\downarrow)$

5. 悬臂刚架

(1)

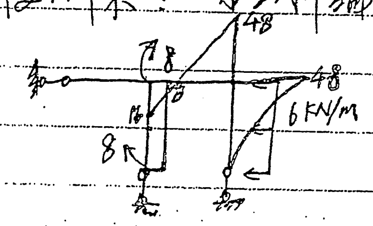


(2)

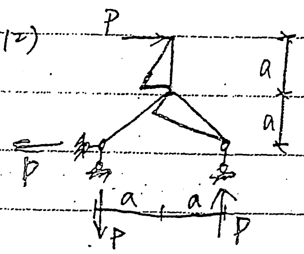


6. 简支刚架：求出杆端弯矩和支反力

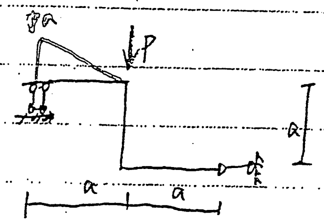
(1)



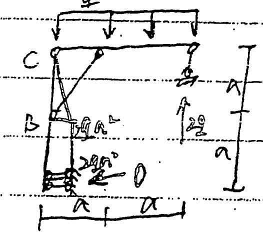
(2)



(3)

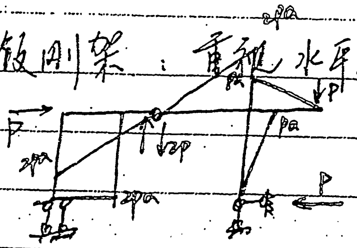


(4) $M_{BC} = 2qa^2$ (右侧受拉)

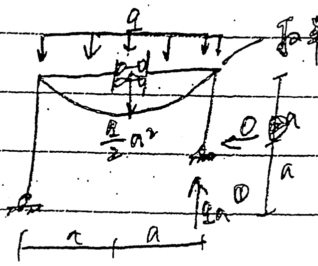


7. 三铰刚架：重视水平反力

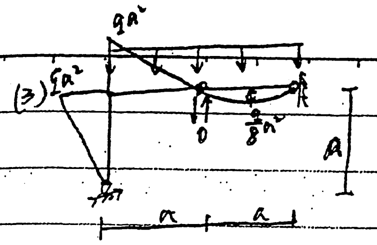
(1)



(2)



(3)

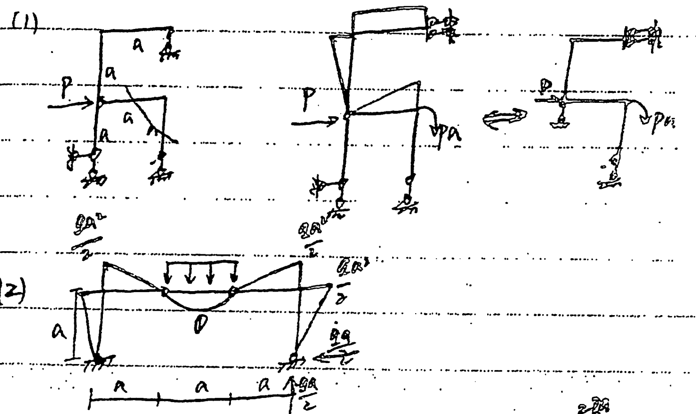


8. 主从结构：先算附属部分，后算基本部分

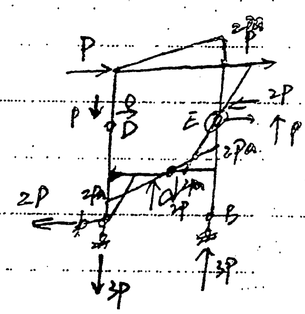
考试可能性大

(1)

(2)



9. 求铰结处时相互作用力.

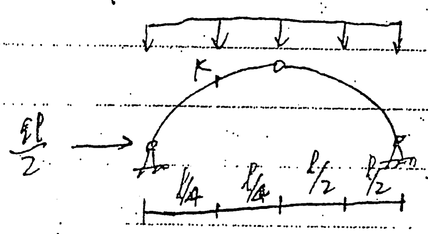


五. 三铰拱 （5分左右；不是重点）

1. 竖向作用下有水平反力. $M = M_0 - Hy$
2. 竖向作用下，三铰拱的反力只与三个铰的位置有关，与拱轴形状无关.
   $H = \frac{M_0}{f}$
3. 合理拱轴. 在给定荷载，拱轴中弯矩、剪力为零，只有轴力.
   只对特定的荷载.
4. 会求指定截面内力，求剪力用平衡条件.（不记公式）

例、图示对称抛物线三铰拱，水平反力 $H=\frac{ql}{2}$，则高跨比 $f/l=\frac{1}{4}$

截面K内力 $M_K=0$　剪力 $V_K=0$



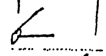
$$H=\frac{M_0}{f}=\frac{\frac{ql^2}{8}}{f}=\frac{ql}{2}$$

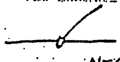
六、静定平面桁架（比较难，不会太难）

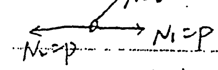
1. 基本方法：结点法、截面法

　　未知力都设为拉力，已知力按实际方向画。

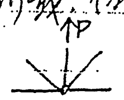
2. 判断零杆

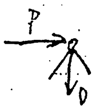
(1)  两杆不共线，无荷载，均为0

(2)  无荷载

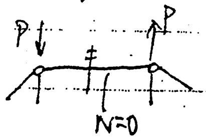
(3) 

(4) 对称荷载，位于对称轴上的"K"形结点（结点上无荷载）



(5) 

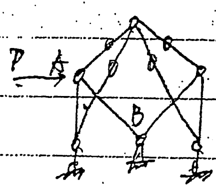
反对称荷载，与对称轴重合的杆为零杆

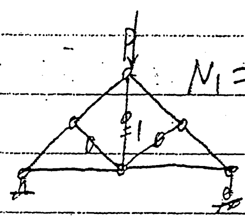
(6) 

反对称荷载，被对称轴垂直平分的杆为零杆

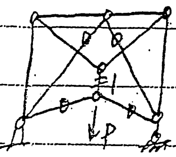
3. 先判断零杆以简化计算

(1) $N_{AB}=-\sqrt{2}P$　　(2) $N_1=0$





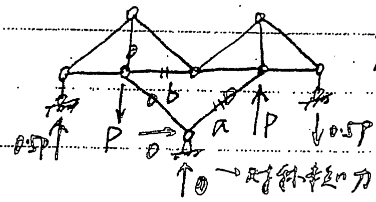
(3).



$N_1 = P$

对称结构·对称荷载

(4)



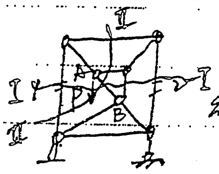
$N_A = 0$ $N_b = 0.5P$

反对称

↑0 一对称轴杆力 = 0

4. 例

(1)

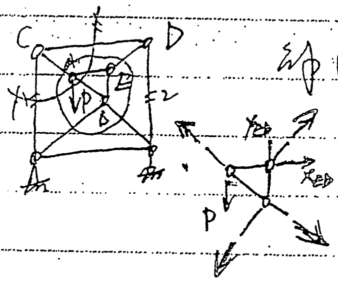


$N_1 =$ $N_2 =$

解(1): 作I-I，取上部 由 $\Sigma X = 0$

得 $N_{AB} = 0$ 依次取结点A·C·D得

$N_1 = -P$, $N_2 = -P$

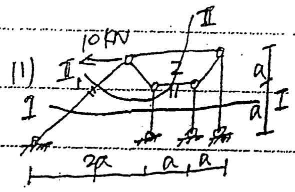


解(2): 作II-II 取上部. $\Sigma Y = 0$. $N_1 = -P$

作闭合截面，取内部. 由 $\Sigma M_B = 0$

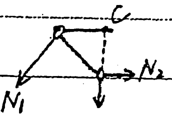
$X_{ED} = \frac{a}{b}P$ 由结点D·C求

(1)



作I-I的上部. $\Sigma X = 0$ 得 $N_1 = -10\sqrt{2}$

作II-II取部:

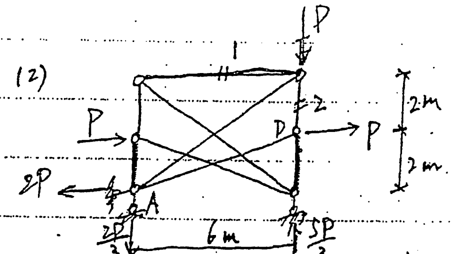


对C取矩. $\Sigma M_C = 0$.

$N_2 \cdot a - 14.1 a \cos 45^\circ = 0$

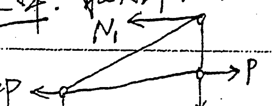
$N_2 = 10kN$.

(2)



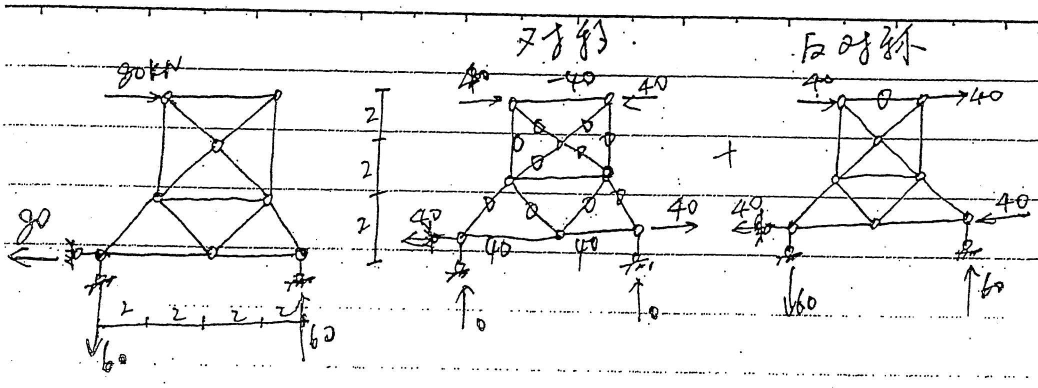
(1)同前题

解一. 切断连杆. 取ADF. 由 $N_1 = -P$



由结点F $N_2 = -\frac{5}{3}P$

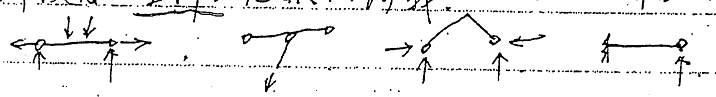
解二: 由结点 C or D 入手



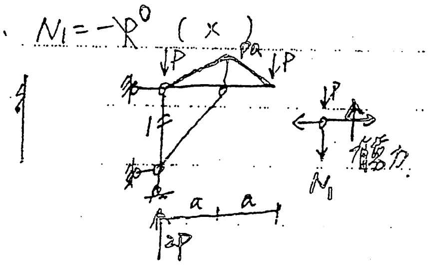
七、静定组合结构（比桁架难）

1. 关键是区分两类杆件.

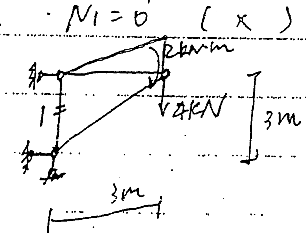
链杆：两端铰接的直杆，无横向荷载  非链杆（有弯矩）

梁式杆：

例1. $N_1=-P^0$ （×）



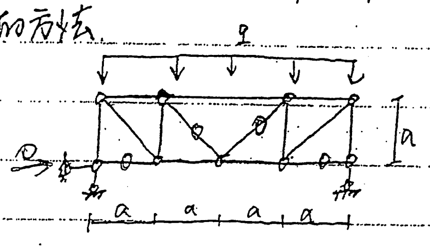
例2. $N_1=0^4$ （×）

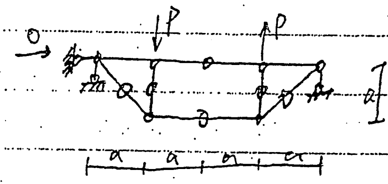


2. 关于零杆的判别

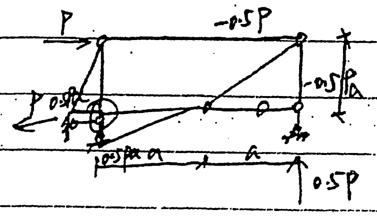
只要关于铰结点的杆件都是链杆，就可应用桁架中得到的判别零杆的方法.

(1)

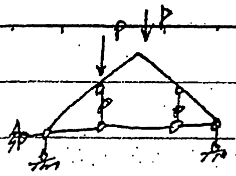




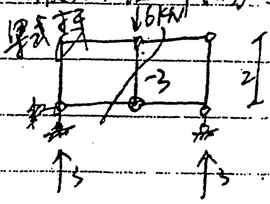
(3)



(4)

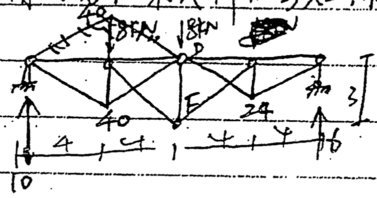


3. 一般先求链杆轴力，然后计算梁式杆内力.



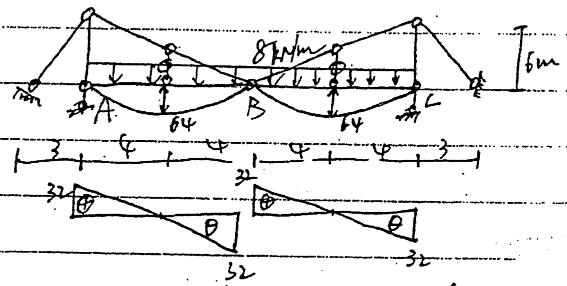
4. 有时先求梁式杆的弯矩，求剪力，最后求链杆轴力，也很方便.

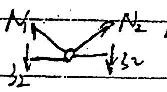
(1)



求 $N_{DF}=-24\,kN$

(2)





$N_1=N_2=\frac{160}{3}$

§3. 静定结构的位移计算

一、虚功原理 了解内容及应用条件 (不管证明)

$$\sum P\cdot\Delta+\sum R\cdot C=\sum\int Md\varphi+\sum\int Ndu+\sum\int Vd\eta$$

外力 内力

适用于各种结构，各种材料，各种原因产生的位移状态

二、单位荷载法计算位移的一般公式

1. $\Delta=\sum\int \bar{M}d\varphi+\sum\int \bar{N}du+\sum\int \bar{V}d\eta-\sum \bar{R}C$

适用于：各种外因产生的位移计算，各种材料的静定或超静定结构

2. 虚拟状态的设置

三、静定结构在各种外因作用下的位移计算

1. 荷载作用

$\Delta_P=\sum\int\frac{\bar{M}M_P}{EI}ds+$

适用于线弹性材料的静定或超静定结构

梁和刚架等 $\Delta_P=\int\frac{\bar{M}M_P}{EI}ds$ ① 桁架 $\Delta_P=\sum\frac{\bar{N}N_P}{EA}l$ ②

组合结构 $\Delta_P=①+②$

2. 支座位移

$\Delta_c=-\sum(\pm\bar{R}\cdot c)$ 只适用于静定结构

3. 温度变化

$\Delta_t=$ 适用于静定结构

4. 长度的制造误差

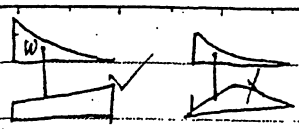
$\Delta_e=\sum\bar{N}\Delta l$ 适用于静定结构

☆四、图乘法

$$\Delta_P=\int\frac{\bar{M}M_P}{EI}ds=\sum\left(\frac{\pm\omega y_0}{EI}\right)$$

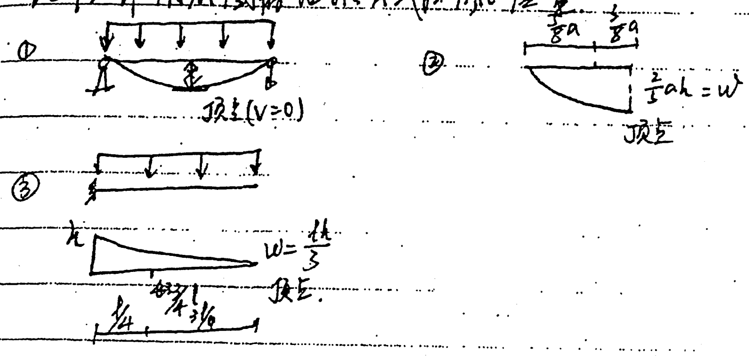
1. 适用条件：① 直杆 ② EI为常数 ③ $\bar{M}$、M_P 至少有一个直线图形

2. 竖标 y_0 必须取自计算 ω 的整个长度内是一条直线的图形



3、若ω与y_0在杆件同侧：乘积ωy_0取正.
　　— — — — 异侧 — — — 取负.

4、记住常用M图的面积公式和形心位置.



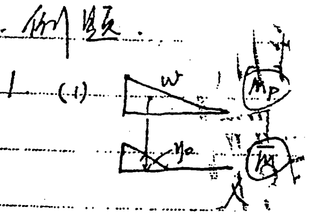
5、复杂图形分解成n个简单图形迭加

五、线弹性结构的互等定理

　　四个互等定理适用于线弹性材料的静定与超静定结构.

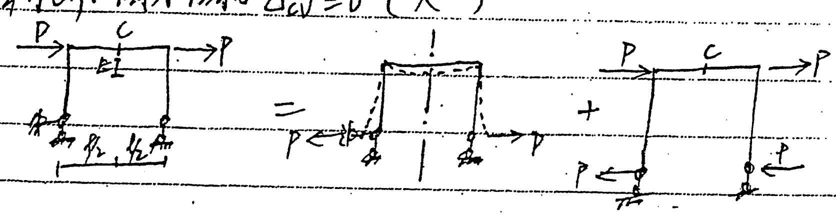
六、例题.

1 (1)

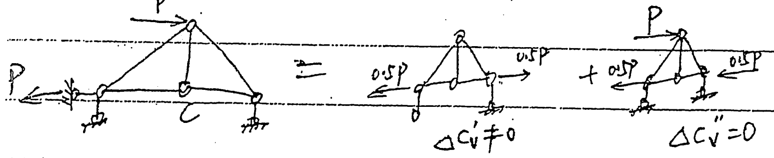


2、利用对称性判断.

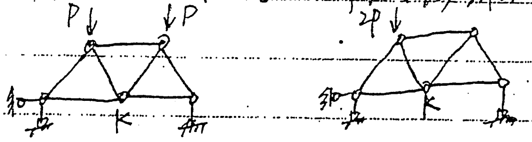
(1) 判断：图示结构 $\Delta_{CV}=0$ (×)



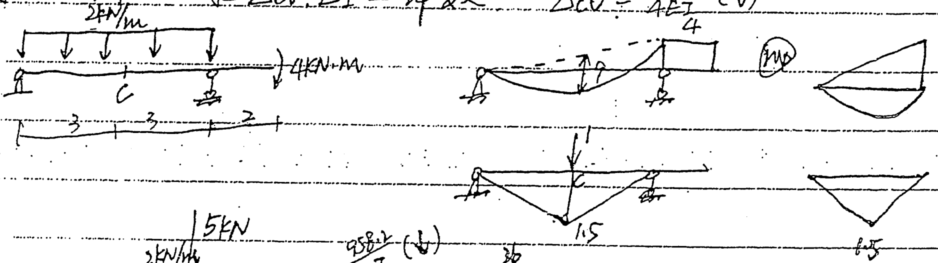
(12) 图示桁架 $\Delta_{cv}=0$ (✗)



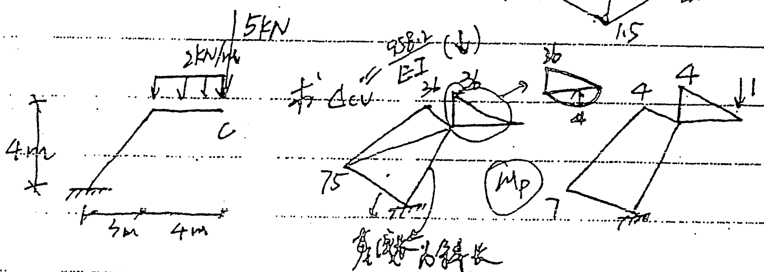
(13) 图a.b.为同一对称桁架，荷载不同，但K点竖向位移相等(✓)



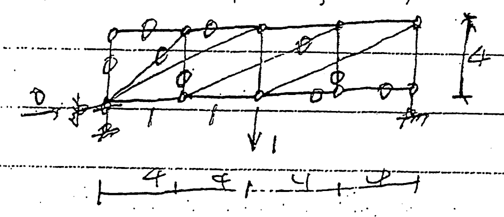
3. 利用图乘法求Δ_{cv}. EI=常数　$\Delta_{cv}=\frac{99}{4EI}$ (↓)



4.



5. 桁架下弦各杆因制造误差均长了2mm，求装配后跨中的挠度



$\Delta_{cv}=\sum \bar{N}\Delta l = 1\times2+1\times2=4mm$ (↓)

位移 课后一般不考

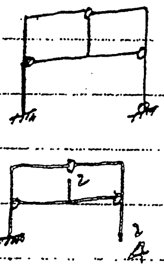
§4. 力法

一 判断超静定次数

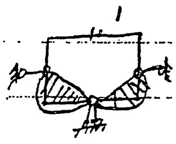
(1) 多余约束的个数

(2) 去约束，使超静定 → 静定

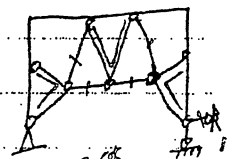
例 (1)



(2)

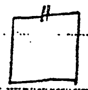


(3)



错组=元体 4+1=5

(3) 一个无铰闭合框有3个多余约束

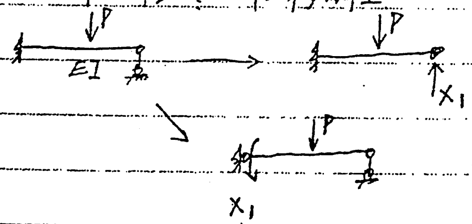


二. 关于力法的基本概念

1. 基本未知量：多余未知力

2. 基本结构 ：静定结构

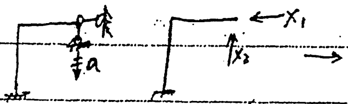
3. 基本方程：位移方程



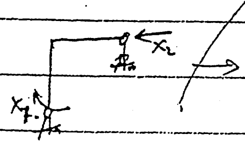
$\delta_{11}X_1+\Delta_{1P}=0$ → 原结构 $\Delta_{BV}=0$

基本结构

(2)



$$\begin{cases}\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2=0\\ \delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2=-a\end{cases}$$



$$\begin{cases}\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2=0\\ \delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2=0\end{cases}$$

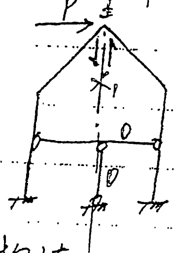
三、合理选择基本结构

1. 基本结构应尽可能有较多的独立部分，避免选取主从结构或三刚片

2. 对称结构宜选取对称的基本结构

(1) 若对称荷载，则反对称未知力为0.

(2) 若反对称荷载，则对称未知力为0.



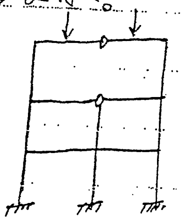
$\delta_{11}X_1+\Delta_{1p}=0$

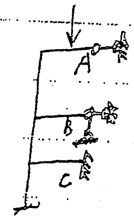
四、半结构法

沿对称轴切开，取结构的一半，并在切口处按原结构位移条件，设置相应支承。

（$\Delta_H,\Delta_V,\varphi$是否等于零）

(1)

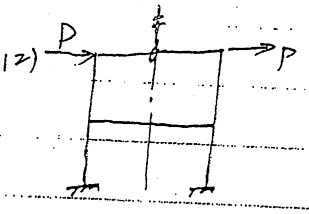


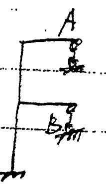


$\begin{cases}\Delta_{AH}=0\\ \Delta_{VH}\neq 0\\ \varphi_A\neq 0\end{cases}$ $\begin{cases}\Delta_{BH}=0\\ \Delta_{BV}=0\\ \varphi_B\neq 0\end{cases}$

$\begin{cases}\Delta_{CH}=0\\ \Delta_{CV}=0\\ \varphi_C=0\end{cases}$

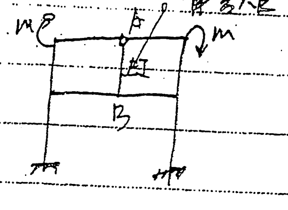
(2)

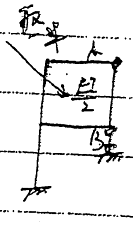




$\begin{cases}\Delta_{AH}\neq 0\\ \Delta_{AV}=0\\ \varphi_A\neq 0\end{cases}$ $\begin{cases}\Delta_{BH}\neq 0\\ \Delta_{BV}=0\\ \varphi_B\neq 0\end{cases}$

(3)





$\begin{cases}\Delta_{AH}\neq 0\\ \Delta_{AV}=0\\ \Delta_{BV}=0\end{cases}$

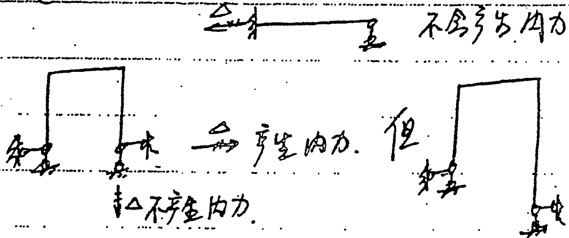
有可能考

五、支座位移和温度问题 不考.

1. 对于多余约束的支座发生位移时，会使超静定结构产生内力，且内力和大

2. 小与结构刚度(EA·EI)成正比.

不会产生内力.(少余约束)



产生内力. 但

BC不产生内力.

BC产生内力.

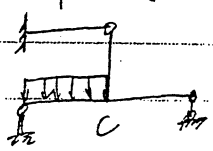
2. 温度变化时一般会使超静定结构产生内力，且与刚度成正比.
温度低一边受拉.

六、超静定结构的位移计算

1. 荷载作用.

基本方法仍然是单位荷载法

虚设的单位力可施加在任意一基本结构上

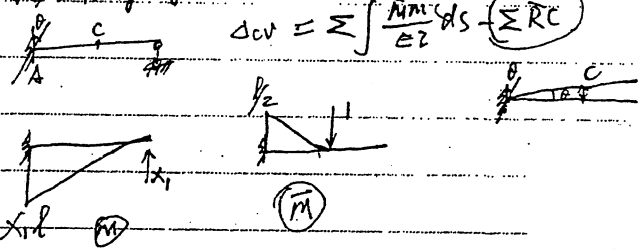


Δ_{cv}

(辅导书)

2. 支座位移时.

$$\Delta_{cv} = \sum\int \frac{\bar{M}M}{EI}ds - \sum \bar{R}c$$



七、力法计算结果的校核

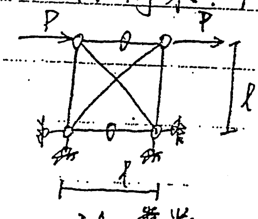
1. 平衡条件

2. 位移条件：检查结构中某横处的位移是否等于按最后内力图求出的该处位移.

八、例题

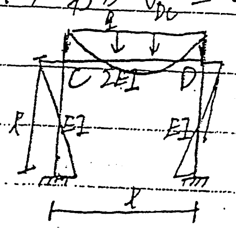
1. 填空

(1) 图示桁架，$N_{AB} = P$

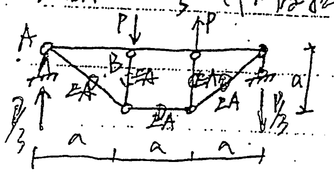


$EA=$常数

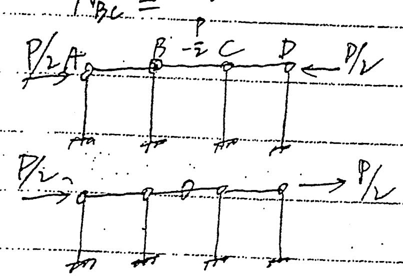
(2) 剪力 $V_{DC} = -\frac{ql}{2}$ (对称)



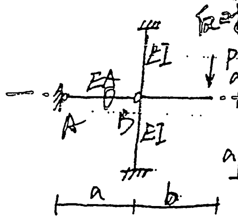
(3) $M_{BA} = \frac{Pa}{3}$ (下侧受拉)



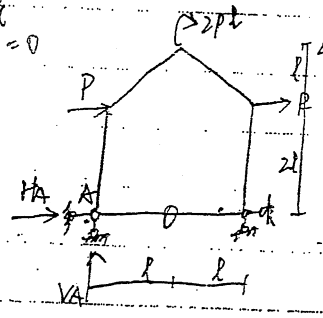
(4) 各杆 $EI=$常数，各梁 $EA=\infty$，则 $N_{BC} = -P/2$



(5)

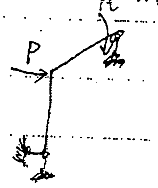


反对称荷载 $N_{AB}=0$

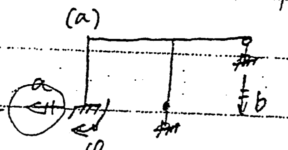


$EI=$常数 $H_A = -P$

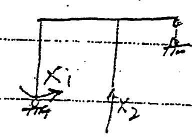
$V_A = -3P$



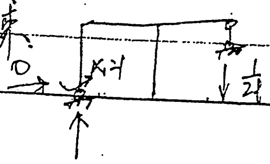
2. 图a结构选取图b基本结构，写出力法方程，并求方程中自由项



位移与a无关，说明a是多余约束

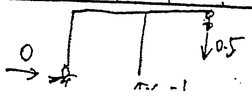


$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = -\varphi \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0 \end{cases}$$



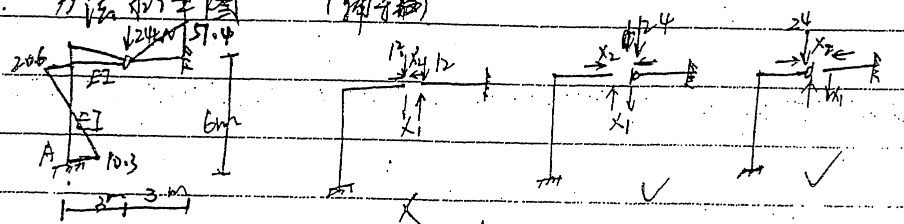
$\Delta_{1C} = -\sum \bar{R}_1 \cdot C = -\left(\frac{1}{2l}\cdot b\right) = -\frac{b}{2l}$

$\Delta_{2C} = -\sum \bar{R}_2 \cdot C = -0.5b$



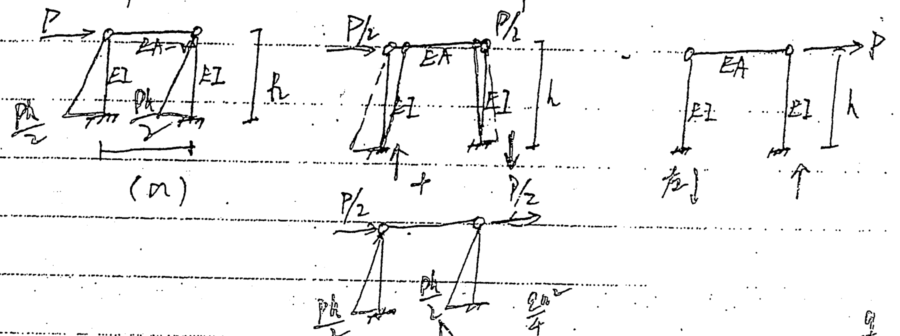
Date

3. 力法 求作M图 （辅导题）

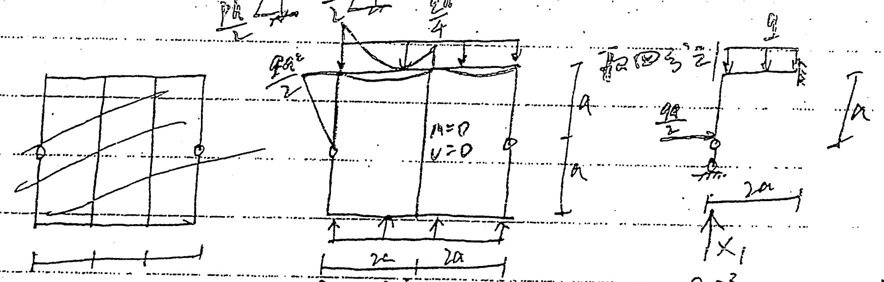


非对称结构：
荷载不能拆分

4. 分析图(a)与(b)，图(a)与(c) 排架柱底弯矩的不同

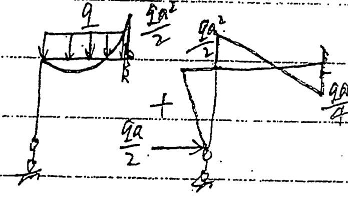


5.



取四分之一

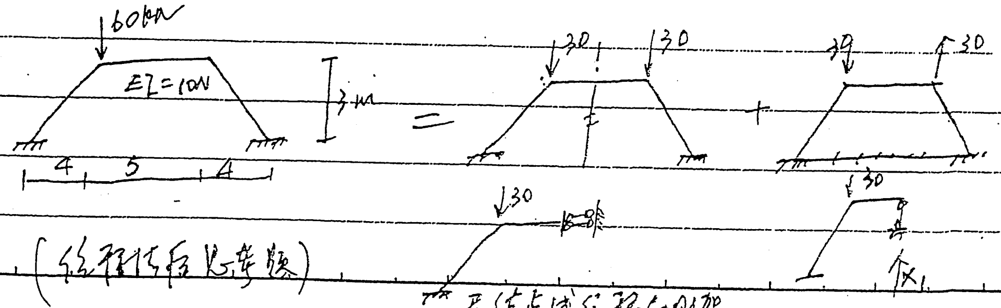
半结构：



$\delta_{11} = \frac{8a^3}{3EI}$ $\delta_{1P} = -\frac{3qa^4}{EI}$

$X_1 = \frac{9}{8}qa$

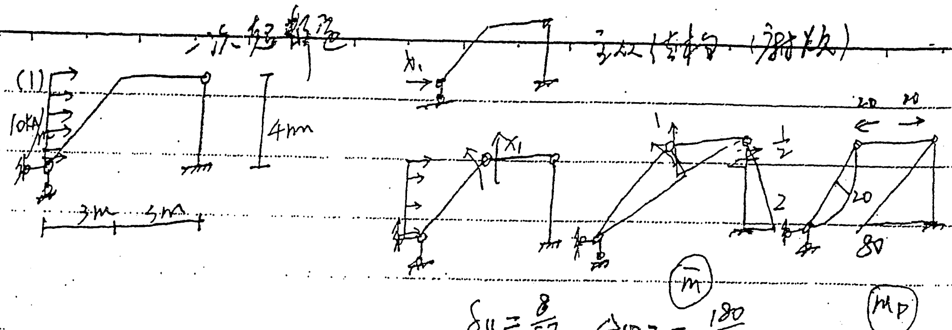
6.



（结构对称反对称）

无结点线位移的刚架
只受结点集中荷载 M=0

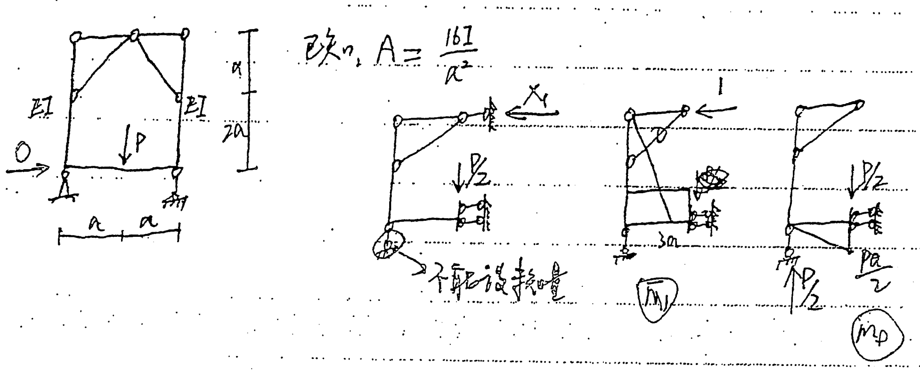
例、(1)



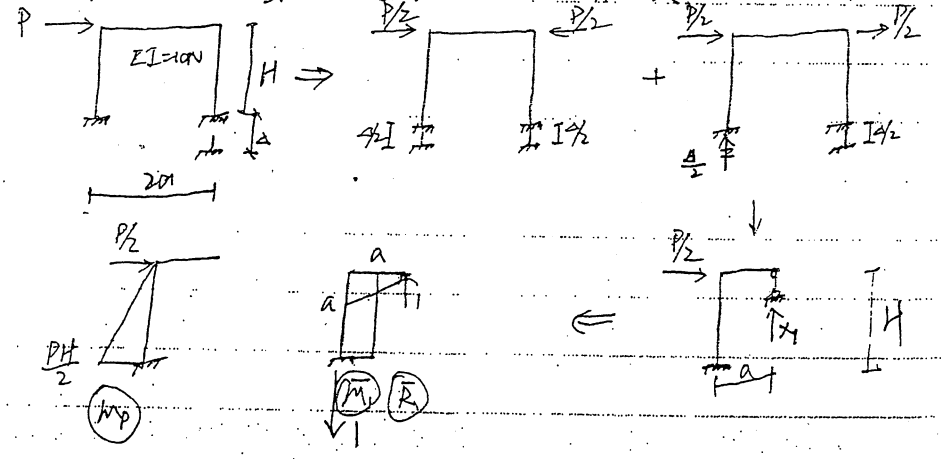
$\delta_{11} = \frac{8}{EI}$ $\Delta_{1P} = -\frac{180}{EI}$

$X_1 = 22.5$

(2)



(3) 取半结构、写力法方程，求系数和自由项



得 $\delta_{11} = \frac{1}{EI}\left(\frac{a^3}{3} + a^2H\right)$ $\Delta_{1P} = \frac{-PaH^2}{4EI}$ $\Delta_{1C} = -\bar{R}C = -\left(-1 \times \frac{\Delta}{2}\right) = \frac{\Delta}{2}$

$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} + \Delta_{1C} = 0$

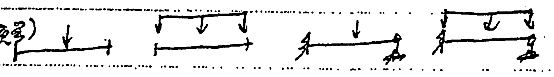
（三次不会考，但取半结构；刚架是重点，桁架不会单独考）

§5. 位移法

一、等截面直杆的转角位移方程.

1. 形常数

2. 载常数(固端弯矩)



3. 转角位移方程

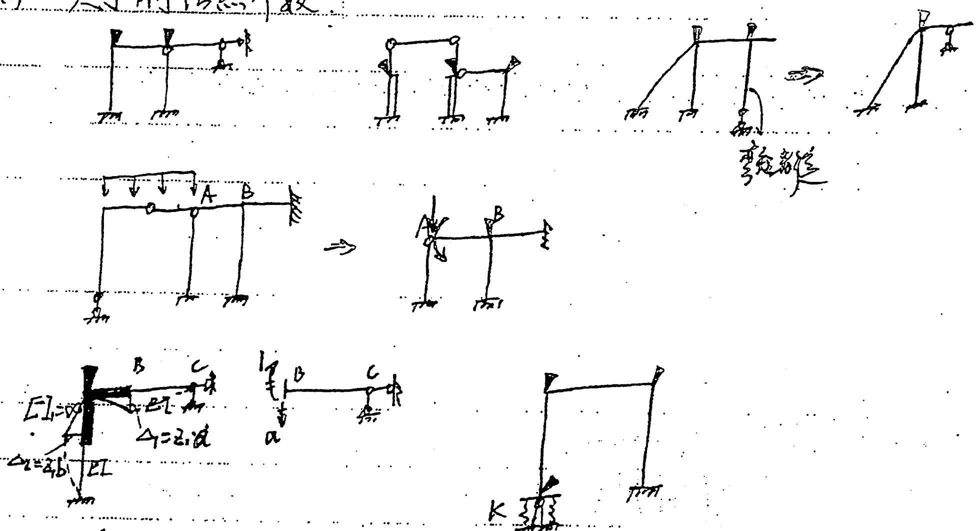
二、位移法的基本概念

1. 基本未知量

以计算杆端弯矩时用到的结点位移作为基本未知量

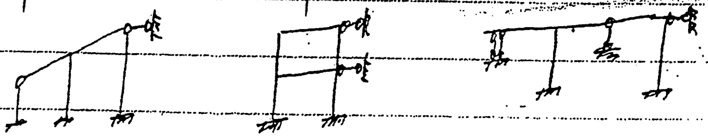
刚结点的个数加上独立的结点线位移个数，但注意，均不考虑结构的静定部分.

(1) 关于刚结点个数.



(2) 怎样确定独立的结点线位移个数

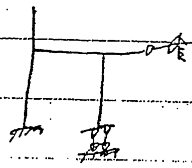
①. 简单情况，直观判断.



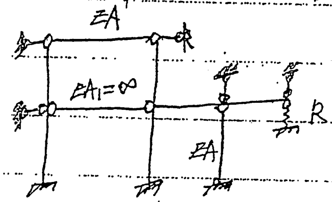
No.
Date

② 复杂结构 "铰化结点，增设链杆"（只适用于忽略轴变的受弯杆结构）

③ 伸出端



④ 注意结构中 $EA \neq \infty$ 的链杆，包括弹簧支座



二 基本结构

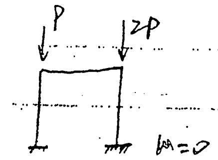
单跨超静定梁的组合体

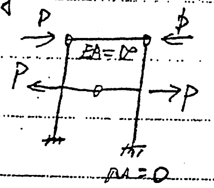
三 典型方程 平衡方程

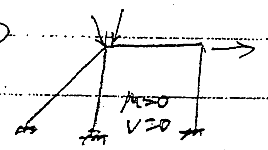
物理意义

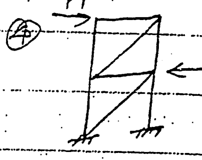
系数和自由项的物理意义

三 无侧移情况（忽略杆件轴变时）

① 

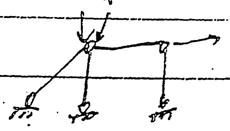
② 

③ 

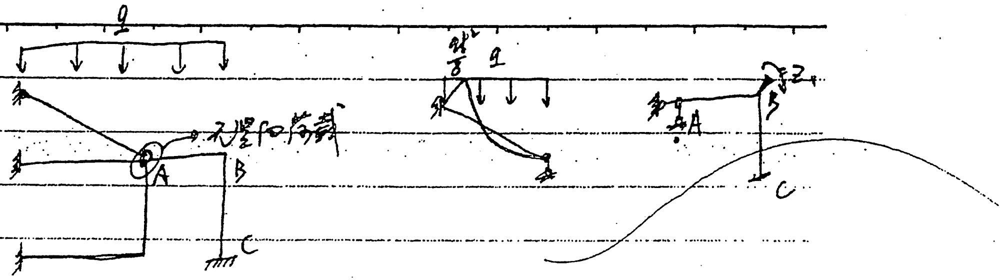
④ 

结点集中荷载 M=0

只有N，而N忽略不计



例:



四 本章主要题型

1. 直接利用形常数或载常数填空、判断

2. 确定基本未知量个数

3. 取半结构

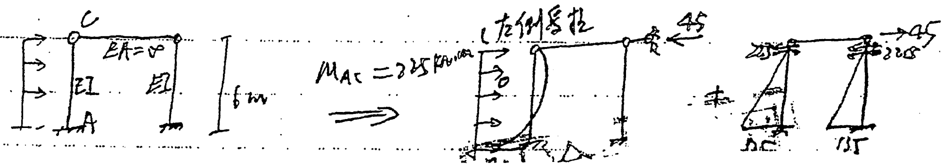
4. 超静定梁和刚架在荷载作用下的内力计算

五. 剪力分配法

适用于只有结点线位移,而无结点角位移未知量的结构.

刚架柱的侧移刚度 $D=\frac{12EI}{h^3}$

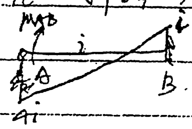
排架柱 $D=\frac{3EI}{h^3}$



六. 举例

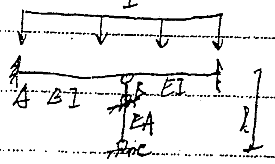
1. 填空

(1). 施加杆端转角 $\varphi_A=1$, 则 $M_{AB}=4i$ $M_{BA}=i$

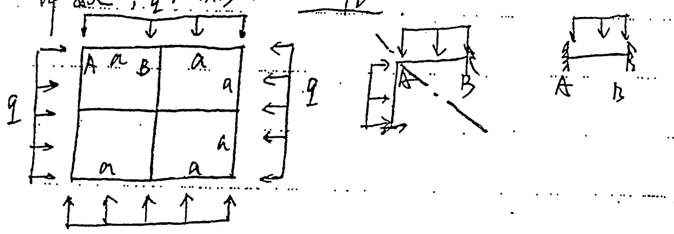


(2) 当 $EA=\infty$, $M_{BA} = \frac{ql^2}{12}$; 当 $EA=0$, $M_{AB} = -\frac{ql^2}{3}$

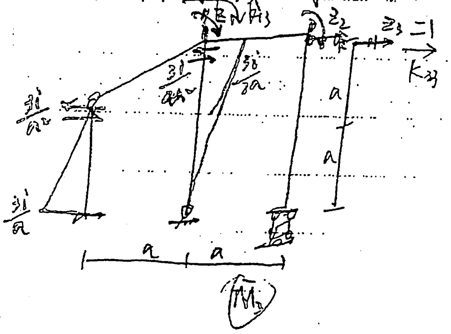
无此杆



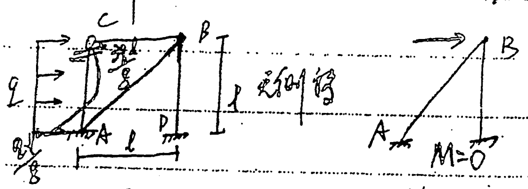
(3) $EI=$常数, $M_{AB} = -\frac{ql^2}{12}$



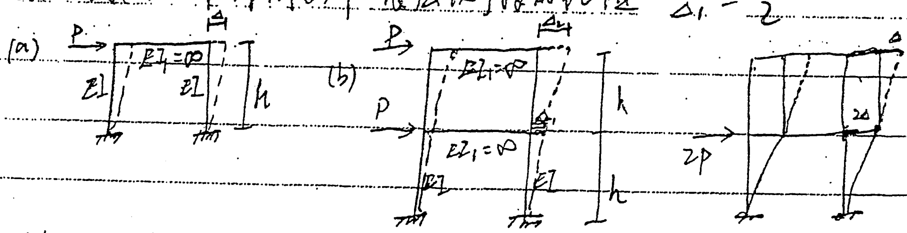
(4) 图示结构各杆线刚度为 i，求得 $k_{13} = -\frac{3i}{2a}$, $k_{33} = \frac{15i}{4a^2}$



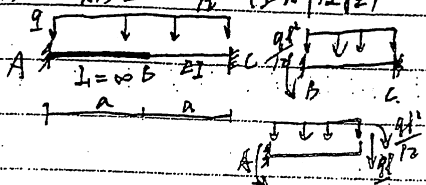
(5) $EI=$常数, $M_{AB} = 0$, $N_{AB} = \frac{\sqrt{2}}{8}ql$



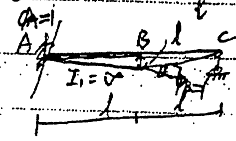
(6) 已知图(a)，求得图(b)中楼层侧移的比值 $\frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \frac{3}{2}$



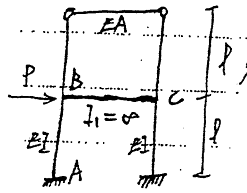
(7) $M_{AB} = -\frac{13ql^2}{12}$ (上侧受拉)



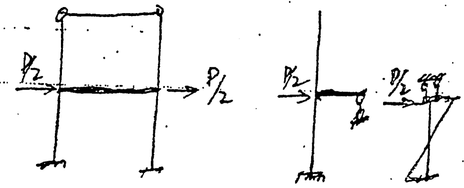
8. $M_{BC} = \frac{6EI}{l}$



(9) $M_{AB} = -\frac{Pl}{4}$ $M_{BC} = 0$

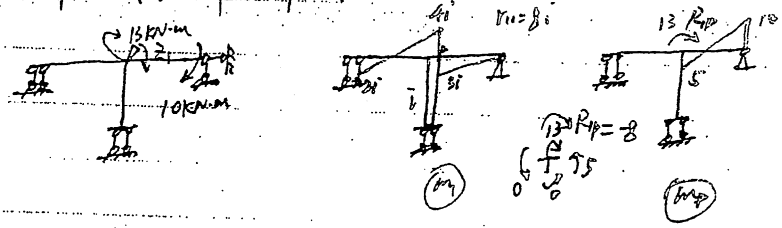


l 对称，结构.

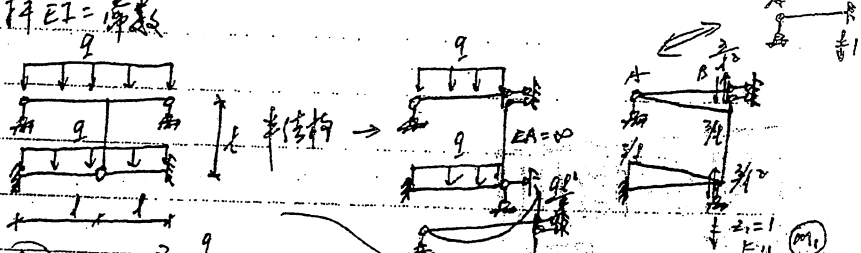


例.

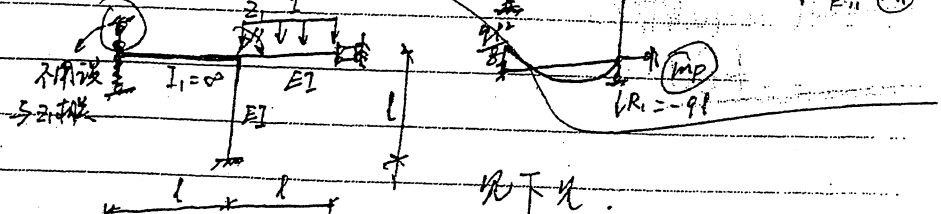
2. 求作M图，各杆i=常数.



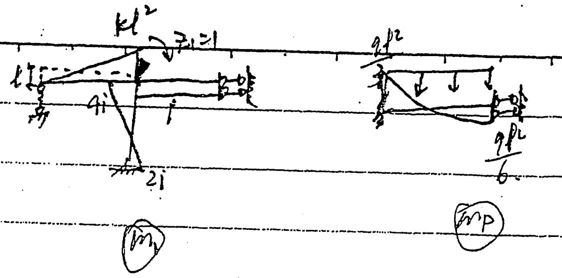
5. 各杆EI=常数



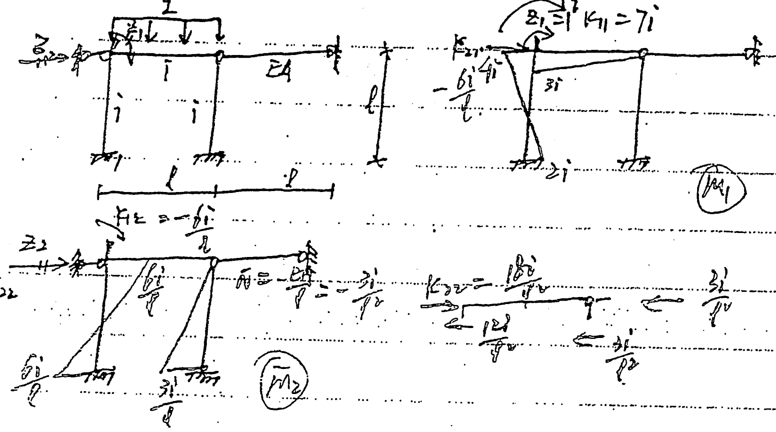
4.



见下页:



5. 求位移法方程. $EI=$常数. $EA=\frac{3EI}{l^2}$



§6. 力矩分配法

一、力矩分配法基本概念

1. 转动刚度S

2. 传递系数C

3. 力矩分配系数μ.

4. 力矩分配法的适用范围和特点

二. 无剪力分配法 (大题可能性小)

1. 适用于计算无侧移杆和剪力静定杆组成的有侧移刚架

一般是一根竖柱和若干根横梁. 横梁的支座与柱平行

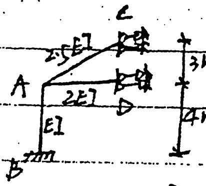
2. 计算步骤与力矩分配法相同. 剪力静定杆 $S=i$. $C=-1$.

固端弯矩一端固定, 一端滑动定向杆件计算.

二.例题

1. 填空

(1) 分配系数 $\mu_{AC} = 4/7$ (2) $\mu_{BA} = 16/31$

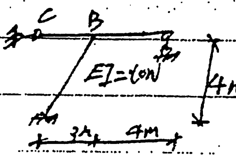


$S_{AC} = 4i_{AC} = 4\cdot\frac{2.5EI}{5}$

$= 2EI$

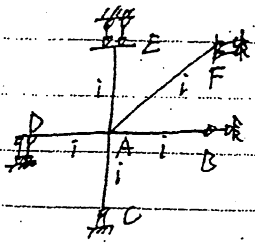
$S_{AD} = i_{AD}$ $S_{AB} = i_{AB}$

$i = \frac{EI}{l}$ → 杆长



$S_{BC} = 0$

(3) 各杆 i=con, 求分配系数



$S_{AE} = 0$

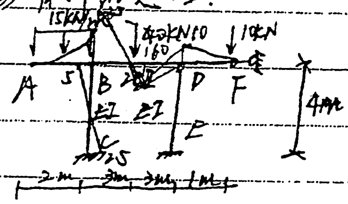
$S_{AC} = 3i$

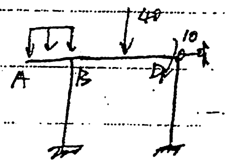
$S_{AD} = 4i$

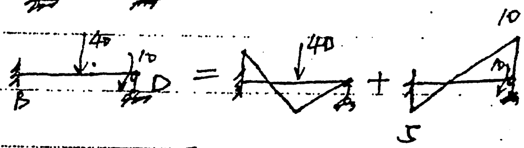
$S_{AB} = i$

$S_{AF} = 4i$

2. 悬臂杆的处理

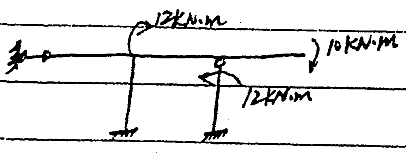


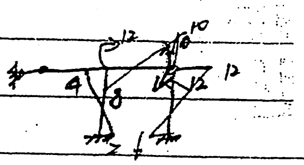




$M^F_{BD} = -\frac{3}{16}\times40\times6+\frac{1}{2}\times10=-40$

3. 各杆长 l=3m, EI=con, 求作M图.



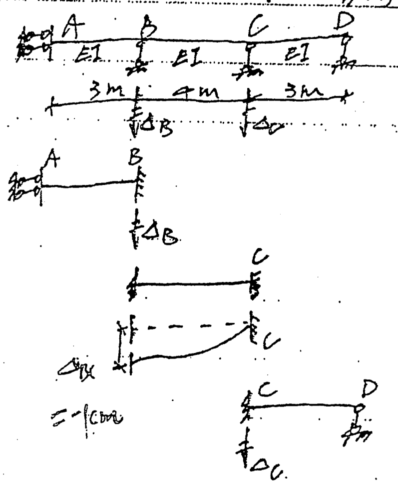


4. 支座位移问题.

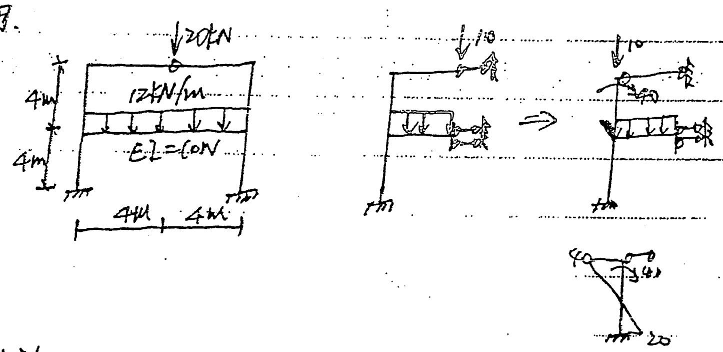
分配系数的计算与荷载作用时相同.

~~分配系数~~ 固端弯矩由支座位移引起，利用形常数计算。

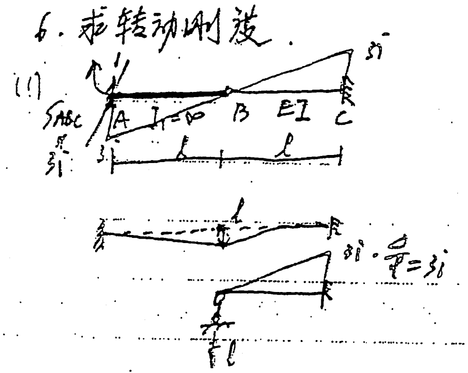
已知：$EI=2.4\times10^4\,kN\cdot m$，$\Delta_B=3cm$，$\Delta_C=2cm$

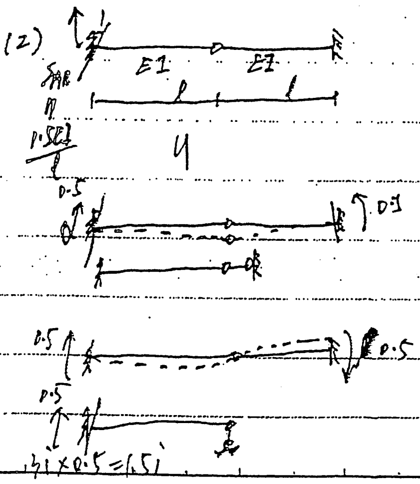


5. 取半结构。

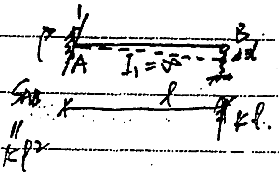


6. 求转动刚度。





(3)

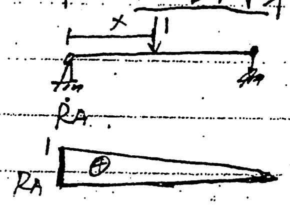


§7 影响线 (考查 份量小, 难度不太大)

一、影响线的概念

单位荷载 P=1 在结构上移动时, 表示结构某量值 (反力, 内力, 位移) 变化规律的图形.

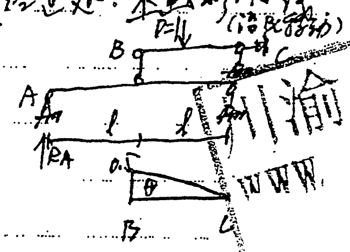
① P=1 无量纲单位力 ② 关键是 理解影响线竖标的含义.



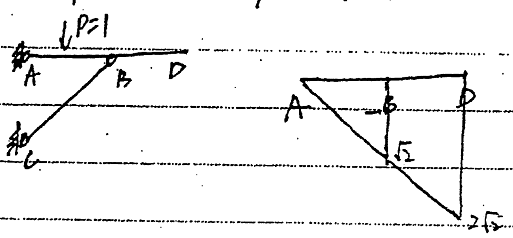
③ 画影响线的范围是 P=1 移动的起点到终点.

P=1 不经过处, 不画影响线.

例1



例2. 作 BC 杆轴力 N_{BC} 的影响线. P=1 沿 ABD 移动.



二、作影响线的基本方法

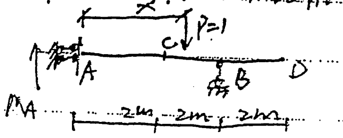
1. 静力法

(1) 选定坐标系 以$P=1$的移动路径为x轴

(2) 取隔离体，用静力平衡条件建立影响线方程

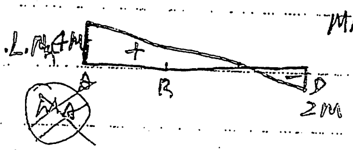
(3) 根据…方程作影响线

例. 作M_A、R_B、M_C、V_C的影响线

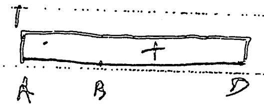


$M_A = 1\times4 - 1\times x = 4-x \quad (0\le x\le 6)$

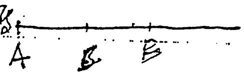
I.L. M_A



I.L. R_B

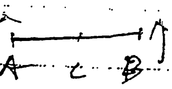


P=1在AC段

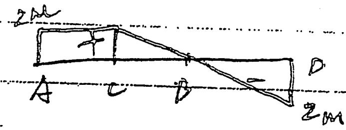


$M_C = 2^m\times1 = 2m \quad (0\le x\le 2)$

P=1在CB段



$M_c = M_A = 4-x \quad (2\le x\le 6)$



2. 机动法.　　　虚位移是约束允许的位移.

理论基础. 虚功原理.　特点. 可迅速画出影响线形状.

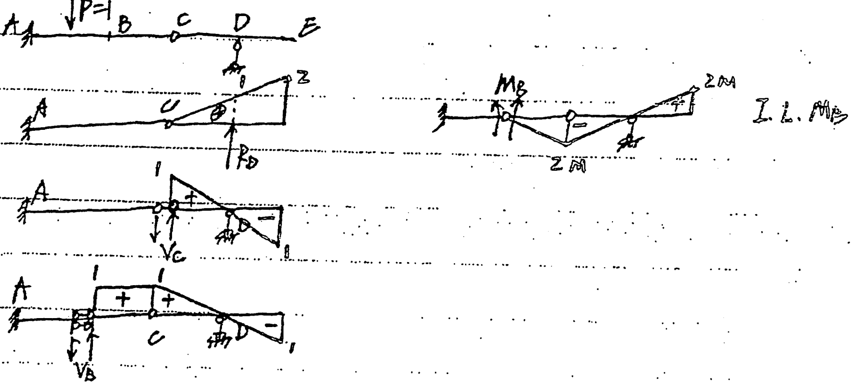
(1) 去相应约束, 代以正向约束力

(2) 使体系沿约束力正向发生单位位移. 由此得到的 $P=1$ 作用点的位移图 即该量值的影响线.

(3) 基线以上的竖标取正号, 以下取负号.

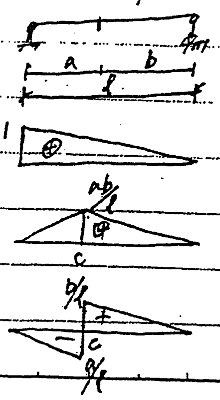
静定结构的反力和内力影响线由直线段组成。

例. 用机动法作 R_D, V_C, V_B, M_B 影响线.

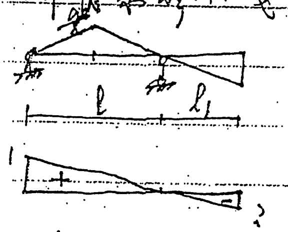


三. 静定结构的影响线

1. 简支梁的影响线 (注意某些影响线可直接应用)



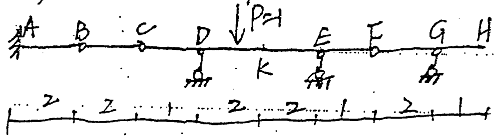
2. 伸臂梁影响线



由相应简支梁的影响线向伸臂部分延伸.

伸臂部分某截面内力影响线与相应悬臂梁相同.

√3. 多跨静定梁的影响线



作 M_K, M_A, $V_{G左}$ 影响线

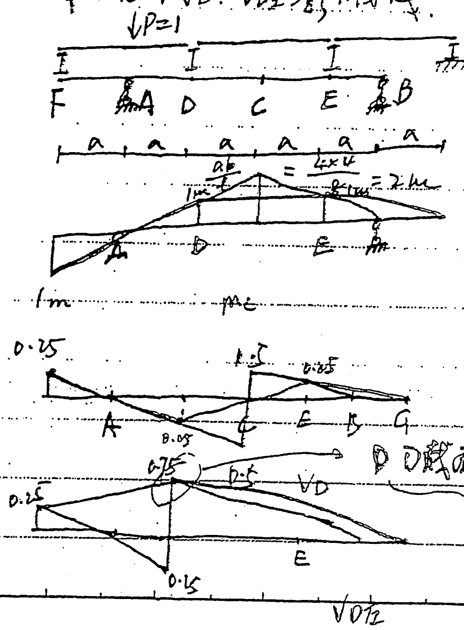
(辅导书P17页)

√4. 间接荷载(结点荷载)作用下的影响线

(1). 作出直接荷载作用下该量的影响线(用虚线)

(2) 取各结点处的竖标, 各相邻结点竖标的顶点连以直线 (经常考)

例 作 M_C, V_D, $V_{D左}$ 影响线.



(不必画支座)

D截面右定两结点 取0.75

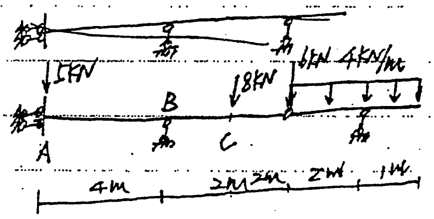
刚架、用静力法

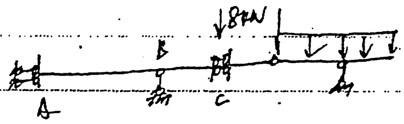
四. 应 影响线的应用.

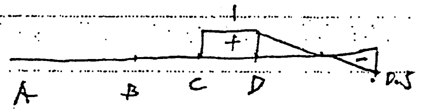
1. 固定荷载作用下, 利用影响线求反力和内力.

$S=\sum P_i y_i + \sum q_i w_i$.

例 求 $V_{C左}$, $V_{C右}$.







IL V_C

$V_{C左}=5\times0+8\times1+6\times1+4\times(\frac{1}{2}\times2\times1-\frac{1}{2}\times1\times0.5)=17kN$

$V_{C右}=5\times0+8\times0+6\times1+4\times(\frac{1}{2}\times2\times1-\frac{1}{2}\times1\times0.5)=9kN$

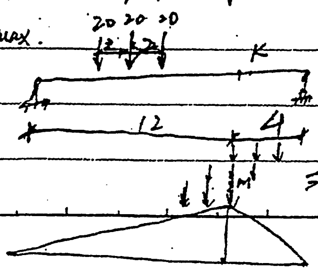
2. 移动荷载作用下, 利用影响线确定最不利位置.

(1) 可任意布置的均布荷载.

荷载布满影响线的正号或负号区段.

(2) 行列荷载, 三角形影响线.

例. 求 M_{Kmax}.



$M_{Kmax}=20(3+3\times\frac{5}{6}+3\times\frac{4}{6})$

$=150kN\cdot m$

三种情况比较.

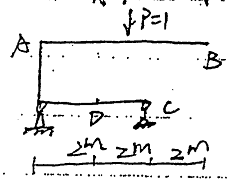
五. 用机动法作连接梁的影响线的形状　（基本内容）

六. 例

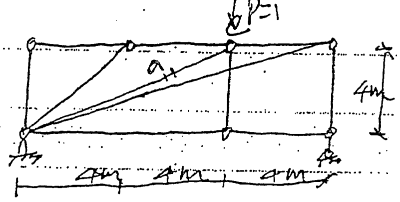
1. 填空

(1) P=1 沿AB移动，M_D影响线在B点坐标为 3m

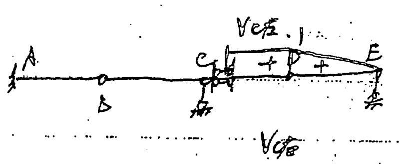
V_D影响线在B点的坐标为 -1.5



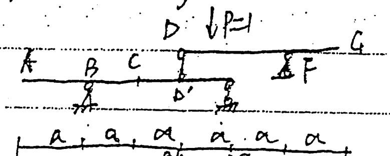
(2) P=1沿桁架上弦移动，Na影响线在C点竖标为 $-\sqrt{5}$

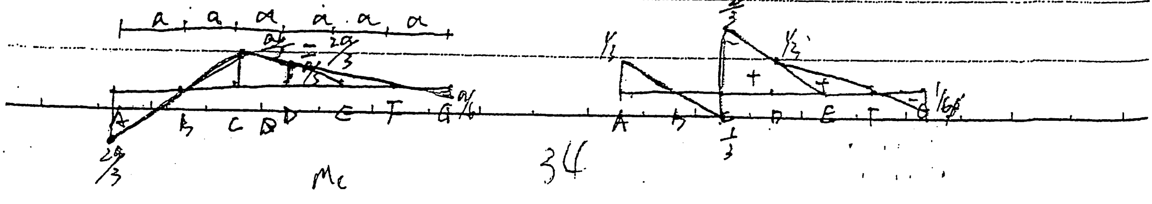


2. 作 ~~Ma~~ $V_{C左}$，$V_{C右}$影响线



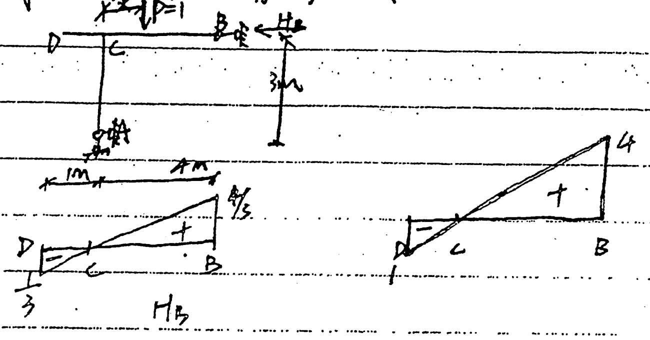
3. 作M_C，V_C影响线，P=1沿ADG移动



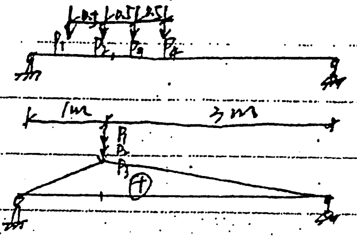


左拉为正.（能否i向）

4. 作反力 H_B，弯矩 M_{CA} 影响线，$P=1$ 沿 DCB 移动



5. 求 M_{Cmax} 已知 $P_1=10KN$，$P_2=P_3=20KN$，$P_4=5KN$.



§8. 结构的动力计算

一、动力自由度

1. 定义.

2. 这里讨论平面杆件结构的微幅振动，在确定动力自由度时，忽略直杆的轴向变形，杆件弯曲后两端点距离不变

3. 用附加链杆的办法来确定质点系的动力自由度

(1) 平面上的自由质点有两个自由度

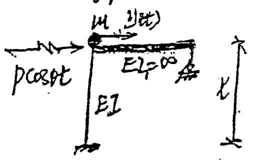
(2) 简单情况，直观判断

(3) 复杂的情况，在质点处增设链杆使所有质点不能运动，则增加的最少链杆数为自由度数

二、建立体系的运动方程（振动方程）

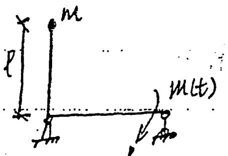
描述质点系动位移 $y_1(t)$，$y_2(t)$……的数学方程

1. 单自由度体系
设想将惯性力作用在质点上，在振动的每一时刻，惯性力和外力组成形式上的平衡力系.（动平衡）
可以用静力方法建立运动方程，有两种方式：
(1). 列动力平衡方程（刚度法）
① 以质点为对象.
首先指定位移的正向.
取质点为隔离体，对应方向位移标示
质点受的力.（$-m\ddot{y}$ 与 $y(t)$ 同向）
动位移 $y(t)$ 从静平衡位置起算
所列出的运动方程通常与重力无关.
② 以整个体系为对象.（适用于多个质点的单自由度体系）
(2) 列位移方程（柔度法）
以整个体系为对象，写出质点位移的表达式
例1. 不考虑阻尼

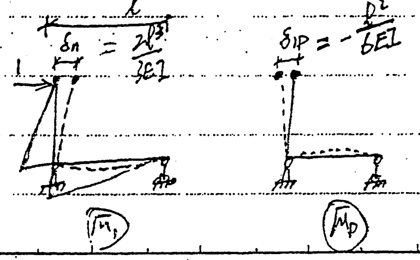


$$y(t)=\delta_{11}[-m\ddot{y}(t)+P\cos\theta t]$$
$$\delta_{11}=\frac{1}{k_{11}}=\frac{l^3}{12EI}$$

2.



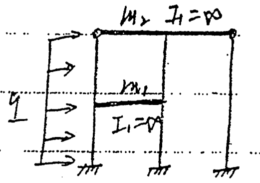
$$y(t)=\delta_{11}[-m\ddot{y}(t)]+\delta_{1P}(M(t))$$



二、多自由度体系

(1) 刚度法

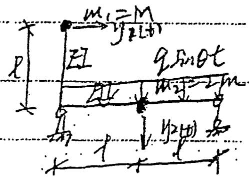
以整个体系为对象，使用刚度系数，按位移法步骤列动平衡方程



八种书 例9-4

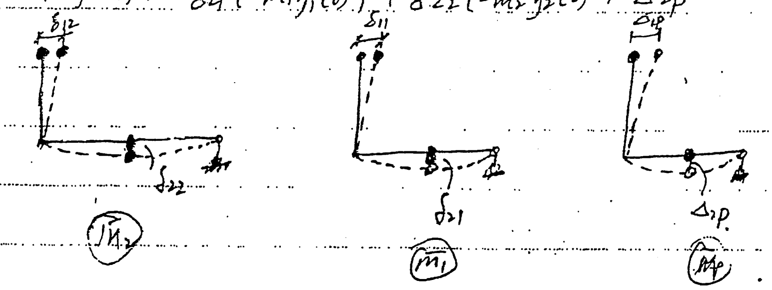
(三本前看题)

(2) 柔度法（适用于求柔度系数容易的静定位移）



质点任意时刻的动位移由 $I_1(t)$, $I_2(t)$ 及动荷载引起的

$$\begin{cases} y_1(t)=\delta_{11}(-m_1\ddot{y}_1(t))+\delta_{12}(-m_2\ddot{y}_2(t))+\Delta_{1P} \\ y_2(t)=\delta_{21}(-m_1\ddot{y}_1(t))+\delta_{22}(-m_2\ddot{y}_2(t))+\Delta_{2P} \end{cases}$$



三、单自由度体系的自由振动

1. 不计阻尼的自由振动

$m\ddot{y}(t)+k_{11}y(t)=0$ 或 $\ddot{y}(t)+\omega^2 y(t)=0$

解：$y(t)=A\sin(\omega t+\varphi)$　　$A=\sqrt{y_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}$

自振频率和周期的计算

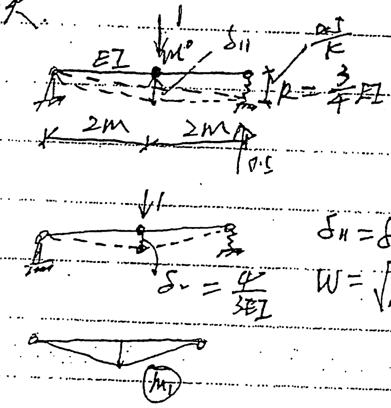
(1) 用刚度系数或柔度系数计算（单质点的单自由度体系）

$W=\sqrt{\frac{k_{11}}{m}}=\sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}}$ (1/s)（弧度/秒）（圆频率）

$T=\frac{2\pi}{W}$

W.T 只与体系的质量和刚度有关，而与动荷载、初位移或初速度无关。

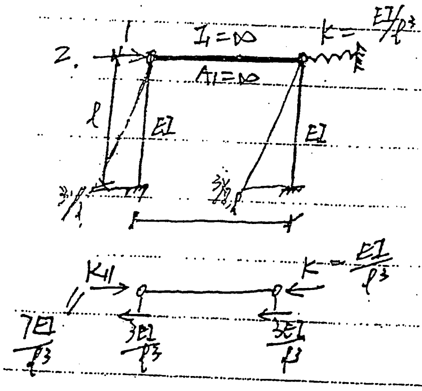
例 1.



$\delta_{11}=\delta_1+\delta_2=\frac{5}{3EI}$

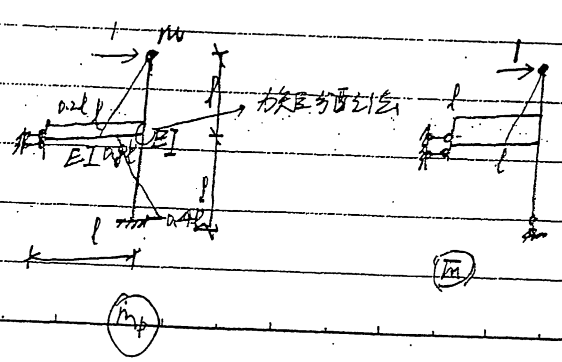
$W=\sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}}=\sqrt{\frac{3EI}{5m}}$

2.



$W=\sqrt{\frac{k_{11}}{m}}=\sqrt{\frac{7EI}{ml^3}}$

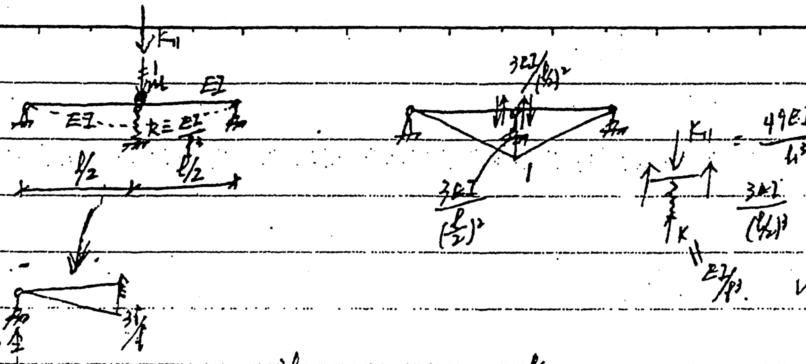
3



$\delta_{11}=\frac{8l^3}{11EI}$

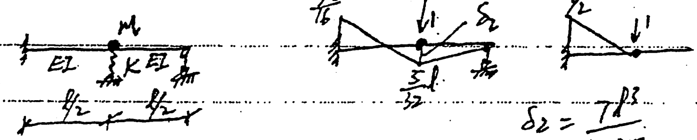
$W=\sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}}=$

4.



$k_{11}=\frac{49EI}{l^3}$　　$\omega=\sqrt{\frac{k_{11}}{m}}$

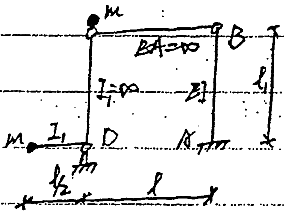
5.



$\delta_2=\frac{7l^3}{768EI}$　　$k_{11}=k+k_2$

(2) 用幅值方程：适用于多质点(运动不共线)的单自由度体系)

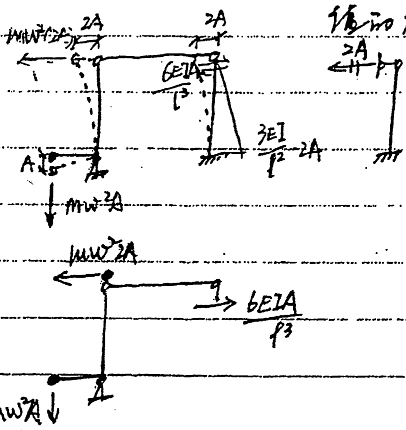
例.



由 $y(t)=A\sin(\omega t+\varphi)$

$I(t)=-m\ddot{y}(t)=m\omega^2A\sin(\omega t+\varphi)$

当 $\sin(\omega t+\varphi)=1$ 时 两者同时达到各自的最大值 A、$m\omega^2A$. 利用此特性，在自由振动的幅值处列动平衡方程求 ω. (将振幅 A 看成是惯性力最大值的 $m\omega^2A$ 产生的静位移)



沿杆AB的顶部截取左边部分为隔离体 由 $\sum M_D=0$.

$m\omega^2A\cdot\frac{l}{2}+m\omega^2 2A\cdot l-\frac{6EIA}{l^3}\cdot l=0$

$\omega=\sqrt{\frac{12EI}{5ml^3}}$

2. 有阻尼自由振动

小阻尼 $\xi = \frac{c}{2m\omega} < 1$

$y(t) = Ae^{-\xi\omega t}\sin(\omega' t + \varphi)$

是衰减振动，振幅按 $e^{-\xi\omega t}$ 的规律递减减小。

(1) 小阻尼对自振频率和自振周期的影响很小。

一般 $\xi = 0.01 \sim 0.1$，$\omega' = \omega\sqrt{1-\xi^2} \approx \omega$，$T' = \frac{2\pi}{\omega'} \approx \frac{2\pi}{\omega} = T$

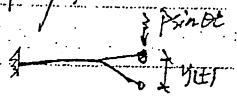
(2) 小阻尼对振幅的影响很大

(3) 阻尼比ξ值的测算 （ξ非常小）

$\xi = \frac{1}{2\pi n}\ln\frac{y_k}{y_{k+n}}$

四、单自由度体系在简谐荷载作用下的强迫振动

1. 不考虑阻尼，简谐荷载作用在质点上



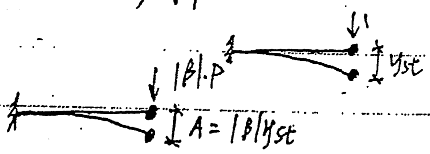
最近三年都考

$P(t) = P\sin\theta t$ ← $\theta = \frac{2\pi n}{60}$

平稳阶段的动位移 $y(t) = A\sin\theta t = \beta y_{st}\sin\theta t$

式中 $y_{st} = \delta_{11}P = P/k_{11}$，是动荷载幅值P引起的质点的静位移。

$\boxed{\beta = \frac{1}{1-\frac{\theta^2}{\omega^2}}}$



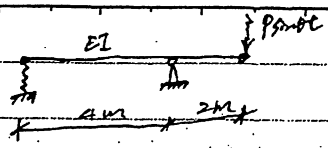
惯性力 $I(t) = -m\ddot{y}(t) = m\theta^2 A\sin\theta t$

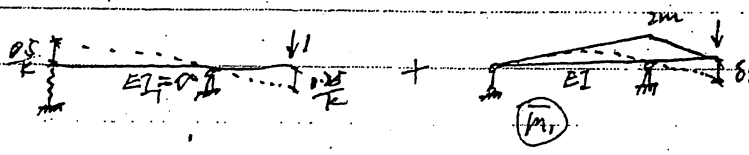
幅值 $I_{max}(t) = m\theta^2 A$

由于 $P\sin\theta t$ 作用在质点上，动荷载和惯性力的作用点、作用线均重合，各截面动内力、动位移均与 $y(t)$ 成正比。

故β不仅是 $y(t)$ 的动力系数，也是各截面动内力、动位移的动力系数。

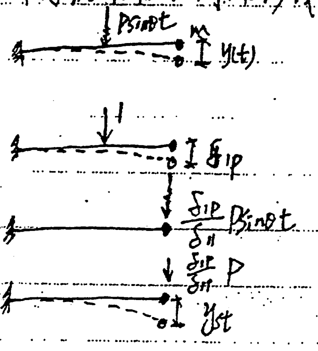
例 11.





$\delta_{11}=\delta_1+\delta_2=$

2. 不考虑阻尼，简谐荷载不在质点上（了解）



$y(t)=\delta_{11}(-m\ddot{y})+\delta_{1P}P\sin\theta t$

$m\ddot{y}+\frac{1}{\delta_{11}}y=\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}}P\sin\theta t$

$y(t)$ 等于仅作用在质点上的动荷载

$\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}}P\sin\theta t$ 产生的动位移

$y(t)=A\sin\theta t=y_{st}\sin\theta t\cdot\beta$

式中 $\beta=\frac{1}{1-\frac{\theta^2}{\omega^2}}$

还可用幅值直接求动力反应。

$P(t)=P\sin\theta t$　　$y(t)=A\sin\theta t$　　$I(t)=-m\ddot{y}=m\theta^2A\sin\theta t$

三者同时达到各自的最大值，在幅值处建立方程。

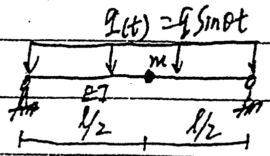
$A=\delta_{11}m\theta^2A+\delta_{1P}\cdot P$　　$A=\frac{\delta_{1P}P}{1-\delta_{11}m\theta^2}=\frac{\delta_{1P}\cdot P}{1-\frac{\theta^2}{\omega^2}}=\delta_{1P}P\cdot\beta$.

然后计算 $m\theta^2A$ 的值

可用静力法计算任意截面动位移和动内力最大值。

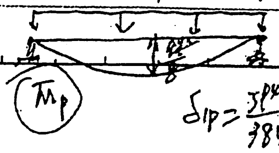
例. 书 11-13.

求质点振幅A. 不考虑阻尼. 已知 $\theta=\sqrt{24EI/ml^3}$

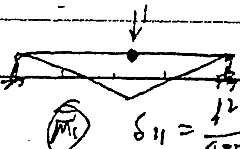


解 $A=\delta_{11}m\theta^2A+\delta_{1P}\cdot q$

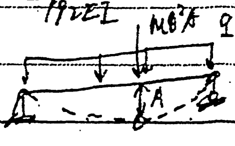
$A=\frac{\delta_{1P}q}{1-\delta_{11}m\theta^2}=\frac{5ql^4}{192EI}$



$\delta_{1P}=\frac{5ql^4}{384EI}$



$\delta_{11}=\frac{l^3}{48EI}$



3. 考虑阻尼，简谐荷载作用在质点上。

平稳阶段 $y(t)=A\sin(\theta t-\varphi)=\beta y_{st}\sin(\theta t-\varphi)$.

动力系数 $\beta=\frac{1}{\sqrt{\cdots}}$

4. 共振 ($\theta=\omega$)

无阻尼时 $\beta=\infty$ $A=\infty$

有阻尼时 $\beta=\frac{1}{2\xi}$ $A=\frac{1}{2\xi}y_{st}$

5. 减小振幅的方法

减小 |β| 值. $\beta=\frac{1}{1-\frac{\theta^2}{\omega^2}}$ 土木工程设计ω. θ是给定的.

ω远离θ

分两种情况. 不要盲目增大结构刚度

当ω>θ. 设法增大ω. 即增大刚度. 或减小质量

当ω<θ. 设法减小ω. 即减小刚度. 或增大质量

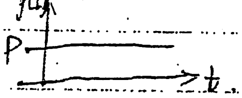
五. 单自由度体系在一般动荷载作用下的强迫振动 (1分)

1. 一般 (无阻尼)

$$y(t)=\frac{1}{m\omega}\int_0^t P(\tau)\sin\omega(t-\tau)\,d\tau$$

只适用于线性体系.

2. 突加常量荷载



$y(t)=y_{st}(1-\cos\omega t)$

$\beta=2$ $y(t)_{max}=2y_{st}$

六 多自由度体系 (两个自由度体系) 的自由振动.

求自振频率和振型. 不考虑阻尼 (固有特性)

各引起的自由振动的初始条件和动荷载无关.

体系能否按某一主振型自由振动由初始条件决定

1、柔度法.

频率方程. $\left|\begin{bmatrix}\delta_{11}&\delta_{12}\\ \delta_{21}&\delta_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m_1&0\\ 0&m_2\end{bmatrix}-\frac{1}{\omega^2}\begin{bmatrix}1&0\\ 0&1\end{bmatrix}\right|=0$

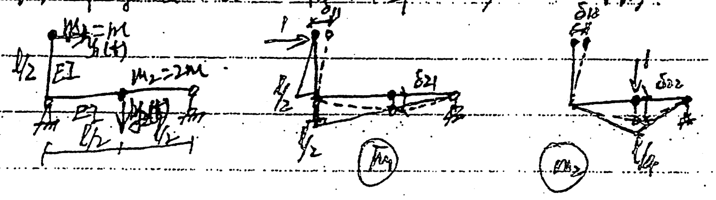
展开得 $\begin{vmatrix}\delta_{11}m_1-\frac{1}{\omega^2} & \delta_{12}m_2\\ \delta_{21}m_1 & \delta_{22}m_2-\frac{1}{\omega^2}\end{vmatrix}=0$

振型方程

$$\begin{cases}(\delta_{11}m_1-\frac{1}{\omega^2})A_1+\delta_{12}m_2A_2=0\\ \delta_{21}m_1A_1+(\delta_{22}m_2-\frac{1}{\omega^2})A_2=0\end{cases}$$

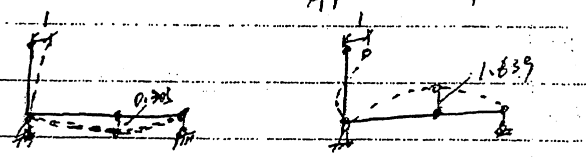
关键是正确计算柔度系数.

要理解柔度系数的含义(单位力产生的位移)



$\omega_1=2.635\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$ $\omega_2=6.653\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$

主振型 $\frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}}=\frac{0.305}{1}$ $\frac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}}=\frac{-1.639}{1}$



第一振型 第二振型

2. 刚度法.

频率方程 $\left|\begin{bmatrix}k_{11}&k_{12}\\ k_{21}&k_{21}\end{bmatrix}-\omega^2\begin{bmatrix}m_1&0\\ 0&m_2\end{bmatrix}\right|=0$