

目 录

第一章 绪论	(1)
知识要点	(1)
习题详解	(2)
第二章 拉伸、压缩与剪切	(7)
知识要点	(7)
习题详解	(12)
第三章 扭转	(76)
知识要点	(76)
习题详解	(78)
第四章 弯曲内力	(109)
知识要点	(109)
习题详解	(111)
第五章 弯曲应力	(160)
知识要点	(160)
习题详解	(162)
第六章 弯曲变形	(196)
知识要点	(196)
习题详解	(198)
第七章 应力和应变分析 强度理论	(264)
知识要点	(264)
习题详解	(269)
第八章 组合变形	(321)
知识要点	(321)
习题详解	(323)
第九章 压杆稳定	(358)
知识要点	(358)

习题详解·····	(360)
第十章 动载荷·····	(392)
知识要点·····	(392)
习题详解·····	(394)
第十一章 交变应力·····	(419)
知识要点·····	(419)
习题详解·····	(421)
第十二章 弯曲的几个补充问题·····	(445)
知识要点·····	(445)
习题详解·····	(446)
第十三章 能量方法·····	(478)
知识要点·····	(478)
习题详解·····	(483)
第十四章 超静定结构·····	(533)
知识要点·····	(533)
习题详解·····	(535)
第十五章 平面图形的几何性质(附录 I)·····	(589)
知识要点·····	(589)
习题详解·····	(593)
附录一 平面面积的几何特性·····	(613)
附录二 梁在简单载荷作用下的变形·····	(615)
附录三 型钢规格表·····	(620)
附录四 交变应力图表·····	(633)
附录五 矩形截面杆扭转时的系数 α 、 β 和 ν ·····	(638)
主要参考文献·····	(639)

第一章 绪 论

知识要点

1. 内力与应力·截面法

(1) 内力

在外力作用下,物体反抗或阻止变形而产生于物体内部各部分之间的相互作用力。

(2) 内力的种类

内力有四种:轴力、剪力、扭矩和弯矩。

(3) 应力

应力是内力密度,即单位面积上作用的内力,是内力大小的量度,其单位为Pa或MPa。一说到应力,一定要指明是哪一点及过该点哪个方向截面上的应力,否则是无意义的。

平均全应力 单位面积上的内力

$$p_m = \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad (1-1)$$

若将 ΔF 分解为与截面垂直的分量 ΔF_N 和与截面相切的分量 ΔF_s ,则

$$\sigma_m = \frac{\Delta F_N}{\Delta A}, \quad \tau_m = \frac{\Delta F_s}{\Delta A} \quad (1-2)$$

分别称为平均正应力和平均切应力。

因内力一般地说不是均匀分布的,所以使 $\Delta A \rightarrow 0$,便可得到一点处的应力:

$$\text{全应力} \quad p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA} \quad (1-3)$$

$$\text{正应力} \quad \sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_N}{\Delta A} = \frac{dF_N}{dA} \quad (1-4)$$

$$\text{切应力} \quad \tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_S}{\Delta A} = \frac{dF_S}{dA} \quad (1-5)$$

(4) 截面法

为显示内力并计算其大小,用假想的平面将构件截开,一分为二,弃去一半,保留另一半作为研究对象,再通过平衡方程求出内力的方法。

2. 变形与应变

(1) 变形

物体受力后,其内部任意两点之间的相对线位移或二正交直线间的相对角位移。

(2) 应变

应变是对变形的量度,是无量纲量。

线应变又称正应变,是弹性体变形时一点沿某一方向微小线段的相对改变量,是一无量纲量,用 ϵ 表示,即

$$\epsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{\Delta x} = \frac{dl}{dx} \quad (1-6)$$

角应变又称剪应变,是弹性体变形时某点处一对互相正交的微线段所夹直角的改变量,单位为弧度(rad),用 γ 表示,即

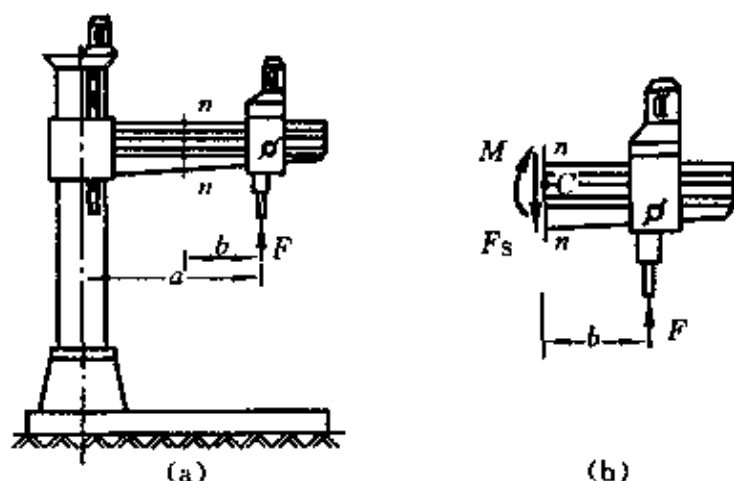
$$\gamma = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \quad (1-7)$$

式中, α 是变形后原来正交的二线段间的夹角。

习题详解

1.1 对题1.1图(a)所示钻床,试求 $n-n$ 截面上的内力。

解 应用截面法,取题1.1图(a)所示截面 $n-n$ 以右部分作为研究对象,其受力图如题1.1图(b)所示,由平衡条件



题 1.1 图

$$\sum F_y = 0, \quad F - F_s = 0 \quad (1)$$

$$\sum M_C = 0, \quad Fb - M = 0 \quad (2)$$

解①、②式,得 $F_s = F, \quad M = Fb$

1.2 试求题1.2图(a)所示结构 $m-m$ 和 $n-n$ 两截面上的内力,并指出 AB 和 BC 两杆的变形属于何类基本变形。

解 应用截面法,对题1.2图(a)取截面 $n-n$ 以下部分为研究对象,受力图如题1.2图(b)所示,由平衡条件

$$\sum M_A = 0, \quad F_N \times 3 - 3 \times 2 = 0$$

解得 $F_N = 2 \text{ kN}$

BC 杆的变形属于拉伸变形。

应用截面法,取题1.2图(a)所示截面 $m-m$ 以右及 $n-n$ 以下部分作为研究对象,其受力图如题1.2图(c)所示,由平衡条件有

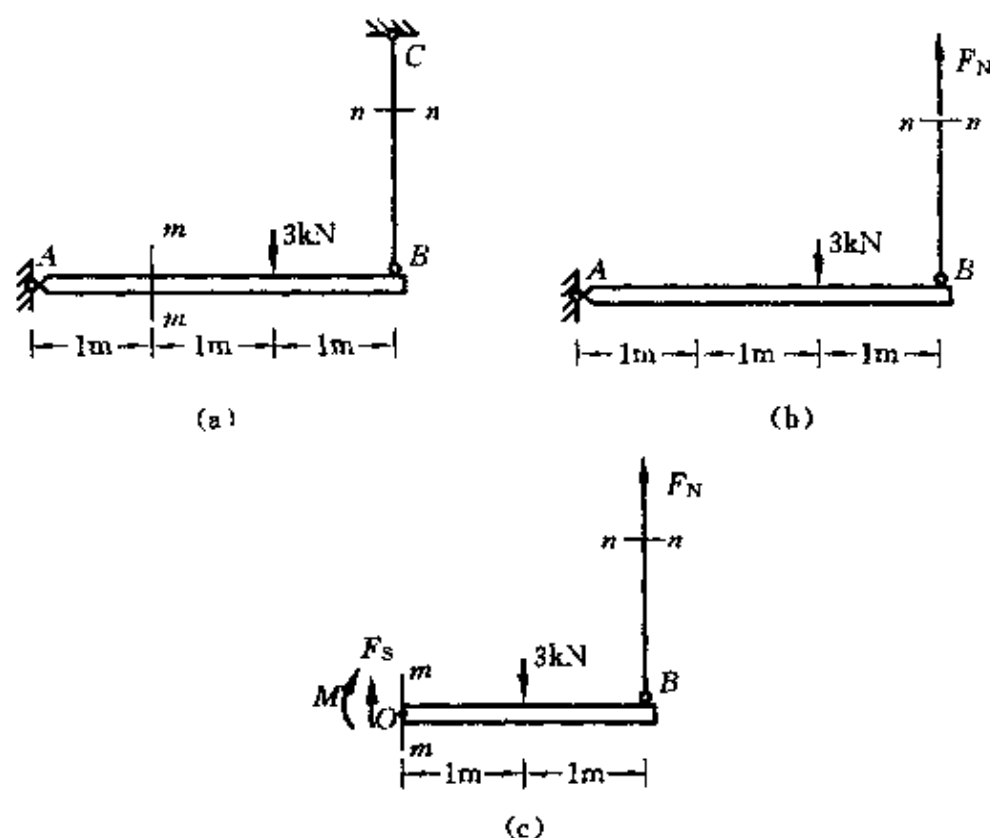
$$\sum M_O = 0, \quad F_N \times 2 - 3 \times 1 - M = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_s + F_N - 3 = 0 \quad (2)$$

将 $F_N = 2 \text{ kN}$ 代入①、②式,解得

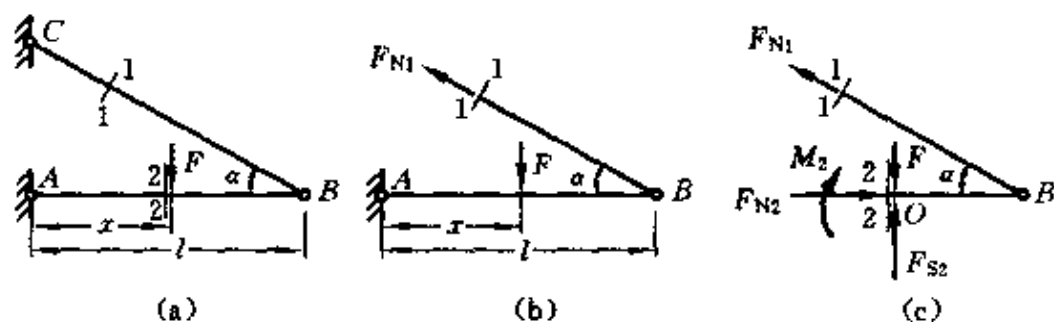
$$M = 1 \text{ kN} \cdot \text{m}, \quad F_s = 1 \text{ kN}$$

AB 杆的变形属于弯曲变形。



题 1.2 图

1.3 在题 1.3 图(a)所示简易吊车的横梁上, F 力可以左右移动。试求截面 1-1 和 2-2 上的内力及其最大值。



题 1.3 图

解 应用截面法, 取题 1.3 图(a)所示截面 1-1 以右部分作为研究对象, 其受力图如题 1.3 图(b)所示, 由平衡条件有

$$\sum M_A = 0, \quad F_{N1} l \sin \alpha = Fx \quad (1)$$

解①式, 得

$$F_{N1} = Fx / (l \sin \alpha)$$

因 x 的变化范围是 $0 \leq x \leq l$, 所以当 $x=l$ 时, F_{N1} 达到最大值, 即

$$F_{N1\max} = F/\sin\alpha$$

应用截面法, 取题 1.3 图(a)所示截面 1-1 和 2-2 以右部分作为研究对象, 受力图如题 1.3 图(c)所示, 由平衡条件有

$$\sum F_x = 0, \quad F_{N2} - F_{N1}\cos\alpha = 0 \quad (2)$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{S2} - F + F_{N1}\sin\alpha = 0 \quad (3)$$

$$\sum M_O = 0, \quad F_{N1}\sin\alpha(l-x) - M_2 = 0 \quad (4)$$

解①、②、③、④式, 得

$$F_{N2} = xF\cot\alpha/l, \quad F_{S2} = (1-x/l)F, \quad M_2 = (l-x)Fx/l$$

当 $x=l$ 时, N_2 达到最大值, 即

$$F_{N2\max} = F\cot\alpha$$

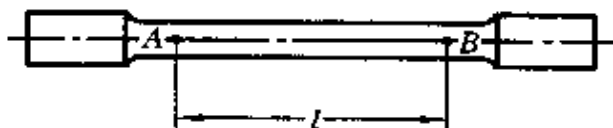
当 $x=0$ 时, F_{S2} 达到最大值, 即

$$F_{S2\max} = F$$

当 $x=l/2$ 时, M_2 达到最大值, 即

$$M_{2\max} = Fl/4$$

1.4 如题 1.4 图所示, 拉伸试样上 A、B 两点距离 l 称为标距。受拉力作用后, 用变形仪量出两点距离增量 $\Delta l = 5 \times 10^{-2} \text{ mm}$ 。若 l 的原长 $l = 100 \text{ mm}$, 试求 A、B 两点的平均应变 ϵ_m 。



题 1.4 图

解 由线应变的定义可知 AB 的平均应变为

$$\epsilon_m = \Delta l/l = 5 \times 10^{-2}/100 = 5 \times 10^{-4}$$

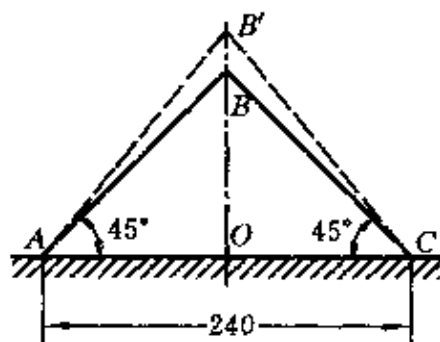
1.5 题 1.5 图所示的三角形薄板因受外力作用而变形, 角点 B 垂直向上的位移为 0.03 mm , 但 AB 和 BC 仍保持为直线。试求沿 OB 的平均应变, 并求 AB、BC 两边在 B 点的角度改变。

解 由线应变的定义可知,沿 OB 的平均应变为

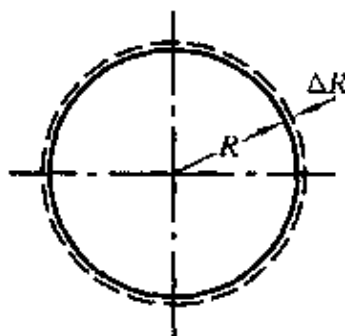
$$\epsilon_m = (OB' - OB)/OB = 0.03/120 = 2.5 \times 10^{-4}$$

由角应变的定义可知,在 B 点的角应变为

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{\pi}{2} - \angle AB'C = \frac{\pi}{2} - 2\left(\arctan \frac{OA}{OB'}\right) \\ &= \frac{\pi}{2} - 2\left(\arctan \frac{120}{120.03}\right) = 2.5 \times 10^{-4} \text{ rad}\end{aligned}$$



题 1.5 图



题 1.6 图

1.6 题 1.6 图所示的圆形薄板半径为 R , 变形后 R 的增量为 ΔR 。若 $R=80 \text{ mm}$, $\Delta R=3 \times 10^{-3} \text{ mm}$, 试求沿半径方向和外圆圆周方向的平均应变。

解 由线应变的定义可知,沿半径方向的平均应变为

$$\epsilon_r = \Delta R/R = 3 \times 10^{-3}/80 = 3.75 \times 10^{-5}$$

沿圆周方向的平均应变为

$$\epsilon_\theta = \frac{2\pi(R + \Delta R) - 2\pi R}{2\pi R} = \frac{2\pi\Delta R}{2\pi R} = \frac{3 \times 10^{-3}}{80} = 3.75 \times 10^{-5}$$

第二章 拉伸、压缩与剪切

知识要点

1. 轴向拉伸(压缩)的力学模型

- ① 构件特征——构件为等截面直杆。
- ② 受力特征——外力或外力的合力作用线与构件轴线重合。
- ③ 变形特征——杆件轴线在受力后均匀伸长(缩短),即杆件两横截面沿杆件轴线方向产生相对的平行移动。

2. 轴向拉伸(压缩)时,横截面上的内力——轴力

(1) 内力的定义

由外力作用引起的,构件内部相互之间的作用力。

(2) 截面法

截面法是求内力的一般方法。在需求内力的截面处,用一假想平面沿该截面将杆件截开,取其一部分,将弃去部分对留下部分的作用代之以内力,然后考虑留下部分的平衡,由平衡条件求出该截面上的未知内力。

(3) 轴力

轴向拉、压时,杆件横截面上的内力,以 F_N 表示,沿杆件轴线方向。

(4) 轴力的正负号规定

以拉力为正、压力为负。

(5) 轴力图

表示各横截面上的轴力沿杆件轴线方向变化规律的图线。

3. 轴向拉伸(压缩)时横截面上的应力

(1) 应力定义

由外力作用所引起的内力密度。

(2) 应力的特征

① 应力定义在物体的假想平面或边界上的一点处。

② 应力的纲量为单位面积的力,应力的单位为 N/m^2 ,或记做 Pa 。

(3) 轴向拉伸(压缩)时横截面上的应力

① 分布规律:对等截面直杆,正应力在整个截面上均匀分布。

② 计算公式: $\sigma = \frac{F_N}{A}$

4. 轴向拉伸(压缩)时,斜截面上的应力

(1) 斜截面上的应力

① 正应力 $\sigma_\alpha = \frac{F_N}{A} \cos^2 \alpha$

② 切应力 $\tau_\alpha = \frac{F_N}{2A} \sin 2\alpha$

(2) 最大、最小应力

$$(\sigma_\alpha)_{\max} = \sigma_{\alpha=0^\circ} = \frac{F_N}{A}, \quad (\sigma_\alpha)_{\min} = \sigma_{\alpha=90^\circ} = 0$$

$$|\tau_\alpha|_{\max} = \tau_{\alpha=\pm 45^\circ} = \frac{F_N}{2A}, \quad |\tau_\alpha|_{\min} = \tau_{\alpha=0^\circ, 90^\circ} = 0$$

5. 轴向拉伸(压缩)时的强度

(1) 低碳钢的静拉伸试验

① 弹性变形与塑性变形。

a. 弹性变形:解除外力后能完全消失的变形。

b. 塑性变形:解除外力后不能消失的永久变形。

② 变形的四个阶段。

弹性变形阶段;屈服阶段;强化阶段;局部变形阶段。

③ 力学性能指标。

a. 强度指标:

比例极限 σ_p ——应力和应变成正比的最高应力值。

弹性极限 σ_e ——只产生弹性变形的最高应力值。

屈服极限 σ_s ——应力变化不大,应变显著增加时的最低应力值。

强度极限 σ_b ——材料在断裂前所能承受的最高应力值。

b. 弹性指标:弹性模量 $E = \frac{\sigma}{\epsilon}$ (N/m²)

c. 塑性指标:延伸率 $\delta = \frac{L_1 - L_0}{L_0} \times 100\%$

$$\text{截面收缩率 } \phi = \frac{A_0 - A_1}{A_0} \times 100\%$$

d. 冷作硬化:材料经过预拉至强化阶段,卸载之后,再受力时,呈现比例极限提高,塑性降低的现象。

(2) 轴向拉伸(压缩)时的强度条件

构件的最大应力不得超过材料的许用应力

$$\sigma_{\max} = \frac{F_N}{A} \leq [\sigma]$$

许用应力是材料容许承受的最大工作应力。

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\lim}}{n} = \frac{\text{极限应力(或破坏应力)}}{\text{安全系数}}$$

(3) 强度计算的三类问题

① 强度校核 $\sigma_{\max} = \frac{F_N}{A} \leq [\sigma]$

② 截面设计 $A \geq \frac{F_N}{[\sigma]}$

③ 许用载荷计算 $F_N \leq [\sigma]A$ (由 F_N 计算 $[F]$)

6. 轴向拉伸(压缩)时的变形与位移

(1) 变形的定义

受力物体形状改变时,两点之间线距离或二正交线段之间夹角的改变,前者称线变形,后者称角变形。

(2) 轴向拉(压)时的变形

① 纵向变形 $\Delta L = L_1 - L$

② 纵向应变 $\epsilon = \frac{\Delta L}{L}$

③ 胡克定律 $\Delta L = \frac{F_N L}{EA}$ 或 $\epsilon = \frac{\sigma}{E}$

胡克定律的适用条件:

- a. 应力不超过材料的比例极限,即材料处于弹性范围;
- b. 在计算 ΔL 的长度 L 范围内, F_N 、 E 、 A 均为常数。

④ 横向变形 $\Delta d = d_1 - d$ (或 $\Delta a = a_1 - a$)

⑤ 横向应变 $\epsilon' = \frac{\Delta d}{d}$ (或 $\epsilon' = \frac{\Delta a}{a}$)

⑥ 泊松比 $\mu = \left| \frac{\epsilon'}{\epsilon} \right|$, μ 恒为负值

(3) 位移的定义

受力物体形状改变时,相对于某参考坐标系,物体上一点位置改变的直线距离,或一线段方向改变的角度。

(4) 位移的计算

- ① 选取参考坐标系。
- ② 计算杆件的变形量。
- ③ 根据变形的相容性(变形相容条件)作位移图(或结构的变形图),由位移的几何关系计算位移值。

7. 轴向拉伸(压缩)时的超静定问题

(1) 超静定问题

未知数多于可被应用的独立平衡方程数,不能用静力学平衡方程完全确定全部未知数的问题。

(2) 超静定问题的解题步骤

- ① 静力平衡条件——由静力平衡条件列出平衡方程。
- ② 变形相容条件——根据结构或杆件变形后应保持连续的变形相容条件,作出位移图(或变形图),由位移图的几何关系列出变形间的关系方程。

③ 物理关系——由胡克定律列出力-变形间的关系方程。

④ 将物理关系代入变形相容条件,得补充方程。补充方程和静力平衡方程,二者方程数之和正好等于未知数的个数,联立平衡

方程和补充方程,求解全部未知数。

8. 剪切及其实用计算

(1) 剪切的力学模型

① 受力特征:构件受一对大小相等、方向相反、作用线相互紧靠但不重合的平行力作用。

② 变形特征:构件沿二平行力的交界面发生相对错动。

(2) 剪切面

构件将发生相互错动的面。

(3) 剪力

剪切面上的内力,其作用线与剪切面平行。

(4) 实用计算方法

根据构件破坏的可能性,以直接试验为基础,用剪切面上的平均应力(名义应力)来进行构件的强度计算。

(5) 平均切应力(或名义切应力)

假设切应力在整个剪切面上均匀分布,则平均切应力等于剪切面上的剪力被剪切面面积除,即

$$\tau_{\text{avg}} = \frac{F_s}{A}$$

(6) 剪切强度条件

$$\tau_{\text{avg}} = \frac{F_s}{A} \leq [\tau]$$

式中, $[\tau]$ 为根据直接试验并按名义切应力公式(平均切应力计算公式)求得的材料的许用切应力。

9. 挤压及其实用计算

(1) 挤压

构件局部面积的承压作用。

(2) 平均(名义)挤压应力

假设挤压应力在有效挤压面上均匀分布,则

$$\sigma_{bs} = \frac{F}{A_{bs}}$$

平面接触时,有效挤压面积 A_{bs} 等于实际承压面面积,柱面接触时,有效挤压面积为实际承压面面积在其直径平面上的投影。

10. 纯剪切的观念

(1) 纯剪切

单元体的各个面上只承受切应力。

(2) 切应力互等定理

弹性体内一点处的切应力必成对出现,并分别作用在过该点的两个互相垂直的平面上,二者的数值相等,方向均垂直于二正交平面的交线,且共同指向或背离二正交平面的交线。

(3) 剪切胡克定律

当切应力不超过材料的剪切比例极限时,切应力与切应变成正比,即 $\tau = G\gamma$ 。

习题详解

2.1 试求题 2.1 图所示的各杆 1-1、2-2、3-3 截面上的轴力,并作轴力图。

解 解法一 绘制轴力图的方法与步骤如下。

① 用截面法计算出不同截面上的内力。

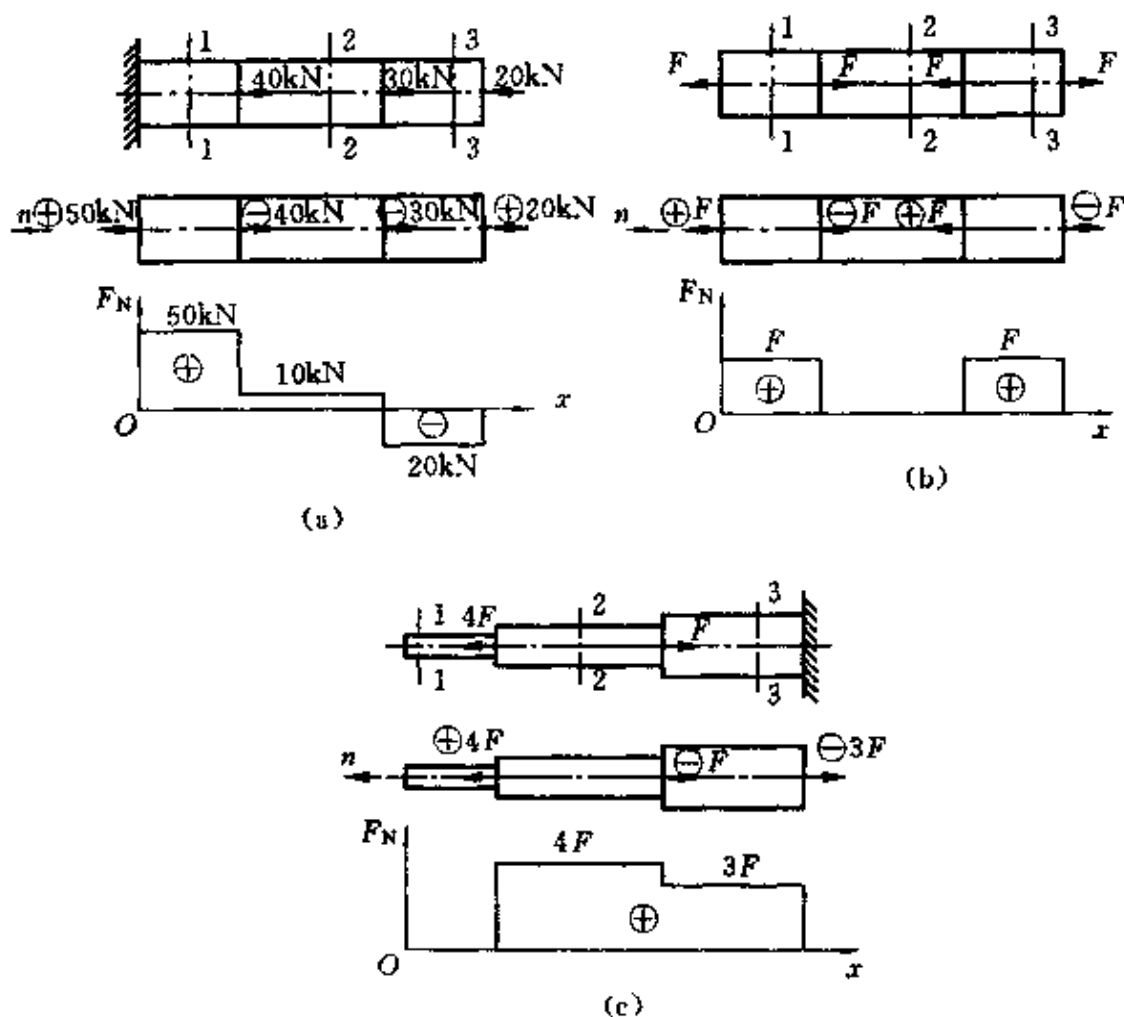
② 选取杆的轴线为横坐标(或纵坐标),表示截面位置,用垂直于杆轴线的坐标轴表示轴力值。

③ 将正的轴力图线画在横轴上侧(或纵轴右侧),负的轴力图线画在横轴下侧(或左侧)。

解法二 ①解除所有的约束,并用约束反力代之,然后根据平衡条件确定约束反力。作杆的自由体图。

②以杆左端面的外法线 n 为基准,将各轴向载荷标以正负号,凡指向与外法线 n 的指向一致的载荷为正,相反的为负。

③自左向右画轴力图。对应于载荷作用点处的轴力图将产生



题 2.1 图

跳跃；对应于正载荷，轴力图上跳，对应于负载荷，轴力图下跌，上跳或下跌量等于对应点处的载荷数值。而载荷作用点之间的轴力图总是一条与杆轴线平行的直线。

以上两种解法所作的轴力图完全相同，如题 2.1 图(a)、(b)、(c)所示。

2.2 作用于题 2.2 图所示零件上的拉力 $F = 38 \text{ kN}$ ，试问零件内最大拉应力发生在哪个截面上？并求其值。

解 截面 1-1 的面积为

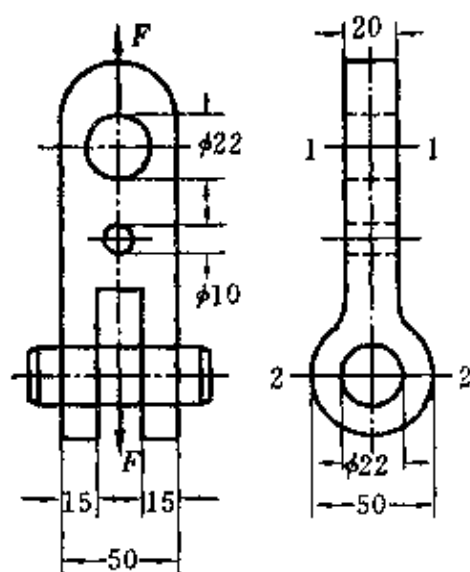
$$A_1 = (50 - 22) \times 20 \text{ mm}^2 = 560 \text{ mm}^2$$

截面 2-2 的面积为

$$A_2 = (15 + 15)(50 - 22) \text{ mm}^2 \\ = 840 \text{ mm}^2$$

1-1 截面和 2-2 截面的轴力大小都为 F , 因 1-1 截面面积比 2-2 截面面积小, 故最大拉应力在截面 1-1 上, 其数值为

$$\sigma_{\max} = \frac{F_N}{A_1} = \frac{F}{A_1} \\ = \frac{38 \times 10^3}{560 \times 10^{-6}} \text{ Pa} = 67.9 \text{ MPa}$$

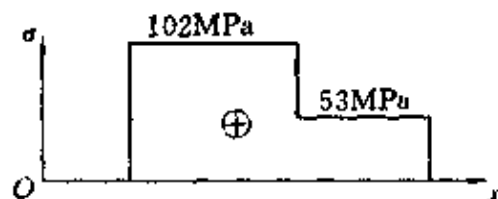


题 2.2 图

2.3 在题 2.1 图(c)中, 若 1-1、2-2、3-3 三个横截面的直径分别为 $d_1 = 15 \text{ mm}$, $d_2 = 20 \text{ mm}$, $d_3 = 24 \text{ mm}$, $F = 8 \text{ kN}$, 试用图线表示横截面上的应力沿轴线的变化情况。

解 由题 2.1 图(c)所示轴力图可知, 三个截面的轴力分别为 $F_{N1} = 0$, $F_{N2} = 4F$, $F_{N3} = 3F$, 由拉、压变形正应力公式可知, 三截面上的正应力分别为

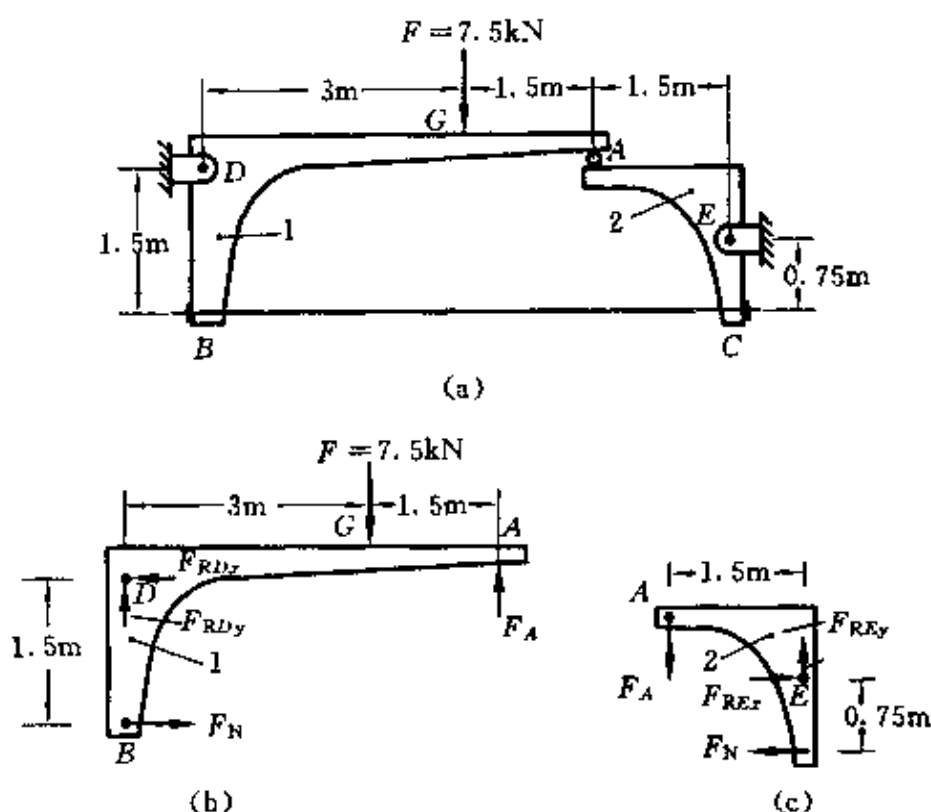
$$\sigma_1 = \frac{F_{N1}}{A_1} = 0 \\ \sigma_2 = \frac{F_{N2}}{A_2} = \frac{4 \times 8 \times 10^3}{\frac{\pi}{4} \times 0.02^2} \text{ Pa} \\ = 102 \text{ MPa} \\ \sigma_3 = \frac{F_{N3}}{A_3} = \frac{3 \times 8 \times 10^3}{\frac{\pi}{4} \times 0.024^2} \text{ Pa} \\ = 53.1 \text{ MPa}$$



题 2.3 图

应力分布如题 2.3 图所示。

2.4 题 2.4 图(a)所示结构中, 若钢拉杆 BC 的横截面直径为 10 mm , 试求拉杆内的应力。设由 BC 连接的 1 和 2 两部分均为刚体。



题 2.4 图

解 首先根据刚体系的平衡条件, 求出 BC 杆的内力。

刚体 1 受力图如题 2.4 图(b)所示, 平衡条件为

$$\sum M_D = 0, \quad F_N \times 1.5 + F_A \times 4.5 - F \times 3 = 0 \quad (1)$$

刚体 2 受力图如题 2.4 图(c)所示, 平衡条件为

$$\sum M_E = 0, \quad F_A \times 1.5 - F_N \times 0.75 = 0 \quad (2)$$

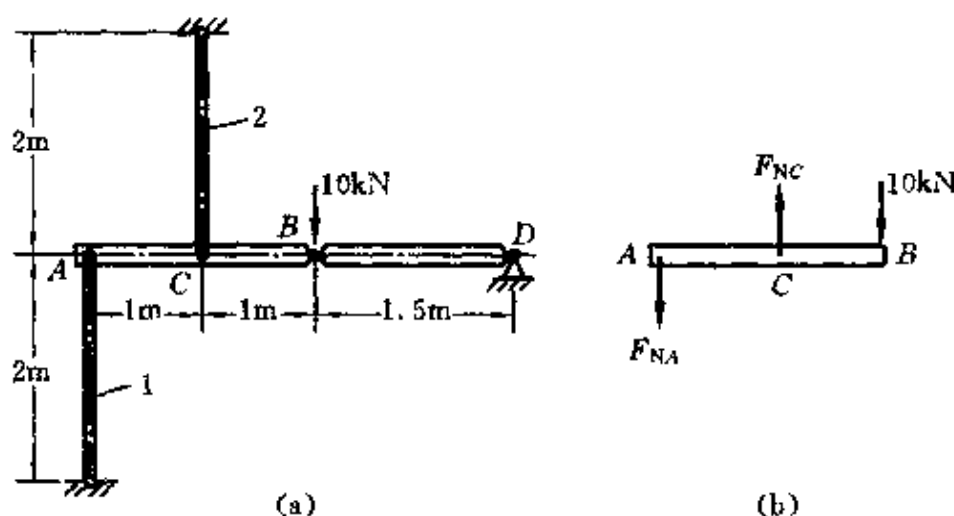
解①、②式得 BC 杆的内力为

$$F_N = 6 \text{ kN}$$

故拉杆 BC 杆内的应力为

$$\sigma = \frac{F_N}{A} = \frac{6 \times 10^3}{\frac{\pi}{4} \times (10 \times 10^{-3})^2} \text{ Pa} = 76.4 \text{ MPa}$$

2.5 题 2.5 图(a)所示结构中, 1、2 两杆的横截面直径分别为 10 mm 和 20 mm。试求两杆内的应力。设两根横梁皆为刚体。



题 2.5 图

解 先求 1、2 杆的轴向内力,选取 AB 杆为受力体,其受力图如题 2.5 图 (b) 所示,由平衡条件有

$$\sum F_y = 0, \quad F_{NA} + 10 = F_{NC} \quad (1)$$

$$\sum M_A = 0, \quad 10 \times 2 - F_{NC} \times 1 = 0 \quad (2)$$

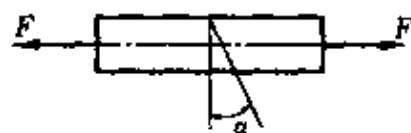
解①、②式,得 $F_{NA} = 10 \text{ kN}$, $F_{NC} = 20 \text{ kN}$

故 1、2 杆内的应力分别为

$$\sigma_1 = \frac{10 \times 10^3}{\frac{\pi}{4} \times (10 \times 10^{-3})^2} \text{ Pa} = 127 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{20 \times 10^3}{\frac{\pi}{4} \times (20 \times 10^{-3})^2} \text{ Pa} = 63.7 \text{ MPa}$$

2.6 如题 2.6 图所示,直径为 10 mm 的圆杆,在拉力 $F = 10 \text{ kN}$ 的作用下,试求最大切应力,并求与杆的横截面夹角为 $\alpha = 30^\circ$ 的斜截面上正应力及切应力。



题 2.6 图

解 受轴向载荷杆,斜截面上的应力公式为

$$\sigma_{\alpha} = \frac{F_N}{A} \cos^2 \alpha, \quad \tau_{\alpha} = \frac{F_N}{2A} \sin 2\alpha$$

当 $\alpha = 45^\circ$ 时, 杆内切应力达到最大值, 所以

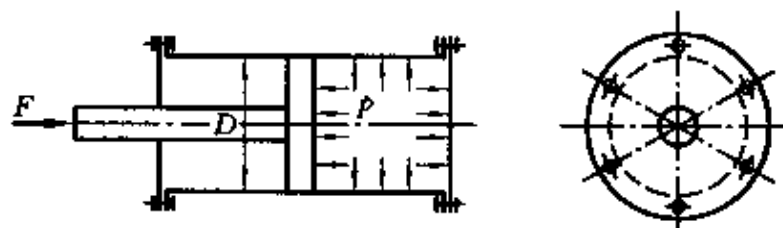
$$\tau_{\max} = \frac{F_N}{2A} \sin 2\alpha = \frac{F}{2A} \sin 90^\circ = \frac{10 \times 10^3}{2 \times \frac{\pi}{4} \times 0.01^2} \text{ Pa} = 63.7 \text{ MPa}$$

在与木杆的横截面夹角为 30° 的斜截面上, 正应力及切应力分别为

$$\sigma_{30^\circ} = \frac{F}{A} \cos^2 30^\circ = \left(\frac{10 \times 10^3}{\pi \times 0.01^2 / 4} \times \frac{3}{4} \right) \text{ Pa} = 95.5 \text{ MPa}$$

$$\tau_{30^\circ} = \frac{F}{2A} \sin(2 \times 30^\circ) = \left(\frac{10 \times 10^3}{\pi \times 0.01^2 / 4} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \text{ Pa} = 55.1 \text{ MPa}$$

2.7 如题2.7图所示, 油缸盖与缸体采用6个螺栓连接。已知油缸内径 $D = 350 \text{ mm}$, 油压 $p = 1 \text{ MPa}$ 。若螺栓材料的许用应力 $[\sigma] = 40 \text{ MPa}$, 求螺栓的内径。



题 2.7 图

解 设油缸盖承压面积为 A_1 , 螺栓的横截面积为 A , 根据平衡条件, 6 个螺栓所承受的总轴力为

$$F_N = pA_1 = p \times \frac{\pi}{4} D^2$$

假设总轴力 F_N 由 6 个螺栓平均分担, 则每个螺栓所承受的轴力为

$$F_{N_{\text{螺}}} = \frac{F_N}{6} = \frac{\pi}{24} D^2 p$$

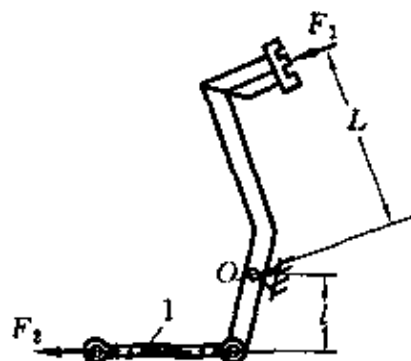
根据强度条件, 每个螺栓的工作应力不应超过材料的许用应力, 即

$$\sigma = \frac{F_{N_{\text{螺}}}}{A} = \frac{\pi}{24} D^2 p / \left(\frac{\pi}{4} d^2 \right) \leq [\sigma]$$

式中, d 为螺栓的内径。故螺栓的内径为

$$d \geq \sqrt{\frac{D^2 p}{6[\sigma]}} = \sqrt{\frac{0.35^2 \times 10^6}{6 \times 40 \times 10^6}} \text{ m} = 22.6 \text{ mm}$$

2.8 汽车离合器踏板如题 2.8 图所示。已知踏板受到压力 $F_1=400$ N 作用, 拉杆 1 的直径 $D=9$ mm, 杠杆臂长 $L=330$ mm, $l=56$ mm, 拉杆的许用应力 $[\sigma]=50$ MPa, 校核拉杆 1 的强度。



题 2.8 图

解 由平衡条件

$$\sum M_O = 0, \quad F_1 L = F_2 l$$

可得, 拉杆 1 的轴力为

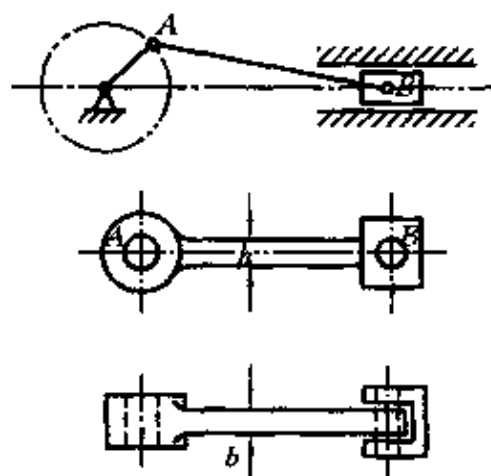
$$F_N = F_2 = \frac{F_1 L}{l} = \frac{400 \times 0.33}{0.056} \text{ N} = 2357 \text{ N}$$

拉杆 1 的工作应力为

$$\sigma = \frac{F_N}{A} = \frac{F_2}{\frac{\pi D^2}{4}} = \frac{4 \times 2357}{\pi \times 0.009^2} \text{ Pa} = 37.1 \text{ MPa} < [\sigma] = 50 \text{ MPa}$$

工作应力小于许用应力, 故拉杆 1 满足强度要求。

2.9 冷镦机的曲柄滑块机构如题 2.9 图所示。镦压工件时连杆接近水平位置, 承受的镦压力 $F=1100$ kN。连杆截面是矩形截面, 高度与宽度之比为 $h/b=1.4$ 。材料为 45 钢, 许用应力 $[\sigma]=58$ MPa, 试确定截面尺寸 h 及 b 。



题 2.9 图

解 连杆内的轴力等于镦压力 F , 所以连杆内正应力为

$$\sigma = F/A$$

根据强度条件,应有 $\sigma = \frac{F}{A} = \frac{F}{bh} \leq [\sigma]$

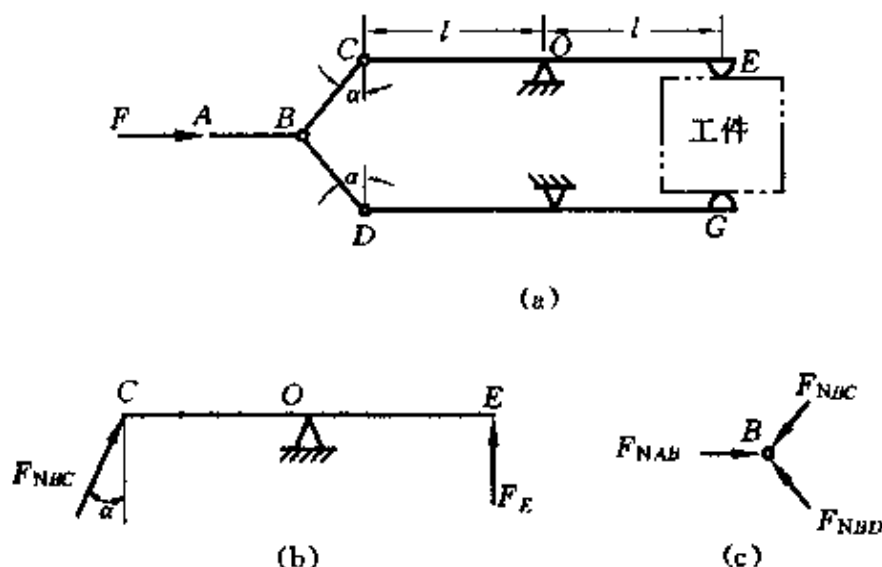
将 $h/b=1.4$ 代入上式,解得

$$b \geq \sqrt{\frac{F}{1.4[\sigma]}} = \sqrt{\frac{1100 \times 10^3}{1.4 \times 58 \times 10^6}} \text{ m} = 116 \text{ mm}$$

由 $h/b=1.4$,得 $h \geq 162 \text{ mm}$

所以,截面尺寸应为 $b \geq 116 \text{ mm}$, $h \geq 162 \text{ mm}$ 。

2.10 题 2.10 图(a)所示的双杠杆夹紧机构,需产生一对 20 kN 的夹紧力,试求水平杆 AB 及二斜杆 BC 和 BD 的横截面直径。已知:该三杆的材料相同, $[\sigma]=100 \text{ MPa}$, $\alpha=30^\circ$ 。



题 2.10 图

解 欲确定 AB、BC 和 BD 三杆的直径,首先要求出三杆的内力,从而计算出三杆的工作应力,再根据强度条件,确定它们的直径。因 AB、BC、BD 三杆都是二力杆,所以三杆都只受轴向力,取 CE 杆为受力体,受力图如题 2.10 图(b)所示,由平衡条件

$$\sum M_O = 0, \quad F_{NBC} l \cos \alpha = F_E l$$

得 BC 杆的轴力为 $F_{NBC} = \frac{20}{\cos 30^\circ} \text{ kN} = 23.1 \text{ kN}$

根据强度条件,BC 杆的工作应力不应超过许用应力,即

$$\sigma_{BC} = \frac{F_{NBC}}{A_{BC}} = \frac{F_{NBC}}{\frac{\pi}{4}d_{BC}^2} \leq [\sigma]$$

由上式可确定 BC 杆的直径为

$$d_{BC} \geq \sqrt{\frac{4F_{NBC}}{\pi[\sigma]}} = \sqrt{\frac{4 \times 23100}{\pi \times 100 \times 10^6}} \text{ m} = 17.2 \text{ mm}$$

由于结构对称, 所以 $d_{BD} = d_{BC} = 17.2 \text{ mm}$

B 铰链的受力图如题 2.10 图(c)所示, 由平衡条件

$$\sum F_x = 0, \quad 2F_{NBC}\cos 60^\circ = F_{NAB}$$

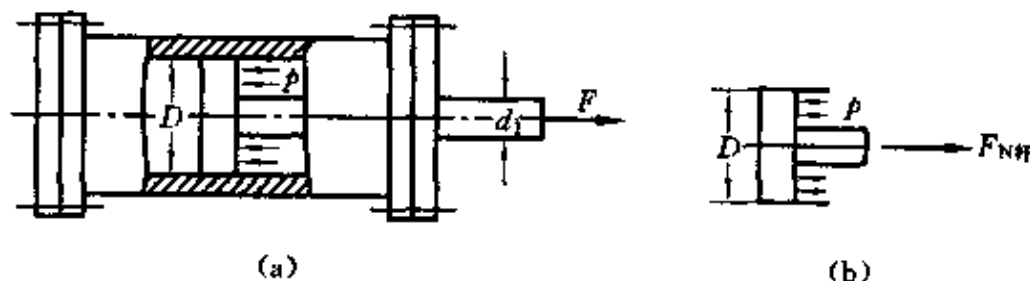
解得 $F_{NAB} = 23.1 \text{ kN}$

根据强度条件 $\sigma_{AB} = \frac{F_{NAB}}{A_{AB}} = \frac{F_{NAB}}{\frac{\pi}{4}d_{AB}^2} \leq [\sigma]$

可确定 AB 杆的直径为

$$d_{AB} \geq \sqrt{\frac{4F_{NAB}}{\pi[\sigma]}} = \sqrt{\frac{4 \times 23100}{\pi \times 100 \times 10^6}} \text{ m} = 17.2 \text{ mm}$$

2.11 如题 2.11 图(a)所示, 卧式拉床的油缸内径 $D = 186 \text{ mm}$, 活塞杆直径 $d_1 = 65 \text{ mm}$, 材料为 20Cr 并经过热处理, $[\sigma]_{\text{杆}} = 130 \text{ MPa}$ 。缸盖由 6 个 M20 的螺栓与缸体连接, M20 螺栓的内径 $d = 17.3 \text{ mm}$, 材料为 35 钢, 经热处理后 $[\sigma]_{\text{螺}} = 110 \text{ MPa}$ 。试按活塞杆和螺栓强度确定最大油压 p 。



题 2.11 图

解 (1) 按活塞杆的强度要求确定最大油压 p 。

活塞杆的受力如题 2.11 图(b)所示,由平衡条件可得活塞杆的轴力为

$$F_{N\text{杆}} = p \frac{\pi}{4} (D^2 - d_1^2)$$

根据活塞杆的强度条件

$$\sigma_{\text{杆}} = \frac{F_{N\text{杆}}}{A_{\text{杆}}} = \left[p \frac{\pi}{4} (D^2 - d_1^2) \right] / \left(\frac{\pi}{4} d_1^2 \right) \leq [\sigma]_{\text{杆}}$$

解上式得最大油压力为

$$p \leq \frac{[\sigma]_{\text{杆}} d_1^2}{D^2 - d_1^2} = \frac{130 \times 10^6 \times 0.065^2}{0.186^2 - 0.065^2} \text{ Pa} = 18.1 \text{ MPa}$$

(2) 按螺栓的强度要求确定最大油压 p 。

设缸盖所受的压力由 6 个螺栓平均分担,每个螺栓所承受的轴力为

$$F_{N\text{螺}} = \left[p \frac{\pi}{4} (D^2 - d_1^2) \right] / 6$$

根据螺栓的强度条件

$$\sigma_{\text{螺}} = \frac{F_{N\text{螺}}}{A_{\text{螺}}} = p \frac{\pi}{4} (D^2 - d_1^2) / \left(6 \times \frac{\pi}{4} d^2 \right) \leq [\sigma]_{\text{螺}}$$

解上式得最大油压为

$$p \leq \frac{6[\sigma]_{\text{螺}} d^2}{D^2 - d_1^2} = \frac{6 \times 110 \times 10^6 \times 0.0173^2}{0.186^2 - 0.065^2} \text{ Pa} = 6.5 \text{ MPa}$$

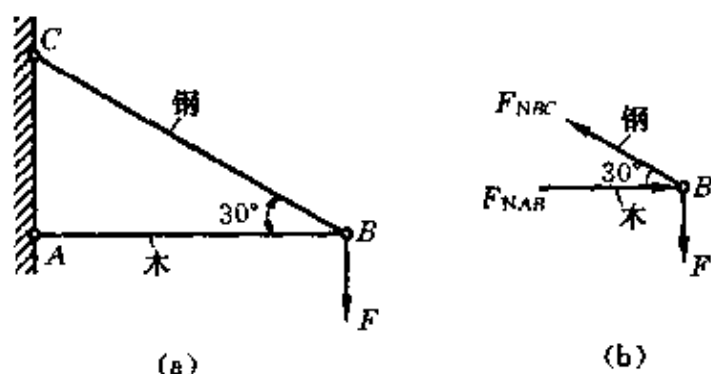
比较由以上两种强度条件所确定的许用油压值,可知最大油压为

$$p = 6.5 \text{ MPa}$$

2.12 题 2.12 图(a)所示简易吊车中,BC 为钢杆,AB 为木杆。木杆 AB 的横截面面积 $A_1 = 100 \text{ cm}^2$,许用应力 $[\sigma]_1 = 7 \text{ MPa}$;钢杆 BC 的横截面面积 $A_2 = 6 \text{ cm}^2$,许用拉应力 $[\sigma]_2 = 160 \text{ MPa}$ 。试求许可吊重 F 。

解 (1) 按照钢杆的强度要求确定许可吊重。

B 铰链的受力图如题 2.12 图(b)所示,平衡条件为



题 2.12 图

$$\sum F_x = 0, \quad -F_{NBC}\cos 30^\circ + F_{NAB} = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{NBC}\sin 30^\circ - F = 0 \quad (2)$$

解①、②式,得 $F_{NBC} = 2F$, $F_{NAB} = \sqrt{3}F$

钢杆的强度条件为 $\sigma_{\text{钢}} = F_{NBC}/A_2 \leq [\sigma]_2$

解上式得

$$F_{NBC} \leq [\sigma]_2 A_2 = (160 \times 10^6 \times 6 \times 10^{-4}) \text{ N} = 96 \text{ kN}$$

因 $F_{NBC} = 2F$, 所以许可吊重

$$[F] = F_{NBC}/2 \leq 48 \text{ kN}$$

(2) 按木杆的强度要求确定许可吊重。

木杆的强度条件为

$$\sigma_{\text{木}} = F_{NAB}/A_1 \leq [\sigma]_1$$

解上式得

$$F_{NAB} \leq [\sigma]_1 A_1 = (7 \times 10^6 \times 100 \times 10^{-4}) \text{ N} = 70 \text{ kN}$$

因 $F_{NAB} = \sqrt{3}F$, 所以许可吊重

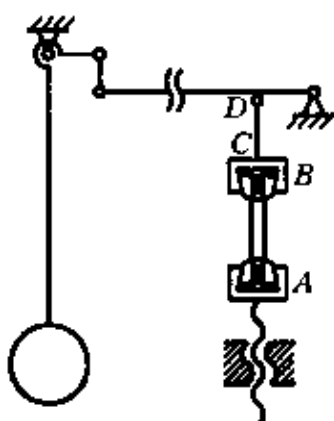
$$[F] = F_{NAB}/\sqrt{3} \leq 40.4 \text{ kN}$$

比较上述求得的两种许可吊重值, 可以确定吊车的许可吊重为

$$[F] = 40.4 \text{ kN}$$

2.13 某拉伸试验机的结构示意图如题 2.13 图所示。设试验机的 CD 杆与试件 AB 的材料同为低碳钢, 其 $\sigma_p = 200 \text{ MPa}$, $\sigma_s =$

240 MPa, $\sigma_b = 400$ MPa。试验机最大拉力为 100 kN。(1) 用这一试验机作拉断试验时, 试样直径最大可达多大? (2) 若设计时取试验机的安全系数 $n=2$, 则 CD 杆的横截面面积为多少? (3) 若试样直径 $d=10$ mm, 今欲测弹性模量 E , 则所加载荷最大不能超过多少?



题 2.13 图

解 (1) 工作状态下, CD 杆和试样 AB 承受相同的轴向拉力, 其最大值为 $F=100$ kN。在作拉断试验时, 为确保试样断裂, CD 杆能安全工作, 则要求试样内的应力应先于 CD 杆达到强度极限, 因此试样的直径不能过大, 否则有可能试样尚未断裂, CD 杆先断裂, 设试样的直径为 d , 根据强度条件, 试样的最大应力应满足

$$\sigma_1 = F / \left(\frac{\pi}{4} d^2 \right) \geq [\sigma_b]$$

解上式得试样的最大直径为

$$d_{\max} \leq \sqrt{\frac{4F}{\pi[\sigma_b]}} = \sqrt{\frac{4 \times 100 \times 10^3}{\pi \times 400 \times 10^6}} \text{ m} = 17.8 \text{ mm}$$

$$(2) \text{ } CD \text{ 杆的强度条件为 } \sigma_2 = \frac{F}{A_{CD}} \leq \frac{[\sigma_s]}{n}$$

解上式得 CD 杆的横截面面积为

$$A_{CD} \geq \frac{nF}{[\sigma_s]} = \frac{2 \times 100 \times 10^3}{240 \times 10^6} \text{ m}^2 = 833 \text{ mm}^2$$

(3) 测弹性模量时, 试样最大应力不应超过其弹性极限 σ_p , 即

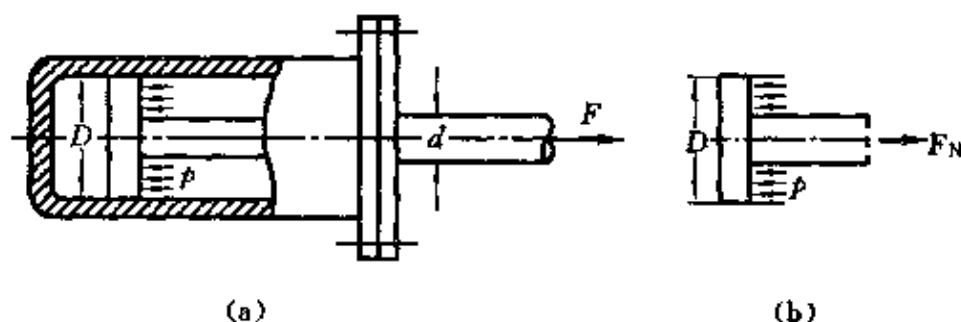
$$\sigma_3 = F / \left(\frac{\pi}{4} d^2 \right) \leq [\sigma_p]$$

解上式得

$$F \leq [\sigma_p] \frac{\pi}{4} d^2 = 200 \times 10^6 \times \frac{\pi}{4} \times 0.01^2 \text{ N} = 15.7 \text{ kN}$$

所以测弹性模量时, 所加载荷最大不应超过 15.7 kN。

2.14 某铣床工作台进给油缸如题 2.14 图(a)所示,缸内工作油压 $p=2\text{ MPa}$,油缸内径 $D=75\text{ mm}$,活塞杆直径 $d=18\text{ mm}$ 。已知活塞杆材料的许用应力 $[\sigma]=50\text{ MPa}$,试校核活塞杆的强度。



题 2.14 图

解 活塞杆的受力图如题 2.14 图(b)所示,由平衡条件可得其承受的拉力为

$$F_N = p\pi(D^2 - d^2)/4$$

活塞杆的应力

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{F_N}{A} = p \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) / \left(\frac{\pi}{4} d^2 \right) \\ &= \frac{2 \times 10^6 \times (0.075^2 - 0.018^2)}{0.018^2} \text{ Pa} = 32.7 \text{ MPa}\end{aligned}$$

与许用应力 $[\sigma]=50\text{ MPa}$ 比较可知,活塞杆可以安全工作。

2.15 题 2.15 图所示的拉杆沿斜截面 $m-m$ 由两部分胶合而成。设在胶合面上许用拉应力 $[\sigma]=100\text{ MPa}$,许用切应力 $[\tau]=50\text{ MPa}$ 。设由胶合面的强度控制杆件的拉力。试问:为使杆件承受最大拉力 F , α 角的值应为多少?若杆件横截面面积为 $A=4\text{ cm}^2$,并规定 $\alpha \leq 60^\circ$,试确定许可载荷 F 。



题 2.15 图

解 拉杆的任一斜截面上的应力为

$$\sigma_\alpha = \frac{F}{A} \cos^2 \alpha, \quad \tau_\alpha = \frac{F}{A} \sin \alpha \cos \alpha$$

既然由胶合面的强度来控制杆件的拉力大小,那么最合理的状态是胶合面上的正应力和切应力同时达到各自的许用应力,这时杆件承受的拉力 F 最大。因此有

$$\sigma_s = \frac{F}{A} \cos^2 \alpha = [\sigma] \quad (1)$$

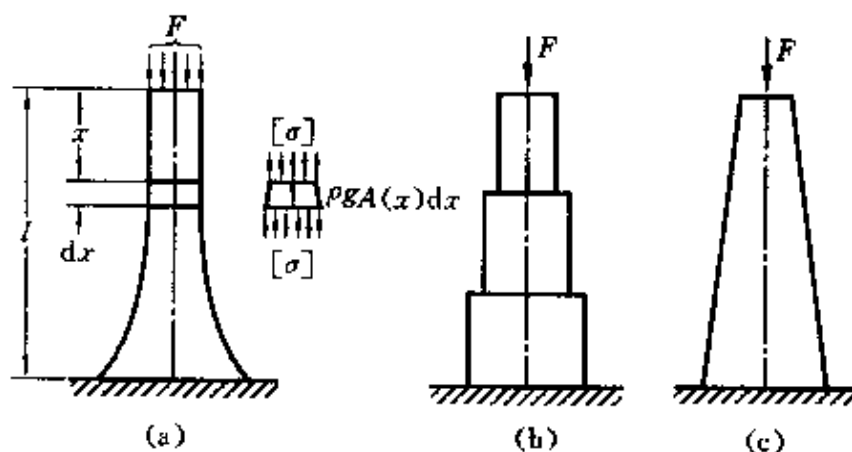
$$\tau_s = \frac{F}{A} \sin \alpha \cos \alpha = [\tau] \quad (2)$$

比较①、②式得 $\tan \alpha = \frac{[\tau]}{[\sigma]} = \frac{50}{100} = 0.5$

由上式得 $\alpha = 26.6^\circ$, 所以 $\alpha = 26.6^\circ$ 时, 杆件承受的拉力最大

$$F_{\max} = \frac{A[\sigma]}{\cos^2 \alpha} = \frac{4 \times 10^{-4} \times 100 \times 10^6}{\cos^2 26.6^\circ} \text{ N} = 50 \text{ kN}$$

2.16 如题 2.16 图(a)所示, 在压力 F 作用下的杆件, 如再考虑其自重影响, 并要求任一横截面上的应力皆等于许用应力 $[\sigma]$ 。试确定横截面面积沿轴线的变化规律, 并计算杆件变形。设材料单位体积的质量为 ρ 。



题 2.16 图

解 取长为 dx 的微段(题 2.16 图(a)), 则顶面与底面的面积分别为 $A(x)$ 和 $A(x) + dA(x)$ 。这两个横截面上的应力都应等于 $[\sigma]$, 而这一微段的自重则应为 $\rho g A(x) dx$ 。

由平衡方程

$$\sum F_x = 0, \quad [\sigma]A(x) + \rho g A(x) dx - [\sigma][A(x) + dA(x)] = 0$$

得出
$$\frac{dA(x)}{A(x)} = \frac{\rho g}{[\sigma]} dx$$

等号两边积分,得
$$\ln A(x) = \frac{\rho g}{[\sigma]} x + C \quad (1)$$

确定积分常数的边界条件是,当 $x=0$ 时

$$A(x) = A_0 = \frac{F}{[\sigma]} \quad (2)$$

把以上边界条件代入①式,得

$$C = \ln A_0$$

这样,①式化为
$$A(x) = A_0 e^{\frac{\rho g}{[\sigma]} x} \quad (3)$$

这就是沿轴线 $A(x)$ 的变化规律。这样的杆件由于任一横截面上的应力皆等于许用应力,所以称为等强度杆。等强度杆在任一横截面上的应力都等于常量,因而任一横截面处的应变也是常量,即

$$|\epsilon| = \frac{[\sigma]}{E} = \text{常量}$$

于是整个杆件的总变形是
$$|\Delta l| = |\epsilon l| = \frac{[\sigma] l}{E}$$

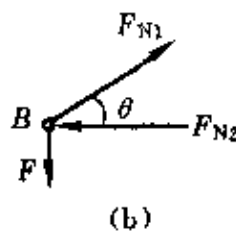
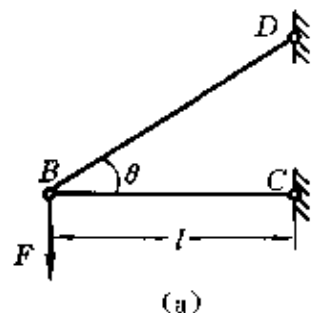
实际上,要将杆件加工成如题 2.16 图(a)所示的形状,是非常困难的。因此通常采用阶梯形杆或截锥形杆,如题 2.16 图(b)、(c)所示。

2.17 题 2.17 图(a)所示杆系中,BC 和 BD 两杆的材料相同,且抗拉和抗压许用应力也相同,同为 $[\sigma]$ 。BC 杆保持水平,长度为 l ,BD 杆的长度可随 θ 角的大小而变。为使杆系使用的材料最省,试求夹角 θ 的值。

解 B 铰链的受力图如题 2.17 图(b)所示,平衡条件为

$$\sum F_x = 0, \quad F_{N2} - F_{N1} \cos \theta = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{N1} \sin \theta - F = 0$$



题 2.17 图

解上两式得 $F_{N1} = \frac{F}{\sin\theta}$, $F_{N2} = F\cot\theta$

最合理的情况是两杆同时达到许用应力值,即

$$\sigma_1 = \frac{F_{N1}}{A_1} = [\sigma], \quad \sigma_2 = \frac{F_{N2}}{A_2} = [\sigma]$$

将 F_{N1} 、 F_{N2} 表达式代入上两式,可得 BD 、 BC 杆的截面面积分别为

$$A_1 = \frac{F}{\sin\theta[\sigma]}, \quad A_2 = \frac{F\cot\theta}{[\sigma]}$$

结构的体积为

$$\begin{aligned} V &= A_1 L_1 + A_2 L_2 = \frac{Fl}{\sin\theta[\sigma]\cos\theta} + \frac{Fl\cos\theta}{\sin\theta[\sigma]} = \frac{Fl}{[\sigma]} \left(\frac{1 + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} \right) \\ &= \frac{Fl}{[\sigma]} \left(\frac{\sin^2\theta + 2\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} \right) = \frac{Fl}{[\sigma]} (\tan\theta + 2\cot\theta) \end{aligned}$$

体积 V 是角 θ 的函数,体积为最小的条件是

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\theta} &= \frac{Fl}{[\sigma]} \left(\frac{1}{\cos^2\theta} - \frac{2}{\sin^2\theta} \right) = \frac{Fl}{[\sigma]} \left(\frac{\sin^2\theta - 2\cos^2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta} \right) = 0 \\ 2\cos^2\theta - \sin^2\theta &= 0 \end{aligned}$$

解上式得

$$\tan^2\theta = 2, \quad \theta = 54.7^\circ$$

使杆系使用材料最省的夹角为 $\theta = 54.7^\circ$ 。

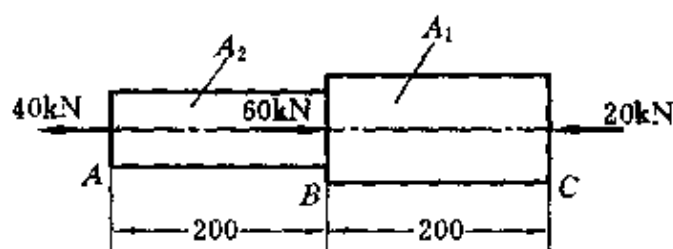
2.18 变截面直杆的受力如题 2.18 图(a)所示。已知: $A_1 = 8 \text{ cm}^2$, $A_2 = 4 \text{ cm}^2$, $E = 200 \text{ GPa}$ 。求杆的总伸长 Δl 。

解 杆的轴力图如题 2.18 图(b)所示,各段的伸长分别为

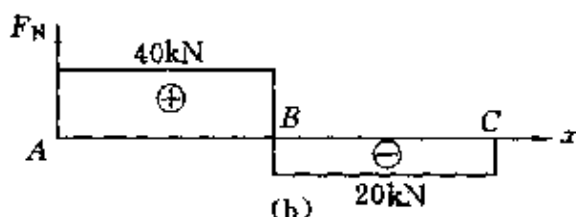
$$\Delta l_1 = \frac{F_{N1} l_1}{EA_1}, \quad \Delta l_2 = \frac{F_{N2} l_2}{EA_2}$$

则总的伸长为

$$\begin{aligned} \Delta l &= \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{F_{N1} l_1}{EA_1} + \frac{F_{N2} l_2}{EA_2} \\ &= \left(\frac{-20 \times 10^3 \times 0.2}{200 \times 10^9 \times 8 \times 10^{-4}} + \frac{40 \times 10^3 \times 0.2}{200 \times 10^9 \times 4 \times 10^{-4}} \right) \text{ m} \\ &= 0.075 \text{ mm} \end{aligned}$$



(a)



(b)

题 2.18 图

2.19 为了改进万吨水压机的设计,在四根立柱的小型水压机上进行模型实验,测得立柱的轴向总伸长 $\Delta l = 0.4 \text{ mm}$ 。立柱直径 $d = 80 \text{ mm}$,长度 $l = 1350 \text{ mm}$ 。材料为 20 MnV, $E = 210 \text{ GPa}$ 。问每一立柱受到的轴向力有多大? 水压机的中心载荷 F 等于多少?

解 假设四根立柱平均承担水压机的中心载荷 F ,并产生相同的伸长量,由拉压胡克定律

$$\Delta l = \frac{F_N l}{EA}$$

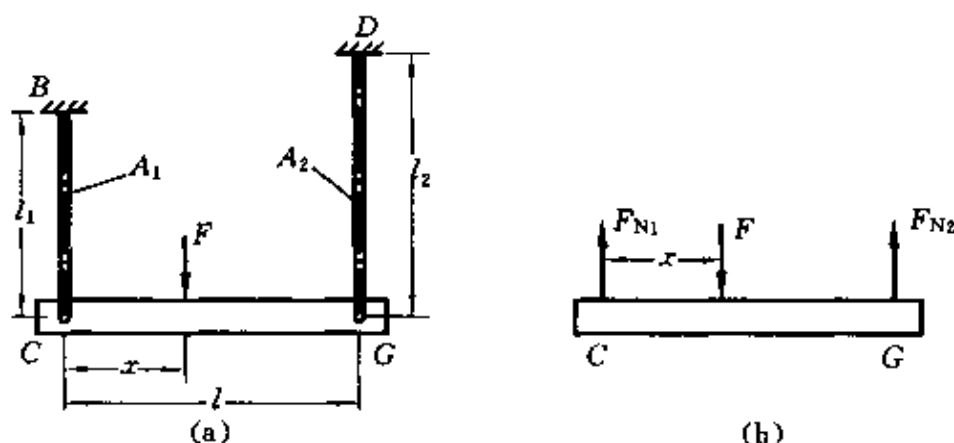
可得每个柱所承受的载荷

$$F_N = \frac{EA \Delta l}{l} = \frac{210 \times 10^9 \times \frac{\pi}{4} \times 0.08^2 \times 0.0004}{1.35} \text{ N} = 313 \text{ kN}$$

则水压机的中心载荷为

$$F = 4F_N = 4 \times 313 \text{ kN} = 1252 \text{ kN}$$

2.20 设题 2.20 图(a)中 CG 杆为刚体(即 CG 杆的弯曲变形可以忽略), BC 杆为铜杆, DG 杆为钢杆,两杆的横截面面积分别为 A_1 和 A_2 ,弹性模量分别为 E_1 和 E_2 。如要求 CG 杆始终保持水平位置,试求 x 。



题 2.20 图

解 CG 杆的受力图如题 2.20 图(b)所示,其平衡条件为

$$\sum M_C = 0, \quad Fx = F_{N2}l \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{N1} + F_{N2} = F \quad (2)$$

由拉压胡克定律得二杆的轴向变形

$$\Delta l_1 = \frac{F_{N1}l_1}{E_1A_1}, \quad \Delta l_2 = \frac{F_{N2}l_2}{E_2A_2}$$

欲使 CG 杆始终保持水平状态,必须 $\Delta l_1 = \Delta l_2$, 即

$$\frac{F_{N1}l_1}{E_1A_1} = \frac{F_{N2}l_2}{E_2A_2} \quad (3)$$

联立①、②、③式,解得

$$x = \frac{l_1E_2A_2}{l_2E_1A_1 + l_1E_2A_2}$$

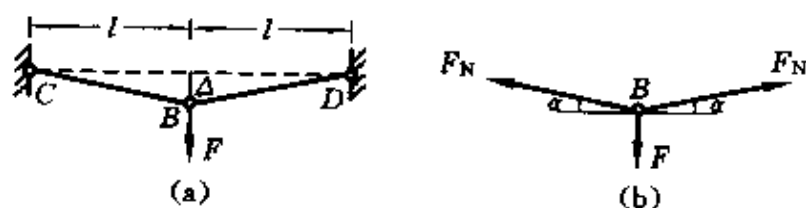
2.21 如题 2.21 图(a)所示,BC、BD 两杆原在水平位置。在 F 力作用下,两杆变形,B 点的位移为 Δ 。若两杆的抗拉刚度同为 EA, 试求 Δ 与 F 的关系。

解 因结构和载荷均对称,所以两杆的内力相等,即

$$F_{NBC} = F_{NBD} = F_N$$

B 点的受力图如题 2.21 图(b)所示,由平衡条件

$$\sum F_y = 0, \quad 2F_N \sin \alpha = F$$



题 2.21 图

及几何条件

$$\sin \alpha = \frac{\Delta}{\sqrt{l^2 + \Delta^2}}$$

解得

$$F_N = \frac{F \sqrt{l^2 + \Delta^2}}{2\Delta} \quad (1)$$

杆的伸长量为

$$\delta = \sqrt{l^2 + \Delta^2} - l \quad (2)$$

应用胡克定律

$$\delta = \frac{F_N l}{EA} \quad (3)$$

联立①、②、③式,解得

$$F = \frac{2EA\Delta}{l} \left(1 - \frac{l}{\sqrt{l^2 + \Delta^2}} \right)$$

当 Δ 为微小量时,可将上式括号中的第二项展开为泰勒级数,并取其前两项,得

$$\begin{aligned} 1 - \frac{l}{\sqrt{l^2 + \Delta^2}} &= 1 - \left[1 + \left(\frac{\Delta}{l} \right)^2 \right]^{-1/2} \\ &= 1 - \left[1 - \frac{1}{2} \times \frac{\Delta^2}{l^2} + \dots \right] \approx \frac{\Delta^2}{2l^2} \end{aligned}$$

于是

$$F = \frac{EA\Delta^3}{l^3}$$

还有一种近似解法:令

$$F = 2F_N \sin \alpha \approx 2F_N \alpha \quad (4)$$

杆的线应变

$$\epsilon = \frac{l/\cos \alpha - l}{l} = \frac{1}{\cos \alpha} - 1 \approx \frac{\alpha^2}{2} \quad (5)$$

杆的轴向内力

$$F_N = \sigma A = E\epsilon A = \frac{\alpha^2 EA}{2} \quad (6)$$

将⑥式代入④式中,得

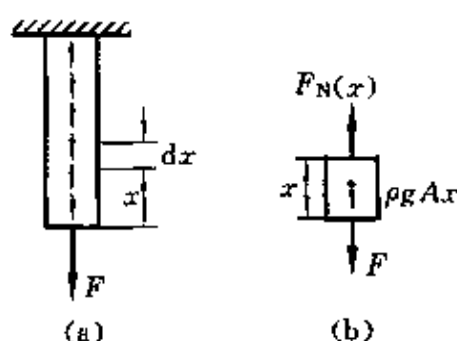
$$F = 2F_N \alpha = \alpha^3 EA \quad (7)$$

在小变形情况下, $\alpha = \Delta/l$, 代入⑦式,得载荷 F 与位移 Δ 间的关系为

$$\Delta = \alpha l = l \sqrt[3]{\frac{F}{EA}}$$

在此问题中,两杆的材料都是线弹性的,但载荷与位移之间的关系却是非线性的,这种非线性是由于结构的几何原因引起的,故称为几何非线性。

2.22 像矿山升降机钢缆这类很长的拉杆,应考虑其自重的影响。设材料单位体积的质量(密度)为 ρ ,许用应力为 $[\sigma]$ 。钢缆下端所受拉力为 F ,如题2.22图(a)所示。钢缆截面不变。试求钢缆的允许长度及其总伸长。



题 2.22 图

解 钢缆任意横截面(x 截面)上的轴力为(题 2.22 图(b))

$$F_N(x) = F + \rho g x A$$

设钢缆在自重和拉力 F 的作用下,不被拉断的极限长度为 L ,则危险截面是钢缆的上端面,该端面上的轴力为

$$F_N = F + \rho g L A$$

根据强度要求,应有 $\sigma = \frac{F_N}{A} = \frac{F + \rho g L A}{A} \leq [\sigma]$

由上式得 $L \leq \frac{A[\sigma] - F}{\rho g A}$

钢缆允许的最大长度 $L = \frac{A[\sigma] - F}{\rho g A}$

钢缆的伸长量由胡克定律确定,即

$$\Delta l = \int_L \frac{F_N(x)}{EA} dx = \int_0^L \frac{F + \rho g x A}{EA} dx = \frac{A^2[\sigma]^2 - F^2}{2EA^2\rho g}$$

2.23 铸铁柱尺寸如题 2.23 图所示,轴向压力 $F=30 \text{ kN}$,若不计自重,试求柱的变形。 $E=120 \text{ GPa}$ 。

解 距离柱底面为 x 处的横截面面积为

$$A(x) = \left(40 - \frac{x}{30}\right)^2$$

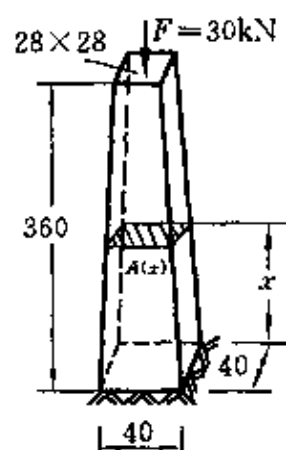
柱内的轴力为常量,即

$$F_N = F = 30 \text{ kN}$$

柱的变形由胡克定律求得

$$\begin{aligned}\Delta l &= \int_0^{0.36} \frac{F_N dx}{EA(x)} = \int_0^{0.36} \frac{F dx}{EA(x)} \\ &= \left[\int_0^{0.36} \frac{30 \times 10^3}{120 \times 10^9 (40 - x/30)^2 \times 10^{-6}} dx \right] \text{ m} \\ &= 0.0804 \text{ mm (压缩量)}\end{aligned}$$

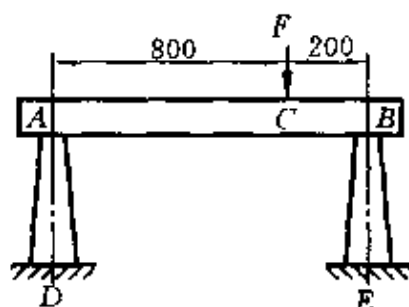
柱被压缩了 0.0804 mm。



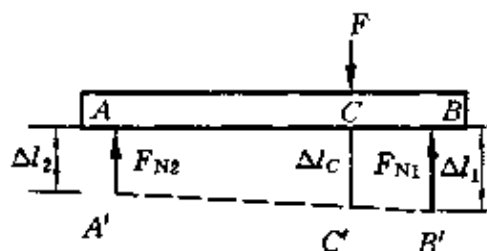
题 2.23 图

2.24 题 2.24 图(a)中 AD 和 BE 两根铸铁柱的形状和尺寸与题 2.23 中的铸铁柱相同。

若设横梁 AB 为刚体, $F = 50 \text{ kN}$, 试求 F 作用点 C 的位移。



(a)



(b)

题 2.24 图

解 AB 杆受力图如题 2.24 图(b)所示, 平衡条件为

$$\sum F_y = 0, \quad F_{N1} + F_{N2} = F$$

$$\sum M_A = 0, \quad F_{N1} \times 1000 = F \times 800$$

解上二式得 $F_{N1} = 40 \text{ kN}$, $F_{N2} = 10 \text{ kN}$

AD、BE 杆的变形由胡克定律得

$$\Delta l_1 = \int_0^{0.36} \frac{F_{N1} dx}{EA(x)}, \quad \Delta l_2 = \int_0^{0.36} \frac{F_{N2} dx}{EA(x)}$$

将 $F_{N1} = 40 \text{ kN}$, $F_{N2} = 10 \text{ kN}$ 及 $A(x) = \left(40 - \frac{x}{30}\right)^2$ 代入以上二式, 得

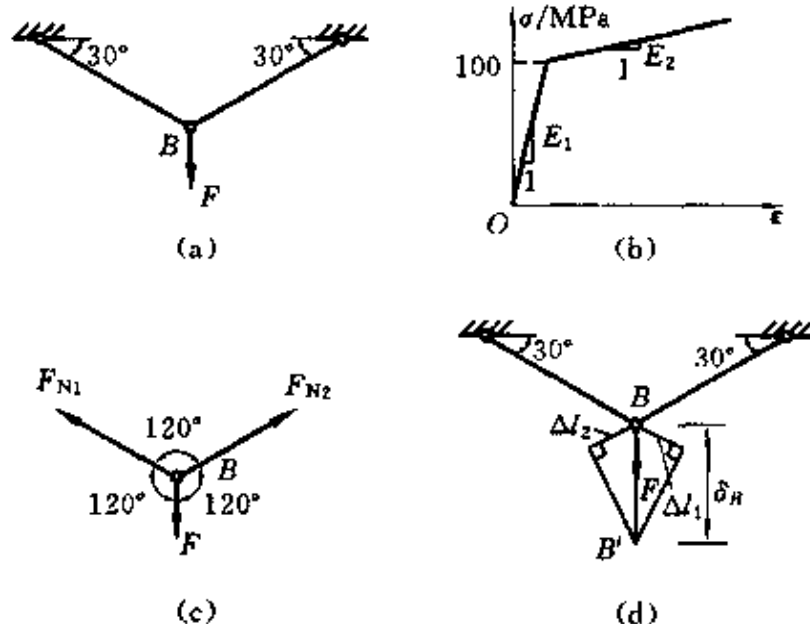
$$\Delta l_1 = \int_0^{0.36} \frac{40 \times 10^3 dx}{120 \times 10^9 \times (40 - x/30)^2 \times 10^{-6}} \text{ m} = 0.107 \text{ mm}$$

$$\Delta l_2 = \int_0^{0.36} \frac{10 \times 10^3 dx}{120 \times 10^9 \times (40 - x/30)^2 \times 10^{-6}} \text{ m} = 0.0268 \text{ mm}$$

C 点的位移由几何关系可知

$$\begin{aligned} \Delta l_c &= \frac{1}{5} \Delta l_2 + \frac{4}{5} \Delta l_1 = \left(\frac{1}{5} \times 0.0268 + \frac{4}{5} \times 0.107 \right) \text{ mm} \\ &= 0.0911 \text{ mm} \end{aligned}$$

2.25 在题 2.25 图(a)所示的简单杆系中,两杆的长度均为 $l=3 \text{ m}$,横截面面积 $A=10 \text{ cm}^2$ 。材料的应力-应变关系如题 2.25 图(b)所示。 $E_1=70 \text{ GPa}$, $E_2=10 \text{ GPa}$ 。试分别计算当 $F=80 \text{ kN}$ 和 $F=120 \text{ kN}$ 时,节点 B 的位移。



题 2.25 图

解 由结构和载荷均对称(题 2.25 图(c))可知,两杆的内力相同,即

$$F_{N1} = F_{N2} = F_N = F$$

当 $F=80 \text{ kN}$ 时,杆横截面上的正应力为

$$\sigma = \frac{F_N}{A} = \frac{F}{A} = \frac{80 \times 10^3}{10 \times 10^{-4}} \text{ Pa} = 80 \text{ MPa} < 100 \text{ MPa}$$

故当 $F=80 \text{ kN}$ 时,在整个变形过程中,杆的 $E=E_1$,两杆的伸长均为 $\Delta l = \frac{F_N l}{EA}$,由题 2.25 图(d)所示几何关系,得 B 点的位移为

$$\delta_B = \frac{\Delta l_1}{\cos 60^\circ} = \frac{2F_N l}{EA} = \frac{2 \times 80 \times 10^3 \times 3}{70 \times 10^9 \times 10 \times 10^{-4}} \text{ m} = 6.86 \text{ mm}$$

当 $F=120 \text{ kN}$ 时,杆横截面的正应力为

$$\sigma = \frac{F_N}{A} = \frac{F}{A} = \frac{120 \times 10^3}{10 \times 10^{-4}} \text{ Pa} = 120 \text{ MPa} > 100 \text{ MPa}$$

故当 $F=120 \text{ kN}$ 时,杆变形过程中,弹性模量 E 发生变化,当杆内应力 $\sigma \leq 100 \text{ MPa}$ 时, $E=E_1$; 当 $\sigma > 100 \text{ MPa}$ 时, $E=E_2$, 因此,在载荷 $F=120 \text{ kN}$ 作用下,杆的变形要分段计算,对应于 $\sigma=100 \text{ MPa}$, $F_N=F=100 \text{ kN}$, 所以第一段变形用 $F=100 \text{ kN}$ 计算,第二段变形用 $F=20 \text{ kN}$ 计算,因变形是在弹性变形范围内产生的,所以可以用叠加法将两阶段的变形叠加,根据杆变形与 B 点的位移关系,可得 B 点的位移为

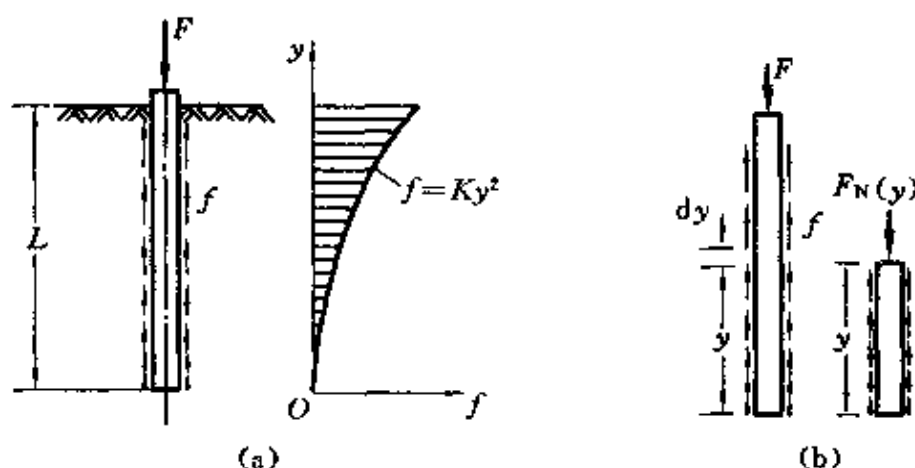
$$\begin{aligned} \delta_B &= \left(\frac{100 \times 10^3 l}{E_1 A} + \frac{20 \times 10^3 l}{E_2 A} \right) / \cos 60^\circ \\ &= \left[\left(\frac{100 \times 10^3 \times 3}{70 \times 10^9 \times 10 \times 10^{-4}} + \frac{20 \times 10^3 \times 3}{10 \times 10^9 \times 10 \times 10^{-4}} \right) \times 2 \right] \text{ m} \\ &= 20.6 \text{ mm} \end{aligned}$$

2.26 木桩打入粘土的部分长为 L , 顶上载荷为 F (题 2.26 图(a))。设载荷全由摩擦力承担,且沿木桩单位长度内的摩擦力 f 按抛物线 $f=Ky^2$ 变化,这里 K 为常数。若 $F=420 \text{ kN}$, $L=12 \text{ m}$, $A=640 \text{ cm}^2$, $E=10 \text{ GPa}$, 试确定常数 K , 并求木桩的缩短量。

解 木桩受力如题 2.26 图(b)所示,根据平衡条件

$$\sum F_y = 0, \quad \int_0^L f dy = F$$

将 $f=Ky^2$ 代入上式,得 $f = \int_0^L Ky^2 dy = F$



题 2.26 图

由上式可确定 K 值

$$K = \frac{3F}{L^3} = \frac{3 \times 420 \times 10^3}{12^3} \text{ N/m}^3 = 729 \text{ N/m}^3$$

距下端面为 y 处的轴力为(题 2.26 图(b))

$$F_N(y) = \int_0^y f dy = \int_0^y Ky^2 dy = \frac{Ky^3}{3}$$

杆的总变形为

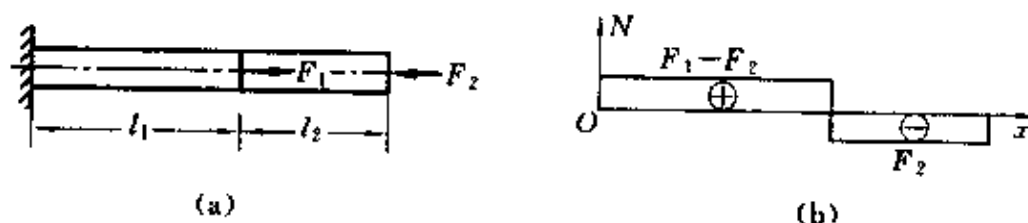
$$\begin{aligned} \Delta l &= \int_0^L \frac{F_N(y)}{EA} dy = \int_0^L \frac{Ky^3 dy}{3EA} = \frac{KL^4}{12EA} \\ &= \frac{729 \times 12^4}{12 \times 10 \times 10^9 \times 640 \times 10^{-4}} \text{ m} = 1.97 \text{ mm} \end{aligned}$$

木桩缩短了 1.97 mm。

2.27 抗拉(压)刚度为 EA 的等直杆, 受力情况如题 2.27 图

(a) 所示。试问: (1) 总伸长是否为 $\Delta l = \frac{F_1 l_1}{EA} + \frac{F_2 l_2}{EA}$? 如有错误, 正确的算式是什么? (2) 应变能是否为 $V_\epsilon = \frac{F_1^2 l_1}{2EA} + \frac{F_2^2 l_2}{2EA}$? 如有错误, 正确的算式是什么? (3) 若 $l_1 = l_2 = l$, $F_1 + F_2 = F$ (常量), 试求 $V_{\epsilon, \max}$ 和 $V_{\epsilon, \min}$, 并求两种情况下的比值 $\frac{F_2}{F_1}$ 。

解 杆的轴力图如题 2.27 图(b)所示。



题 2.27 图

(1) 否。正确的算法是

$$\Delta l = \frac{(F_1 - F_2)l_1}{EA} - \frac{F_2 l_2}{EA}$$

(2) 否。正确的算法是

$$V_\epsilon = \frac{F_2^2 l_2}{2EA} + \frac{(F_1 - F_2)^2 l_1}{2EA}$$

(3) 将 $l_1 = l_2 = l$ 及 $F_1 = F - F_2$ 代入上式, 轴的应变能为

$$V_\epsilon = \frac{l}{2EA} (5F_2^2 - 4F_2 F + F^2)$$

V_ϵ 是 F_2 的函数, V_ϵ 取得极值的条件是 $\frac{dV_\epsilon}{dF_2} = 0$, 由

$$\frac{dV_\epsilon}{dF_2} = \frac{l}{2EA} (10F_2 - 4F) = 0$$

得 $F_2 = \frac{2}{5}F$, 从而得 $\frac{F_1}{F_2} = \frac{3}{2}$

因 $\frac{d^2 V_\epsilon}{dF_2^2} = \frac{5l}{EA} > 0$

所以当 $F_2 = \frac{2}{5}F$ 时, V_ϵ 有最小值 $V_{\epsilon, \min} = \frac{F^2 l}{10EA}$

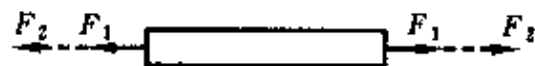
又因 $0 \leq F_2 \leq F$, 当 $F_2 = F$ 时 $V_\epsilon = \frac{F^2 l}{EA}$

当 $F_2 = 0$ 时 $V_\epsilon = \frac{F^2 l}{2EA}$

所以 $V_{\epsilon, \max} = \frac{F^2 l}{EA}$

2.28 如题 2.28 图所示, 长度为 l 的杆件, 抗拉刚度为 EA 。若在杆件两端沿轴线先作用拉力 F_1 , 再作用 F_2 , 在作用 F_2 的过程中,

应变能的增量是否为 $\Delta V_e = \frac{F_2^2 l}{2EA}$?



题 2.28 图

解 杆由 F_1 单独作用时,应变能为

$$V_{e1} = \frac{F_1^2 l}{2EA}$$

先作用 F_1 ,再作用 F_2 时,求由 F_2 产生的应变能增量,有两种方法。

(1) 从功能转换考虑:先作用 F_1 ,然后作用 F_2 时,力作用点因 F_2 产生的轴向位移是 $\frac{F_2 l}{EA}$, F_2 作的功是 $\frac{F_2^2 l}{2EA}$ 。 F_1 作的功是 $\frac{F_2 l}{EA} F_1$, 因此,因 F_2 作用,应变能的增量为

$$\Delta V_e = \frac{F_2^2 l}{2EA} + \frac{F_1 F_2 l}{EA} = \frac{(F_2 + 2F_1) F_2 l}{2EA}$$

(2) 因是在弹性小变形范围内加载,所以应变能只和变形的最后状态有关,与加载顺序无关。先加 F_1 ,再加 F_2 时,应变能为

$$V_{e2} = \frac{(F_2 + F_1)^2 l}{2EA}$$

与单独加 F_1 时相比,增加的应变能为

$$\Delta V_e = \frac{(F_2 + F_1)^2 l}{2EA} - \frac{F_1^2 l}{2EA} = \frac{(F_2 + 2F_1) F_2 l}{2EA}$$

2.29 设在题2.29图(a)中,横梁ABCD为刚体。横截面面积为 76.36 mm^2 的钢索绕过无摩擦的滑轮。设 $F=20 \text{ kN}$,试求钢索内的应力和C点的垂直位移。设钢索的 $E=177 \text{ GPa}$ 。

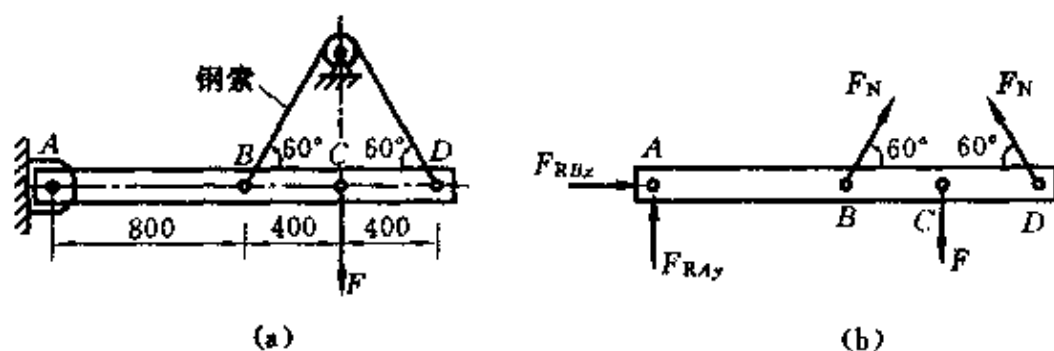
解 AD梁的受力图如题2.29图(b)所示,由平衡条件可得

$$\sum M_A = 0, \quad F_N \sin 60^\circ \times 800 + F_N \sin 60^\circ \times 1600 = 1200F$$

$$\text{解上式得 } F_N = \frac{\sqrt{3}}{3} F = \frac{\sqrt{3}}{3} \times 20 \times 10^3 \text{ N} = 11.6 \text{ kN}$$

$$\text{钢索内的应力为 } \sigma = \frac{F_N}{A} = \frac{11.6 \times 10^3}{76.36 \times 10^{-6}} \text{ Pa} = 152 \text{ MPa}$$

钢索的长度 $l=1600 \text{ mm}$,其应变能为



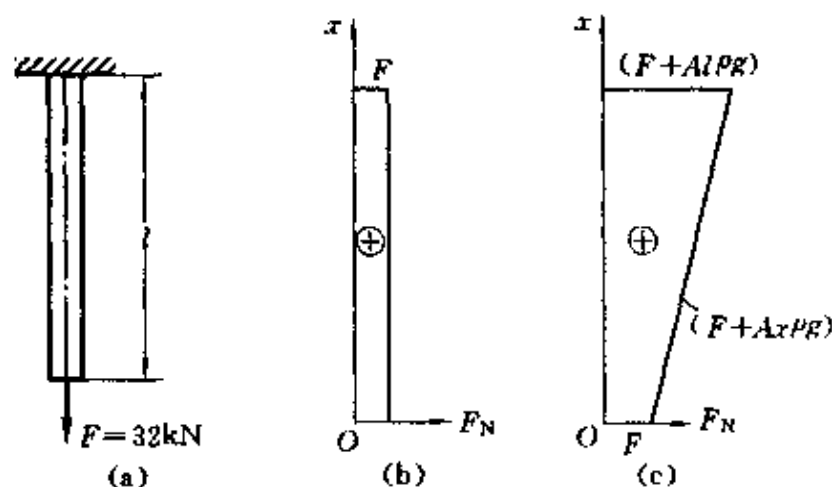
题 2.29 图

$$V_c = \frac{F_N^2 l}{2EA} = \frac{(\sqrt{3}F/3)^2 l}{2EA} = \frac{F^2 l}{6EA}$$

应用卡氏定理, C 点的垂直位移为

$$\begin{aligned} \delta_c &= \frac{\partial V_c}{\partial F} = \frac{\partial}{\partial F} \left(\frac{F^2 l}{6EA} \right) = \frac{Pl}{3EA} \\ &= \frac{20 \times 10^3 \times 1.6}{3 \times 177 \times 10^9 \times 76.36 \times 10^{-6}} \text{ m} = 0.79 \text{ mm} \end{aligned}$$

2.30 钢制受拉杆件如题2.30图(a)所示,横截面面积 $A=200 \text{ mm}^2$, $l=5 \text{ m}$,单位体积的质量为 $\rho=7.8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 。如不计自重影响,试计算杆件的应变能 V_ϵ 和应变能密度 v_ϵ 。如考虑自重影响,试计算杆件的应变能,并求应变能密度的最大值。设 $E=200 \text{ GPa}$ 。



题 2.30 图

解 应变能和应变能密度的计算公式分别为

$$V_\epsilon = \int_L \frac{F_N^2 dx}{2EA}, \quad v_\epsilon = \frac{dV_\epsilon}{dV}$$

当不考虑自重时,轴力为常数,如题 2.30 图(b)所示, $F_N = F$, 所以

$$V_\epsilon = \frac{F_N^2 l}{2EA} = \frac{F^2 l}{2EA} = \frac{(32 \times 10^3)^2 \times 5}{2 \times 200 \times 10^9 \times 200 \times 10^{-6}} \text{ J} = 64 \text{ J}$$

因
$$dV_\epsilon = \frac{F_N^2 dx}{2EA}, \quad dV = A dx$$

所以

$$v_\epsilon = \frac{dV_\epsilon}{dV} = \frac{F_N^2}{2EA^2} = \frac{(32 \times 10^3)^2}{2 \times 200 \times 10^9 \times (200 \times 10^{-6})^2} \text{ J/m}^3 \\ = 6.4 \times 10^4 \text{ J/m}^3$$

当考虑自重时(题 2.30 图(c))

$$V_\epsilon = \int_L \frac{F_N^2 dx}{2EA} = \int_0^l \frac{(Ax\rho g + F)^2 dx}{2EA} = \frac{A^2 \rho^2 g^2 l^3}{6EA} + \frac{F^2 l}{EA} + \frac{A\rho g l^2 F}{EA} \\ = \left[\frac{(200 \times 10^{-6})^2 (7.8 \times 10^3 \times 9.81)^2 \times 5^3}{6 \times 200 \times 10^9 \times 200 \times 10^{-6}} + \frac{(32000)^2 \times 5}{200 \times 10^9 \times 200 \times 10^{-6}} + \frac{(200 \times 10^{-6}) \times 76500 \times 5^2 \times 32000}{200 \times 10^9 \times 200 \times 10^{-6}} \right] \text{ J} = 64.2 \text{ J} \\ v_\epsilon = \frac{dV_\epsilon}{dV} = \frac{(A\rho g x + F)^2}{2EA^2}$$

当 $x=l$ 时,比能取最大值

$$v_{\epsilon \max} = \frac{(200 \times 10^{-6} \times 7.8 \times 10^3 \times 9.81 \times 5 + 32 \times 10^3)^2}{2 \times 200 \times 10^9 \times (200 \times 10^{-6})^2} \text{ J/m}^3 \\ = 64.3 \times 10^4 \text{ J/m}^3$$

2.31 在题 2.31 图(a)所示简单杆系中,设 AB 和 AC 分别为直径是 20 mm 和 24 mm 的圆截面杆, $E=200 \text{ GPa}$, $F=5 \text{ kN}$ 。试求 A 点的垂直位移。

解 铰链 A 的受力图如题 2.31 图(b)所示,平衡条件为

$$\sum F_x = 0, \quad F_{N1} \cos 45^\circ - F_{N2} \cos 30^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{N1} \sin 45^\circ + F_{N2} \sin 30^\circ = F$$

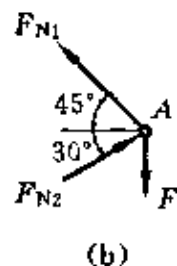
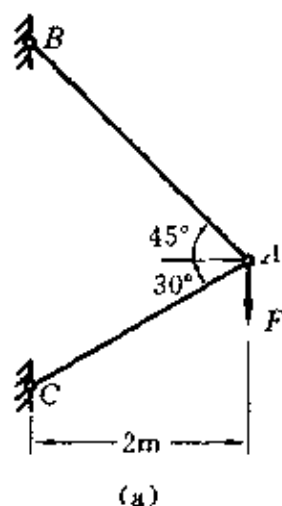
解以上二式得 $F_{N1} = 0.897F$, $F_{N2} = 0.732F$
两杆的总应变能为

$$\begin{aligned} V_e &= \frac{F_{N1}^2 l_1}{2EA_1} + \frac{F_{N2}^2 l_2}{2EA_2} \\ &= \frac{(0.897F)^2 l / \cos 45^\circ}{2EA_1} + \frac{(0.732F)^2 l / \cos 30^\circ}{2EA_2} \end{aligned}$$

应用卡氏定理, A 点的垂直位移为

$$\begin{aligned} \delta_A &= \frac{\partial V_e}{\partial F} = \frac{0.897^2 Fl}{EA_1 \cos 45^\circ} + \frac{0.732^2 Fl}{EA_2 \cos 30^\circ} \\ &= \left[\frac{0.897^2 \times 5 \times 10^3 \times 2}{200 \times 10^9 \times \frac{\pi}{4} \times 0.02^2 \cos 45^\circ} \right. \\ &\quad \left. + \frac{0.732^2 \times 5 \times 10^3 \times 2}{200 \times 10^9 \times \frac{\pi}{4} \times 0.024^2 \cos 30^\circ} \right] \text{ m} \end{aligned}$$

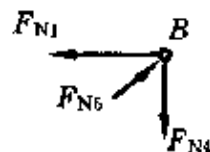
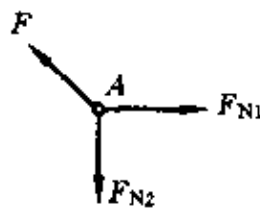
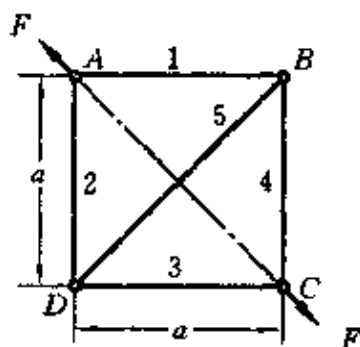
$$= 0.249 \text{ mm}$$



题 2.31 图

2.32 由五根钢杆组成的杆系如题 2.32 图

(a) 所示。各杆横截面面积均为 500 mm^2 , $E = 200 \text{ GPa}$ 。设沿对角线 AC 方向作用一对 20 kN 的力, 试求 A、C 两点的距离改变。



(a)

(b)

(c)

题 2.32 图

解 铰链 A 的受力图如题 2.32 图 (b) 所示, 由平衡条件

$$\sum F_x = 0, \quad F_{N1} - F \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F \sin 45^\circ - F_{N2} = 0$$

解得
$$F_{N1} = \frac{\sqrt{2}}{2} F, \quad F_{N2} = \frac{\sqrt{2}}{2} F$$

由于结构对称, 载荷也对称, 故有

$$F_{N3} = F_{N4} = F_{N1} = \frac{\sqrt{2}}{2} F$$

铰链 B 的受力图如题 2.32 图(c)所示, 由平衡条件

$$\sum F_x = 0, \quad F_{N5} \cos 45^\circ - F_{N1} = 0$$

解得
$$F_{N5} = F$$

杆系的总应变能为

$$V_\epsilon = 4 \times \frac{F_{N1}^2 a}{2EA} + \frac{F_{N5}^2 \sqrt{2} a}{2EA} = \frac{F^2 a (2 + \sqrt{2})}{2EA}$$

应用卡氏定理, A 、 C 两点的距离改变为

$$\begin{aligned} \delta_A &= \frac{\partial V_\epsilon}{\partial F} = \frac{Fa}{EA} (2 + \sqrt{2}) \\ &= (2 + \sqrt{2}) \frac{20 \times 10^3 a}{200 \times 10^9 \times 500 \times 10^{-6}} \\ &= 0.683 \times 10^{-3} a \end{aligned}$$

2.33 在题 2.31 中, 若 AB 和 AC 两杆的直径并未给出, 但要求 F 力作用点 A 无水平位移, 求两杆直径之比。

解 由题 2.31 的计算结果可知

$$F_{N1} = 4.48 \text{ kN}, \quad F_{N2} = 3.66 \text{ kN}$$

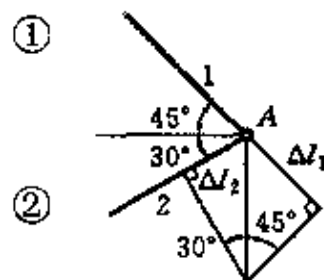
由题 2.33 图可见, F 力作用点 A 无水平位移的条件是

$$\frac{\Delta l_2}{\sin 30^\circ} = \frac{\Delta l_1}{\sin 45^\circ} \quad (1)$$

1、2 杆的变形由胡克定律可知

$$\Delta l_1 = \frac{F_{N1} l_1}{EA_1}, \quad \Delta l_2 = \frac{F_{N2} l_2}{EA_2} \quad (2)$$

由①、②式得



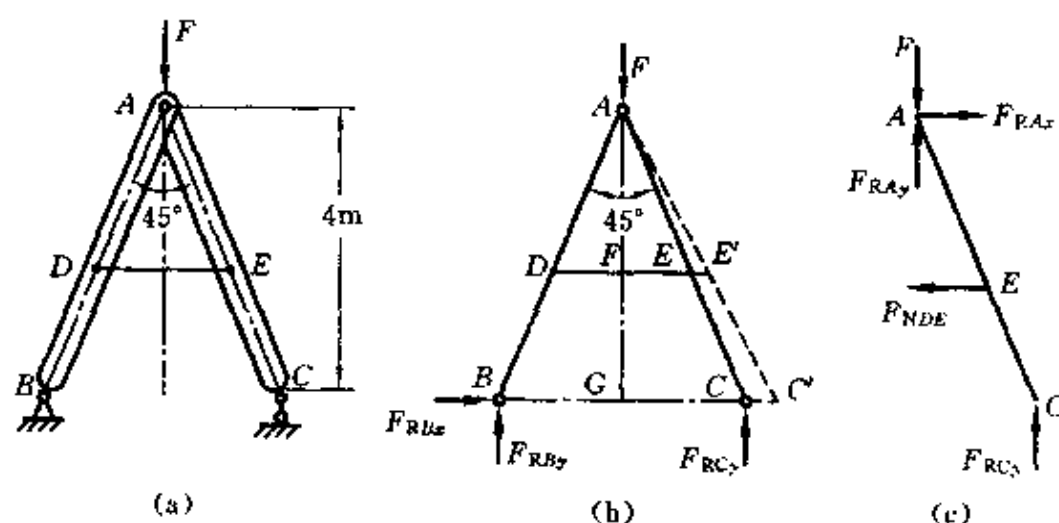
题 2.33 图

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{F_{N1} \sin 30^\circ \cos 30^\circ}{F_{N2} \sin 45^\circ \cos 45^\circ} = \frac{4.48 \times 0.5 \times 0.866}{3.66 \times 0.707 \times 0.707} = 1.06$$

所以
$$\frac{D_1^2}{D_2^2} = \frac{A_1}{A_2} = 1.06$$

两杆直径之比为
$$\frac{D_1}{D_2} = \sqrt{1.06} = 1.03$$

2.34 在题2.34图(a)所示支架中,设拉杆DE的长为2m,横截面直径为15mm, $E=210\text{ GPa}$ 。若ADB和AEC两杆可看作是刚体, $F=20\text{ kN}$,试求F力作用点A的垂直位移和C点的水平位移。



题 2.34 图

解 支架BAC及杆AEC的受力图分别如题2.34图(b)、(c)所示,由平衡条件,有

$$\sum M_B = 0, \quad F_{RCy} = 0.5F$$

$$\sum M_A = 0, \quad F_{NDE} \times \overline{AE} \cos 22.5^\circ - F_{RCy} \times \overline{AC} \sin 22.5^\circ = 0$$

解以上二式得
$$F_{NDE} = 2F \tan^2 22.5^\circ$$

杆系的总应变能为

$$V_\epsilon = \frac{(2F \tan^2 22.5^\circ)^2 l_{DE}}{2EA}$$

A点的垂直位移为

$$\delta_A = \frac{\partial V_\epsilon}{\partial F} = \frac{4 \times 20 \times 10^3 \times \tan^4 22.5^\circ \times 2}{210 \times 10^9 \times \left(\frac{0.015}{2}\right)^2 \times \pi} \text{ m} = 0.127 \text{ mm}$$

DE 杆的变形为

$$\Delta l_{DE} = \frac{F_{NDE} l_{DE}}{EA} = \frac{2 \times 20 \times 10^3 \tan^2 22.5^\circ \times 2}{210 \times 10^9 \times \frac{\pi}{4} \times 0.015^2} \text{ m} = 0.37 \text{ mm}$$

由题 2.34 图(b)所示的几何关系可知

$$\frac{\Delta l_{DE}}{\delta_C} = \frac{\overline{EE'}}{\overline{CC'}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AG}}$$

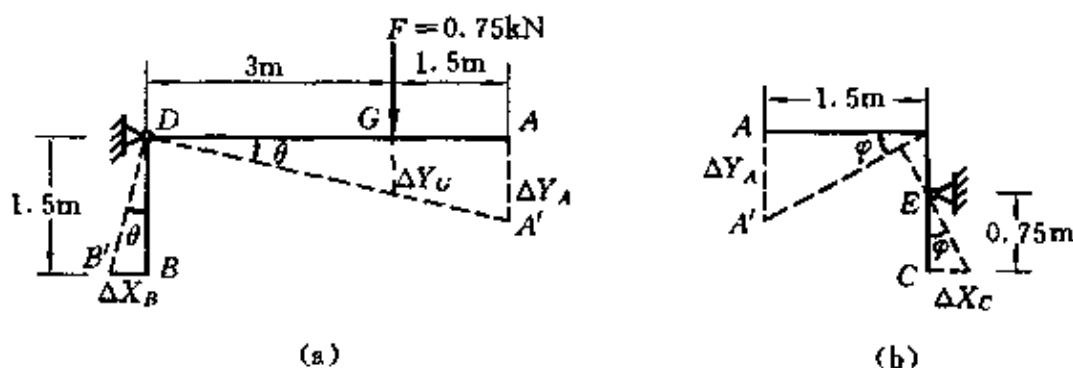
因 $\overline{AF} = \overline{FE} \cot 22.5^\circ = 1 \times \cot 22.5^\circ$, $\overline{AG} = 4$

所以
$$\frac{\Delta l_{DE}}{\delta_C} = \frac{\cot 22.5^\circ}{4}$$

解上式得 C 点水平位移

$$\delta_C = 0.613 \text{ mm}$$

2.35 试分别用两种不同的方法,求题 2.4 中力作用点 G 的垂直位移。设 $E=200 \text{ GPa}$ 。



题 2.35 图

解 解法一 杆 BC 的轴力已由题 2.4 解出, $F_N = 6 \text{ kN}$, 其变形由胡克定律得

$$\Delta l_{BC} = \frac{F_N l_{BC}}{EA} = \frac{6 \times 10^3 \times 6}{200 \times 10^9 \times \frac{\pi}{4} \times 0.01^2} \text{ m} = 2.29 \text{ mm}$$

因 1、2 杆接触点 A 的位移相同, 所以变形协调方程为

$$\Delta X_B + \Delta X_C = \Delta l_{BC} = 2.29 \text{ mm} \quad ①$$

由几何关系可知,在小变形情况下,有

$$\theta = \frac{\Delta X_B}{1.5} = \frac{\Delta Y_G}{3} \quad ②$$

$$\varphi = \frac{\Delta X_C}{0.75} = \frac{\Delta Y_A}{1.5} \quad ③$$

$$\frac{\Delta Y_G}{\Delta Y_A} = \frac{3}{4.5} \quad ④$$

解①~④式得G点的垂直位移

$$\Delta Y_G = 1.83 \text{ mm}$$

解法二 能量法

杆BC的轴力在题2.4解中已求出

$$F_N = 0.8F$$

杆系的总应变能为 $V_\epsilon = \frac{F_N^2 l_{BC}}{2EA} = \frac{(0.8F)^2 l_{BC}}{2EA}$

应用卡氏定理,得G点的垂直位移为

$$\begin{aligned} \Delta Y_G &= \frac{\partial V_\epsilon}{\partial F} = \frac{0.8^2 F l_{BC}}{EA} = \frac{0.8^2 \times 7.5 \times 10^3 \times 6}{200 \times 10^9 \times \frac{\pi}{4} \times (10 \times 10^{-3})^2} \text{ m} \\ &= 1.83 \text{ mm} \end{aligned}$$

2.36 试采用另一种解法重解题2.29.

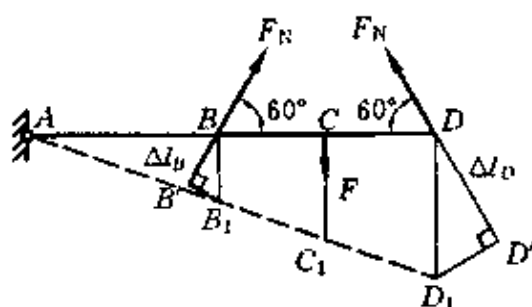
解 变形如题2.36图所示。C点的垂直位移由几何关系可知

$$\delta_C = \overline{CC_1} = \overline{BB_1} + \frac{\overline{DD_1} - \overline{BB_1}}{2} = \frac{\overline{BB_1} + \overline{DD_1}}{2}$$

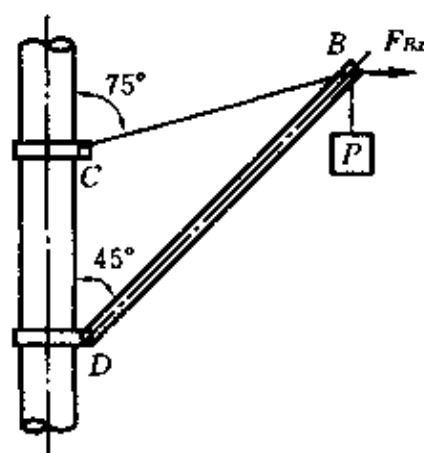
式中 $\overline{BB_1} = \frac{\overline{BB'}}{\cos 30^\circ} = \frac{\Delta l_B}{\cos 30^\circ}$, $\overline{DD_1} = \frac{\overline{DD'}}{\cos 30^\circ} = \frac{\Delta l_D}{\cos 30^\circ}$

所以

$$\begin{aligned} \delta_C &= \frac{1}{2} \times \frac{\Delta l_B + \Delta l_D}{\cos 30^\circ} = \frac{1}{2 \cos 30^\circ} (\Delta l_B + \Delta l_D) = \frac{1}{2 \cos 30^\circ} \times \frac{Nl}{EA} \\ &= \left(\frac{1}{2 \cos 30^\circ} \times \frac{11.6 \times 10^3 \times 1.6}{177 \times 10^9 \times 76.4 \times 10^{-6}} \right) \text{ m} = 0.792 \text{ mm} \end{aligned}$$



题 2.36 图



题 2.37 图

2.37 试用能量法求文献1例2.9中简易起重机的B点(题2.37图)的水平位移。

解 在 P 力作用下,分别以 δ_{By} 和 δ_{Bx} 表示B点的垂直和水平位移, F_{N1} 和 F_{N2} 表示BC和BD的轴力, W_P 表示 P 力作的功。在文献1例2.9中,根据外力做功等于杆系应变能的原则,已经求得

$$W_P = \frac{P\delta_{By}}{2} = \frac{F_{N1}^2 l_1}{2E_1 A_1} + \frac{F_{N2}^2 l}{2EA} \quad (1)$$

为了求出 δ_{Bx} ,设想在加 P 力前,先在B点加水平力 F_{Bx} ,则BC和BD因 F_{Bx} 引起的轴力为

$$F_{N1Bx} = 1.41F_{Bx}(\text{拉}), \quad F_{N2Bx} = 0.518F_{Bx}(\text{压}) \quad (2)$$

以 W_{Bx} 表示 F_{Bx} 作的功,则 W_{Bx} 应等于在 F_{Bx} 作用下杆系的应变能,即

$$W_{Bx} = \frac{F_{N1Bx}^2 l_1}{2E_1 A_1} + \frac{F_{N2Bx}^2 l}{2EA} \quad (3)$$

在已经作用 F_{Bx} 以后,再作用 P 。这样,外力所作的功除($W_{Bx} + W_P$)以外,还因B点已先有水平力 F_{Bx} ,它在 P 引起的位移 δ_{Bx} 上,又完成了数量为 $F_{Bx}\delta_{Bx}$ 的功。这里没有系数0.5,是因为在发生位移 δ_{Bx} 的过程中, F_{Bx} 的大小始终未变。于是,外力作的功为

$$W = W_{Bx} + W_P + F_{Bx}\delta_{Bx}$$

它应该等于杆系的应变能。注意到这时两根构件的轴力分别为 $(F_{N1} + F_{N1Bx})$ 和 $(F_{N2} + F_{N2Bx})$, 因而

$$V_e = \frac{(F_{N1} + F_{N1Bx})^2 l_1}{2E_1 A_1} + \frac{(F_{N2} + F_{N2Bx})^2 l}{2EA}$$

令 $W = V_e$, 得

$$W_{Bx} + W_P + F_{Bx} \delta_{Bx} = \frac{(F_{N1} + F_{N1Bx})^2 l_1}{2E_1 A_1} + \frac{(F_{N2} + F_{N2Bx})^2 l}{2EA} \quad (4)$$

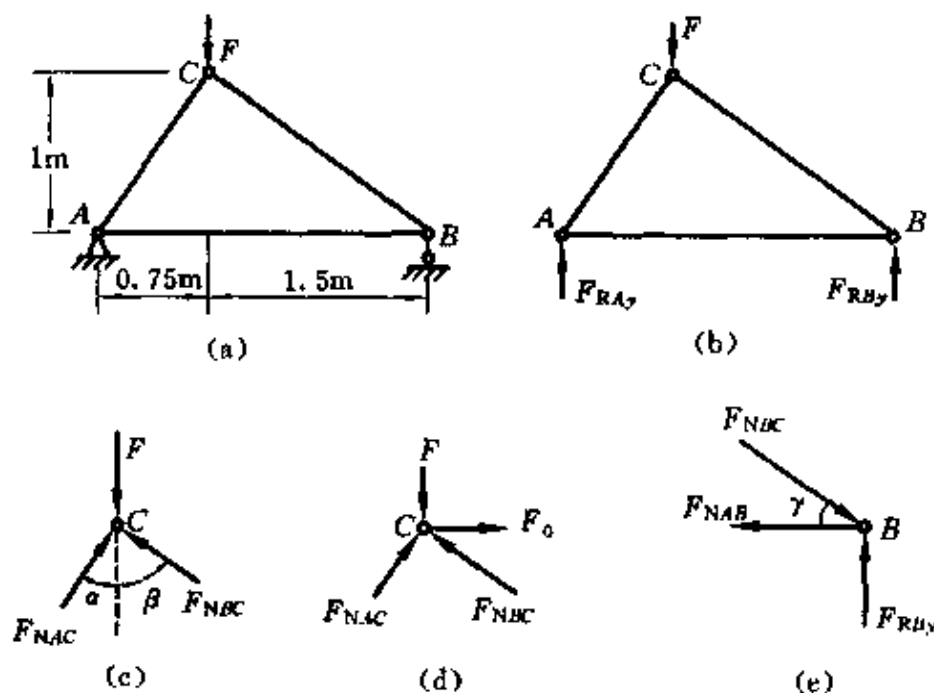
从④式中减去①、③两式, 得

$$F_{Bx} \delta_{Bx} = \frac{F_{N1} F_{N1Bx} l_1}{E_1 A_1} + \frac{F_{N2} F_{N2Bx} l}{EA} \quad (5)$$

将②式中的 F_{N1Bx} 、 F_{N2Bx} 和文献1例2.9中的 F_{N1} 、 F_{N2} 、 $E_1 A_1$ 、 EA 、 l_1 、 l 代入⑤式, 即可求出

$$\delta_{Bx} = 2.78 \times 10^{-3} \text{ m}$$

2.38 如题2.38图(a)所示, 简单桁架的三根杆件均为钢材制成, 横截面面积均为 300 mm^2 , $E = 200 \text{ GPa}$ 。若 $F = 5 \text{ kN}$, 试求C点的水平及垂直位移。



题2.38图

解 整体的受力图如题 2.38 图(b)所示,由平衡条件

$$\sum M_A = 0, \quad F_{RB} \times 2.25 = F \times 0.75$$

解得
$$F_{RB} = \frac{1}{3}F$$

铰链 C 的受力图如题 2.38 图(c)所示, α 和 β 角可由题 2.38 图(a)的几何关系确定

$$\cos \alpha = 1/1.25, \quad \alpha = 36.9^\circ$$

$$\cos \beta = 1/1.8, \quad \beta = 56.3^\circ$$

由平衡条件
$$\sum F_y = 0, \quad F_{NAC} \cos \alpha + F_{NBC} \cos \beta = F$$

$$\sum F_x = 0, \quad F_{NAC} \sin \alpha = F_{NBC} \sin \beta$$

解得
$$F_{NAC} = 0.83F, \quad F_{NBC} = 0.6F$$

铰链 B 的受力图如题 2.38 图(e)所示,由平衡条件

$$\sum F_r = 0, \quad F_{NAB} = F_{NBC} \cos \gamma$$

并将 $\cos \gamma = \frac{1.5}{\sqrt{1.5^2 + 1^2}}$ 代入上式,解得

$$F_{NAB} = 0.5F$$

杆系的总应变能为

$$\begin{aligned} V_e &= \frac{F_{NAC}^2 l_{AC}}{2EA} + \frac{F_{NBC}^2 l_{BC}}{2EA} + \frac{F_{NAB}^2 l_{AB}}{2EA} \\ &= \frac{(0.83F)^2 l_{AC}}{2EA} + \frac{(0.6F)^2 l_{BC}}{2EA} + \frac{(0.5F)^2 l_{AB}}{2EA} \end{aligned}$$

应用卡氏定理, C 点的垂直位移为

$$\begin{aligned} \delta_{Cy} &= \frac{\partial V_e}{\partial F} = \frac{5 \times 10^3}{200 \times 10^9 \times 300 \times 10^{-6}} (0.83^2 \times \sqrt{0.75^2 + 1^2} \\ &\quad + 0.6^2 \times \sqrt{1.5^2 + 1^2} + 0.5^2 \times 2.25) \text{ m} = 0.173 \text{ mm} \end{aligned}$$

C 点无水平力作用,欲求 C 点的水平位移,则必须在 C 点加上一水平方向的虚载荷 F_0 , C 点的受力图如题 2.38 图(d)所示,由平衡条件

$$\sum F_y = 0, \quad F_{NAC} \cos \alpha + F_{NBC} \cos \beta = F$$

$$\sum F_x = 0, \quad F_{NAC} \sin \alpha = F_{NBC} \sin \beta - F_0$$

解得 $F_{NAC} = 0.83F - 0.56F_0$, $F_{NBC} = 0.6F + 0.8F_0$

B 铰链的受力图如题 2.38 图(e)所示, 由平衡条件

$$\sum F_x = 0, \quad F_{NAE} = F_{NBK} \cos \gamma$$

解得 $F_{NAE} = 0.5F + 0.67F_0$

杆系的总应变能为

$$\begin{aligned} V_\epsilon &= \frac{F_{NAC}^2 l_{AC}}{2EA} + \frac{F_{NBC}^2 l_{BC}}{2EA} + \frac{F_{NAE}^2 l_{AB}}{2EA} \\ &= \frac{(0.83F - 0.56F_0)^2 l_{AC}}{2EA} + \frac{(0.6F + 0.8F_0)^2 l_{BC}}{2EA} \\ &\quad + \frac{(0.5F + 0.67F_0)^2 l_{AB}}{2EA} \end{aligned}$$

应用卡氏定理, C 点的水平位移为

$$\begin{aligned} \delta_{Cx} &= \frac{\partial V_\epsilon}{\partial F_0} \\ &= \frac{l_{AC}(0.83F - 0.56F_0)(-0.56) + l_{BC}(0.6F + 0.8F_0)(0.8)}{EA} \\ &\quad + \frac{l_{AB}(0.5F + 0.67F_0)(0.67)}{EA} \end{aligned}$$

令 $F_0 = 0$, 则

$$\begin{aligned} \delta_{Cx} &= \frac{5 \times 10^3}{200 \times 10^9 \times 300 \times 10^{-6}} \\ &\quad \times (-\sqrt{0.75^2 + 1^2} \times 0.83 \times 0.56 + \sqrt{1.5^2 + 1^2} \\ &\quad \times 0.6 \times 0.8 + 2.25 \times 0.5 \times 0.67) \text{ m} \\ &= 0.0865 \text{ mm} \end{aligned}$$

2.39 如题 2.39 图(a)所示, 木制短柱的四角用四个 40 mm × 40 mm × 4 mm 的等边角钢加固。已知角钢的许用应力 $[\sigma]_{\text{钢}} = 160 \text{ MPa}$, $E_{\text{钢}} = 200 \text{ GPa}$ 。木材的许用应力 $[\sigma]_{\text{木}} = 12 \text{ MPa}$, $E_{\text{木}} = 10 \text{ GPa}$ 。试求许可载荷 F 。

解 查附录三型钢表得 $A_{\text{钢}} = 308.6 \text{ mm}^2$, 受力图如题 2.39 图

(b)所示。这是一个超静定问题,先用平衡条件确定木柱及角钢的轴力,再用强度条件确定许可载荷。平衡条件为

$$\sum F_y = 0, \quad F_{N_{\text{钢}}} + F_{N_{\text{木}}} = F \quad (1)$$

方程①不能解出两个未知力,须利用木柱与角钢的变形协调条件

$$\Delta l_{\text{钢}} = \Delta l_{\text{木}} \quad (2)$$

再应用胡克定律,将未知力 $N_{\text{钢}}$ 、 $N_{\text{木}}$ 与变形联系起来,即

$$\Delta l_{\text{钢}} = \frac{F_{N_{\text{钢}}} l}{E_{\text{钢}} A_{\text{钢}}}, \quad \Delta l_{\text{木}} = \frac{F_{N_{\text{木}}} l}{E_{\text{木}} A_{\text{木}}} \quad (3)$$

将③式代入②式,得补充方程

$$\frac{F_{N_{\text{钢}}} \times 1}{200 \times 10^9 \times 4 \times 308.6 \times 10^{-6}} = \frac{F_{N_{\text{木}}} \times 1}{10 \times 10^9 \times 0.25^2} \quad (4)$$

联立①、④二式,解得

$$F_{N_{\text{钢}}} = 0.283F, \quad F_{N_{\text{木}}} = 0.717F$$

由角钢的强度条件

$$\sigma_{\text{钢}} = \frac{F_{N_{\text{钢}}}}{A_{\text{钢}}} = \frac{0.283F}{4 \times 308.6 \times 10^{-6}} \leq 160 \text{ MPa}$$

得

$$[F_1] \leq 698 \text{ kN}$$

由木柱的强度条件

$$\sigma_{\text{木}} = \frac{F_{N_{\text{木}}}}{A_{\text{木}}} = \frac{0.717F}{0.25^2} \leq 12 \text{ MPa}$$

得

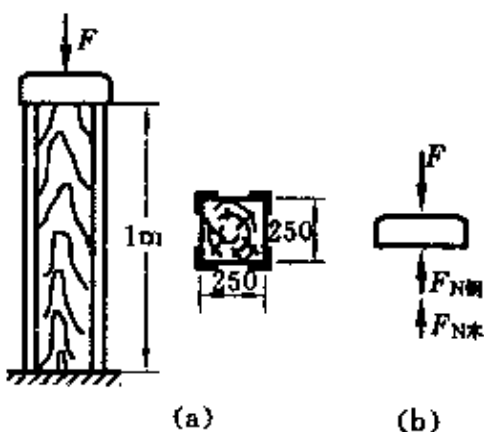
$$[F_2] \leq 1046 \text{ kN}$$

故许可载荷为

$$F = 698 \text{ kN}$$

2.40 在两端固定的杆件截面C上,沿轴线作用F力(题2.40图(a))。试求两端的反力。

解 这是个一次超静定问题,杆的受力图如题2.40图(b)所示,平衡条件为



题 2.39 图

$$\sum F_y = 0, \quad F_{RA} + F_{RB} = F \quad (1)$$

由变形协调方程 $(a + \Delta L_a) + (b - \Delta L_b) = a + b$
得 $\Delta L_a = \Delta L_b \quad (2)$

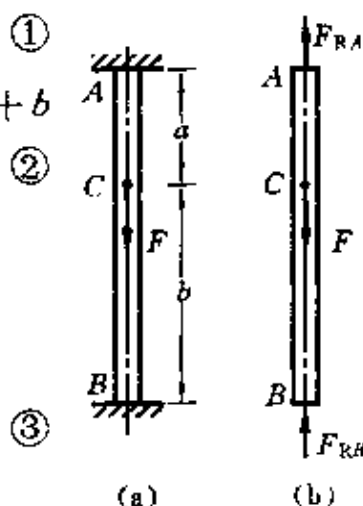
应用胡克定律确定 AC、BC 的伸长量, 即

$$\Delta L_a = \frac{F_{RA}a}{EA}, \quad \Delta L_b = \frac{F_{RB}b}{EA}$$

代入②式, 得 $\frac{F_{RA}a}{EA} = \frac{F_{RB}b}{EA}$

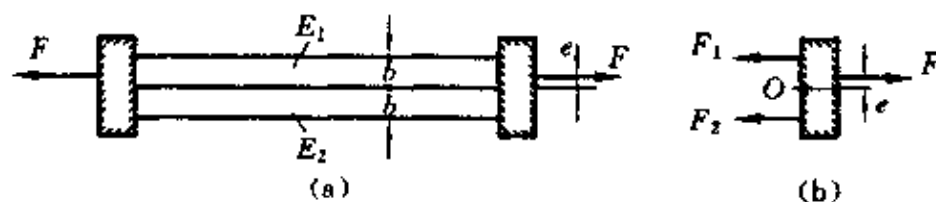
联立①、③式, 解得

$$F_{RA} = \frac{Fb}{a+b}, \quad F_{RB} = \frac{Fa}{a+b}$$



题 2.40 图

2.41 如题 2.41 图(a)所示, 两根材料不同但截面尺寸相同的杆件, 同时固定连接于两端的刚性板上, 且 $E_1 > E_2$ 。若使两杆都为均匀拉伸, 试求拉力 F 的偏心距 e 。



题 2.41 图

解 这是个一次超静定问题, 杆的受力图如题 2.41 图(b)所示, 其平衡条件为

$$\sum F_x = 0, \quad F_1 + F_2 = F \quad (1)$$

$$\sum M_O = 0, \quad (F_1 - F_2) \frac{b}{2} = Fe \quad (2)$$

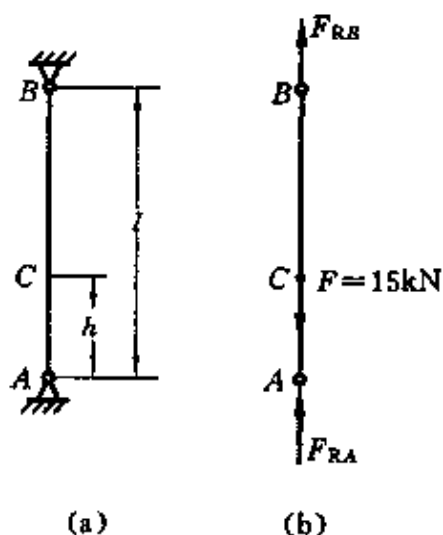
变形协调方程为 $\Delta L_1 = \Delta L_2$

$$\text{即} \quad \frac{F_1 l}{E_1 A} = \frac{F_2 l}{E_2 A} \quad (3)$$

联立①、③式, 解得

$$e = \left(\frac{E_1 - E_2}{E_1 + E_2} \right) \frac{b}{2}$$

2.42 受预拉力 10 kN 拉紧的缆索如题 2.42 图(a)所示。若在 C 点再作用向下的载荷 15 kN, 并设缆索不能承受压力, 试求在 $h = \frac{l}{5}$ 和 $h = \frac{4l}{5}$ 两种情况下, AC 和 BC 两段内的内力。



题 2.42 图

解 在预拉力单独作用下, 缆索的内力为拉力 $F_{N0} = 10$ kN, 在载荷 F 单独作用下, 缆索的受力图如题 2.42 图(b)所示, 平衡条件为

$$\sum F_y = 0, \quad F_{RB} + F_{RA} = F \quad (1)$$

变形协调方程为 $\Delta l_{BC} = \Delta l_{AC}$

将 $\Delta l_{BC} = \frac{F_{RB}(l-h)}{EA}$, $\Delta l_{AC} = \frac{F_{RA}h}{EA}$ 代入上式, 得

$$\frac{F_{RB}(l-h)}{EA} = \frac{F_{RA}h}{EA} \quad (2)$$

联立①、②式, 解得 $F_{RA} = F \frac{l-h}{l}$, $F_{RB} = F \frac{h}{l}$

因为是小变形, 在预拉力和载荷 F 同时作用下, 应用叠加原理, 缆索的内力为

$$\begin{cases} F_{NAC} = F_{N0} - F_{RA} = F_{N0} - F \frac{l-h}{l} \\ F_{NBC} = F_{N0} + F_{RB} = F_{N0} + F \frac{h}{l} \end{cases} \quad (3)$$

由③式可知, F_{NBC} 总为正值, 即受拉。而 F_{NAC} 可能为正, 也可能为负, 即可能受拉, 也可能受压。但题中规定缆索不能受压, 因此, F_{NAC} 必须大于零, 所以有

$$F_{NAC} = F_{N0} - F \frac{l-h}{l} = 10 - 15 \frac{l-h}{l} \geq 0$$

解上式得 $h \geq \frac{l}{3}$

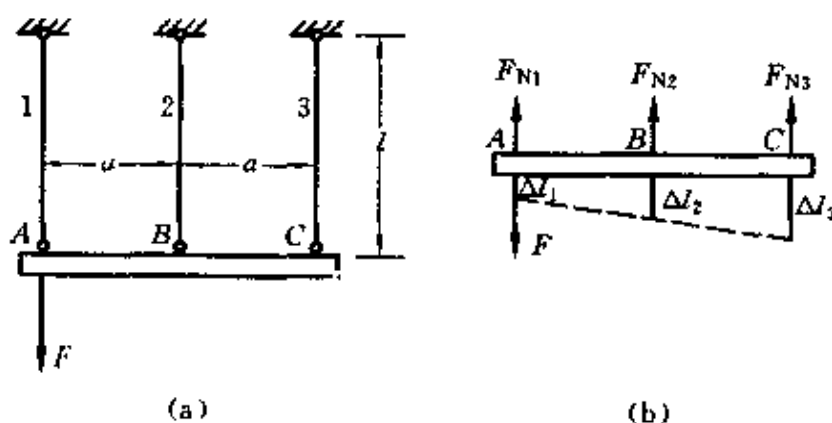
当 $h = \frac{4}{5}l > \frac{l}{3}$ 时, 将 $F_{N0} = 10 \text{ kN}$, $F = 15 \text{ kN}$ 代入③式, 得

$$F_{NAC} = 7 \text{ kN}, \quad F_{NBC} = 22 \text{ kN}$$

当 $h = \frac{l}{5} < \frac{l}{3}$ 时, 因缆索不能承担压力, F 力全由 BC 段承担, 故

$$F_{NAC} = 0, \quad F_{NBC} = F = 15 \text{ kN}$$

2.43 在题 2.43 图(a)所示结构中, 假设 AC 梁为刚杆, 杆 1、2、3 的横截面面积相等, 材料相同。试求三杆的轴力。



题 2.43 图

解 杆 ABC 的受力图如题 2.43 图(b)所示, 平衡条件为

$$\sum F_y = 0, \quad F_{N1} + F_{N2} + F_{N3} = F \quad (1)$$

$$\sum M_A = 0, \quad F_{N2}a + F_{N3}(2a) = 0 \quad (2)$$

变形的几何关系如题 2.43 图(b)所示, 变形协调方程为

$$\Delta l_1 + \Delta l_3 = 2\Delta l_2 \quad (3)$$

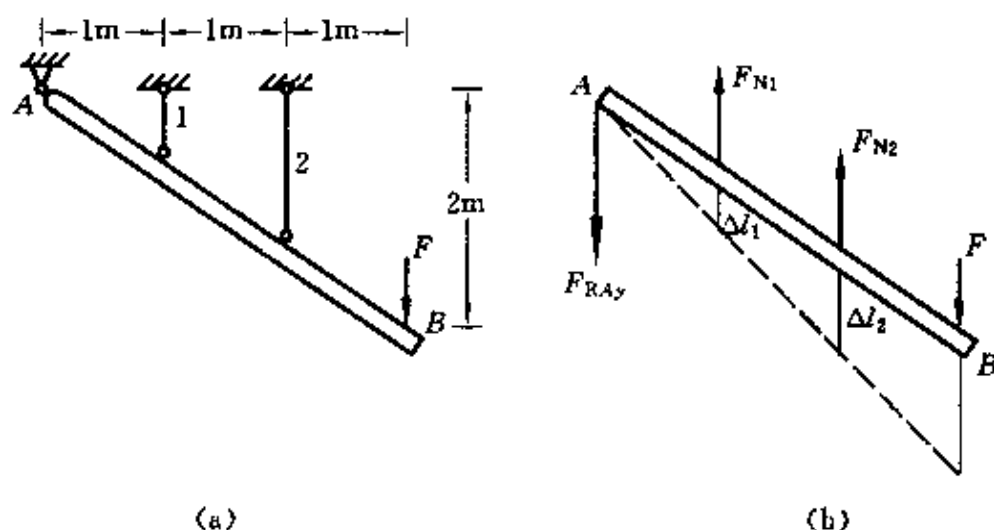
利用胡克定律将③式变为

$$\frac{F_{N1}l}{EA} + \frac{F_{N3}l}{EA} = \frac{2F_{N2}l}{EA} \quad (4)$$

联立①、②、④式, 解得

$$F_{N1} = \frac{5}{6}F, \quad F_{N2} = \frac{1}{3}F, \quad F_{N3} = -\frac{1}{6}F$$

2.44 如题2.44图(a)所示,刚杆AB悬挂于1、2两杆上,杆1的横截面面积为 60 mm^2 ,杆2的为 120 mm^2 ,且两杆材料相同。若 $F=6 \text{ kN}$,试求两杆的轴力及支座A的反力。



题2.44图

解 杆1、2的受力图如题2.44图(b)所示,这是个一次超静定问题,可利用的平衡方程只有一个

$$\sum M_A = 0, \quad F_{N1} \times 1 + F_{N2} \times 2 = F \times 3 \quad (1)$$

变形协调方程为

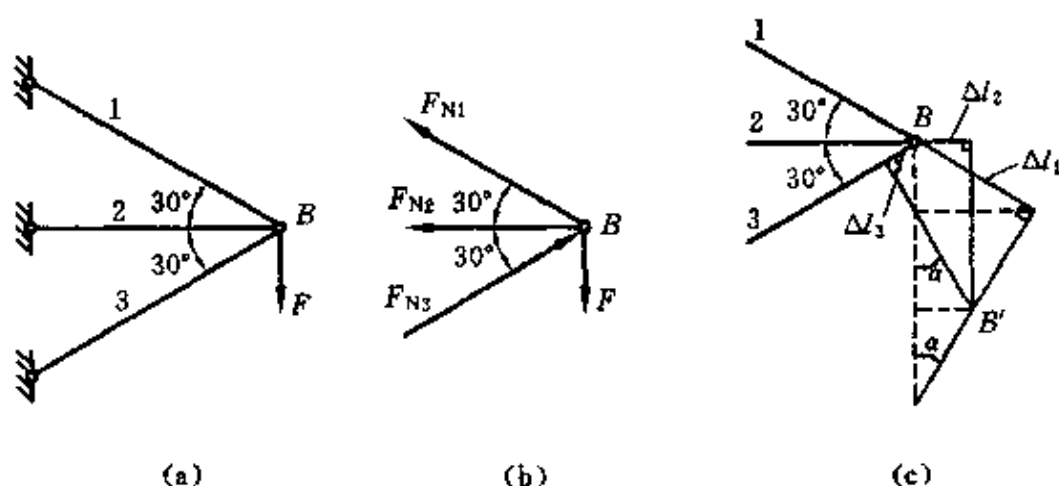
$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{F_{N1} l_1}{F_{N2} l_2} \times \frac{EA_2}{EA_1} = \frac{F_{N1} \times 2/3}{F_{N2} \times 4/3} \times \frac{E \times 120 \times 10^{-6}}{E \times 60 \times 10^{-6}} = \frac{1}{2} \quad (2)$$

解①、②式,得 $F_{N1} = 3.6 \text{ kN}$, $F_{N2} = 7.2 \text{ kN}$

由平衡条件 $\sum F_y = 0$, $F_{N1} + F_{N2} - F - F_{RAy} = 0$
得 $F_{RAy} = 4.8 \text{ kN}$

2.45 题2.45图(a)所示支架中的三根杆件材料相同,杆1的横截面面积为 200 mm^2 ,杆2的为 300 mm^2 ,杆3的为 400 mm^2 。若 $F=30 \text{ kN}$,试求各杆内的应力。

解 这是个一次超静定问题,B铰链的受力图如题2.45图



题 2.45 图

(b)所示,由平衡条件可知

$$\sum F_x = 0, \quad F_{N2} + F_{N1}\cos 30^\circ = F_{N3}\cos 30^\circ \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{N1}\sin 30^\circ + F_{N3}\sin 30^\circ = F \quad (2)$$

变形的几何关系如题 2.45 图(c)所示,变形协调条件为

$$\frac{\Delta l_1}{\sin 30^\circ} = 2 \frac{\Delta l_2}{\tan 30^\circ} + \frac{\Delta l_3}{\sin 30^\circ} \quad (3)$$

利用胡克定律

$$\Delta l_1 = \frac{F_{N1}l_1}{EA_1}, \quad \Delta l_2 = \frac{F_{N2}l_2}{EA_2}, \quad \Delta l_3 = \frac{F_{N3}l_3}{EA_3}$$

将上式代入③式,得补充方程

$$\frac{F_{N1}l_1}{EA_1\sin 30^\circ} = 2 \frac{F_{N2}l_2}{EA_2\tan 30^\circ} + \frac{F_{N3}l_3}{EA_3\sin 30^\circ} \quad (4)$$

联立①、②、④式,解得各杆的内力分别为

$$F_{N1} = 25.4 \text{ kN}, \quad F_{N2} = 8.04 \text{ kN}, \quad F_{N3} = 34.6 \text{ kN}$$

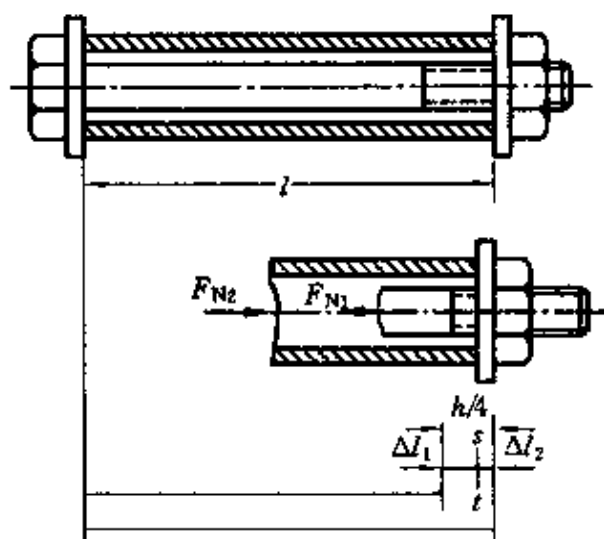
各杆的应力为

$$\sigma_1 = \frac{F_{N1}}{A_1} = \frac{25.4 \times 10^3}{200 \times 10^{-6}} \text{ Pa} = 127 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{F_{N2}}{A_2} = \frac{8.04 \times 10^3}{300 \times 10^{-6}} \text{ Pa} = 26.8 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = \frac{F_{N3}}{A_3} = \frac{34.6 \times 10^3}{400 \times 10^{-6}} \text{ Pa} = 86.5 \text{ MPa}$$

2.46 为了说明用螺栓将机器各部分紧固连接的问题,以题 2.46 图所示在铸铁套筒中穿过钢螺栓的情况为例。若螺母旋进 1/4 圈,求螺栓与套筒间的预紧力。



题 2.46 图

解 把螺母旋进 1/4 圈,必然会使螺栓受拉而套筒受压。如将螺栓及套筒切开,并以 F_{N1} 和 F_{N2} 分别表示螺栓的拉力和套筒的压力,容易写出平衡方程

$$F_{N1} - F_{N2} = 0 \quad (1)$$

现在寻求变形协调方程。设想把螺栓和套筒拆开,当螺母旋进 1/4 圈时,螺母前进的距离为 $h/4$ 。这里 h 为螺距。这时如再把套筒装上去,就必须把螺栓拉长 Δl_1 ,而把套筒压短 Δl_2 ,这样二者才能配合在一起。设二者最后在 st 所表示的位置上取得协调,则变形之间的关系应为

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{h}{4} \quad (2)$$

式中, Δl_1 和 Δl_2 皆为绝对值。若钢螺栓的抗拉刚度为 $E_1 A_1$, 铸铁套

筒的抗压刚度为 $E_2 A_2$, 由胡克定律

$$\Delta l_1 = \frac{F_{N1} l}{E_1 A_1}, \quad \Delta l_2 = \frac{F_{N2} l}{E_2 A_2}$$

于是②式化为
$$\frac{F_{N1} l}{E_1 A_1} + \frac{F_{N2} l}{E_2 A_2} = \frac{h}{4} \quad (3)$$

从①、③两式解出
$$F_{N1} = F_{N2} = \frac{h E_1 E_2 A_1 A_2}{4l(E_1 A_1 + E_2 A_2)}$$

2.47 如题 2.47 图(a)所示, 阶梯形钢杆的两端在 $T_1 = 5^\circ\text{C}$ 时被固定, 钢杆上下两段的横截面面积分别为 $A_{\text{上}} = 5 \text{ cm}^2$, $A_{\text{下}} = 10 \text{ cm}^2$, 当温度升高至 $T_2 = 25^\circ\text{C}$ 时, 试求杆内各部分的温度应力。钢杆的 $\alpha_t = 12.5 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$, $E = 200 \text{ GPa}$ 。

解 阶梯形钢杆的受力图如题 2.47 图(b)所示, 平衡条件为

$$\sum F_y = 0, \quad F_{R1} - F_{R2} = 0 \quad (1) \quad \text{题 2.47 图}$$

其变形协调方程为
$$\Delta l_1 + \Delta l_2 = \Delta l_T \quad (2)$$

将 $\Delta l_1 = \frac{F_{R1} a}{E A_1}$, $\Delta l_2 = \frac{F_{R2} a}{E A_2}$ 及 $\Delta l_T = 2a\alpha\Delta T$ 代入②式, 得

$$\frac{a}{E} \left(\frac{F_{R1}}{A_1} + \frac{F_{R2}}{A_2} \right) = 2a\alpha\Delta T \quad (3)$$

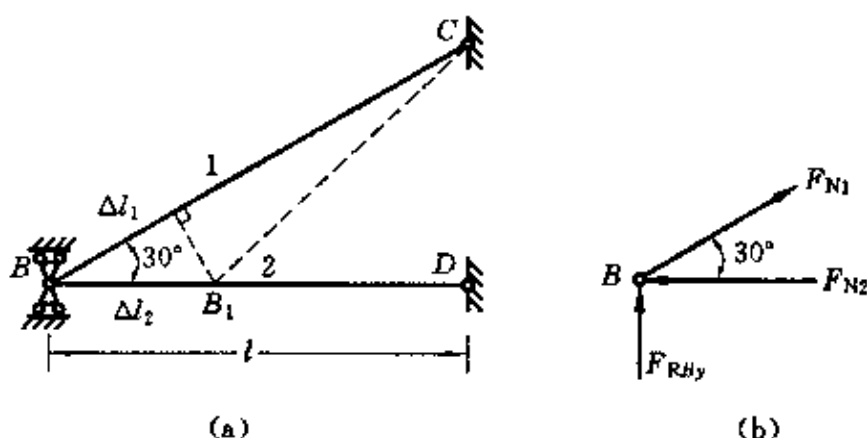
联立①、③式, 解得
$$F_{R2} = F_{R1} = 33.4 \text{ kN}$$

杆各部分的应力分别为

$$\sigma_{\text{上}} = \frac{F_{R1}}{A_{\text{上}}} = \frac{33.4 \times 10^3}{5 \times 10^{-4}} \text{ Pa} = 66.8 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{下}} = \frac{F_{R1}}{A_{\text{下}}} = \frac{33.4 \times 10^3}{10 \times 10^{-4}} \text{ Pa} = 33.4 \text{ MPa}$$

2.48 题 2.48 图(a)所示杆系的两杆同为钢杆, $E = 200 \text{ GPa}$, $\alpha_t = 12.5 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ 。两杆的横截面面积同为 $A = 10 \text{ cm}^2$ 。若 BC 杆的温度降低 20°C , 而 BD 杆的温度不变, 试求两杆的应力。



题 2.48 图

解 B 点受力图如题 2.48 图(b)所示,平衡条件为

$$\sum F_x = 0, \quad F_{N1} \cos 30^\circ - F_{N2} = 0 \quad (1)$$

设变形后, B 点移至 B_1 点,由题 2.48 图(a)可见,变形协调方程为

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \cos 30^\circ$$

杆 1 的变形为
$$\Delta l_1 = \alpha \Delta T l_1 - \frac{F_{N1} l_1}{EA}$$

杆 2 的变形为
$$\Delta l_2 = \frac{F_{N2} l_2}{EA}$$

代入变形协调方程中,得

$$\alpha \Delta T l_1 - \frac{F_{N1} l_1}{EA} = \frac{F_{N2} l_2}{EA} \cos 30^\circ \quad (2)$$

解①、②式得

$$\begin{aligned} F_{N1} &= \frac{\alpha \Delta T E A}{1 + \cos^3 30^\circ} \\ &= \frac{12.5 \times 10^{-6} \times 20 \times 200 \times 10^9 \times 10 \times 10^{-4}}{1 + \cos^3 30^\circ} \text{ N} = 30.3 \text{ kN (拉)} \end{aligned}$$

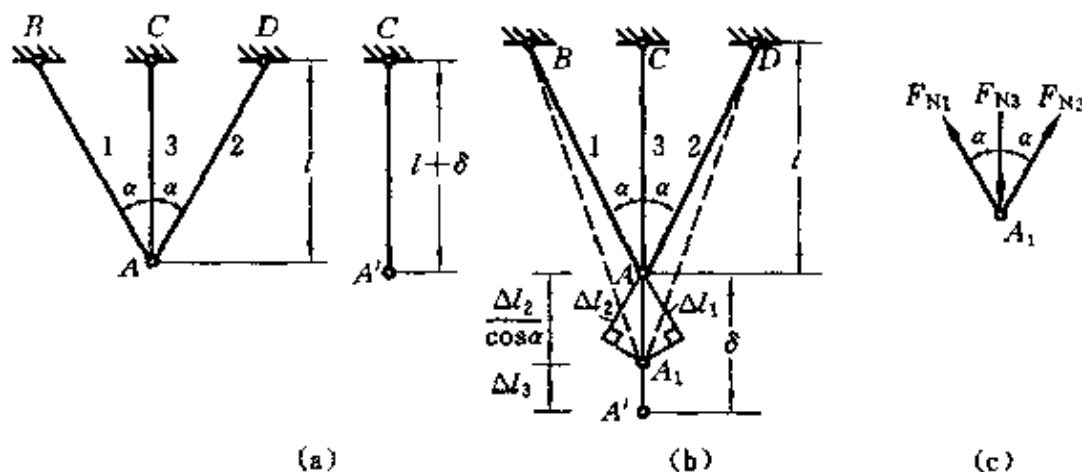
$$F_{N2} = F_{N1} \cos 30^\circ = \left(30.3 \times 10^3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{ N} = 26.2 \text{ kN (压)}$$

杆 1、2 的应力分别为

$$\sigma_1 = \frac{F_{N1}}{A_1} = \frac{30.3 \times 10^3}{10 \times 10^{-4}} \text{ Pa} = 30.3 \text{ MPa (拉)}$$

$$\sigma_2 = \frac{F_{N2}}{A_2} = \frac{26.2 \times 10^3}{10 \times 10^{-4}} \text{ Pa} = 26.2 \text{ MPa (压)}$$

2.49 在题2.49图(a)所示结构中,1、2两杆的抗拉刚度同为 E_1A_1 ,杆3的为 E_3A_3 。杆3的长度为 $l+\delta$,其中 δ 为加工误差。试求将杆3装入AC位置后,1、2、3三杆的内力。



题2.49图

解 这是个典型的装配应力问题。将杆3装配入AC位置后,杆1、2受拉,杆3受压,杆1、2的结点A和杆3的A'点在 A_1 处结合,如题2.49图(b)所示, A_1 点的受力图如题2.49图(c)所示,因结构和载荷均对称,所以 $F_{N1}=F_{N2}$,平衡条件为

$$\sum F_y = 0, \quad F_{N3} - 2F_{N1}\cos\alpha = 0 \quad (1)$$

$$\text{变形协调条件为} \quad \frac{\Delta l_2}{\cos\alpha} + \Delta l_3 = \delta \quad (2)$$

将 $\Delta l_1 = \Delta l_2 = \frac{F_{N1}l}{E_1A_1\cos\alpha}$, $\Delta l_3 = \frac{F_{N3}l}{E_3A_3}$ 代入②式,得

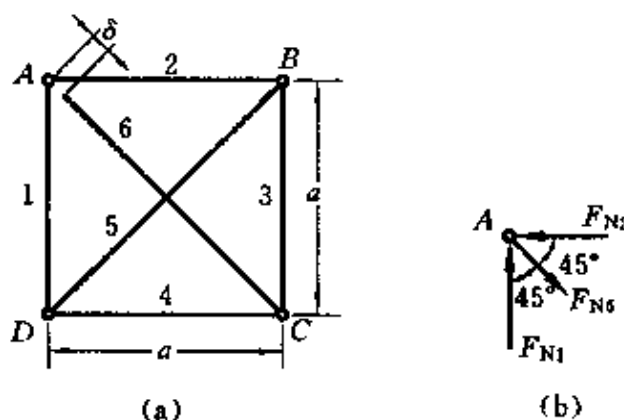
$$\frac{F_{N1}l}{E_1A_1\cos^2\alpha} + \frac{F_{N3}l}{E_3A_3} = \delta \quad (3)$$

联立①、③式,解得

$$F_{N1} = F_{N2} = \frac{\delta E_1A_1E_3A_3\cos^2\alpha}{l(2E_1A_1\cos^3\alpha + E_3A_3)}$$

$$F_{N3} = \frac{2\delta E_1A_1E_3A_3\cos^3\alpha}{l(2E_1A_1\cos^3\alpha + E_3A_3)}$$

2.50 题2.50图(a)所示杆系的杆6比名义长度略短,误差为 δ ,诸杆的刚度同为 EA ,试求将杆6装配到A、C之间后诸杆的内力。



题 2.50 图

解 A 铰链的受力图如题 2.50 图(b)所示,平衡条件为

$$\sum F_x = 0, \quad F_{N2} = F_{N6} \cos 45^\circ$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{N1} = F_{N6} \cos 45^\circ$$

因结构和载荷均对称,所以

$$F_{N1} = F_{N2} = F_{N3} = F_{N4} = \frac{\sqrt{2}}{2} F_{N6}, \quad F_{N5} = F_{N6}$$

杆系总的应变能为

$$V_\epsilon = 4 \times \frac{F_{N1}^2 a}{2EA} + 2 \times \frac{F_{N6}^2 a}{2EA \cos 45^\circ} = \frac{(1 + \sqrt{2}) F_{N6}^2 a}{EA}$$

应用卡氏定理,A 点沿 AC 方向的位移为

$$\delta_{AC} = \frac{\partial V_\epsilon}{\partial F_{N6}} = \frac{2 F_{N6} a (1 + \sqrt{2})}{EA} = \delta$$

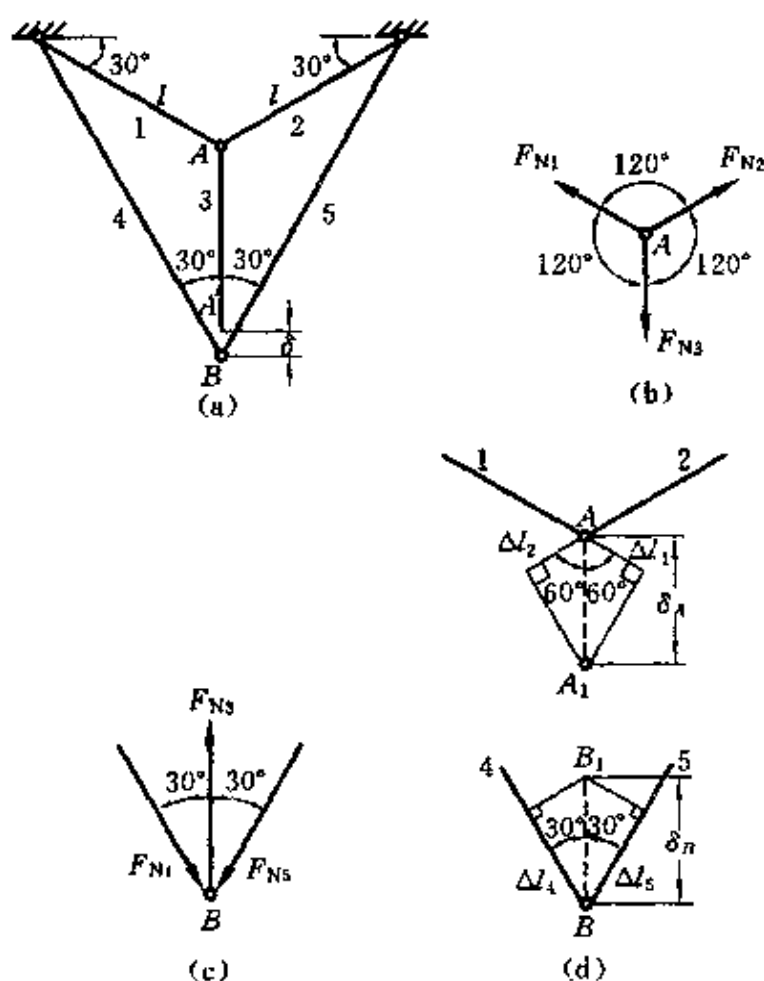
解上式得

$$F_{N6} = 0.207 EA \delta / a$$

$$\text{所以 } F_{N1} = F_{N2} = F_{N3} = F_{N4} = \frac{\sqrt{2}}{2} F_{N6} = 0.146 EA \delta / a$$

$$F_{N5} = F_{N6} = 0.207 EA \delta / a$$

2.51 在题2.51图(a)所示杆系中,AB 杆比名义长度略短,误差为 δ 。若各杆材料相同,横截面面积相等,试求装配后各杆的轴力。



题 2.51 图

解 A、B 点的受力图分别如题 2.51 图(b)、(c)所示,因结构对称,故有

$$F_{N1} = F_{N2} = F_{N3}, \quad F_{N4} = F_{N5} \quad (1)$$

在题 2.51(c)图中,平衡条件为

$$F_{N3} = 2F_{N4}\cos 30^\circ = \sqrt{3}F_{N4} \quad (2)$$

间隙 δ 是靠五根杆的弹性变形所引起的 A'、B 两点的位移来弥补的。将杆 3 装入 A、B 两点之间后,杆 1、2 被拉长,它们的伸长分别为 Δl_1 、 Δl_2 ,导致 A 点产生向下的位移 δ_A ,杆 3 被拉伸,伸长 Δl_3 ,导致杆 3 下端 A' 下移,杆 4、5 缩短 Δl_4 、 Δl_5 ,导致 B 点上移。它们的变形与位移关系如题 2.51 图(d)所示,变形协调条件为

$$\Delta l_3 + \delta_A + \delta_B = \delta \quad (3)$$

杆变形与 A、B 点位移的关系为

$$\delta_A = \frac{\Delta l_1}{\cos 60^\circ}, \quad \delta_B = \frac{\Delta l_4}{\cos 30^\circ} \quad (4)$$

由胡克定律和②式,有

$$\Delta l_1 = \frac{F_{N1}l}{EA}, \quad \Delta l_3 = \frac{F_{N3}l}{EA}, \quad \Delta l_4 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}F_{N1}(\sqrt{3}l)}{EA} \quad (5)$$

把④、⑤式代入③式得

$$\frac{F_{N3}l}{EA} + \frac{F_{N1}l}{EA \cos 60^\circ} + \frac{F_{N1}l}{EA \cos 30^\circ} = \delta$$

解上式得(注意: $F_{N3} = F_{N1}$)

$$F_{N1} = \frac{EA\delta}{(3 + 2/\sqrt{3})l} = 0.241 \frac{EA\delta}{l}$$

根据①式,有 $F_{N1} = F_{N2} = F_{N3} = 0.241 \frac{EA\delta}{l}$

$$F_{N4} = F_{N5} = \frac{F_{N3}}{\sqrt{3}} = 0.139 \frac{EA\delta}{l}$$

2.52 如题 2.52 图(a)所示,杆 1 为钢杆, $E_1 = 210 \text{ GPa}$, $\alpha_1 = 12.5 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$, $A_1 = 30 \text{ cm}^2$ 。杆 2 为铜杆, $E_2 = 105 \text{ GPa}$, $\alpha_2 = 19 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$, $A_2 = 30 \text{ cm}^2$ 。载荷 $F = 50 \text{ kN}$ 。若 AB 为刚杆,且始终保持水平,试问温度是升高还是降低? 并求温度的改变量 ΔT 。

解 AB 杆的受力图如题 2.52 图(b)所示,平衡条件为

$$\sum M_O = 0, \quad Fa = F_{N1}a - F_{N2}a$$

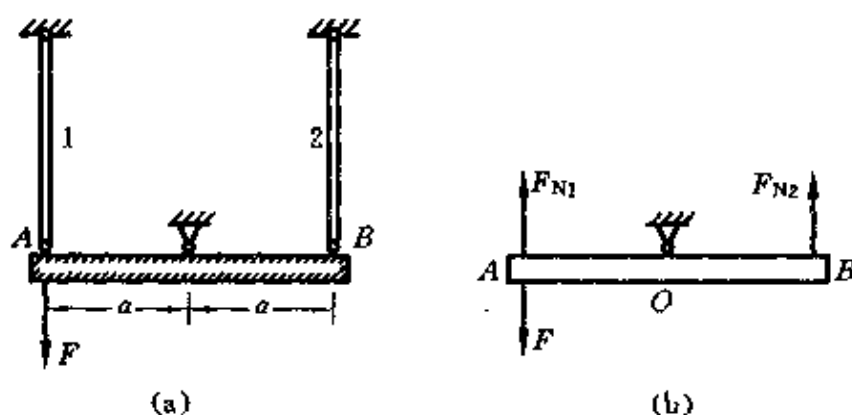
解上式得 $F_{N1} - F_{N2} = F \quad (1)$

假设温度降低 ΔT , 使 AB 杆保持水平的变形协调条件为

$$\Delta l_{1F} = \Delta l_{1T}, \quad \Delta l_{2F} = \Delta l_{2T} \quad (2)$$

式中, Δl_F 和 Δl_T 分别表示因载荷 F 和温度 T 变化而产生的变形,

将 $\Delta l_F = \frac{F_N l}{EA}$, $\Delta l_T = \alpha \Delta T l$ 代入②式,得



题 2.52 图

$$\frac{F_{N1}l_1}{E_1A_1} = \alpha_1\Delta Tl_1, \quad \frac{F_{N2}l_2}{E_2A_2} = \alpha_2\Delta Tl_2 \quad (3)$$

联立①、③式,解得

$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{F}{E_1A_1\alpha_1 - E_2A_2\alpha_2} \\ &= \frac{50 \times 10^3}{(210 \times 10^9 \times 12.5 \times 10^{-6} - 105 \times 10^9 \times 19 \times 10^{-6}) \times 30 \times 10^{-3}} \text{ } ^\circ\text{C} \\ &= 26.5^\circ\text{C} \end{aligned}$$

所以温度降低 26.5°C , 可使 AB 杆保持水平。

2.53 如题 2.53 图(a)所示,刚性横梁 AB 悬挂于三根平行杆上。 $l=2\text{ m}$, $F=40\text{ kN}$, $a=1.5\text{ m}$, $b=1\text{ m}$, $c=0.25\text{ m}$, $\delta=0.2\text{ mm}$ 。杆 1 由黄铜制成, $A_1=2\text{ cm}^2$, $E_1=100\text{ GPa}$, $\alpha_1=16.5 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ 。杆 2 和杆 3 由碳钢制成, $A_2=1\text{ cm}^2$, $A_3=3\text{ cm}^2$, $E_2=E_3=200\text{ GPa}$, $\alpha_2=\alpha_3=12.5 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ 。设温度升高 20°C , 求各杆的应力。

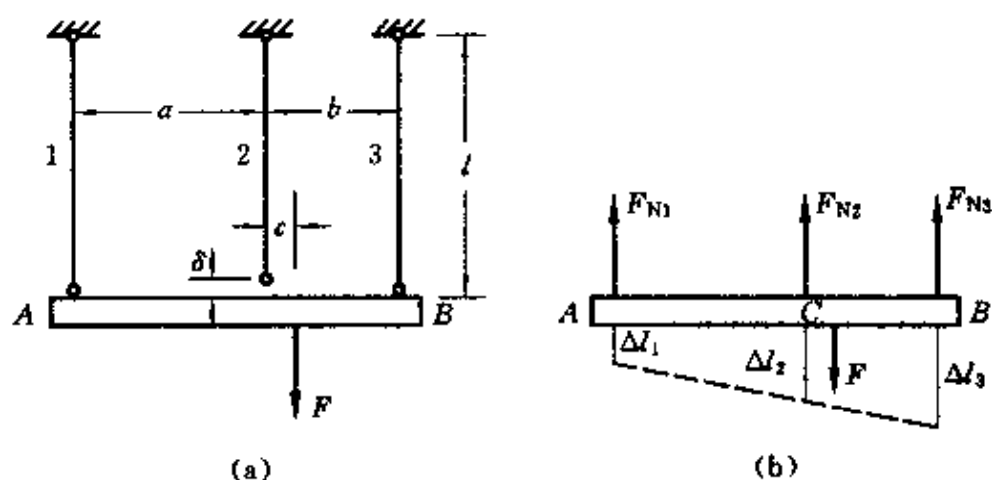
解 AB 杆的受力图如题 2.53 图(b)所示,平衡条件为

$$\sum F_y = 0, \quad F_{N1} + F_{N2} + F_{N3} = F \quad (1)$$

$$\sum M_C = 0, \quad F_{N1}a + Fc = F_{N3}b \quad (2)$$

变形图如题 2.53 图(b)所示,变形协调方程为

$$\frac{b}{a+b} = \frac{\Delta l_3 - \Delta l_2}{\Delta l_3 - \Delta l_1} \quad (3)$$



题 2.53 图

利用叠加原理,各杆变形 Δl 等于载荷产生的变形与温度变化产生的变形之代数和,所以有

$$\Delta l_1 = \alpha_1 \Delta T l_1 + \frac{F_{N1} l_1}{E_1 A_1}$$

$$\Delta l_2 = \alpha_2 \Delta T l_2 + \frac{F_{N2} l_2}{E_2 A_2} - \delta$$

$$\Delta l_3 = \alpha_3 \Delta T l_3 + \frac{F_{N3} l_3}{E_3 A_3}$$

将 $\Delta l_1, \Delta l_2, \Delta l_3$ 表达式代入③式,得

$$\frac{b}{a+b} = \frac{\left(\alpha_3 \Delta T l_3 + \frac{F_{N3} l_3}{E_3 A_3} \right) - \left(\alpha_2 \Delta T l_2 + \frac{F_{N2} l_2}{E_2 A_2} - \delta \right)}{\left(\alpha_3 \Delta T l_3 + \frac{F_{N3} l_3}{E_3 A_3} \right) - \left(\alpha_1 \Delta T l_1 + \frac{F_{N1} l_1}{E_1 A_1} \right)} \quad (4)$$

将 $\alpha, \Delta T, l, E, A, \delta$ 的数值代入④式后,与①、②式联立,解得各杆的内力分别为

$$F_{N1} = 7.92 \text{ kN}, \quad F_{N2} = 10.2 \text{ kN}, \quad F_{N3} = 21.9 \text{ kN}$$

各杆的应力分别为

$$\sigma_1 = \frac{F_{N1}}{A_1} = \frac{7.92 \times 10^3}{2 \times 10^{-4}} \text{ Pa} = 39.6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{F_{N2}}{A_2} = \frac{10.2 \times 10^3}{1 \times 10^{-4}} \text{ Pa} = 102 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = \frac{F_{N3}}{A_3} = \frac{21.9 \times 10^3}{3 \times 10^{-4}} \text{ Pa} = 73 \text{ MPa}$$

2.54 两端固定的杆件如题 2.54

图(a)所示,横截面面积 $A=12 \text{ cm}^2$, $a=30 \text{ cm}$ 。材料的应力-应变关系如题 2.25 图(b)所示。试分别求 $F=60 \text{ kN}$ 和 $F=210 \text{ kN}$ 时,杆件的应力。

解 杆的受力图如题 2.54 图(b)所示,平衡条件为

$$\sum F_y = 0, \quad F_{RA} + F_{RB} = F \quad (1)$$

从题 2.25 图(b)可见,应力-应变曲线不是一条直线,在对应于 $\sigma=100 \text{ MPa}$ 处,产生转折,对应这一点的载荷应为

$$\begin{aligned} F &= \sigma A = 100 \times 10^6 \times 12 \times 10^{-4} \text{ N} \\ &= 120 \text{ kN} \end{aligned}$$

以 $F=120 \text{ kN}$ 为分界点,外力小于 120 kN 时,计算变形用 E_1 。外力大于 120 kN 时,计算变形应分段进行: 0 到 120 kN 时,用 E_1 ; 120 kN 到 210 kN 时,用 E_2 。

当 $F=60 \text{ kN}$ 时,变形协调方程为

$$\frac{F_{RA}a}{E_1A} = \frac{F_{RB}(2a)}{E_1A} \quad (2)$$

由①、②式得

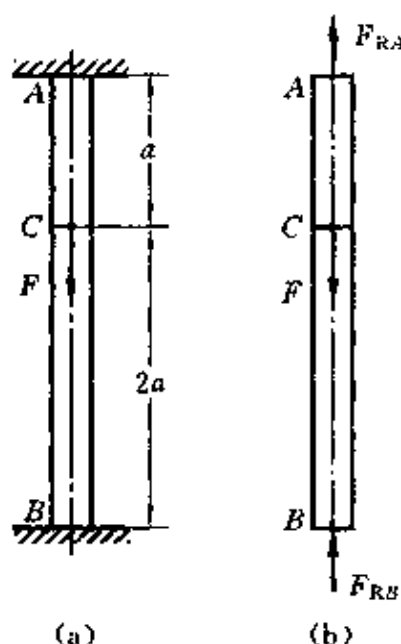
$$F_{RA} = 40 \text{ kN}, \quad F_{RB} = \frac{F}{3} = \frac{60}{3} \text{ kN} = 20 \text{ kN}$$

两部分的应力分别为

$$\sigma_{AC} = \frac{F_{RA}}{A} = \frac{40 \times 10^3}{12 \times 10^{-4}} \text{ Pa} = 33.3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{BC} = \frac{20 \times 10^3}{12 \times 10^{-4}} \text{ Pa} = 16.7 \text{ MPa}$$

当 $F=210 \text{ kN}$ 时,变形协调方程为



题 2.54 图

$$\frac{120 \times a}{E_1 A} + \frac{(F_{RA} - 120)a}{E_2 A} = \frac{F_{RB}(2a)}{E_1 A} \quad (3)$$

联立①、③式,解得

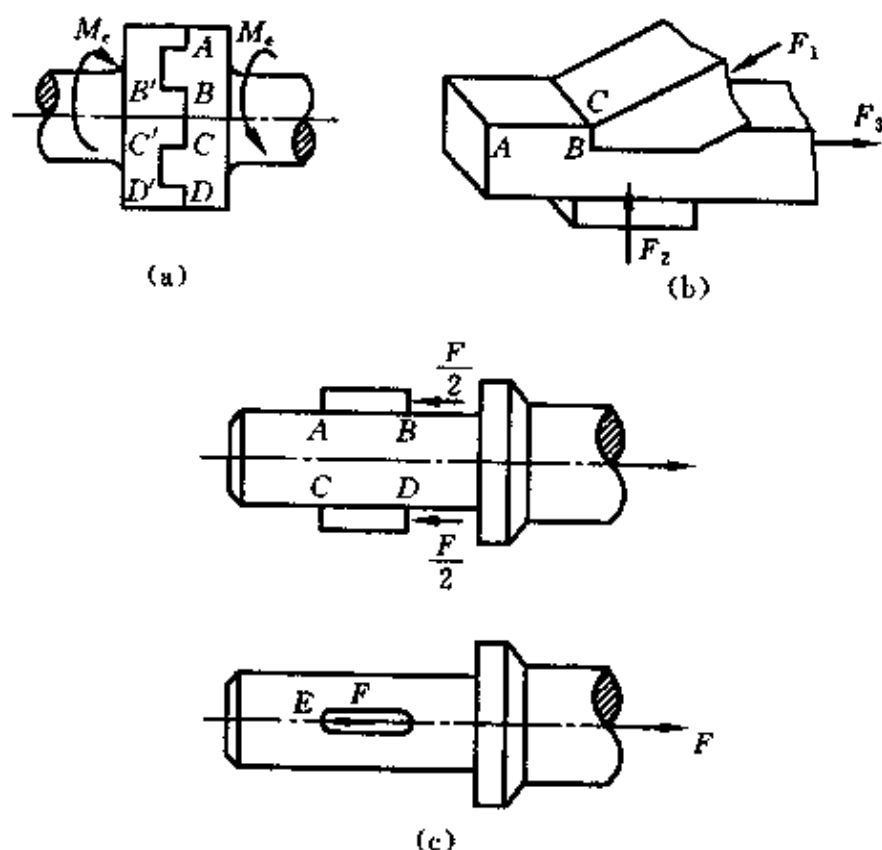
$$F_{RB} = 83.3 \text{ kN}, \quad F_{RA} = F - F_{RB} = 127 \text{ kN}$$

两部分的应力分别为

$$\sigma_B = \left(\frac{83.3 \times 10^3}{12 \times 10^{-4}} \right) \text{ Pa} = 69.4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_A = \left(\frac{127 \times 10^3}{12 \times 10^{-4}} \right) \text{ Pa} = 106 \text{ MPa}$$

2.55 试确定题 2.55 图(a)、(b)、(c)所示连接或接头中的剪切面和挤压面。



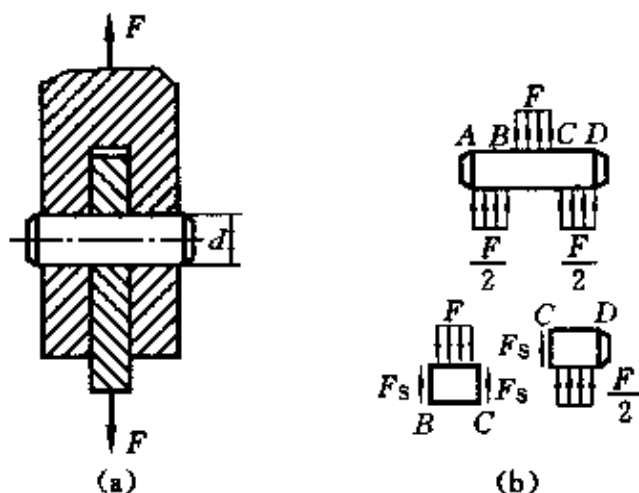
题 2.55 图

解 在题 2.55 图(a)中, AB、CD、B'C' 面为剪切面, BB'、DD' 面为挤压面。

在题 2.55 图(b)中, AB 面为剪切面, BC 面为挤压面。

在题 2.55 图(c)中, AB 、 CD 面为剪切面, E 面为挤压面。

2.56 试校核题 2.56 图(a)所示连接销钉的剪切强度。已知 $F = 100 \text{ kN}$, 销钉直径 $d = 30 \text{ mm}$, 材料的许用切应力 $[\tau] = 60 \text{ MPa}$ 。若强度不够, 应改用多大直径的销钉?



题 2.56 图

解 销钉的每一个剪切面所承受的剪力(题 2.56 图(b))均为

$$F_s = \frac{F}{2}$$

销钉的剪切强度条件为

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{F_s}{A} = \frac{F}{2A} = \frac{100 \times 10^3}{2 \times \frac{\pi}{4} \times 0.03^2} \text{ Pa} \\ &= 70.7 \text{ MPa} > [\tau] = 60 \text{ MPa} \end{aligned}$$

因 $\tau > [\tau]$, 故不能安全工作, 欲满足强度要求, 应有

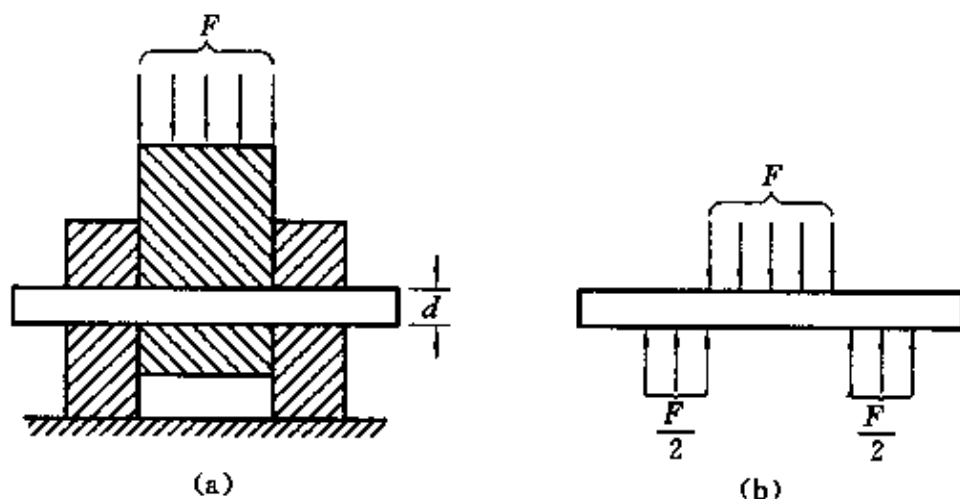
$$[\tau] \geq \frac{F_s}{A}, \quad \text{即} \quad \frac{\pi}{4} d^2 \geq \frac{F}{2[\tau]}$$

解上式得

$$d \geq \sqrt{\frac{2F}{\pi[\tau]}} = \sqrt{\frac{2 \times 100 \times 10^3}{60 \times 10^6 \times \pi}} \text{ m} = 32.6 \text{ mm}$$

应改用直径 $d=33\text{ mm}$ 的销钉。

2.57 测定材料剪切强度的剪切器的示意图如题 2.57 图(a)所示。设圆试件的直径 $d=15\text{ mm}$, 当压力 $F=31.5\text{ kN}$ 时, 试件被剪断, 试求材料的名义剪切极限应力。若取剪切许用应力为 $[\tau]=80\text{ MPa}$, 试问安全因数等于多大?



题 2.57 图

解 试件被剪断, 则其横截面上的剪力为 $F_s=F/2$, 如题 2.57 图(b)所示, 材料的名义剪切极限应力为

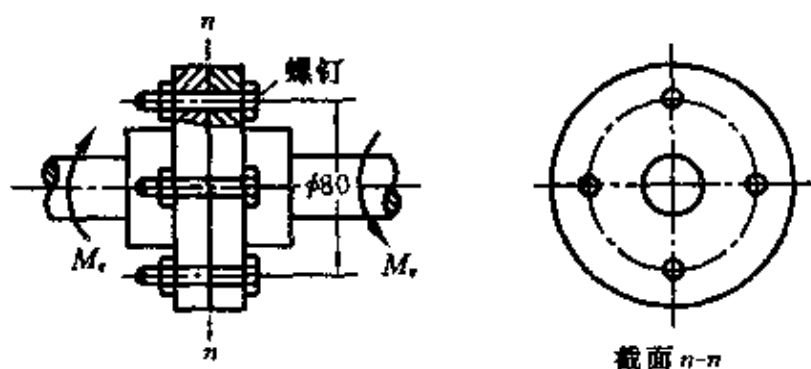
$$\tau_u = \frac{F_s}{A} = \frac{F}{2A} = \frac{31.5 \times 10^3}{2 \times \frac{\pi}{4} \times 0.015^2} \text{ Pa} = 89.1 \text{ MPa}$$

根据许用应力的定义 $[\tau] = \frac{\tau_u}{n}$

故安全因数为 $n = \frac{\tau_u}{[\tau]} = \frac{89.1}{80} = 1.1$

2.58 如题 2.58 图所示, 凸缘联轴节传递的力偶矩为 $M_e=200\text{ N} \cdot \text{m}$, 凸缘之间用四只螺栓连接, 螺栓内径 $d \approx 10\text{ mm}$, 对称地分布在 $D_0=80\text{ mm}$ 的圆周上。如螺栓的剪切许用应力 $[\tau]=60\text{ MPa}$, 试校核螺栓的剪切强度。

解 假设每只螺栓所承受的剪力相同, 都为 F_s 。四个螺栓所受剪力对联轴节轴线的力矩之和与联轴节所传递的力偶矩 M_e 平



题 2.58 图

衡, 所以有

$$M_e = 4F_s \frac{D_0}{2}$$

因此每只螺栓所承受的剪力为

$$F_s = \frac{M_e}{2D_0} = \frac{200}{2 \times 80 \times 10^{-3}} \text{ N} = 1.25 \text{ kN}$$

每只螺栓内的切应力为

$$\tau = \frac{F_s}{A} = \frac{4F_s}{\pi d^2} = \frac{4 \times 1250}{\pi \times 0.01^2} \text{ Pa} = 15.9 \text{ MPa} < [\tau] = 60 \text{ MPa}$$

因 $\tau < [\tau]$, 所以螺栓能安全工作。

2.59 如题 2.59 图所示, 一螺栓将拉杆与厚为 8 mm 的两块盖板相连接。各零件材料相同, 许用应力为 $[\sigma] = 80 \text{ MPa}$, $[\tau] = 60 \text{ MPa}$, $[\sigma_b] = 160 \text{ MPa}$ 。若拉杆的厚度 $\delta = 15 \text{ mm}$, 拉力 $F = 120 \text{ kN}$, 试设计螺栓直径 d 及拉杆宽度 b 。

解 (1) 按拉伸强度要求设计拉杆的宽度。

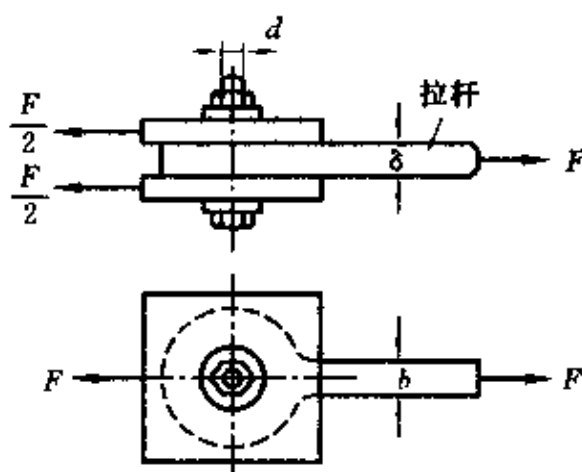
拉杆的轴力 $F_N = F$, 其强度条件为

$$\sigma = \frac{F_N}{A} = \frac{F}{b\delta} \leq [\sigma]$$

解上式得

$$b = \frac{F}{\delta[\sigma]} = \frac{120 \times 10^3}{15 \times 10^{-3} \times 80 \times 10^6} \text{ m} = 100 \text{ mm}$$

(2) 按剪切强度要求设计螺栓的直径。



题 2.59 图

螺栓所承受的剪力为 $F_s = \frac{F}{2}$, 应满足剪切强度条件

$$\tau = \frac{F}{2A} = \frac{F}{2 \times \frac{\pi}{4} d^2} \leq [\tau]$$

解上式得 $d \geq \sqrt{\frac{2F}{\pi[\tau]}} = \sqrt{\frac{2 \times 120 \times 10^3}{\pi \times 60 \times 10^6}} \text{ m} = 35.7 \text{ mm}$

(3) 按挤压强度要求设计螺栓的直径。

挤压强度条件为 $\sigma_{bs} = \frac{F}{A_{bs}} = \frac{F}{d\delta} \leq [\sigma_{bs}]$

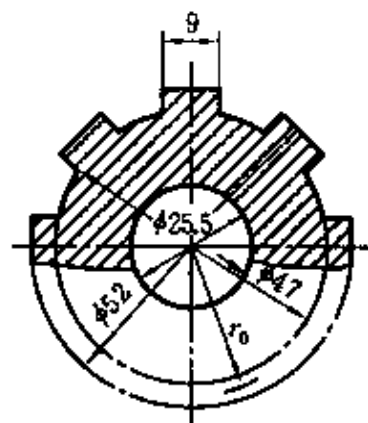
解上式得 $d \geq \frac{F}{\delta[\sigma_{bs}]} = \frac{120 \times 10^3}{15 \times 10^{-3} \times 160 \times 10^6} \text{ m} = 50 \text{ mm}$

比较以上三种结果, 取

$$d = 50 \text{ mm}, \quad b = 100 \text{ mm}$$

2.60 题 2.60 图所示的机床花键轴有八个齿。轴与轮的配合长度 $l = 60 \text{ mm}$, 外力偶矩 $M_e = 4 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 。轮与轴的挤压许用应力为 $[\sigma_{bs}] = 140 \text{ MPa}$, 试校核花键轴的挤压强度。

解 由于花键轴齿的位置对称, 故



题 2.60 图

每个挤压面上的挤压力相等,均为

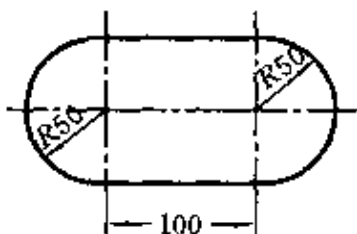
$$F = \frac{M_t}{8r_0} = \frac{4 \times 10^3}{8 \times \left(\frac{52+47}{2 \times 2} \right) \times 10^{-3}} \text{ N} = 20.2 \text{ kN}$$

键的挤压应力

$$\begin{aligned} \sigma_{bs} &= \frac{F}{A_{bs}} = \frac{20.2 \times 10^3}{\left(\frac{52-47}{2} \right) \times 60 \times 10^{-6}} \text{ Pa} \\ &= 135 \text{ MPa} < [\sigma_{bs}] = 140 \text{ MPa} \end{aligned}$$

挤压应力小于许用应力,所以,花键轴满足挤压强度要求,能安全工作。

2.61 在厚度 $\delta = 5 \text{ mm}$ 的钢板上,冲出一个形状如题 2.61 图所示的孔,钢板剪断时的剪切极限应力 $\tau_u = 300 \text{ MPa}$,求冲床所需的冲力 F 。



题 2.61 图

解 欲将钢板剪断,剪切面上的切应力应满足条件

$$\tau = \frac{F}{A} \geq \tau_u$$

剪切面积为

$$A = (2\pi R + 0.2)\delta$$

所需冲力为

$$\begin{aligned} F &\geq A\tau_u = (2\pi \times 0.05 + 0.2) \times 0.005 \times 300 \times 10^6 \text{ N} \\ &= 771 \text{ kN} \end{aligned}$$

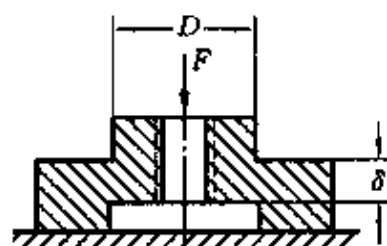
2.62 如题 2.62 图所示,可倾式压力机为防止过载采用了压环式保险器。当过载时,保险器先被剪断,以保护其他主要零件。设压环式保险器以剪切的形式破坏,且剪切面的高度 $\delta = 20 \text{ mm}$,材料为 HT21-40,其剪切极限应力 $\tau_u = 200 \text{ MPa}$,压力机的最大许可压力 $F = 630 \text{ kN}$ 。试确定压环式保险器剪切部分的直径 D 。

解 由剪切强度条件

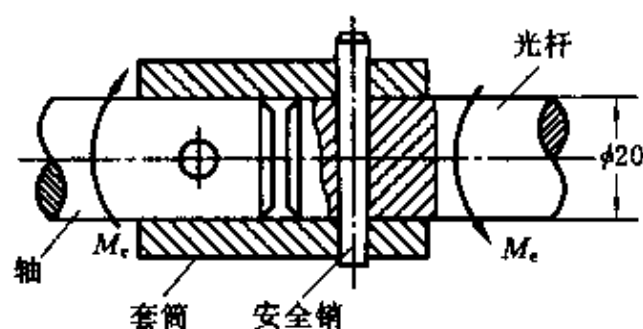
$$\tau = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi D \delta} \geq \tau_u$$

可确定压环式保险器的直径

$$D \leq \frac{F}{\pi \tau_u \delta} = \frac{630 \times 10^3}{\pi \times 200 \times 10^6 \times 20 \times 10^{-3}} \text{ m} = 50.1 \text{ mm}$$



题 2.62 图



题 2.63 图

2.63 如题 2.63 图所示,车床的传动光杆上装有安全联轴器,当超过一定载荷时,安全销被剪断。已知安全销的平均直径为 5 mm,材料为 45 钢,其剪切极限应力为 $\tau_u = 370 \text{ MPa}$ 。求安全联轴器所能传递的力偶矩 M_e 。

解 设光杆的直径为 D ,则安全销所承受的剪力为

$$F_s = M_e / D$$

安全销不被剪断的条件为 $\tau = \frac{F_s}{A} = \frac{M_e / D}{\pi d^2 / 4} \leq \tau_u$

解上式得

$$\begin{aligned} M_e &\leq D \frac{\pi}{4} d^2 \tau_u \\ &= \left[0.02 \times \frac{\pi}{4} \times (5 \times 10^{-3})^2 \times 3.7 \times 10^8 \right] \text{ N} \cdot \text{m} \\ &= 145 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

所以安全联轴器所能传递的力偶矩为 $M_e = 145 \text{ N} \cdot \text{m}$ 。

2.64 题 2.64 图所示螺钉在拉力 F 作用下。已知材料的剪切许用应力 $[\tau]$ 和拉伸许用应力 $[\sigma]$ 之间的关系约为: $[\tau] = 0.6[\sigma]$ 。试求螺钉直径 d 与钉头高度 h 的合理比值。

解 当螺钉杆和螺钉头内的应力同时达到各自的许用应力时, d 与 h 之比最合理。螺钉杆的拉伸强度条件为

$$\sigma = \frac{F_N}{A_1} = \frac{4F}{\pi d^2} \leq [\sigma]$$

螺钉头的剪切强度条件为

$$\tau = \frac{F_s}{A_2} = \frac{F}{\pi d h} \leq [\tau]$$

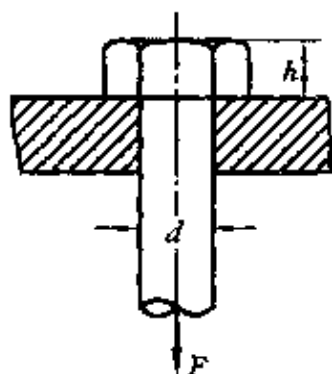
上二式相比, 得

$$\frac{[\tau]}{[\sigma]} = \frac{d}{4h} = 0.6$$

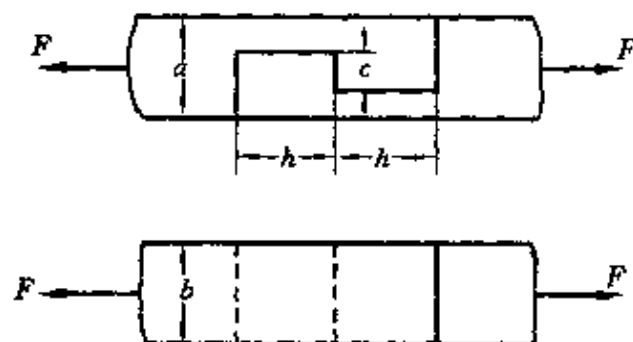
所以

$$\frac{d}{h} = 2.4$$

螺钉杆直径 d 与螺钉头高度 h 的合理比值为 2.4。



题 2.64 图



题 2.65 图

2.65 木榫接头如题 2.65 图所示。 $a=b=12\text{ cm}$, $h=35\text{ cm}$, $c=4.5\text{ cm}$, $F=40\text{ kN}$ 。试求接头的剪切和挤压应力。

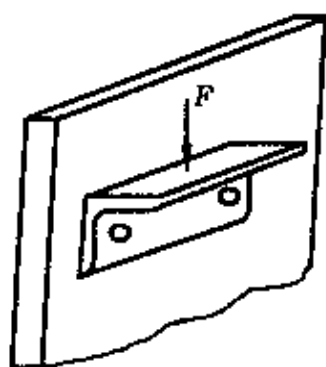
解 作用在接头上的剪力 $F_s=F$, 剪切面积为 bh , 接头的切应力为

$$\tau = \frac{F}{bh} = \frac{40 \times 10^3}{12 \times 35 \times 10^{-4}} \text{ Pa} = 0.952 \text{ MPa}$$

作用在接头上的挤压力和挤压面积分别为 F 和 bc , 接头的挤压应力为

$$\sigma_{bs} = \frac{F}{bc} = \frac{40 \times 10^3}{12 \times 4.5 \times 10^{-4}} \text{ Pa} = 7.41 \text{ MPa}$$

2.66 如题 2.66 图所示,用两个铆钉将 $140\text{ mm} \times 140\text{ mm} \times 12\text{ mm}$ 的等边角钢铆接在立柱上,构成支托。若 $F=30\text{ kN}$,铆钉的直径为 21 mm ,试求铆钉的切应力和挤压应力。



题 2.66 图

解 因结构与载荷都对称,所以两个铆钉受力相等,作用在每个铆钉上的剪力与挤压力都为 $F/2$ 。

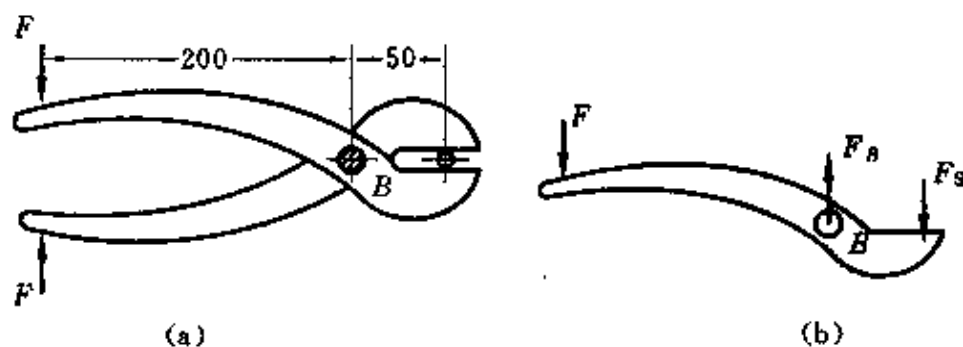
铆钉的切应力为

$$\tau = \frac{F_s}{A} = \frac{F/2}{\pi d^2/4} = \frac{0.5 \times 30 \times 10^3}{\frac{\pi}{4} \times 0.021^2} \text{ Pa} = 43.3 \text{ MPa}$$

铆钉的挤压应力为

$$\sigma_{bs} = \frac{F}{A_{bs}} = \frac{F}{2\delta d} = \frac{30 \times 10^3}{2 \times 12 \times 21 \times 10^{-6}} \text{ Pa} = 59.5 \text{ MPa}$$

2.67 如题 2.67 图(a)所示,用夹剪剪断直径为 3 mm 的铅丝。若铅丝的剪切极限应力约为 100 MPa ,试问需要多大的 F ? 若销钉 B 的直径为 8 mm ,试求销钉内的切应力。



题 2.67 图

解 夹剪的一股受力图如题 2.67 图(b)所示,平衡条件为

$$\sum M_B = 0, \quad F \times 200 = F_s \times 50$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_B - F_s - F = 0$$

解上二式得 $F_B = 5F$, $F_S = 4F$

由铅丝强度条件可知,欲剪断铅丝,必须满足

$$F_S = 4F \geq \tau_u A$$

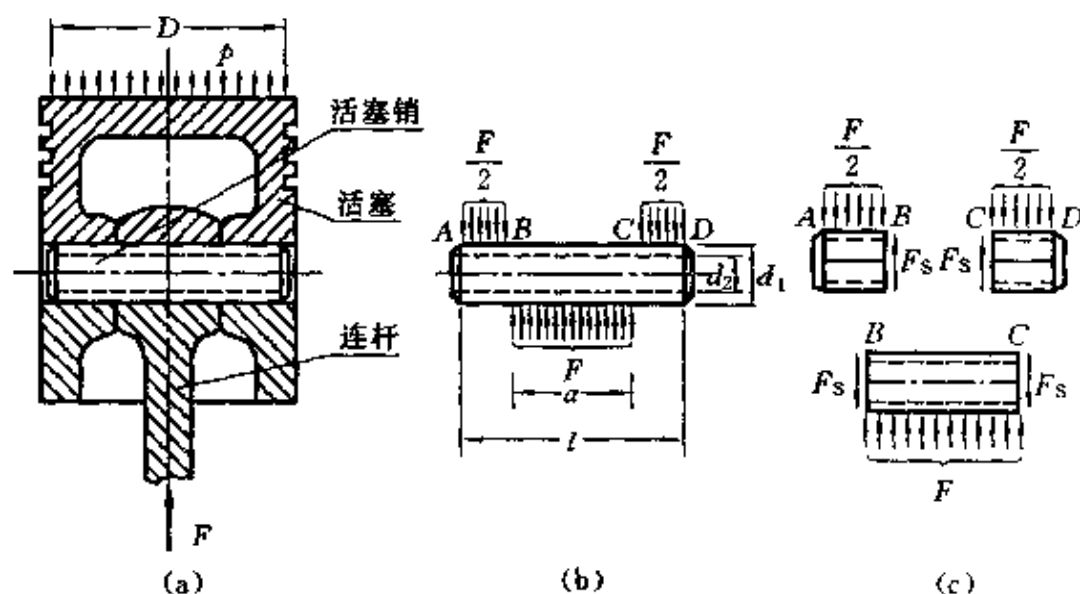
所以作用在夹剪上的力应满足

$$F \geq \frac{\tau_u A}{4} = \frac{100 \times 10^6 \times \frac{\pi}{4} \times 0.003^2}{4} \text{ N} = 177 \text{ N}$$

销钉内的切应力为

$$\tau = \frac{F_B}{A} = \frac{5 \times 177}{\frac{\pi}{4} \times 0.008^2} \text{ Pa} = 17.6 \text{ MPa}$$

2.68 如题2.68图(a)、(b)所示,柴油机活塞销材料为20Cr, $[\tau] = 70 \text{ MPa}$, $[\sigma_{bs}] = 100 \text{ MPa}$, 活塞销外径 $d_1 = 48 \text{ mm}$, 内径 $d_2 = 26 \text{ mm}$, 长度 $l = 130 \text{ mm}$, $a = 50 \text{ mm}$, 活塞直径 $D = 135 \text{ mm}$ 。气体爆发压强 $p = 7.5 \text{ MPa}$ 。试对活塞销进行剪切和挤压强度校核。



题 2.68 图

解 作用在活塞上的气体压力为

$$F = pA = \left(7.5 \times 10^6 \times \frac{\pi}{4} \times 0.135^2 \right) \text{ N} = 107 \text{ kN}$$

活塞销的横截面面积为 $A_1 = \frac{\pi}{4}(d_1^2 - d_2^2)$

活塞销上的切应力为(题 2.68 图(c))

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{F_s}{A_1} = \frac{F/2}{\pi(d_1^2 - d_2^2)/4} = \frac{2 \times 107 \times 10^3}{\pi \times (0.048^2 - 0.026^2)} \text{ Pa} \\ &= 41.8 \text{ MPa} < [\tau] = 70 \text{ MPa}\end{aligned}$$

活塞销 AB 段和 CD 段的挤压力均为 $F/2$, 挤压面积 $A_2 = d_1 \frac{l-a}{2}$, 挤压应力为

$$\begin{aligned}\sigma_{bs} &= \frac{F/2}{A_2} = \frac{F/2}{d_1(l-a)/2} = \frac{107 \times 10^3}{0.048 \times (0.13 - 0.05)} \text{ Pa} \\ &= 27.9 \text{ MPa} < [\sigma_{bs}] = 100 \text{ MPa}\end{aligned}$$

活塞销 BC 段的挤压力为 F , 挤压面积 $A_3 = d_1 a$, 该段的挤压应力为

$$\begin{aligned}\sigma_{bs} &= \frac{F}{A_3} = \frac{F}{ad_1} = \frac{107 \times 10^3}{0.05 \times 0.048} \text{ Pa} \\ &= 44.6 \text{ MPa} < [\sigma_{bs}] = 100 \text{ MPa}\end{aligned}$$

活塞销的切应力和挤压应力均小于许用应力, 满足强度要求。

第三章 扭 转

知识要点

1. 扭转的力学模型

- ① 构件特征——构件为等圆截面直杆。
- ② 受力特征——外力偶矩的作用面与杆件轴线相垂直。
- ③ 变形特征——杆件各横截面绕杆轴作相对转动。

2. 圆轴扭转时,横截面上的内力偶矩——扭矩

- ① 传动轴的转速、传递的功率与外力偶矩之间的关系为

$$M_e = 9549 \frac{P}{n} \quad (\text{N} \cdot \text{m})$$

- ② 扭矩——构件受扭时,横截面上的内力偶矩,以 T 表示。
- ③ 扭矩的正负号规定——用右手螺旋法则,扭矩矢量的方向指向截面的为负,背离截面的为正。
- ④ 扭矩图——表示圆杆各截面上的扭矩沿杆轴线方向变化规律的图线。

3. 圆轴扭转时,横截面上的应力、强度条件

(1) 横截面上的切应力

- ① 分布规律——切应力的大小与该点到圆心的距离成正比,其方向与该点的半径相垂直。

② 计算公式

$$\tau = \frac{T}{I_p} \rho$$
$$\tau_{\max} = \frac{T}{I_p} R = \frac{T}{W_t}$$

(2) 极惯性矩与抗扭截面系数

① 实心圆截面

$$I_p = \frac{\pi}{32} D^4, \quad W_t = \frac{\pi}{16} D^3$$

② 空心圆截面

$$I_p = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4) = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4), \quad W_t = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4)$$

式中, $\alpha = \frac{d}{D}$

(3) 圆轴扭转的强度条件

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_t} \leq [\tau]$$

(4) 强度计算的三类问题

① 强度校核 $\tau_{\max} = \frac{T}{W_t} \leq [\tau]$

② 截面设计 $W_t \geq \frac{T}{[\tau]},$ 由 W_t 计算 D

③ 许可载荷计算 $M_e \leq [\tau] W_t,$ 由 T 计算 M_e

4. 圆轴扭转时的变形, 刚度条件

(1) 圆轴扭转时的变形

小变形时, 圆轴二任意横截面之间仅产生相对角位移变形, 称为相对扭转角。

① 相对扭转角 $\varphi = \frac{TL}{GI_p} \quad (\text{rad})$

② 单位长度相对扭转角 $\varphi' = \frac{\varphi}{L} = \frac{T}{GI_p} \quad (\text{rad/m})$

计算相对扭转角 φ 的公式, 应在长度 L 范围内, T 、 G 和 I_p 均为常数, 若其中任一参数 T 或 G 或 I_p 不为常数, 则应分段计算 φ , 然后叠加。

(2) 圆轴扭转时的刚度条件

$$\varphi'_{\max} = \frac{T_{\max}}{GI_p} \cdot \frac{180}{\pi} \leq [\varphi] \quad (^\circ/\text{m})$$

5. 矩形截面杆扭转的主要结果

(1) 横截面上的最大切应力

横截面上最大切应力发生在矩形截面的长边中点处,即

$$\tau_{\max} = \frac{T}{\alpha h b^2}$$

式中, α 为与比值 h/b 有关的系数,可查表获得。

(2) 相对扭转角

$$\varphi = \frac{T}{G \beta h b^3}$$

式中, β 为与比值 h/b 有关的系数,可查表获得。

习题详解

3.1 作题 3.1 图所示各杆的扭矩图。

解 如题 3.1 图(a)所示,分别沿 1-1、2-2 截面将杆截开,受力图如题 3.1 图(a₁)所示。应用平衡条件可分别求得

$$T_1 = 2M_e, \quad T_2 = M_e$$

根据杆各段扭矩值,作出的扭矩图如题 3.1 图(a₂)所示。

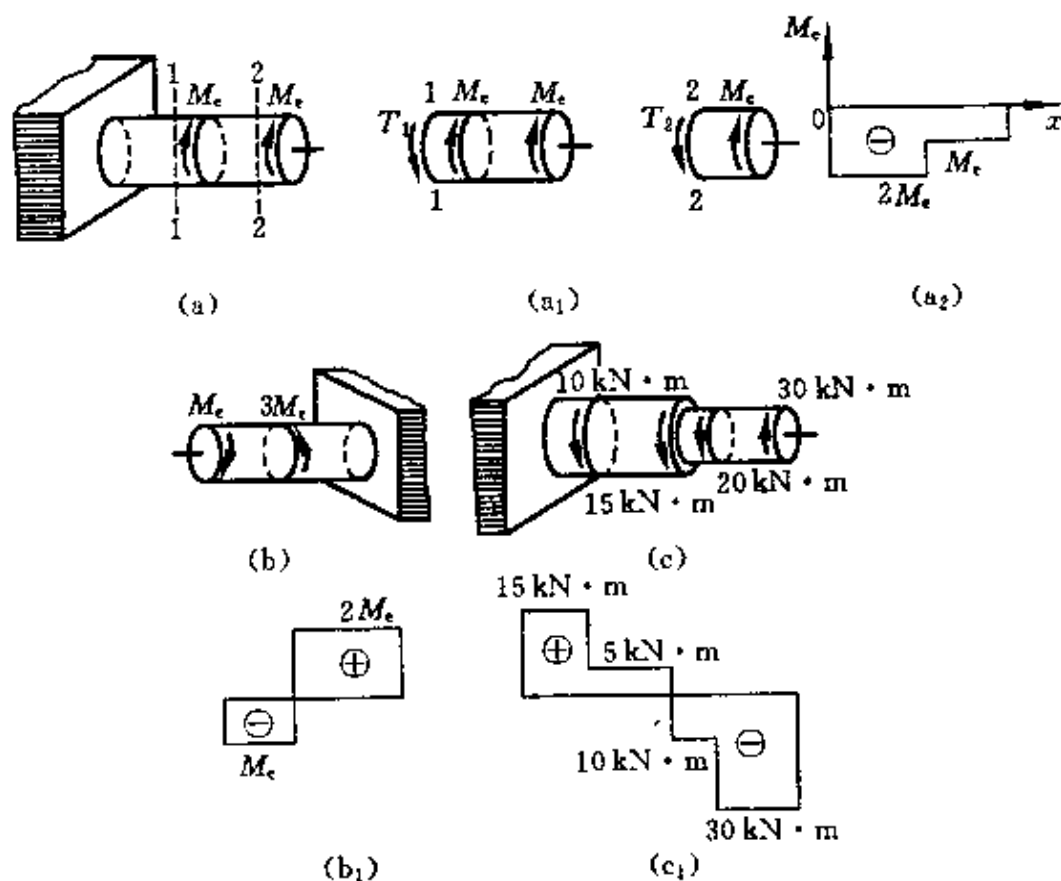
用同样的方法,可作题 3.1 图(b)、(c)所示杆的扭矩图,如题 3.1 图(b₁)、(c₁)所示。

3.2 T 为圆杆横截面上的扭矩,试画出如题 3.2 图(a)、(b)、(c)所示截面上与 T 对应的切应力分布图。

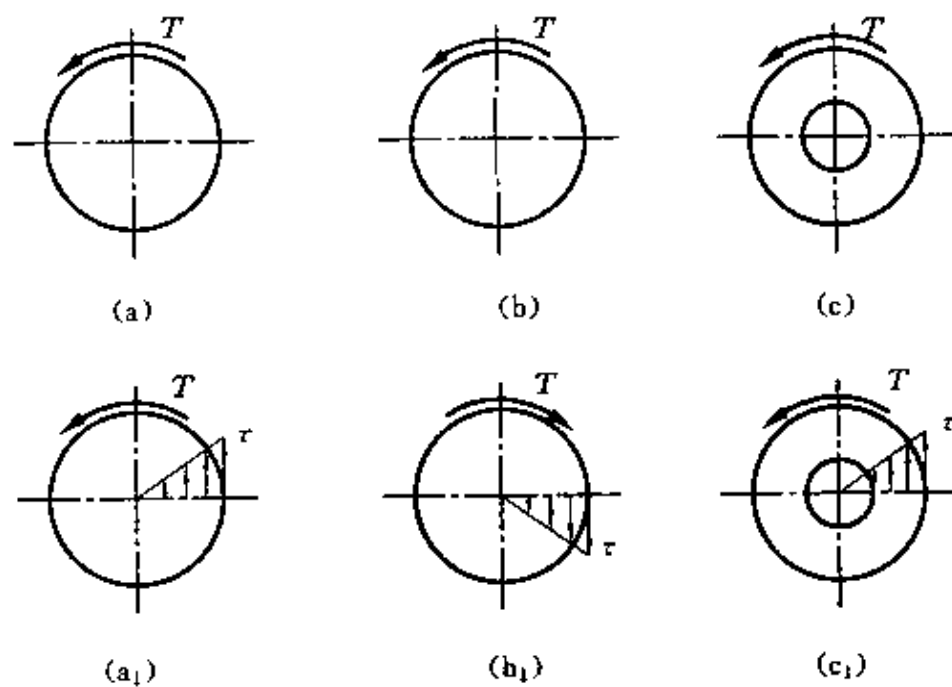
解 由圆轴扭转横截面上任意一点的切应力公式 $\tau = T\rho/I_p$ 可知,一点切应力的大小与这一点距圆心的距离成正比,故横截面任意一条半径上各点的切应力分别如题 3.2 图(a₁)、(b₁)、(c₁)所示。

3.3 在变速箱中,何以低速轴的直径比高速轴的直径大?

解 发动机的功率 P 是一定的,与之配套的变速箱所传递的功



题 3.1 图



题 3.2 图

率也是不变的。根据外力偶矩 M_e 与功率 P 及转速 n 的关系式,有

$$M_e = 9549 \frac{P}{n}$$

因低转速时 n 小,所以比高转速 n 大时传递的扭矩大,当材料相同时,低速轴承受的扭矩比高速轴的大,因此,低速轴的直径应比高速轴的直径大。

3.4 内、外直径分别为 d 和 D 的空心轴,其横截面的极惯性矩为 $I_p = \frac{1}{32}\pi D^4 - \frac{1}{32}\pi d^4$, 抗扭截面系数为 $W_t = \frac{1}{16}\pi D^3 - \frac{1}{16}\pi d^3$ 。以上算式是否正确? 何故?

解 空心轴横截面的极惯性矩公式

$$I_p = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)$$

是正确的,但抗扭截面系数公式

$$W_t = \frac{1}{16}\pi D^3 - \frac{1}{16}\pi d^3$$

是错误的。因为根据抗扭截面系数的定义可知

$$W_t = \frac{I_p}{D/2} = \frac{\pi D^3}{16}(1 - \alpha^4)$$

式中, $\alpha = d/D$

3.5 直径 $D = 50 \text{ mm}$ 的圆轴,受到扭矩 $T = 2.15 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 的作用。试求在距离轴心 10 mm 处的切应力,并求轴横截面上的最大切应力。

解 由圆轴扭转横截面上任意一点切应力公式可知,距轴心 10 mm 处的切应力为

$$\tau_\rho = \frac{T\rho}{I_p} = \frac{2.15 \times 10^3 \times 0.01 \times 32}{\pi \times 0.05^4} \text{ Pa} = 35 \text{ MPa}$$

截面上的最大切应力为

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_t} = \frac{2.15 \times 10^3 \times 16}{\pi \times 0.05^3} \text{ Pa} = 87.6 \text{ MPa}$$

3.6 发电量为 15000 kW 的水轮机主轴如题 3.6 图所示。主

轴为空心轴, $D=550\text{ mm}$, $d=300\text{ mm}$, 正常转速 $n=250\text{ r/min}$ 。材料的许用切应力 $[\tau]=50\text{ MPa}$ 。试校核水轮机主轴的强度。

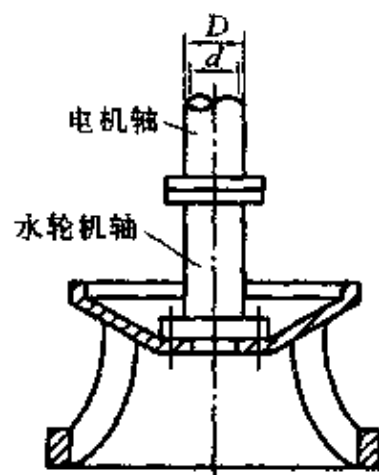
解 水轮机主轴传递的扭矩为

$$T = 9549 \times \frac{15000}{250} \text{ N} \cdot \text{m} = 573000 \text{ N} \cdot \text{m}$$

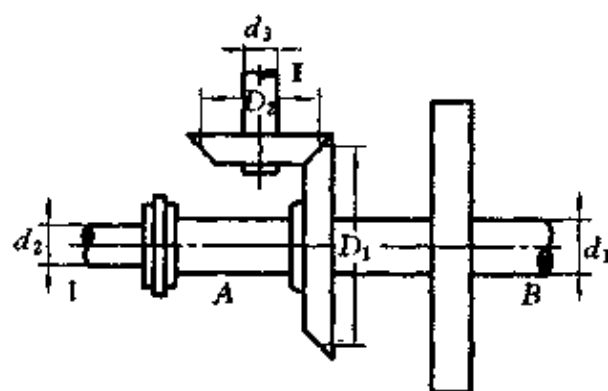
横截面上的最大切应力为

$$\tau_{\max} = \frac{T \frac{D}{2}}{I_p} = \frac{573000 \times \frac{0.55}{2}}{\frac{\pi}{32}(0.55^4 - 0.3^4)} \text{ Pa} = 19.2 \text{ MPa} < [\tau] = 50 \text{ MPa}$$

主轴的最大切应力小于许用切应力, 满足强度要求。



题 3.6 图



题 3.7 图

3.7 如题3.7图所示, AB 轴的转速 $n=120\text{ r/min}$, 从 B 轮输入功率 $P=44.13\text{ kW}$, 功率的一半通过锥形齿轮传给垂直轴 I , 另一半由水平轴 I 输出。已知 $D_1=600\text{ mm}$, $D_2=240\text{ mm}$, $d_1=100\text{ mm}$, $d_2=80\text{ mm}$, $d_3=60\text{ mm}$, $[\tau]=20\text{ MPa}$ 。试对各轴进行强度校核。

解 AB 轴所传递的扭矩为

$$T_{AB} = 9549 \times \frac{P}{n} = \left(9549 \times \frac{44.13}{120} \right) \text{ N} \cdot \text{m} = 3512 \text{ N} \cdot \text{m}$$

AB 轴横截面上最大切应力为

$$\tau_{AB\max} = \frac{T_{AB}}{W_t} = \frac{3512 \times 16}{\pi \times 0.1^3} \text{ Pa} = 17.9 \text{ MPa} < [\tau] = 20 \text{ MPa}$$

AB 轴的最大工作切应力小于许用切应力, 满足强度要求。

I 轴横截面上最大切应力为

$$\tau_{1\max} = \frac{T_1}{W_t} = \frac{T_{AB}/2}{W_t} = \frac{16 \times 1756}{\pi \times 0.08^3} \text{ Pa} = 17.5 \text{ MPa} < [\tau] \\ = 20 \text{ MPa}$$

I 轴的最大工作切应力小于许用切应力, 满足强度要求。

II 轴的转速可根据齿轮传动比与直径的关系求得, 即

$$\frac{n_B}{n_1} = \frac{D_2}{D_1} = \frac{240}{600} = \frac{120}{n_C} \\ n_1 = 300 \text{ r/min}$$

II 轴所传递的扭矩为

$$T_1 = 9549 \times \frac{P/2}{n_1} = \left(\frac{9549 \times 22.1}{300} \right) \text{ N} \cdot \text{m} = 703 \text{ N} \cdot \text{m}$$

I 轴横截面上最大切应力为

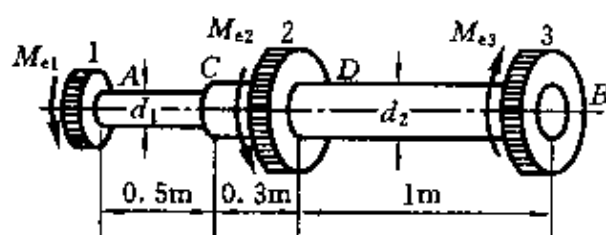
$$\tau_1 = \frac{T_1}{W_t} = \frac{16 \times 703}{\pi \times 0.06^3} \text{ Pa} = 16.6 \text{ MPa} < [\tau] = 20 \text{ MPa}$$

II 轴工作的最大切应力小于许用切应力, 满足强度要求。

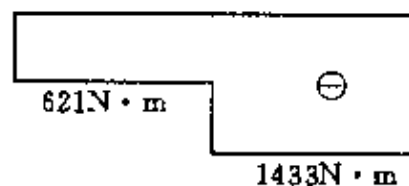
综上所述可知, 各轴均满足强度要求。

3.8 阶梯形圆轴直径分别为 $d_1 = 40 \text{ mm}$, $d_2 = 70 \text{ mm}$, 轴上装有三个皮带轮, 如题 3.8 图 (a) 所示。已知由轮 3 输入的功率为 $P_3 = 30 \text{ kW}$, 轮 1 输出的功率为 $P_1 = 13 \text{ kW}$, 轴作匀速转动, 转速 $n = 200 \text{ r/min}$, 材料的剪切许用应力 $[\tau] = 60 \text{ MPa}$, $G = 80 \text{ GPa}$, 许用扭转角 $[\varphi'] = 2^\circ/\text{m}$ 。试校核轴的强度和刚度。

解 首先作阶梯轴的扭矩图, 如题 3.8 图 (b) 所示。



(a)



(b)

题 3.8 图

(1) 强度校核

$$M_{e1} = 9549 \times \frac{P_1}{n} = \left(9549 \times \frac{13}{200} \right) \text{ N} \cdot \text{m} = 621 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_{e2} = 9549 \times \frac{P_2}{n} = \left(9549 \times \frac{30-13}{200} \right) \text{ N} \cdot \text{m} = 812 \text{ N} \cdot \text{m}$$

根据平衡条件,有

$$M_{e3} = M_{e1} + M_{e2} = (621 + 812) \text{ N} \cdot \text{m} = 1433 \text{ N} \cdot \text{m}$$

AC 段最大切应力为

$$\tau_1 = \frac{T_1}{W_{t1}} = \frac{M_{e1}}{W_{t1}} = \frac{621}{\frac{\pi \times 0.04^3}{16}} \text{ Pa} = 49.4 \text{ MPa} < [\tau] = 60 \text{ MPa}$$

AC 段的最大工作切应力小于许用切应力,满足强度要求。CD 段的扭矩与 AC 段的相同,但其直径比 AC 段的大,所以 CD 段也满足强度要求。

DB 段上最大切应力为

$$\tau_2 = \frac{T_2}{W_{t2}} = \frac{M_{e3}}{W_{t2}} = \frac{1433 \times 16}{\pi \times 0.07^3} \text{ Pa} = 21.3 \text{ MPa} < [\tau] = 60 \text{ MPa}$$

故 DB 段的最大工作切应力小于许用切应力,满足强度要求。

(2) 刚度校核

AC 段的最大单位长度扭转角为

$$\begin{aligned} \varphi'_1 &= \frac{T}{GI_p} = \left(\frac{621}{80 \times 10^9 \times \frac{\pi \times 0.04^4}{32}} \times \frac{180}{\pi} \right) ^\circ/\text{m} \\ &= 1.77^\circ/\text{m} < [\varphi'] = 2^\circ/\text{m} \end{aligned}$$

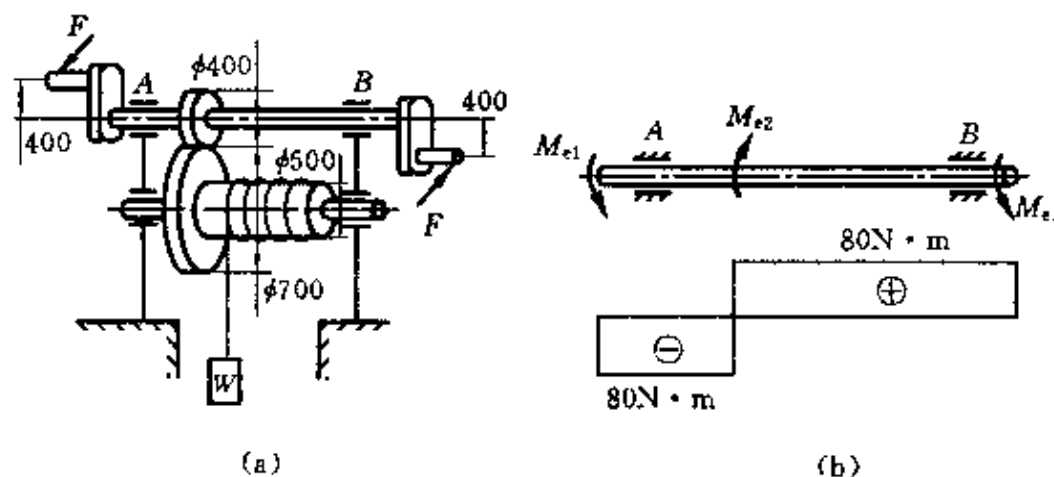
DB 段的单位长度扭转角为

$$\begin{aligned} \varphi'_2 &= \frac{T}{GI_p} = \frac{M_{e3}}{GI_p} = \left(\frac{1433}{80 \times 10^9 \times \frac{\pi}{32} \times 0.07^4} \times \frac{180}{\pi} \right) ^\circ/\text{m} \\ &= 0.435^\circ/\text{m} < [\varphi'] = 2^\circ/\text{m} \end{aligned}$$

综上所述可知,各段均满足强度、刚度要求。

3.9 题 3.9 图(a)所示绞车同时由两人操作,若每人加在手

柄上的力都是 $F=200\text{ N}$, 已知轴的许用切应力 $[\tau]=40\text{ MPa}$, 试按强度条件初步估算 AB 轴的直径, 并确定最大起重量。



题 3.9 图

解 AB 轴承受的转矩为(题 3.9 图(b))

$$M_{e1} = 0.4F = (0.4 \times 200)\text{ N} \cdot \text{m} = 80\text{ N} \cdot \text{m}$$

由平衡条件得

$$M_{e2} = 2M_{e1} = (2 \times 80)\text{ N} \cdot \text{m} = 160\text{ N} \cdot \text{m}$$

AB 轴的扭矩图如题 3.9 图(b)所示, 由强度条件

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_t} = \frac{M_{e1}}{W_t} = \frac{80}{\frac{\pi}{16}d^3} \leq [\tau]$$

可确定 AB 轴的直径为

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \times 80}{\pi \times 40 \times 10^6}}\text{ m} = 21.7\text{ mm}$$

取轴径为 $d=22\text{ mm}$ 。

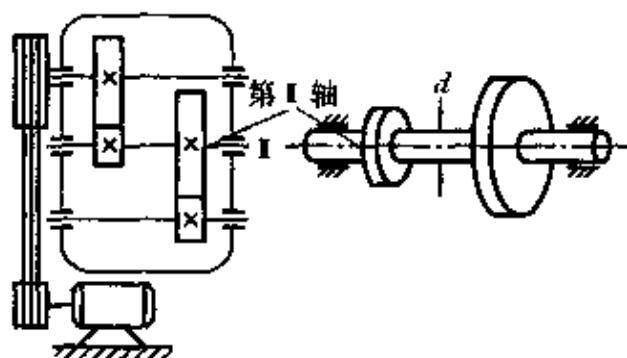
设传动时齿轮间的切向力为 F , 则由平衡条件有

$$0.2F = M_{e2}, \quad F = \frac{M_{e2}}{0.2} = \frac{160}{0.2}\text{ N} = 800\text{ N}$$

最大起重量可根据平衡条件 $0.25W_{\max}=0.35F$ 得

$$W_{\max} = \frac{0.35F}{0.25} = \frac{0.35 \times 800}{0.25}\text{ N} = 1120\text{ N}$$

3.10 机车变速箱第 I 轴如题 3.10 图所示,轴所传递的功率为 $P=5.5 \text{ kW}$, 转速 $n=200 \text{ r/min}$, 材料为 45 钢, $[\tau]=40 \text{ MPa}$ 。试按强度条件初步设计轴的直径。



题 3.10 图

解 I 轴所传递的扭矩为

$$T = 9549 \times \frac{P}{n} = \left(9549 \times \frac{5.5}{200} \right) \text{ N} \cdot \text{m} = 263 \text{ N} \cdot \text{m}$$

由圆轴扭转的强度条件

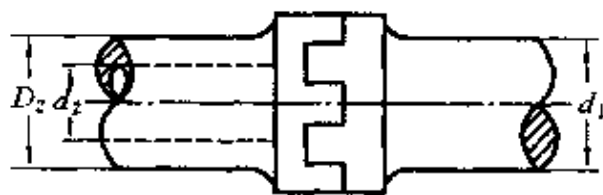
$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_t} = \frac{16T}{\pi d^3} \leq [\tau]$$

可得轴直径为

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16T}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \times 263}{40 \times 10^6 \times \pi}} \text{ m} = 32.2 \text{ mm}$$

取轴径为 $d=33 \text{ mm}$ 。

3.11 如题 3.11 图所示,实心轴和空心轴通过牙嵌式离合器连接在一起。已知轴的转速 $n=100 \text{ r/min}$, 传递的功率 $P=7.5 \text{ kW}$, 材料的许用切应力 $[\tau]=40 \text{ MPa}$ 。试选择实心轴的直径 d_1 和内外径比



题 3.11 图

值为 0.5 的空心轴的外径 D_2 。

解 轴所传递的扭矩为

$$T = 9549 \frac{P}{n} = \left(9549 \times \frac{7.5}{100} \right) \text{ N} \cdot \text{m} = 716 \text{ N} \cdot \text{m}$$

由实心圆轴的强度条件

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_t} = \frac{16T}{\pi d_1^3} \leq [\tau]$$

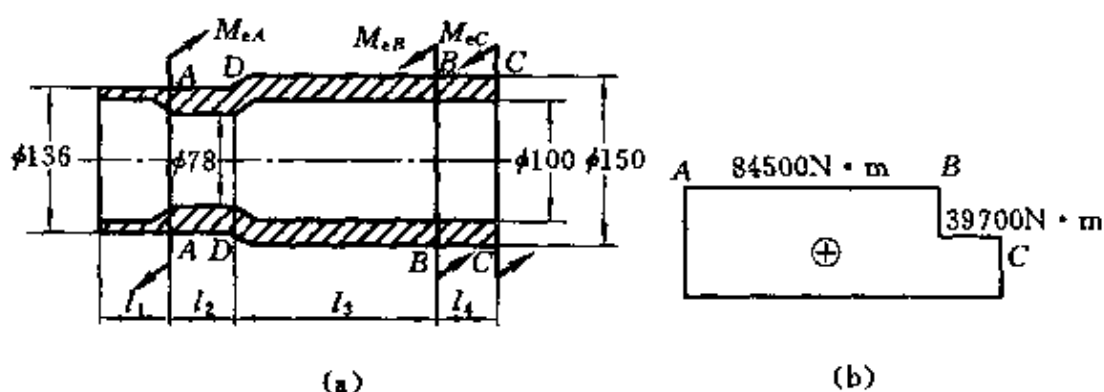
可得实心圆轴的直径为

$$d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{16T}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \times 716}{\pi \times 40 \times 10^6}} \text{ m} = 45 \text{ mm}$$

空心圆轴的外径为

$$D_2 \geq \sqrt[3]{\frac{16T}{\pi[\tau](1-\alpha^4)}} = \sqrt[3]{\frac{16 \times 716}{\pi \times 40 \times 10^6 \times (1-0.5^4)}} \text{ m} \\ = 46 \text{ mm}$$

3.12 发动机涡轮轴的简图如题 3.12 图(a)所示。在截面 B, I 级涡轮传递的功率为 21771 kW; 在截面 C, II 级涡轮传递的功率为 19344 kW。轴的转速 $n=4650 \text{ r/min}$ 。试画出轴的扭矩图, 并求轴的最大切应力。



题 3.12 图

解 外力偶矩分别为

$$M_{eB} = 9549 \times \frac{P_1}{n} = \left(9549 \times \frac{21771}{4650} \right) \text{ N} \cdot \text{m} = 44700 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_{eC} = \left(9549 \times \frac{19344}{4650} \right) \text{ N} \cdot \text{m} = 39700 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_{eA} = M_{eB} + M_{eC} = (44700 + 39700) \text{ N} \cdot \text{m} = 84400 \text{ N} \cdot \text{m}$$

故涡轮轴的扭矩图如题 3.12 图(b)所示。

AD 段横截面上的最大切应力为

$$\begin{aligned} \tau_A = \frac{T}{W_t} = \frac{M_{eA}}{W_{t1}} &= \frac{16 \times 84400}{\pi \times 0.136^3 \times [1 - (78/136)^4]} \text{ Pa} \\ &= 192 \text{ MPa} \end{aligned}$$

BC 段横截面上的最大切应力为

$$\begin{aligned} \tau_C = \frac{T}{W_t} = \frac{M_{eC}}{W_{t2}} &= \frac{16 \times 39700}{\pi \times 0.15^3 \times [1 - (100/150)^4]} \text{ Pa} \\ &= 71.4 \text{ MPa} \end{aligned}$$

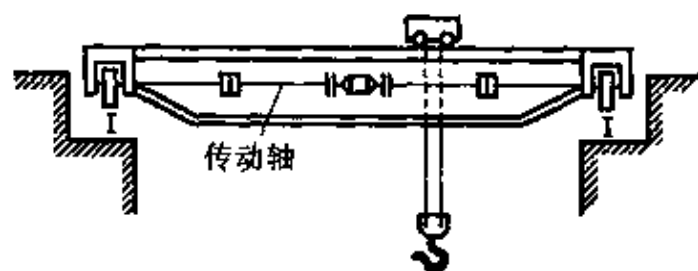
DB 段横截面上的最大切应力为

$$\tau = \frac{T}{W_t} = \frac{M_{eA}}{W_{t2}} = \frac{16 \times 84400}{\pi \times 0.15^3 \times [1 - (2/3)^4]} \text{ Pa} = 159 \text{ MPa}$$

综上所述可知,最大切应力在 AD 段横截面上

$$\tau_{\max} = 192 \text{ MPa}$$

3.13 桥式起重机如题 3.13 图所示。若传动轴传递的力偶矩 $M_e = 1.08 \text{ kN} \cdot \text{m}$, 材料的许用应力 $[\tau] = 40 \text{ MPa}$, $G = 80 \text{ GPa}$, 同时规定 $[\varphi'] = 0.5^\circ/\text{m}$ 。试设计轴的直径。



题 3.13 图

解 由圆轴扭转的强度条件

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_t} = \frac{16M_e}{\pi d^3} \leq [\tau]$$

可确定轴的直径为

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16M_e}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \times 1.08 \times 10^3}{\pi \times 40 \times 10^6}} \text{ m} = 51.6 \text{ mm}$$

由圆轴扭转的刚度条件

$$\varphi' = \frac{T}{GI_p} \times \frac{180}{\pi} = \frac{32M_e}{G\pi d^4} \times \frac{180}{\pi} \leq [\varphi']$$

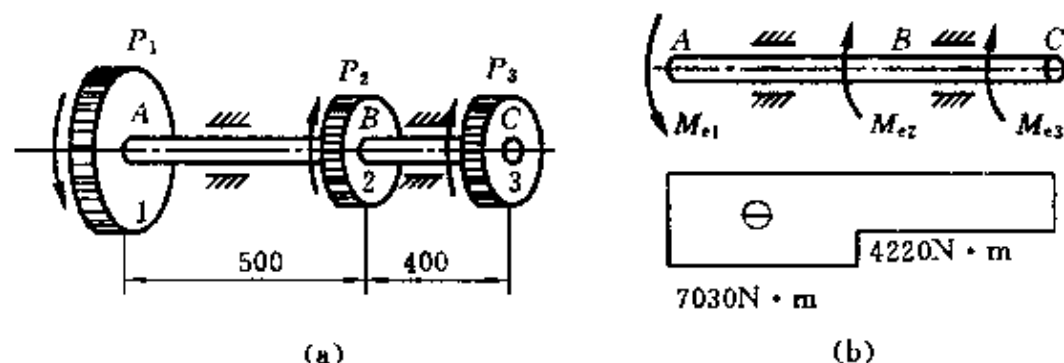
可确定轴的直径为

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32M_e}{G\pi[\varphi']} \times \frac{180}{\pi}} = \sqrt[4]{\frac{32 \times 1.08 \times 10^3 \times 180}{80 \times 10^9 \times 0.5 \times \pi^2}} \text{ m} = 63 \text{ mm}$$

比较两个直径值,取轴的直径

$$d = 63 \text{ mm}$$

3.14 如题3.14图(a)所示,传动轴的转速 $n=500 \text{ r/min}$,主动轮1输入功率 $P_1=368 \text{ kW}$,从动轮2、3分别输出功率 $P_2=147 \text{ kW}$, $P_3=221 \text{ kW}$ 。已知 $[\tau]=70 \text{ MPa}$, $[\varphi']=1^\circ/\text{m}$, $G=80 \text{ GPa}$ 。(1) 试确定AB段的直径 d_1 和BC段的直径 d_2 。(2) 若AB和BC两段选用同一直径,试确定直径 d 。(3) 主动轮和从动轮应如何安排才比较合理?



题3.14图

解 首先计算外力偶矩

$$M_{e3} = 9549 \frac{P_3}{n} = \left(9549 \times \frac{221}{500} \right) \text{ N} \cdot \text{m} = 4220 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_{e2} = 9549 \frac{P_2}{n} = \left(9549 \times \frac{147}{500} \right) \text{ N} \cdot \text{m} = 2810 \text{ N} \cdot \text{m}$$

然后根据平衡条件,可得

$$M_{r1} = M_{c2} + M_{c3} = (2810 + 4220) \text{ N} \cdot \text{m} = 7030 \text{ N} \cdot \text{m}$$

应用以上外力偶矩数值,作轴的扭矩图如题 3.14 图(b)所示。

(1) 确定 AB 段的直径 d_1 和 BC 段的直径 d_2

根据强度条件
$$\tau_{AB} = \frac{T_{AB}}{W_t} = \frac{16T_{AB}}{\pi d_1^3} \leq [\tau]$$

可确定轴 AB 段的直径为

$$d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{16T_{AB}}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \times 7030}{70 \times 10^6 \times \pi}} \text{ m} = 80 \text{ mm}$$

由刚度条件
$$\phi_{AB} = \frac{T_{AB}}{GI_p} \times \frac{180}{\pi} = \frac{32T_{AB}}{G\pi d_1^4} \times \frac{180}{\pi} \leq [\phi']$$

可确定轴 AB 段的直径为

$$d_1 \geq \sqrt[4]{\frac{180T_{AB} \times 32}{G\pi^2[\phi']}} = \sqrt[4]{\frac{180 \times 7030 \times 32}{80 \times 10^9 \times \pi^2 \times 1}} \text{ m} = 84.6 \text{ mm}$$

取
$$d_1 = 85 \text{ mm}$$

根据强度条件确定轴 BC 段的直径为

$$d_2 \geq \sqrt[3]{\frac{16T_{BC}}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \times 4220}{70 \times 10^6 \times \pi}} \text{ m} = 67.5 \text{ mm}$$

根据刚度条件确定 BC 段的直径为

$$d_2 \geq \sqrt[4]{\frac{32T_{BC} \times 180}{G\pi^2[\phi']}} = \sqrt[4]{\frac{32 \times 4220 \times 180}{80 \times 10^9 \times \pi^2 \times 1}} \text{ m} = 74.5 \text{ mm}$$

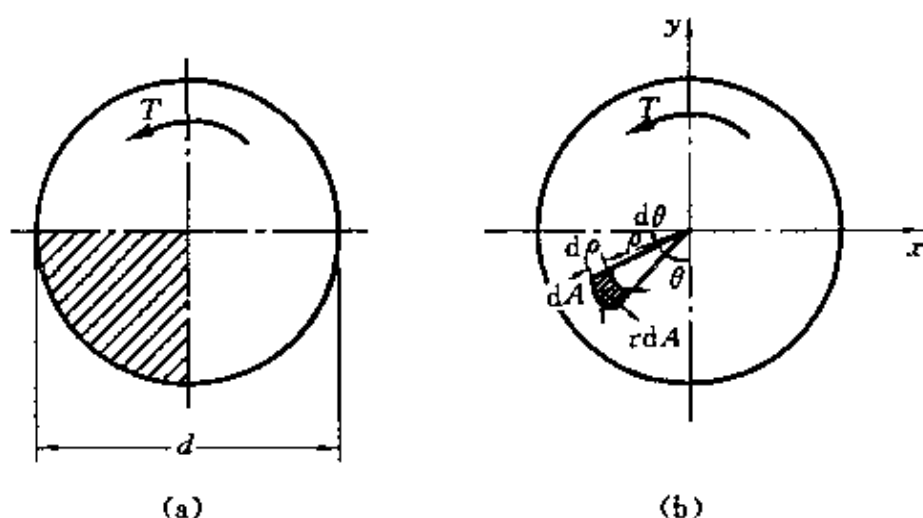
取
$$d_2 = 75 \text{ mm}$$

(2) 若 AB 和 BC 段选用同一直径,则轴的直径取 $d = 85 \text{ mm}$ 。

(3) 主动轮放在两从动轮之间,可使最大扭矩取最小值,所以这种安排较合理。

3.15 如题 3.15 图(a)所示,设圆轴横截面上的扭矩为 T ,试求四分之一横截面上内力系的合力的大小、方向及作用点。

解 在四分之一截面上取微面积 $dA = \rho d\theta d\rho$,如题 3.15 图(b)所示,作用其上的剪力为 τdA ,其沿 x 轴与 y 轴的分力为



题 3.15 图

$$dF_{sx} = \tau dA \cos \theta, \quad dF_{sy} = \tau dA \sin \theta$$

四分之一横截面上的剪力沿 x 轴与 y 轴的分力为

$$F_{sx} = \int dF_{sx} = \int_A \tau \cos \theta dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R \frac{T \rho^2}{I_p} \cos \theta d\theta d\rho = \frac{2T}{3\pi R} = \frac{4T}{3\pi d}$$

$$F_{sy} = \int dF_{sy} = \int_A \tau \sin \theta dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R \frac{T \rho^2}{I_p} \sin \theta d\theta d\rho = \frac{2T}{3\pi R} = \frac{4T}{3\pi d}$$

四分之一横截面上的剪力合力为

$$F_s = \sqrt{F_{sx}^2 + F_{sy}^2} = \frac{4\sqrt{2}T}{3\pi d}$$

各个四分之一横截面上,剪力合力的大小和作用点位置都相同,它们对形心力矩之和应等于扭矩 T , 所以有

$$T = 4F_s \rho$$

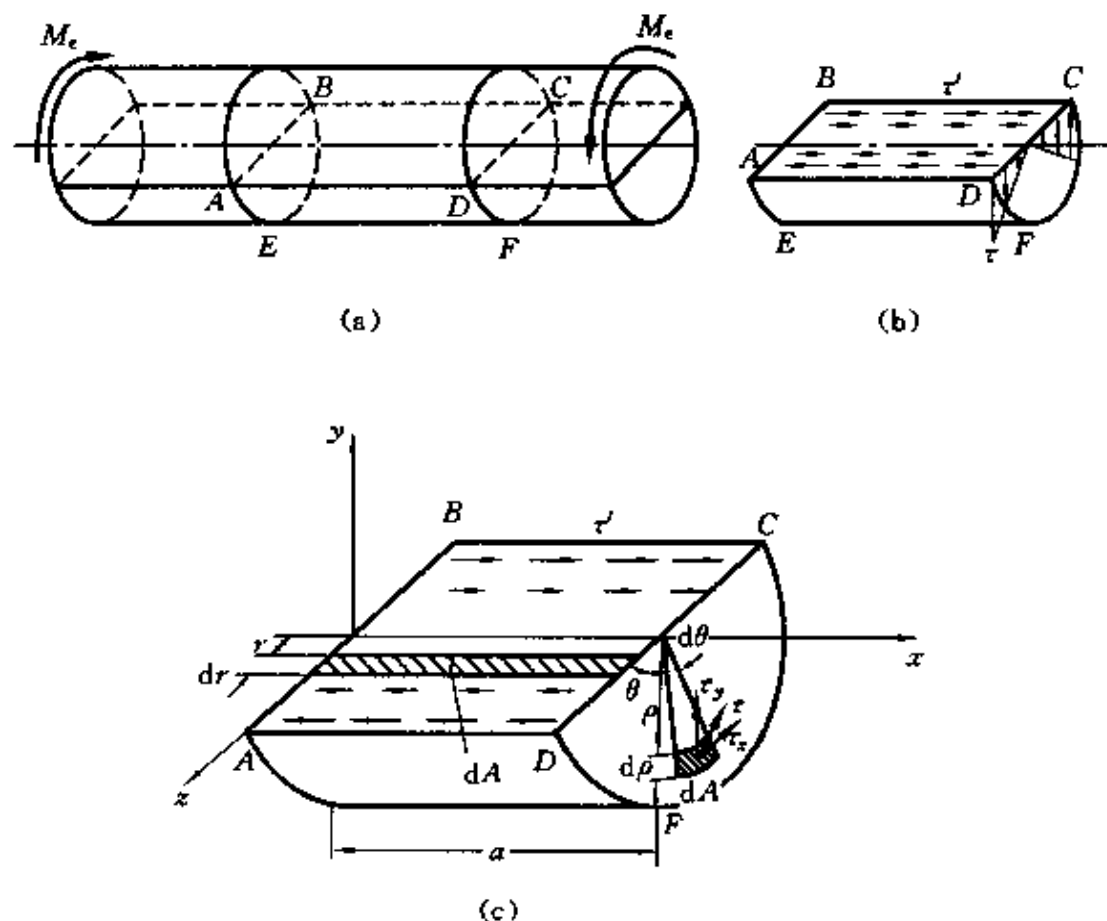
剪力合力作用点位置 $\rho = \frac{T}{4F_s} = \frac{3\pi d}{16\sqrt{2}}$

四分之一横截面上剪力合力的方向角为

$$\theta = \arctan \frac{F_{sx}}{F_{sy}} = 45^\circ$$

3.16 用横截面 ABE 、 CDF 和包含轴线的纵向面 $ABCD$ 从受扭圆轴(题 3.16 图(a))中截出一部分,如题 3.16 图(b)所示。根

据切应力互等定理,纵向截面上的切应力 τ' 的方向如题3.16图(b)所示。这一纵向截面上的内力系最终将组成一个力偶矩,试问它与截出部分上的什么内力平衡?



题 3.16 图

解 被截出部分的纵向截面上由内力系组成的力偶矩与由其两端横截面上剪力合力沿 z 轴方向的分量组成的力偶矩相平衡,这一力偶矩的作用面与纵向截面 $ABCD$ 平行。证明如下:

在题 3.16 图(c)中,纵向截面 $ABCD$ 上微面积 $dA = a dr$,其上的剪力 $\tau' dA$ 对 y 轴之矩为

$$dM'_y = r\tau' dA = r\tau dA = r \frac{M_e r}{I_p} a dr$$

$ABCD$ 截面上的内力对 y 轴总力矩为

$$M'_y = 2 \int_0^R \frac{M_e a}{I_p} r^2 dr = \frac{4M_e a}{3\pi R}$$

横截面 CDF 上切应力的两个分量为 $\tau_y = \tau \cos \theta$, $\tau_z = \tau \sin \theta$, 只有应力分量 τ_z 对 y 轴产生力矩, 作用于微面积 $dA = \rho d\theta d\rho$ 上的剪力为 $\tau_z \rho d\theta d\rho$, 它对 y 轴之矩为

$$dM_y = a \tau_z \rho d\theta d\rho = a \tau \sin \theta \rho d\theta d\rho$$

CDF 截面上内力对 y 轴总力矩为

$$M_y = \int_0^R a \frac{M_e \rho^2}{I_p} d\rho \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{4M_e a}{3\pi R}$$

它与 M'_y 的大小相等, 方向相反。两端横截面上切应力的合力在 z 轴方向上的分量, 数值相等, 方向相反, 组成的力偶矩的大小和方向与 M_y 相同。

3.17 由厚度 $\delta = 8 \text{ mm}$ 的钢板卷制成的圆筒, 平均直径为 $D = 200 \text{ mm}$ 。接缝处用铆钉铆接 (题 3.17 图)。若铆钉直径 $d = 20 \text{ mm}$, 许用切应力 $[\tau] = 60 \text{ MPa}$, 许用挤压应力 $[\sigma_{bs}] = 160 \text{ MPa}$, 筒的两端受扭转力偶矩 $M_e = 30 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 作用, 试求铆钉的间距 s 。



题 3.17 图

解 因为是薄壁圆筒, 其横截面上的切应力可看成均匀分布, 故横截面上的切应力为

$$\tau = \frac{T}{2\pi r^2 \delta} = \frac{2M_e}{\pi D^2 \delta}$$

根据切应力互等定理, 铆钉所在纵截面上的切应力也为 τ , 在纵截面上剪力为

$$F_s = \tau l \delta = \frac{2M_e l}{\pi D^2}$$

式中, l 为圆筒长度。该剪力 F_s 由铆钉承担, 设铆钉数为 n , 间距为 s , 则有

$$n = \frac{l}{s}$$

每个铆钉所承受的剪力为 $F_{sm} = \frac{F_s}{n} = \frac{2M_e s}{\pi D^2}$

由铆钉的强度条件有

$$\tau_{\text{铆}} = \frac{F_{S\text{铆}}}{\frac{\pi}{4}d^2} = \frac{4F_{S\text{铆}}}{\pi d^2} = \frac{8M_e s}{\pi^2 d^2 D^2} \leq [\tau]$$

解上式得

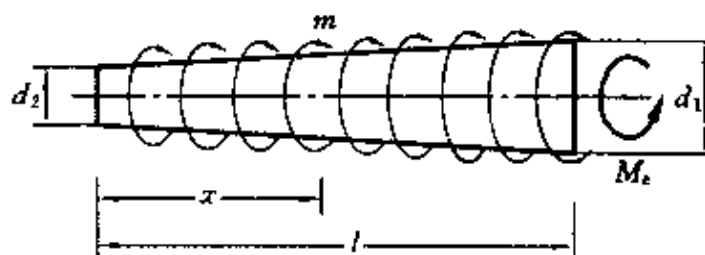
$$\begin{aligned} s &\leq \frac{[\tau] \pi^2 d^2 D^2}{8M_e} \\ &= \frac{60 \times 10^6 \times \pi^2 \times (20 \times 10^{-3})^2 \times (200 \times 10^{-3})^2}{8 \times 30 \times 10^3} \text{ m} \\ &= 39.5 \text{ mm} \end{aligned}$$

当取 $s=39.5 \text{ mm}$ 时, 铆钉的挤压应力为

$$\begin{aligned} \sigma_{bs} &= \frac{F_{S\text{铆}}}{d\delta} = \frac{2M_e s}{\pi D^2 d \delta} \\ &= \frac{2 \times 30 \times 10^3 \times 39.5 \times 10^{-3}}{\pi \times (200 \times 10^{-3})^2 \times 20 \times 10^{-3} \times 8 \times 10^{-3}} \text{ Pa} \\ &= 118 \text{ MPa} \end{aligned}$$

与许用挤压应力比较可知, 满足挤压强度条件。

3.18 题 3.18 图中的杆件为圆锥体的一部分, 设其锥度不大, 两端的直径分别为 d_1 和 d_2 , 长度为 l 。沿轴线作用着均匀分布的扭转力偶矩, 它在每单位长度内的集度为 m 。试计算两端面的相对扭转角。



题 3.18 图

解 设距左端为 x 的任意横截面的直径为 d , 按几何关系求得

$$d = d_2 \left(1 + \frac{d_1 - d_2}{d_2} \times \frac{x}{l} \right)$$

这一横截面的极惯性矩为

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi d_2^4}{32} \left(1 + \frac{d_1 - d_2}{d_2} \times \frac{x}{l} \right)^4$$

同一横截面上的扭矩为 $T = mx$

由单位长度扭转角公式可知

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{T}{GI_p} = \frac{32mx}{G\pi d_2^4 \left(1 + \frac{d_1 - d_2}{d_2} \times \frac{x}{l} \right)^4}$$

两边乘 dx , 并在 0 到 l 的区间内积分, 得

$$\varphi = \frac{32m}{G\pi d_2^4} \int_0^l \frac{x dx}{\left(1 + \frac{d_1 - d_2}{d_2} \times \frac{x}{l} \right)^4} = \frac{16ml^2}{3G\pi d_1^2 d_2^2} \left(1 + 2 \frac{d_2}{d_1} \right)$$

在计算上式的积分时, 应首先作积分变量代换, 然后积分。

3.19 题 3.19 图所示圆截面杆 AB 的左端固定, 承受一集度为 m 的均布力偶矩作用, 试导出计算截面 B 的扭转角的公式。

解 作用在距右端为 x 的任意横截面的扭矩为

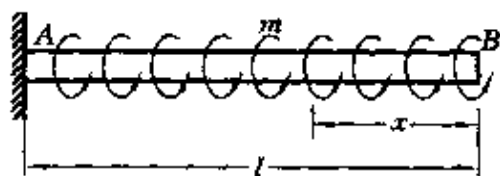
$$T(x) = mx$$

设微段 dx 的扭转角为 $d\varphi$, 则

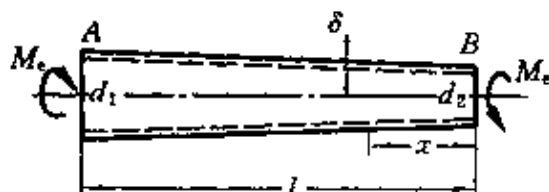
$$d\varphi = \frac{T(x)}{GI_p} dx = \frac{mx}{GI_p} dx$$

B 端面的扭转角为

$$\varphi_B = \int_0^l \frac{T dx}{GI_p} = \int_0^l \frac{mx dx}{GI_p} = \frac{ml^2}{2GI_p}$$



题 3.19 图



题 3.20 图

3.20 题 3.20 图所示薄壁圆锥形管的锥度很小, 厚度 δ 不变, 长为 l 。左右两端平均直径分别为 d_1 和 d_2 。试导出计算两端相对扭

转角的公式。

解 设距 B 端 x 处截面的平均半径和平均直径分别为 r 和 d , 根据极惯性矩的定义 $I_p = \int \rho^2 dA$, 可求得该截面的极惯性矩为

$$I_p(x) = 2\pi r^3 \delta = \frac{\pi}{4} \delta d^3$$

该截面的平均直径由几何关系可确定

$$d = d_2 + (d_1 - d_2) \frac{x}{l}$$

$$\text{所以 } I_p(x) = \frac{\pi \delta}{4} \left[d_2 + (d_1 - d_2) \frac{x}{l} \right]^3 = \frac{\pi \delta}{4l^3} [d_2 l + (d_1 - d_2)x]^3$$

微段 dx 的扭转角为

$$d\varphi = \frac{M_x dx}{GI_p(x)} = \frac{4l^3 M_c dx}{G\pi \delta [d_2 l + (d_1 - d_2)x]^3}$$

锥管两端面的相对扭转角为

$$\begin{aligned} \varphi &= \int_0^l d\varphi = \int_0^l \frac{4l^3 M_c dx}{G\pi \delta [d_2 l + (d_1 - d_2)x]^3} \\ &= \frac{4l^3 M_c}{G\pi \delta (d_1 - d_2)(-2)} \left[\frac{1}{[d_2 l + (d_1 - d_2)x]^2} \right]_0^l \\ &= \frac{2l M_c}{G\pi \delta (d_1 - d_2)} \left(\frac{1}{d_2^2} - \frac{1}{d_1^2} \right) = \frac{2l M_c (d_1 + d_2)}{G\pi \delta d_1^2 d_2^2} \end{aligned}$$

3.21 试由单位体积的剪切应变能 $v_e = \frac{\tau^2}{2G}$, 导出圆轴扭转时

应变能的计算公式 $V_e = \int_l \frac{T^2 dx}{2GI_p} = \frac{1}{2} \int_0^\varphi T d\varphi$ 。

解 距圆心为 ρ 的任意一点的扭转剪应力为

$$\tau_\rho = \frac{T\rho}{I_p}$$

代入单位体积的剪切应变能公式

$$v_e = \frac{\tau_\rho^2}{2G} = \frac{T^2 \rho^2}{2GI_p^2}$$

则圆轴扭转应变能为

$$V_e = \int_V v_e dV = \int_V \frac{T^2 \rho^2}{2GI_p^2} dV \quad (1)$$

若圆轴的轴向坐标为 x , 横截面的面积单元 $dA = dydz$, 则 $dV = dx dy dz = dA dx$, 代入①式, 得

$$V_e = \int_l \frac{T^2 dx}{2GI_p^2} \int_A \rho^2 dA \quad (2)$$

因极惯性矩的定义为 $I_p = \int_A \rho^2 dA$, 所以②式变为

$$V_e = \int_l \frac{T^2 dx}{2GI_p} \quad (3)$$

根据功能转换原理, 在线弹性变形范围内, 圆轴微段 dx 的应变能等于外力作的功, 即

$$dV_e = \frac{T}{2} d\varphi$$

所以圆轴扭转时总应变能为

$$V_e = \int dV_e = \frac{1}{2} \int_0^l T d\varphi \quad (4)$$

由③、④式可证明

$$V_e = \int_0^l \frac{T^2 dx}{2GI_p} = \frac{1}{2} \int_0^l T d\varphi$$

3.22 如题 3.22 图(a)所示, 钻头横截面直径为 20 mm, 在顶部受均匀的阻抗扭矩 m ($\text{N} \cdot \text{m}/\text{m}$) 的作用, 许用切应力 $[\tau] = 70 \text{ MPa}$ 。(1)求许可的 M_e 。(2)若 $G = 80 \text{ GPa}$, 求上端对下端的相对扭转角。

解 (1)最大扭矩在 AB 段, 由圆轴扭转的强度条件可知

$$\tau_{\max} = \frac{M_e}{W_t} \leq [\tau]$$

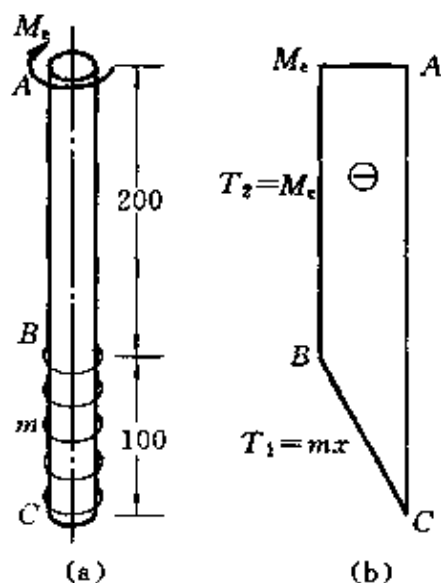
解上式得

$$M_e \leq [\tau] W_t = \frac{70 \times 10^6 \pi \times (20 \times 10^{-3})^3}{16} \text{ N} \cdot \text{m} = 110 \text{ N} \cdot \text{m}$$

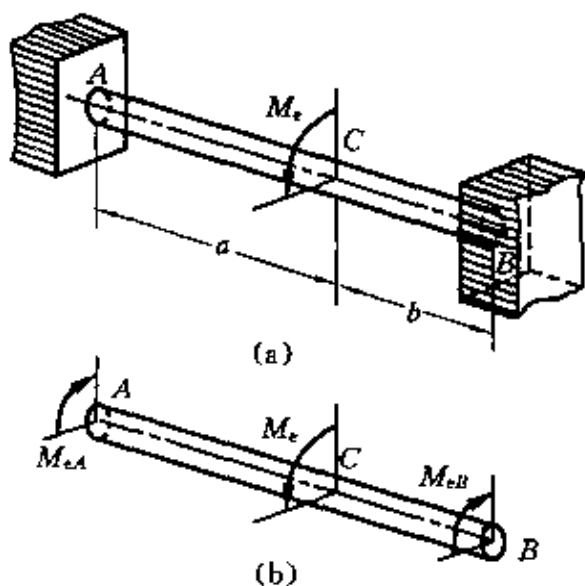
所以 $m = M_e / 0.1 = (110 / 0.1) \text{ N} \cdot \text{m}/\text{m} = 1100 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{m}$

(2)因扭矩在 AC 上不是连续函数,所以上端对下端的相对扭转角要分段计算后再叠加计算(题 3.22 图(b)),即

$$\begin{aligned}\varphi &= \int_0^{l_1} \frac{T_1 dx}{GI_p} + \int_{l_1}^{l_2} \frac{T_2 dx}{GI_p} = \int_0^{0.1} \frac{mx}{GI_p} dx + \frac{0.2M_e}{GI_p} \\ &= \frac{0.5 \times 1100 \times (100 \times 10^{-3})^2 + 200 \times 110 \times 10^{-3}}{80 \times 10^9 \times \frac{\pi}{32} \times (20 \times 10^{-3})^4} \text{ rad} \\ &= 0.022 \text{ rad}\end{aligned}$$



题 3.22 图



题 3.23 图

3.23 如题 3.23 图(a)所示,两端固定的圆轴 AB ,在截面 C 上受扭转力偶矩 M_e 作用。试求两固定端的反作用力偶矩 M_{eA} 和 M_{eB} 。

解 此题为一次超静定问题,取 AB 轴为研究对象,受力图如题 3.23 图(b)所示,由平衡条件有

$$\sum M = 0, \quad M_{eA} + M_{eB} = M_e \quad (1)$$

又因为 A 、 B 两端为固定端,所以 A 端对 B 端的相对扭转角

$$\varphi_{AB} = 0$$

即

$$\varphi_{AC} - \varphi_{CB} = 0 \quad (2)$$

A 端、 B 端相对于 C 截面的扭转角分别为

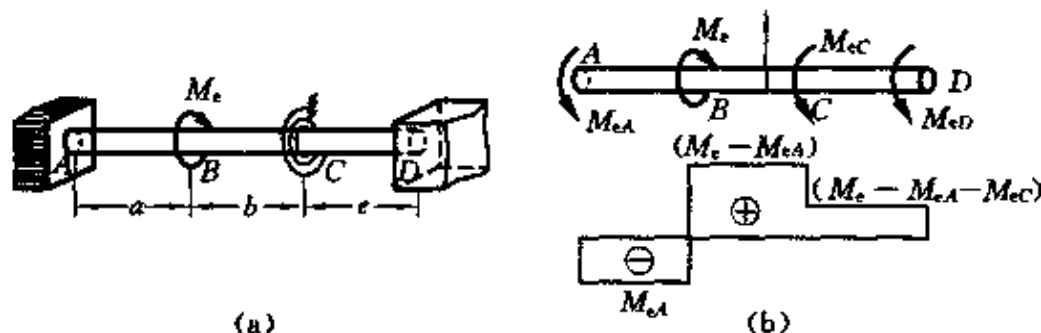
$$\varphi_{AC} = \frac{M_{eA}a}{GI_p} \quad (3)$$

$$\varphi_{CB} = \frac{M_{eB}b}{GI_p} \quad (4)$$

解①、②、③、④式,求得

$$M_{eA} = \frac{M_e b}{a+b}, \quad M_{eB} = \frac{M_e a}{a+b}$$

3.24 两端固定的圆截面杆如题 3.24 图(a)所示。在截面 B 上作用着扭转力偶 M_e 。在截面 C 上有抗扭弹簧刚度为 c ($\text{N} \cdot \text{m}/\text{rad}$) 的弹簧。试求两端的反作用力偶矩。



题 3.24 图

解 这是一个扭转二次超静定问题,因为只有一个独立的平衡方程,而未知数有三个 (M_{eA}, M_{eB}, M_{eD}),因此需要两个补充方程,方可求解。两个补充方程可分别由变形协调条件和弹簧的力与变形关系来提供。

平衡方程 $M_{eA} + M_{eC} + M_{eD} = M_e \quad (1)$

变形协调条件

$$\frac{-M_{eA}a}{GI_p} + \frac{(M_e - M_{eA})b}{GI_p} + \frac{(M_e - M_{eA} - M_{eC})e}{GI_p} = 0 \quad (2)$$

弹簧的力与变形关系

$$M_{eC} = \varphi_c = \frac{(M_e - M_{eA} - M_{eC})e}{GI_p} \times c \quad (3)$$

由③式得

$$M_{eC} = \frac{M_e ec - M_{eA} ec}{GI_p + ec} \quad (4)$$

将④式代入②式中得

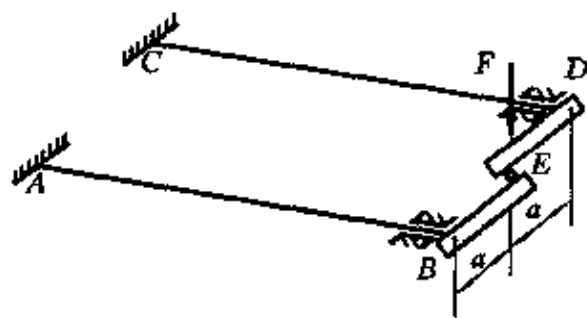
$$\begin{aligned} & -\frac{M_{eA}a}{GI_p} + \frac{(M_e - M_{eA})b}{GI_p} + \frac{(M_e - M_{eA})e}{GI_p} - \frac{e}{GI_p} \\ & \quad \times \frac{M_{eA}ec - M_{eA}ec}{GI_p + ec} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{解上式, 得 } M_{eA} = \frac{[GI_p(b+e) + cbe]M_e}{(a+b+e)GI_p + ce(a+b)} \quad (5)$$

由①、④、⑤式可解得

$$M_{eD} = \frac{aGI_pM_e}{(a+b+e)GI_p + ce(a+b)}$$

3.25 如题 3.25 图所示, AB 和 CD 两杆的尺寸相同。 AB 为钢杆, CD 为铝杆, 两种材料的切变模量之比为 3:1。若不计 BE 和 ED 两杆的变形, 试问 F 力将以怎样的比例分配于 AB 和 CD 两杆?



题 3.25 图

解 此题为一次超静定问题, 由于 BE 段长度同 ED 段长度相同, 同时, BE 段和 ED 段在 E 点的垂直位移相等, 所以变形协调条件是

$$\varphi_{AB} = \varphi_{CD} \quad (1)$$

根据圆轴扭转角公式有 $\frac{F_{AB}al}{G_{AB}I_p} = \frac{F_{CD}al}{G_{CD}I_p}$

式中, F_{AB} 和 F_{CD} 分别是 F 力分配给 AB 和 CD 杆点的力。解上式得

$$F_{AB} = 3F_{CD} \quad (2)$$

由平衡条件有 $F_{AB} + F_{CD} = F \quad (3)$

$$\text{解②、③式得 } F_{AB} = \frac{3}{4}F, \quad F_{CD} = \frac{1}{4}F$$

3.26 圆柱形密圈螺旋弹簧, 簧丝横截面直径 $d=18\text{ mm}$, 弹簧平均直径 $D=125\text{ mm}$, 弹簧材料的 $G=80\text{ GPa}$ 。如弹簧所受拉力 $F=500\text{ N}$, 试求: (1) 簧丝的最大切应力。(2) 弹簧要几圈才能使它的伸长等于 6 mm 。

解 弹簧指数为 $c=D/d=6.94$
 弹簧的曲度因数为

$$k = \frac{4c-1}{4c-4} + \frac{0.615}{c} = \frac{4 \times 6.94 - 1}{4 \times 6.94 - 4} + \frac{0.615}{6.94} = 1.215$$

簧丝的最大切应力为

$$\tau_{\max} = k \frac{8FD}{\pi d^3} = \left(1.215 \times \frac{8 \times 500 \times 0.125}{\pi \times 0.018^3} \right) \text{ Pa} = 33.2 \text{ MPa}$$

弹簧的轴线方向的伸长为 $\lambda = \frac{8FD^3n}{Gd^4}$

由上式, 可得弹簧的圈数为

$$n = \frac{\lambda G d^4}{8FD^3} = \frac{6 \times 10^{-3} \times 80 \times 10^9 \times 0.018^4}{8 \times 500 \times 0.125^3} \text{ 圈} = 6.4 \text{ 圈}$$

3.27 油泵分油阀门的弹簧丝直径为 2.25 mm , 簧圈外径为 18 mm , 有效圈数 $n=8$ 圈, 轴向压力 $F=89\text{ N}$, 弹簧材料的 $G=82\text{ GPa}$ 。试求弹簧丝的最大切应力及弹簧的变形 λ 值。

解 弹簧平均直径

$$D_0 = D - d = (18 - 2.25) \text{ mm} = 15.75 \text{ mm}$$

弹簧指数为 $c = D_0/d = 15.75/2.25 = 7$

弹簧的曲度因数为 $k = \frac{4c-1}{4c-4} + \frac{0.615}{c} = 1.21$

簧丝的最大切应力为

$$\tau_{\max} = k \frac{8FD_0}{\pi d^3} = 1.21 \times \frac{8 \times 89 \times 0.01575}{\pi \times 0.00225^3} \text{ Pa} = 379 \text{ MPa}$$

弹簧的轴线方向的伸长为

$$\lambda = \frac{8FD_0^3n}{Gd^4} = \frac{8 \times 89 \times 0.01575^3 \times 8}{82 \times 10^9 \times 0.00225^4} \text{ m} = 10.6 \text{ mm}$$

3.28 圆柱形密圈螺旋弹簧的平均直径 $D=300\text{ mm}$, 簧丝横

截面直径 $d=30\text{ mm}$, 有效圈数 $n=10$ 圈, 受力前弹簧的自由长度为 400 mm , 材料的 $[\tau]=140\text{ MPa}$, $G=82\text{ GPa}$ 。试确定弹簧所能承受的压力 (注意弹簧可能的压缩量)。

解 弹簧指数为 $c = D/d = 300/30 = 10$

弹簧的曲度因数为

$$k = \frac{4c-1}{4c-4} + \frac{0.615}{c} = \frac{4 \times 10 - 1}{4 \times 10 - 4} + \frac{0.615}{10} = 1.14$$

由弹簧的强度条件 $\tau_{\max} = k \frac{8FD}{\pi d^3} \leq [\tau]$

确定许用压力为

$$F \leq \frac{\pi d^3 [\tau]}{8kD} = \frac{\pi \times 0.03^3 \times 140 \times 10^6}{8 \times 1.14 \times 0.3} \text{ N} = 4340 \text{ N}$$

由弹簧的刚度条件

$$\lambda_{\max} = 400 - nd = (400 - 10 \times 30) \text{ mm} = 100 \text{ mm}$$

$$\lambda = \frac{8FD^3n}{Gd^4} \leq \lambda_{\max}$$

确定许用压力为

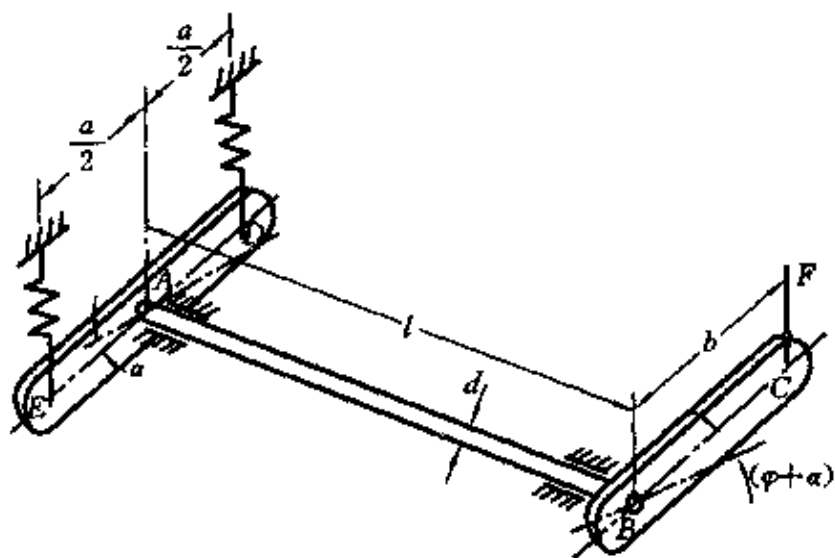
$$F \leq \frac{Gd^4 \lambda_{\max}}{8D^3n} = \frac{82 \times 10^9 \times 0.03^4 \times 0.1}{8 \times 0.3^3 \times 10} \text{ N} = 3080 \text{ N}$$

故弹簧所能承受的压力为 3080 N 。

3.29 如题3.29图所示, AB 轴的两端分别与 DE 和 BC 两杆刚性连接。 F 力作用前, 轴及两杆皆在水平面内。设 BC 和 DE 为刚体 (即弯曲变形不计), D 点和 E 点的两根弹簧的刚度皆为 c 。安置于 AB 轴两端的轴承允许轴转动, 但不能移动。轴的直径为 d , 长为 l 。试求 F 力作用点的位移。

解 DE 杆因弹簧的变形而倾斜, 挂于 E 点和 D 点的弹簧分别受到压缩和拉伸。因二者的变形相同, 所以承受压力和拉力也相等, 设同为 F' , 由平衡条件有

$$F' = F \frac{b}{a}$$



题 3.29 图

弹簧的轴线方向的变形为 $\lambda = \frac{F'}{c} = \frac{Fb}{ca}$

由于弹簧变形而引起的 DE 杆和轴的转角为

$$\alpha = \frac{\lambda}{a/2} = \frac{2Fb}{ca^2}$$

AB 轴的扭矩为 Fb , 由此引起的两端截面的相对扭转角为

$$\varphi = \frac{Tl}{GI_p} = \frac{Fbl}{GI_p}$$

叠加 α 和 φ , 求得 BC 杆的转角为

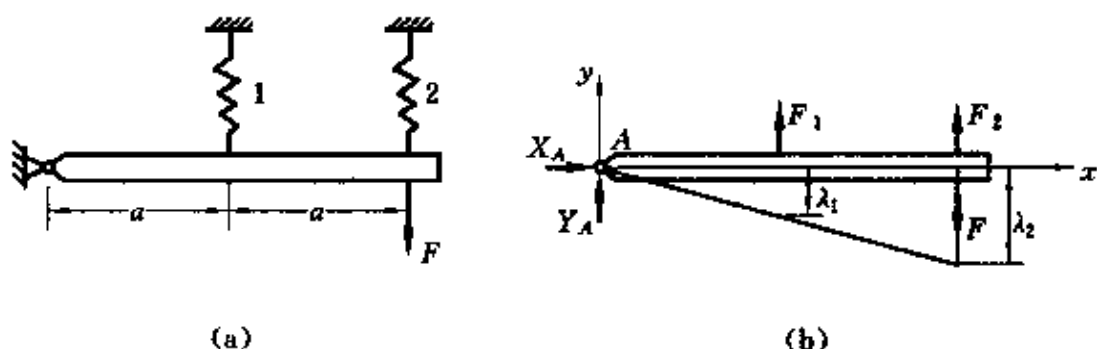
$$\beta = \alpha + \varphi = Fb \left(\frac{2}{ca^2} + \frac{l}{GI_p} \right)$$

F 力作用点的垂直位移是

$$w = \beta b = Fb^2 \left(\frac{2}{ca^2} + \frac{l}{GI_p} \right)$$

3.30 若题 3.30 图(a)中的 1、2 两根弹簧的簧圈平均半径、材料和簧丝横截面的直径都相等, 如要求两根弹簧的负担相同(即受力相等), 试求两根弹簧的圈数之比。设横梁为刚体。

解 取横梁为研究对象, 受力图如题 3.30 图(b)所示, 由平衡条件有



题 3.30 图

$$\sum M_A = 0, \quad F_1 a + F_2 (2a) = F(2a) \quad (1)$$

$$\text{又} \quad F_1 = F_2 \quad (2)$$

将②式代入①式有 $F_1 = F_2 = \frac{2}{3}F$

因弹簧伸长为 $\lambda_1 = \frac{64F_1 R^3 n_1}{Gd^4}, \quad \lambda_2 = \frac{64F_2 R^3 n_2}{Gd^4}$

所以根据变形协调条件(题 3.30 图(b)) $\lambda_1/\lambda_2 = 1/2$, 有

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{64F_1 R^3 n_1}{Gd^4} \times \frac{Gd^4}{64F_2 R^3 n_2} = \frac{n_1}{n_2} = 0.5$$

两根弹簧圈数之比为 0.5。

3.31 在题 3.31 图(a)所示机构中,除了 1、2 两根弹簧外,其余构件都可假设为刚体。如两根弹簧完全一样,簧圈半径 $R = 100 \text{ mm}$, $[\tau] = 300 \text{ MPa}$,试确定弹簧丝的横截面直径,并求每一根弹簧所受的力。

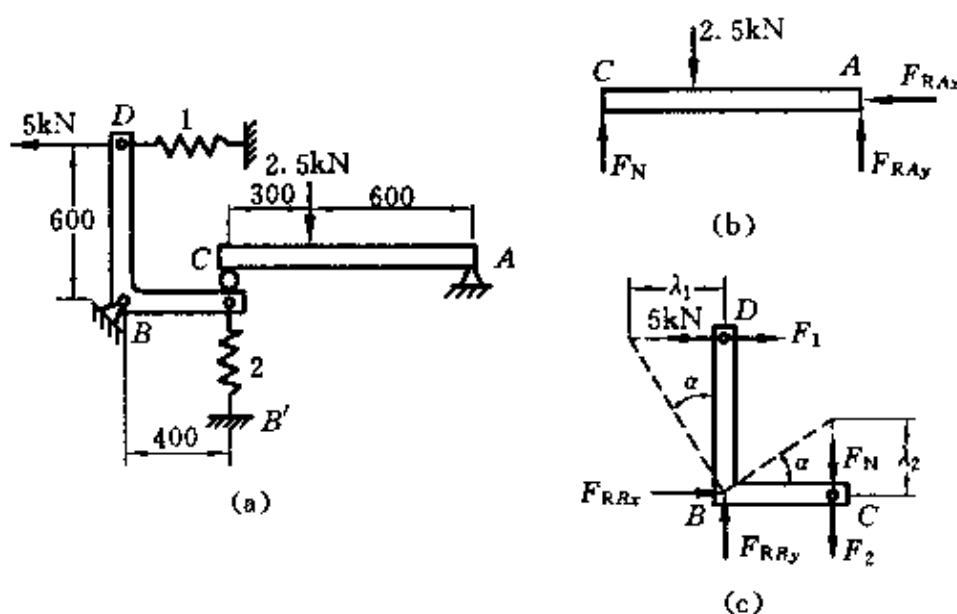
解 取 AC 为研究对象,受力图如题 3.31 图(b)所示,平衡条件为

$$\sum M_A = 0, \quad F_N \times 900 = 2.5 \times 600$$

解上式得 $F_N = \frac{5}{3} \text{ kN}$

取 DBC 为研究对象,受力图如题 3.31 图(c)所示,平衡条件为

$$\sum M_B = 0, \quad (5 - F_1)600 = (F_N + F_2)400 \quad (1)$$



题 3.31 图

变形协调条件为 $\alpha = \lambda_1/600 = \lambda_2/400$

因 $\lambda_1 = \frac{64F_1R^3n}{Gd^4}, \quad \lambda_2 = \frac{64F_2R^3n}{Gd^4}$

所以 $\lambda_1/\lambda_2 = F_1/F_2 = 3/2$ ②

由①、②式解得 $F_1 = 2.69 \text{ kN}, \quad F_2 = 1.79 \text{ kN}$

由弹簧的强度条件有 $\tau_{\max} = \frac{8FD}{\pi d^3} \leq [\tau]$

解上式得弹簧丝直径为

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{8FD}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{8 \times 2.69 \times 10^3 \times 200 \times 10^{-3}}{\pi \times 300 \times 10^6}} \text{ m} = 16.6 \text{ mm}$$

以上解题中, 弹簧力 F 选用 F_1 而不是 F_2 , 原因是用 F_1 确定的 d 值大, 安全。

3.32 拖拉机通过方轴带动悬挂在后面的旋耕机。方轴的转速 $n=720 \text{ r/min}$, 传递的最大功率 $P=25.7 \text{ kW}$, 截面为 $30 \text{ mm} \times 30 \text{ mm}$, 材料的 $[\tau]=100 \text{ MPa}$ 。试校核方轴的强度。

解 方轴传递的扭矩为

$$T = 9549 \times \frac{P}{n} = \left(9549 \times \frac{25.7}{720} \right) \text{ N} \cdot \text{m} = 341 \text{ N} \cdot \text{m}$$

由其截面的尺寸求得高与宽之比为

$$h/b = 1$$

查附录五得

$$\alpha = 0.208$$

则其横截面上的最大切应力为

$$\begin{aligned}\tau_{\max} &= \frac{T}{\alpha h b^2} = \frac{341}{0.208 \times 30 \times 10^{-3} \times 30^2 \times 10^{-6}} \text{ Pa} \\ &= 60.9 \text{ MPa} < [\tau] = 100 \text{ MPa}\end{aligned}$$

因 $\tau_{\max} < [\tau]$, 所以安全。

3.33 有一矩形截面的钢杆, 其横截面尺寸为 $100 \text{ mm} \times 50 \text{ mm}$, 长度 $l = 2 \text{ m}$, 在杆的两端作用着一对力偶矩。若材料的 $[\tau] = 100 \text{ MPa}$, $G = 80 \text{ GPa}$, 杆件的许可扭转角为 $[\varphi] = 2^\circ$, 试求作用于杆件两端的力偶矩的许可值。

解 由其截面的尺寸求得高宽比为

$$h/b = 100/50 = 2$$

查附录五得

$$\alpha = 0.246, \quad \beta = 0.229$$

由扭转强度条件 $\tau_{\max} = \frac{T}{\alpha h b^2} \leq [\tau]$

确定许用力偶矩为

$$\begin{aligned}M_e = T &\leq (0.246 \times 100 \times 10^{-3} \times 50^2 \times 10^{-6} \\ &\quad \times 100 \times 10^6) \text{ N} \cdot \text{m} \\ &= 6150 \text{ N} \cdot \text{m}\end{aligned}$$

由扭转刚度条件 $\varphi_{\max} = \frac{Tl}{G\beta h b^3} \leq [\varphi]$

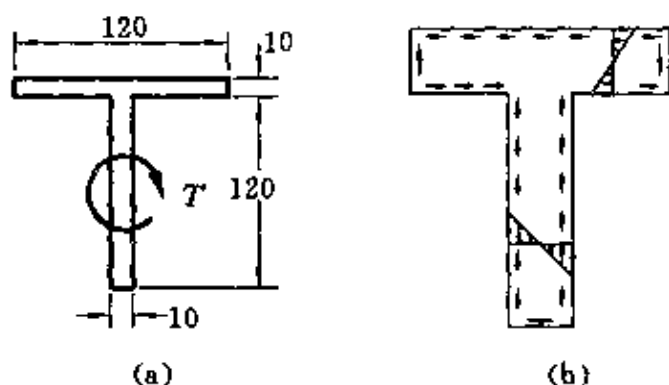
确定许用力偶矩为

$$\begin{aligned}M_e = T &\leq \left(\frac{80 \times 10^9 \times 0.229 \times 100 \times 10^{-3} \times 50^3 \times 10^{-9}}{2} \right. \\ &\quad \left. \times 2 \times \frac{\pi}{180} \right) \text{ N} \cdot \text{m} \\ &= 4000 \text{ N} \cdot \text{m}\end{aligned}$$

故力偶矩的许可值为

$$M_x = 4 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

3.34 如题 3.34 图(a)所示, T 字形薄壁截面杆长 $l=2 \text{ m}$, 材料的 $G=80 \text{ GPa}$, 受纯扭矩 $T=200 \text{ N} \cdot \text{m}$ 的作用。试求: (1) 最大切应力及扭转角; (2) 作图表示沿截面的周边和厚度切应力分布的情况。



题 3.34 图

解 (1) 最大切应力及扭转角。

T 字形薄壁截面可视为二狭长矩形截面的组合, T 字形截面的相当极惯性矩可用 $\sum \frac{1}{3} h \delta^3$ 表示, 最大切应力发生在二狭长矩形截面的长边上, 其值为

$$\tau_{\max} = \frac{T \delta}{\sum \frac{1}{3} h \delta^3} = \frac{200 \times 0.01}{2 \left(\frac{1}{3} \times 0.12 \times 0.01^3 \right)} \text{ Pa} = 25 \text{ MPa}$$

杆两端面的相对扭转角为

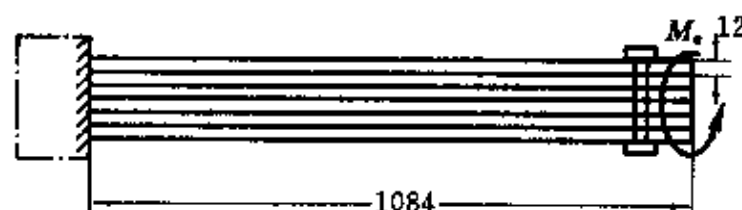
$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{Tl}{G \sum \frac{1}{3} h \delta^3} = \left(\frac{200 \times 2}{(80 \times 10^9) \times \frac{2}{3} (0.12 \times 0.01^3)} \right) \text{ rad} \\ &= 0.0625 \text{ rad} = 3.58^\circ \end{aligned}$$

(2) 沿截面的周边和厚度切应力分布情况画在题 3.34 图(b)中。

3.35 如题 3.35 图所示, 某火箭炮平衡机的扭杆是六片截面尺寸为 $75 \text{ mm} \times 12 \text{ mm}$ 的钢板叠在一起而组成的, 受扭部分的长

度为 $l=1084 \text{ mm}$, 已知材料的许用切应力 $[\tau]=900 \text{ MPa}$, $G=80 \text{ GPa}$, 扭杆的最大扭转角为 60° 。校核扭杆的强度。

提示: 扭杆的每一片都可看作是独立的杆件。



题 3.35 图

解 这属于开口薄壁杆自由扭转问题, 由刚度条件

$$\varphi = \frac{M_e l}{\frac{1}{3} G \sum_{i=1}^6 h_i \delta_i^3} \times \frac{180}{\pi} \leq 60^\circ$$

可求出

$$M_e \leq \frac{60 \pi G \frac{1}{3} \sum_{i=1}^6 h_i \delta_i^3}{180 l}$$

扭杆的最大切应力

$$\tau_{\max} = \frac{M_e \delta}{\frac{1}{3} \sum_{i=1}^6 h_i \delta_i^3} = \frac{60 \pi G t}{180 l} = \frac{60 \times \pi \times 80 \times 10^9 \times 0.012}{180 \times 1.084} \text{ Pa}$$

$$= 927 \text{ MPa} > [\tau] = 900 \text{ MPa}$$

$$\frac{\tau - [\tau]}{[\tau]} = \frac{927 - 900}{900} = 0.03$$

在工程实际中, 允许工作应力超过许用应力 5% 以内。本问题最大切应力只超出许用切应力的 3%, 故可以应用。

3.36 外径为 120 mm , 厚度为 5 mm 的薄壁圆杆, 受 $T=4 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 的扭矩作用, 试按下列两种方式计算切应力: (1) 按闭口薄壁杆件扭转的近似理论计算; (2) 按空心圆截面杆扭转的精确理论计算。

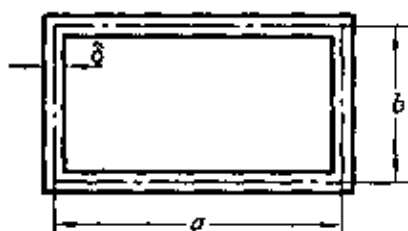
解 (1) 按闭口薄壁杆件扭转的近似理论计算切应力

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{T}{2\omega\delta} = \frac{T}{2\pi R^2\delta} \\ &= \frac{4 \times 10^3}{2\pi \times (57.5 \times 10^{-3})^2 \times 5 \times 10^{-3}} \text{ Pa} = 38.5 \text{ MPa}\end{aligned}$$

(2) 按空心圆截面杆扭转的精确理论计算切应力

$$\tau = \frac{TR}{I_p} = \frac{4 \times 10^3 \times 60 \times 10^{-3}}{\frac{\pi}{32}(0.12^4 - 0.11^4)} \text{ Pa} = 40.1 \text{ MPa}$$

3.37 如题 3.37 图所示,有一截面为矩形的闭口薄壁杆件,其截面积 A 和厚度 δ 保持不变,面比值 $\beta = a/b$ 可以改变,在扭矩 T 作用下,试证明切应力 τ 正比于 $(1+\beta)^2/\beta$ 。



题 3.37 图

解 因为薄壁杆截面积保持不变,因此有

$$2(a+b)\delta = c$$

式中, c 为常数。上式可改写成

$$2b(a/b + 1)\delta = c$$

所以

$$b = \frac{c}{2(\beta + 1)\delta}$$

截面上的切应力为

$$\tau = \frac{T}{2\omega\delta}$$

式中, ω 是薄壁杆截面中线所围的面积,即 $\omega = ab$,将 $\omega = ab$ 代入上式,得

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{T}{2ab\delta} = \frac{T}{2\delta(a/b)b^2} = \frac{T}{2\delta\beta b^2} \\ &= \frac{T}{2\delta\beta \left[\frac{c}{2(\beta + 1)\delta} \right]^2} = \frac{2\delta T(\beta + 1)^2}{\beta c^2}\end{aligned}$$

所以

$$\tau \propto \frac{(\beta + 1)^2}{\beta}$$

证明完毕。

第四章 弯曲内力

知识要点

1. 平面弯曲的概念

(1) 平面弯曲的力学模型

① 构件特征——等截面直杆。

② 受力特征——外力偶或横向力的作用面与杆件的形心主惯性平面相重合。

③ 变形特征——弯曲变形后,杆件轴线变成在外力作用面内的光滑、平坦的平面曲线。

(2) 纯弯曲

杆件所受外力系为(或相当于)力偶时,所产生的弯曲变形称为纯弯曲,这时杆内剪力为零,弯矩为常数。

2. 平面弯曲时,横截面上的内力——剪力与弯矩

(1) 弯矩

构件受弯时作用面垂直于其横截面的内力偶矩,用 M 表示。

(2) 剪力

构件受弯时,作用线平行于其横截面的内力,用 F_s 表示。

(3) 剪力方程与弯矩方程

构件各横截面上的剪力、弯矩表示为截面的坐标位置 x 的函数,即表示剪力、弯矩随截面位置而变化的函数关系。

$$F_s = F_s(x), \quad M = M(x)$$

(4) 剪力图与弯矩图

表示各横截面上剪力、弯矩沿杆件轴线变化规律的图线,即将

剪力方程、弯矩方程用图线表示的曲线。

3. 载荷、剪力和弯矩间的关系

(1) 载荷集度与剪力、弯矩间的微分关系

$$\frac{dF_s(x)}{dx} = q(x)$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = F_s(x)$$

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = q(x)$$

(2) 载荷集度、剪力、弯矩间的积分关系

$$F_{s2} - F_{s1} = \int_{x_1}^{x_2} q(x) dx$$

或

$$F_{s2} = \int_{x_1}^{x_2} q(x) dx + F_{s1}$$

$$M_2 - M_1 = \int_{x_1}^{x_2} F_s(x) dx$$

或

$$M_2 = \int_{x_1}^{x_2} F_s(x) dx + M_1$$

(3) 集中力作用处, 剪力图、弯矩图的特征

$$F_{s2} - F_{s1} = F$$

$$M_2 = M_1$$

注意: M_2 与 M_1 的数值相等, 但由于 $F_{s2} \neq F_{s1}$, 故 M 图的切线斜率在集中力作用处的两侧不相等, 有一突然变化。

(4) 集中力偶作用处, 剪力图、弯矩图的特征

$$F_{s2} = F_{s1}$$

$$M_2 - M_1 = M_e$$

注意: 集中力偶作用处, F_s 图不但数值相等, 而且斜率也不变, 只有 M 图有突变。

剪力图、弯矩图的特征如表 4-1 所示。

表 4-1

载荷	剪力图	弯矩图
$q=0$	水平直线 \oplus 或 \ominus	斜直线 $F_s > 0$ / $F_s < 0$
$q=\text{常数}$	斜直线 $q > 0$ / $q < 0$	二次曲线 ($F_s=0$ 处, M 达到极值) $q > 0$ $q < 0$
集中力 F	有突变, 突变方向沿 F 的指向, 突变量等于 F 值	有折角
集中力偶矩 M_e	无影响	有突变, 顺时针转向的 M_e 使 M 增大, 逆时针转向的 M_e 使 M 减小。突变量等于 M_e 值

习题详解

4.1 试求题 4.1 图(a)~(h)所示各梁中截面 1-1、2-2、3-3 上的剪力和弯矩, 这些截面无限接近于截面 C 或截面 D。设 F 、 q 、 a 均为已知。

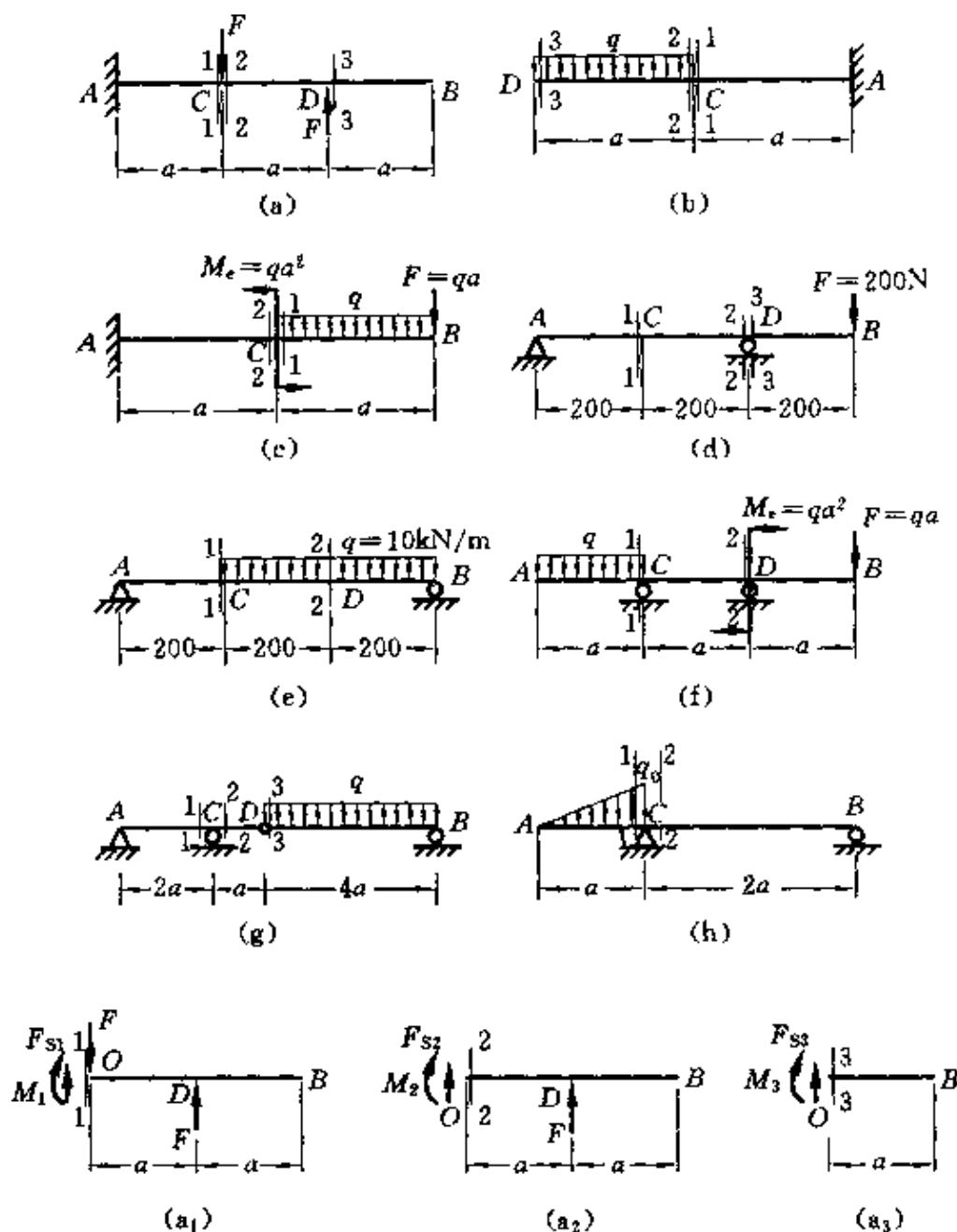
解 (a) 如题 4.1 图(a)所示。

解法一 截面法

欲求 1-1 截面的内力, 可沿 1-1 截面将梁截开, 取右部分为研究对象, 受力图如题 4.1 图(a₁)所示, 截面上的内力按剪力和弯矩正负符号的规定设为正的, 利用平衡条件有

$$\sum F_y = 0, \quad F_{s1} + F - F = 0 \quad (1)$$

$$\sum M_o = 0, \quad M_1 - Fa = 0 \quad (2)$$



题 4.1 图

由①、②式得 $M_1 = Fa$, $F_{s1} = 0$

求 2-2 截面的内力时,可沿 2-2 截面将梁截开,取右部分为研究对象,受力图如题 4.1 图(a₂)所示,截面上的内力按剪力和弯矩正负符号的规定设为正的,利用平衡条件有

$$\sum F_y = 0, \quad F_{s2} + F = 0 \quad (3)$$

$$\sum M_O = 0, \quad M_2 - Fa = 0 \quad (4)$$

由③、④式得 $M_2 = Fa, \quad F_{S2} = -F$

求 3-3 截面的内力时,可沿 3-3 截面将梁截开,取右部分为研究对象,受力图如题 4.1 图(a₃)所示,截面上的内力按剪力和弯矩正负符号的规定设为正的,利用平衡条件有

$$\sum F_y = 0, \quad F_{S3} = 0$$

$$\sum M_O = 0, \quad M_3 = 0$$

所以 3-3 截面的内力为

$$M_3 = 0, \quad F_{S3} = 0$$

解法二 外力简化法

梁任意截面上的剪力和弯矩都是梁的内力,根据平衡条件,它们应分别与该截面以左(或以右)梁上所有外力向截面形心简化后的主矢和主矩大小相等、方向相反。因此任一横截面上的剪力等于该截面以左(或以右)梁上所有外力的代数和,使截面形心有顺时针转动趋势的外力取正值,反之取负值。梁任一横截面上的弯矩等于该截面以左(或以右)梁上所有外力对该截面形心之矩的代数和,使梁弯曲后曲率为正之矩取正值,反之取负值。所以

$$\text{截面 1-1 内力} \quad F_{S1} = F - F = 0, \quad M_1 = Fa$$

$$\text{截面 2-2 内力} \quad M_2 = Fa, \quad F_{S2} = -F$$

$$\text{截面 3-3 内力} \quad M_3 = 0, \quad F_{S3} = 0$$

(b) 如题 4.1 图(b)所示。

解法同题 4.1(a)一样,可以解得

$$\text{截面 1-1 内力} \quad M_1 = -\frac{1}{2}qa^2, \quad F_{S1} = -qa$$

$$\text{截面 2-2 内力} \quad M_2 = -\frac{1}{2}qa^2, \quad F_{S2} = -qa$$

$$\text{截面 3-3 内力} \quad M_3 = 0, \quad F_{S3} = 0$$

(c) 如题 4.1 图(c)所示。

解法同题 4.1(a)一样,解得

$$\text{截面 1-1 内力} \quad M_1 = -\frac{3}{2}qa^2, \quad F_{s1} = 2qa$$

$$\text{截面 2-2 内力} \quad M_2 = -\frac{1}{2}qa^2, \quad F_{s2} = 2qa$$

(d) 如题 4.1 图(d)所示。

解法同题 4.1(a)一样,解得

$$\text{截面 1-1 内力} \quad M_1 = -20 \text{ N} \cdot \text{m}, \quad F_{s1} = -100 \text{ N}$$

$$\text{截面 2-2 内力} \quad M_2 = -40 \text{ N} \cdot \text{m}, \quad F_{s2} = -100 \text{ N}$$

$$\text{截面 3-3 内力} \quad M_3 = -40 \text{ N} \cdot \text{m}, \quad F_{s3} = 200 \text{ N}$$

(e) 如题 4.1 图(e)所示。

解法同题 4.1(a)一样,解得

$$\text{截面 1-1 内力} \quad M_1 = 267 \text{ N} \cdot \text{m}, \quad F_{s1} = 1.33 \text{ kN}$$

$$\text{截面 2-2 内力} \quad M_2 = 333 \text{ N} \cdot \text{m}, \quad F_{s2} = -0.667 \text{ kN}$$

(f) 如题 4.1 图(f)所示。

解法同题 4.1(a)一样,解得

$$\text{截面 1-1 内力} \quad M_1 = -\frac{1}{2}qa^2, \quad F_{s1} = -qa$$

$$\text{截面 2-2 内力} \quad M_2 = -2qa^2, \quad F_{s2} = -\frac{3}{2}qa$$

(g) 如题 4.1 图(g)所示。

解法同题 4.1(a)一样,解得

$$\text{截面 1-1 内力} \quad M_1 = -2qa^2, \quad F_{s1} = -qa$$

$$\text{截面 2-2 内力} \quad M_2 = -2qa^2, \quad F_{s2} = 2qa$$

$$\text{截面 3-3 内力} \quad M_3 = 0, \quad F_{s3} = 2qa$$

(h) 如题 4.1 图(h)所示。

解法同题 4.1(a)一样,解得

$$\text{截面 1-1 内力} \quad M_1 = -\frac{1}{6}q_0a^2, \quad F_{s1} = -\frac{1}{2}q_0a$$

$$\text{截面 2-2 内力} \quad M_2 = -\frac{1}{6}q_0a^2, \quad F_{s2} = \frac{1}{12}q_0a$$

4.2 用截面法将梁分成两部分,计算梁截面上的内力时,下

列说法是否正确？如不正确应如何改正？

(1)在截面的任一侧，向上的集中力产生正的剪力，向下的集中力产生负的剪力。

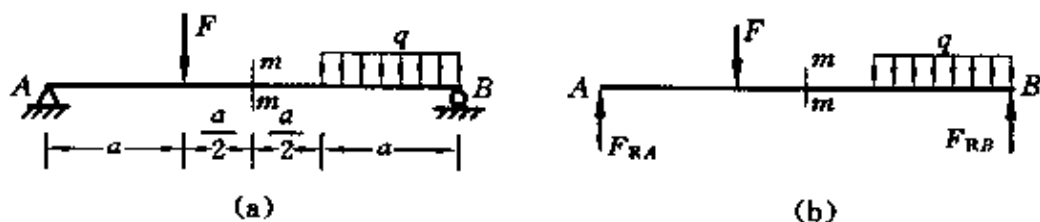
(2)在截面的任一侧，顺时针转向的集中力偶产生正弯矩，逆时针转向的集中力偶产生负弯矩。

解 (1)错误。

(2)错误。

正确的说法见题4.1的解法二。

4.3 对题4.3图(a)所示简支梁的 $m-m$ 截面，如用截面左侧的外力计算剪力和弯矩，则 F_s 和 M 便与 q 无关；如用截面右侧的外力计算剪力和弯矩，则 F_s 和 M 便与 F 无关。这样的论断正确吗？何故？



题4.3图

解 这样的论断是不正确的。因约束反力 F_{RA} 、 F_{RB} 包含有 q 和 F 。根据平衡条件，可求出

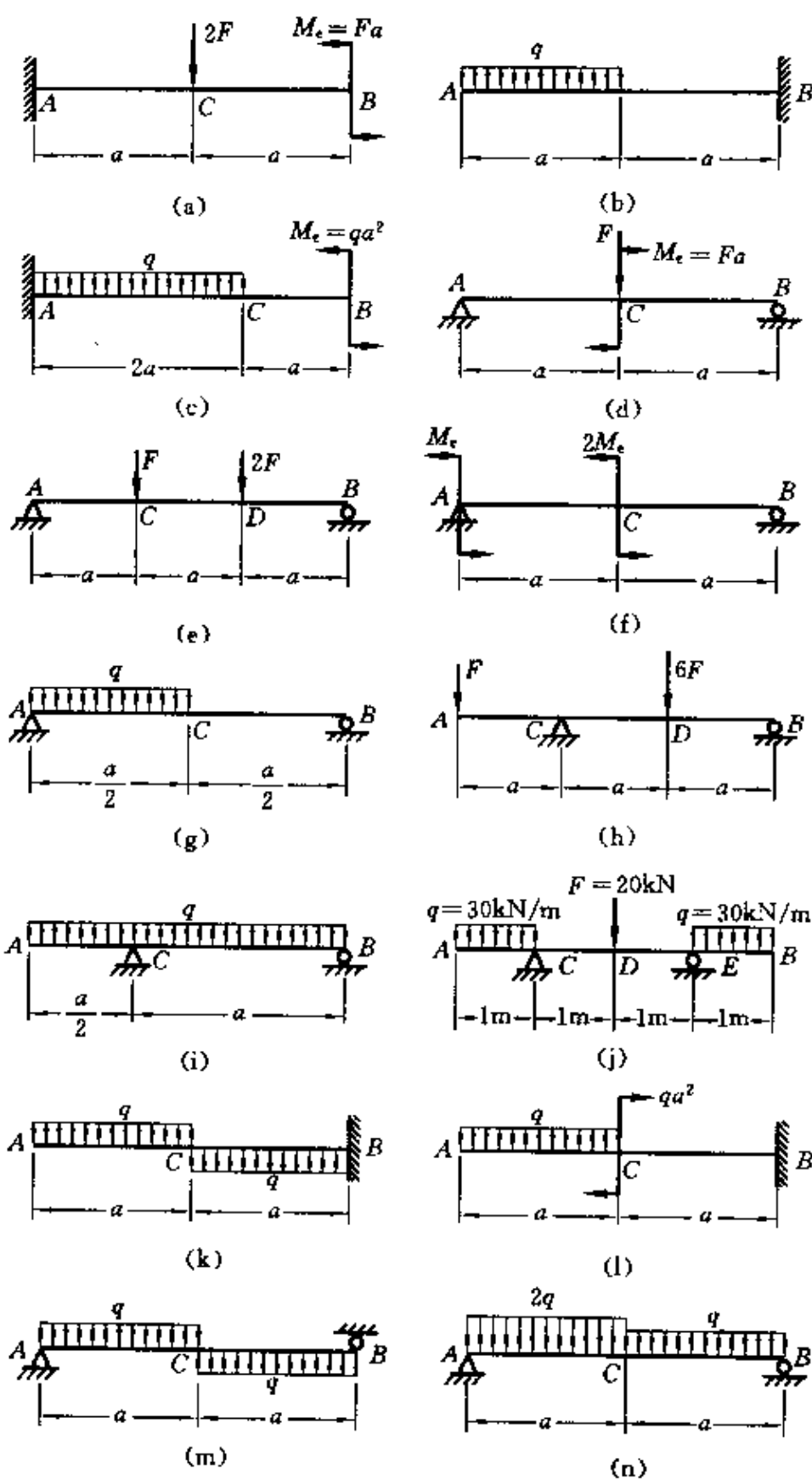
$$F_{RA} = \frac{2F + 0.5qa}{3}, \quad F_{RB} = \frac{F + 2.5qa}{3}$$

这样无论是用截面左侧的外力计算剪力和弯矩，还是用截面右侧的外力计算剪力和弯矩， q 和 F 都会影响到截面 $m-m$ 的内力。即剪力和弯矩都与 q 和 F 有关。

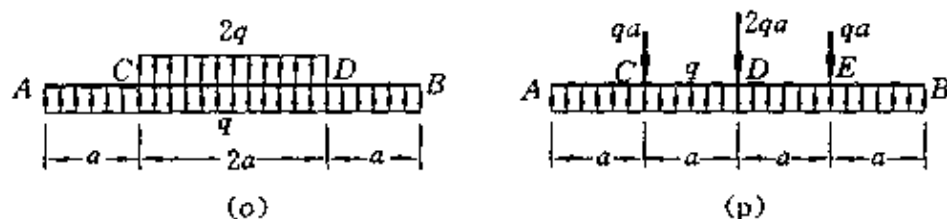
4.4 设已知题4.4图(a)~(p)所示各梁的载荷 F 、 q 、 M 和尺寸 a ，(1)列出梁的剪力方程和弯矩方程；(2)作剪力图和弯矩图；(3)确定 $|F_s|_{\max}$ 及 $|M|_{\max}$ 。

解 (a) 如题4.4图(a)所示。

建立如题4.4图(a₁)所示坐标系。



题 4.4 图



续题 4.4 图

(1) 列剪力方程和弯矩方程。

应用题 4.1(a) 解法二提供的列剪力方程和弯矩方程的方法。

$$\begin{aligned}
 \text{AC 段} \quad & F_S(x) = 2F \quad (0 < x < a) \\
 & M(x) = F(2x - a) \quad (0 < x \leq a) \\
 \text{CB 段} \quad & F_S(x) = 0 \quad (a \leq x \leq 2a) \\
 & M(x) = Fa \quad (a \leq x < 2a)
 \end{aligned}$$

(2) 作剪力图、弯矩图, 如题 4.4 图(a₂)所示。

(3) 梁的最大剪力和弯矩为

$$|F_S|_{\max} = 2F, \quad |M|_{\max} = Fa$$

(b) 如题 4.4 图(b)所示。

解法同题 4.4(a)。建立题 4.4 图(b₁)所示坐标系。

(1) 列剪力方程和弯矩方程。

$$\begin{aligned}
 \text{AC 段} \quad & F_S(x) = -qx \quad (0 \leq x \leq a) \\
 & M(x) = -\frac{1}{2}qx^2 \quad (0 \leq x \leq a) \\
 \text{CB 段} \quad & F_S(x) = -qa \quad (a \leq x < 2a) \\
 & M(x) = -qa\left(x - \frac{a}{2}\right) \quad (a \leq x < 2a)
 \end{aligned}$$

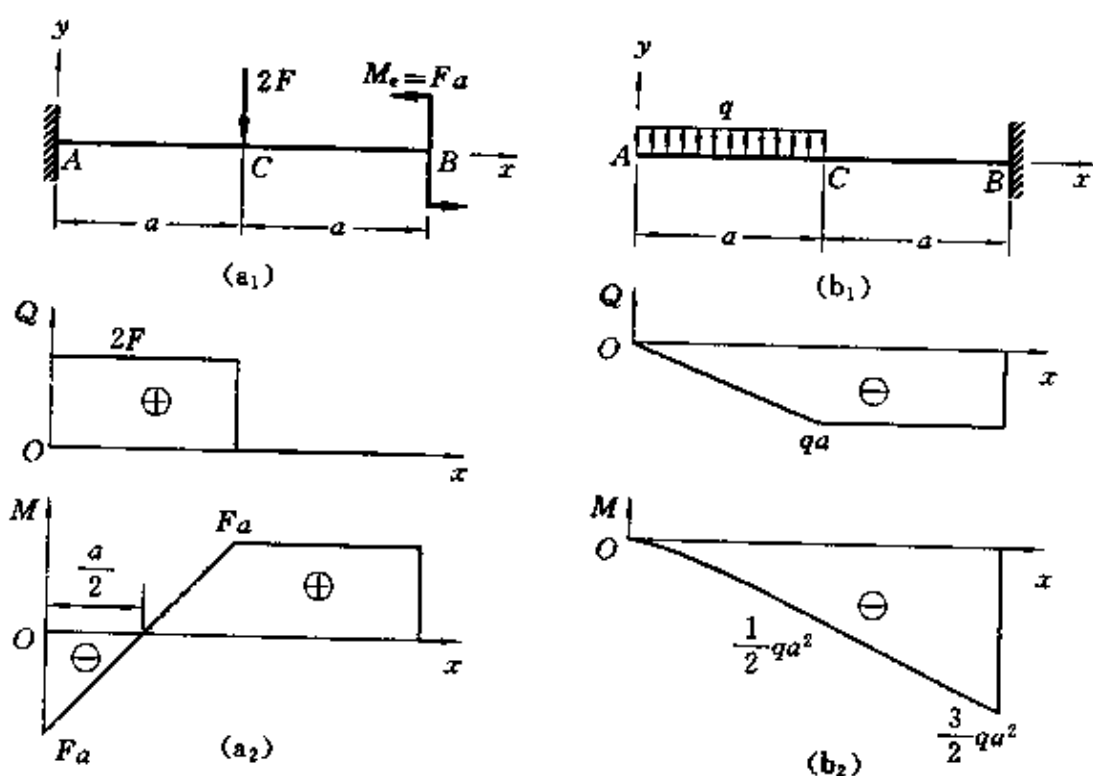
(2) 作剪力图、弯矩图, 如题 4.4 图(b₂)所示。

(3) 梁的最大剪力和弯矩为

$$|F_{S\max}| = qa, \quad |M_{\max}| = \frac{3}{2}qa^2$$

(c) 如题 4.4 图(c)所示。

解法同题 4.4(a)。建立题 4.4 图(c₁)所示坐标系。



续题 4.4 图

(1) 列剪力方程和弯矩方程。

CB 段 $F_s(x) = 0 \quad (2a \leq x \leq 3a)$

$M(x) = qa^2 \quad (2a \leq x < 3a)$

AC 段 $F_s(x) = q(2a - x) \quad (0 < x \leq 2a)$

$M(x) = -\frac{1}{2}q(2a - x)^2 + qa^2 \quad (0 < x \leq 2a)$

(2) 作剪力图、弯矩图如题 4.4 图(c₂)所示。

(3) 梁的最大剪力和弯矩为

$|F_{S\max}| = 2qa, \quad |M_{\max}| = qa^2$

(d) 如题 4.4 图(d)所示。

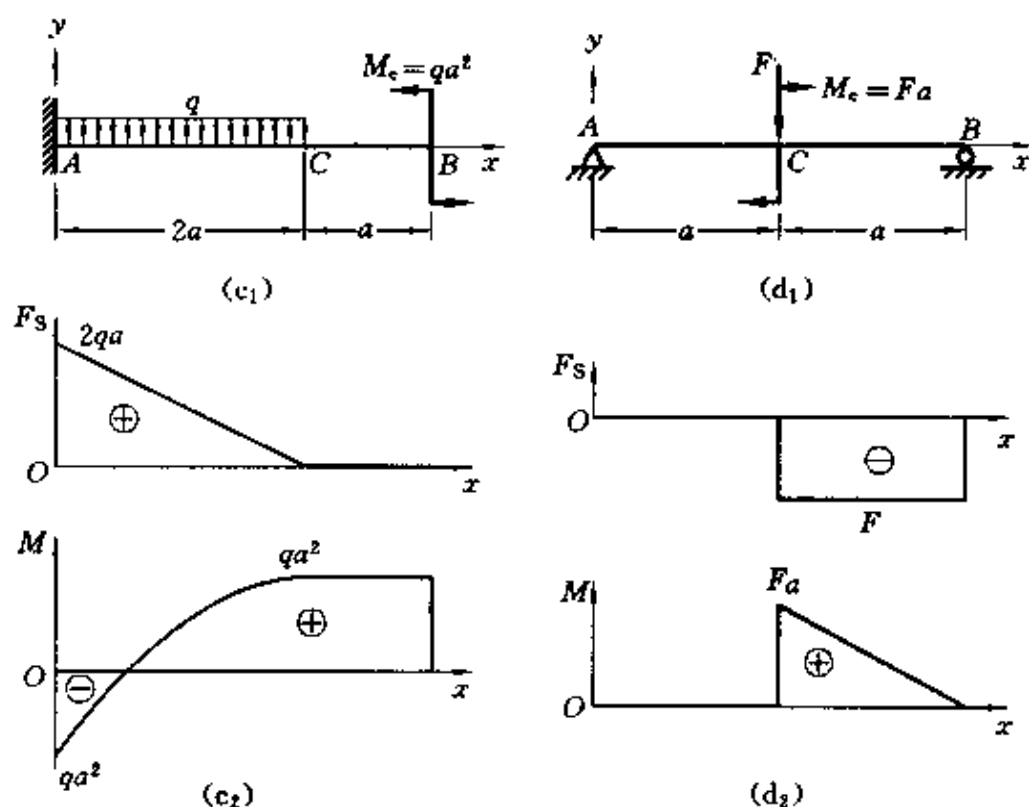
解法同题 4.4(a)。建立题 4.4 图(d₁)所示坐标系。

(1) 列剪力方程和弯矩方程。

AC 段 $F_s(x) = 0 \quad (0 \leq x < a)$

$M(x) = 0 \quad (0 \leq x < a)$

CB 段 $F_s(x) = -F \quad (a < x < 2a)$



续题 4.4 图

$$M(x) = F(2a - x) \quad (a < x \leq 2a)$$

(2) 作剪力图、弯矩图, 如题 4.4 图(d₂)所示。

(3) 梁的最大剪力和弯矩为

$$|F_{S\max}| = F, \quad |M_{\max}| = Fa$$

(e) 如题 4.4 图(e)所示。

解法同题 4.4(a)。建立题 4.4 图(e₁)所示坐标系。

(1) 列剪力方程和弯矩方程。

$$\text{AC 段} \quad F_s(x) = \frac{4}{3}F \quad (0 < x < a)$$

$$M(x) = \frac{4}{3}Fx \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$\text{CD 段} \quad F_s(x) = \frac{1}{3}F \quad (a < x < 2a)$$

$$M(x) = \frac{F}{3}(x + 3a) \quad (a \leq x \leq 2a)$$

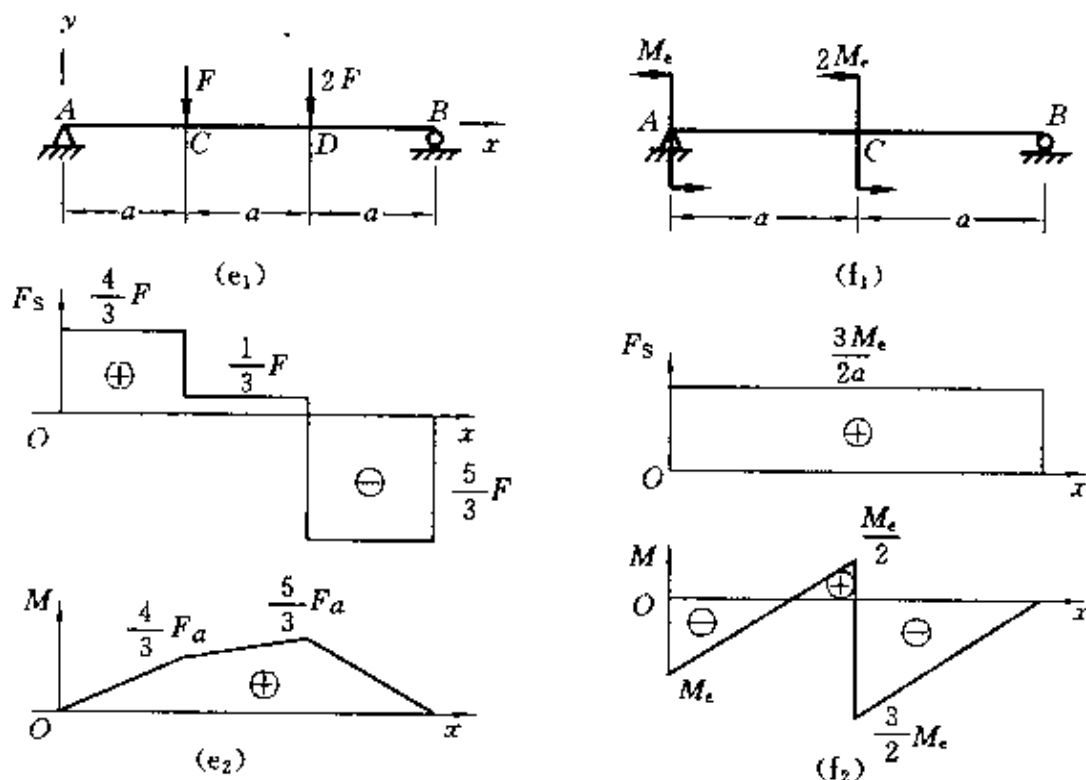
$$DB \text{ 段} \quad F_s(x) = -\frac{5}{3}F \quad (2a < x < 3a)$$

$$M(x) = \frac{5}{3}F(3a - x) \quad (2a \leq x \leq 3a)$$

(2) 作剪力图、弯矩图, 如题 4.4 图(e₂)所示。

(3) 梁的最大剪力和弯矩为

$$|F_{s\max}| = \frac{5}{3}F, \quad |M_{\max}| = \frac{5}{3}Fa$$



续题 4.4 图

(f) 如题 4.4 图(f)所示。

解法同题 4.4(a)。建立题 4.4 图(f₁)所示坐标系。

(1) 列剪力方程和弯矩方程。

$$AC \text{ 段} \quad F_s(x) = \frac{3M_e}{2a} \quad (0 < x < a)$$

$$M(x) = \frac{3M_e}{2a}x - M_e \quad (0 < x < a)$$

$$CB \text{ 段} \quad F_s(x) = \frac{3M_e}{2a} \quad (a \leq x < 2a)$$

$$M(x) = \frac{3M_e}{2a}x - 3M_e \quad (a < x \leq 2a)$$

(2) 作剪力图、弯矩图, 如题 4.4 图(f₂)所示。

(3) 梁的最大剪力和弯矩为

$$|F_{s\max}| = \frac{3M_e}{2a}, \quad |M_{\max}| = \frac{3}{2}M_e$$

(g) 如题 4.4 图(g)所示。

解法同题 4.4(a)。建立题 4.4 图(g₁)所示坐标系。

(1) 列剪力方程和弯矩方程。

$$AC \text{ 段} \quad F_s(x) = \frac{3}{8}qa - qx \quad \left(0 < x \leq \frac{a}{2}\right)$$

$$M(x) = \frac{3}{8}qax - \frac{1}{2}qx^2 \quad \left(0 \leq x \leq \frac{a}{2}\right)$$

$$CB \text{ 段} \quad F_s(x) = -\frac{1}{8}qa \quad \left(\frac{a}{2} \leq x < a\right)$$

$$M(x) = -\frac{1}{8}qa(a-x) \quad \left(\frac{a}{2} \leq x \leq a\right)$$

(2) 作剪力图、弯矩图, 如题 4.4 图(g₂)所示。

(3) 梁的最大剪力和弯矩为

$$|F_{s\max}| = \frac{3}{8}qa, \quad |M_{\max}| = \frac{9}{128}qa^2$$

(h) 如题 4.4 图(h)所示。

解法同题 4.4(a)。建立题 4.4 图(h₁)所示坐标系。

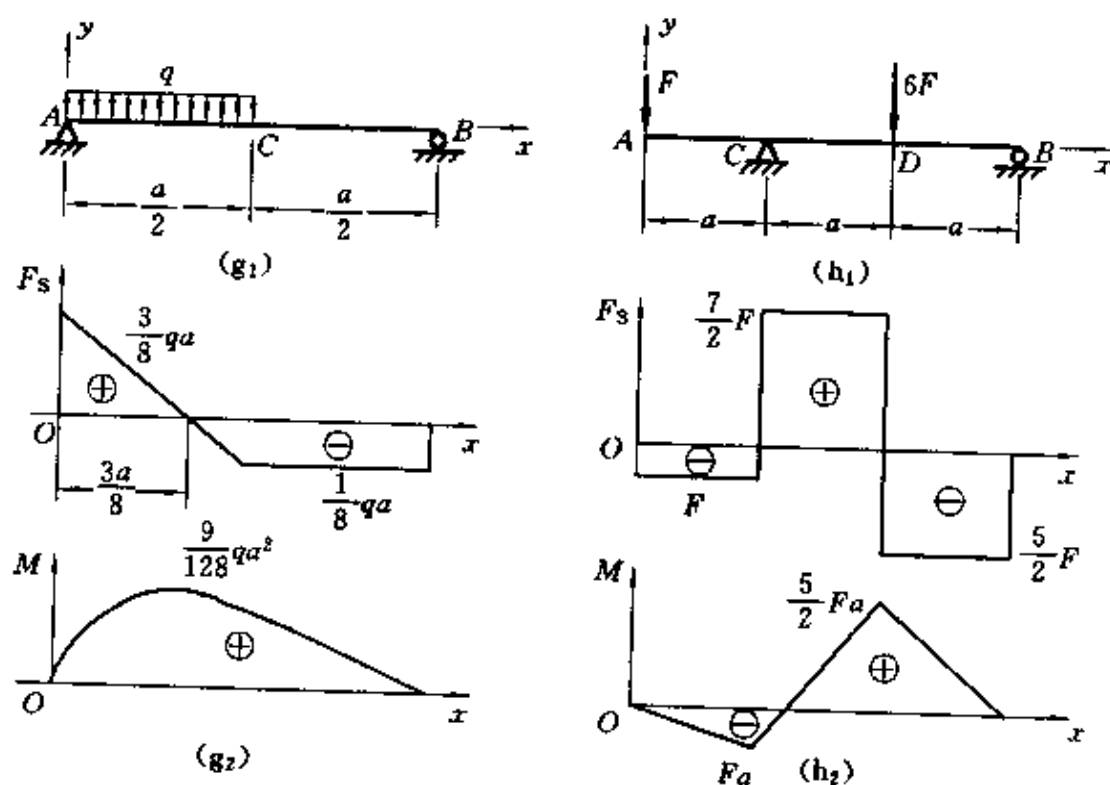
(1) 列剪力方程和弯矩方程。

$$AC \text{ 段} \quad F_s(x) = -F \quad (0 < x < a)$$

$$M(x) = -Fx \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$CD \text{ 段} \quad F_s(x) = \frac{7}{2}F \quad (a < x < 2a)$$

$$M(x) = \frac{F}{2}(7x - 9a) \quad (a \leq x \leq 2a)$$



续题 4.4 图

DB 段
$$F_s(x) = -\frac{5}{2}F \quad (2a < x < 3a)$$

$$M(x) = \frac{5}{2}F(3a - x) \quad (2a \leq x \leq 3a)$$

(2) 作剪力图、弯矩图, 如题 4.4 图(h₂)所示。

(3) 梁的最大剪力和弯矩为

$$|F_{s\max}| = \frac{7}{2}F, \quad |M_{\max}| = \frac{5}{2}Fa$$

(i) 如题 4.4 图(i)所示。

解法同题 4.4(a)。建立题 4.4 图(i₁)所示坐标系。

(1) 列剪力方程和弯矩方程。

AC 段
$$F_s(x) = -qx \quad \left(0 \leq x < \frac{a}{2}\right)$$

$$M(x) = -\frac{1}{2}qx^2 \quad \left(0 \leq x \leq \frac{a}{2}\right)$$

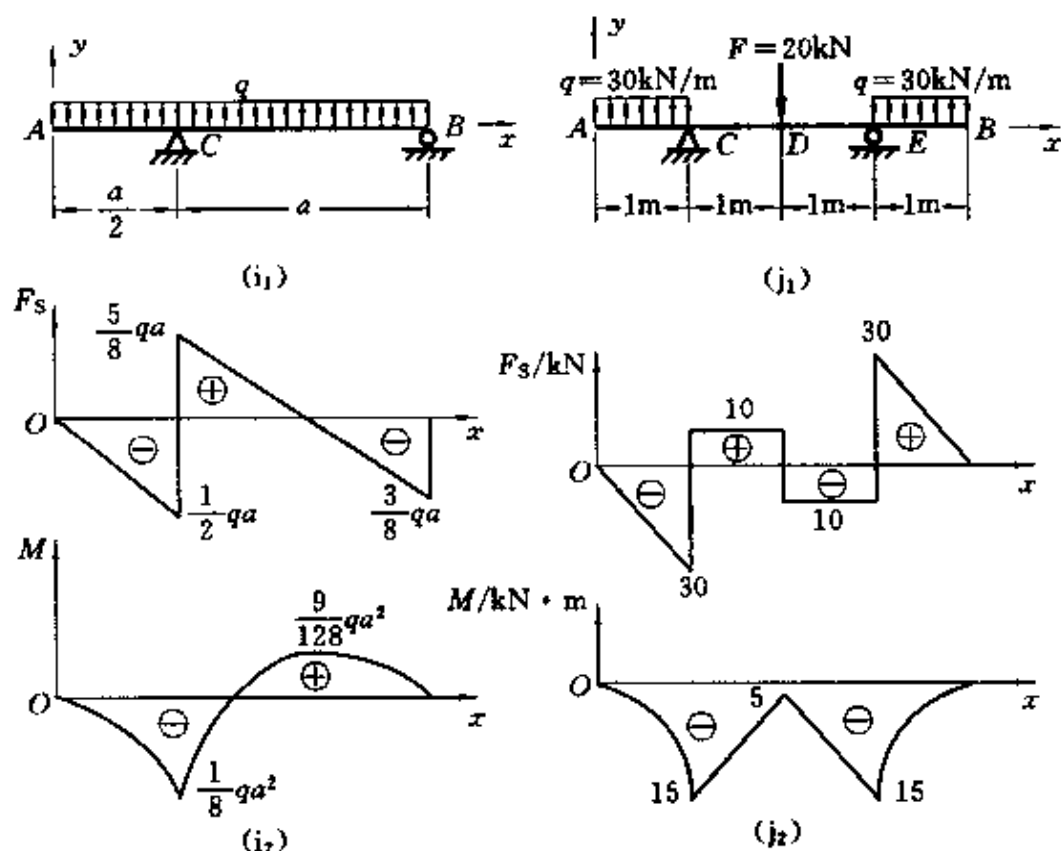
$$CB \text{ 段} \quad F_s(x) = -qx + \frac{9}{8}qa \quad \left(\frac{a}{2} < x < \frac{3a}{2} \right)$$

$$M(x) = -\frac{1}{2}qx^2 + \frac{9}{8}qax - \frac{9}{16}qa^2 \quad \left(\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{3a}{2} \right)$$

(2) 作剪力图、弯矩图, 如题 4.4 图 (i₂) 所示。

(3) 梁的最大剪力和弯矩为

$$|F_{s\max}| = \frac{5}{8}qa, \quad |M_{\max}| = \frac{1}{8}qa^2$$



续题 4.4 图

(j) 如题 4.4 图 (j) 所示。

解法同题 4.4 (a)。建立题 4.4 图 (j₁) 所示坐标系。

支座反力

$$F_{RC} = F_{RE} = 40 \text{ kN}$$

(1) 列剪力方程和弯矩方程。

$$AC \text{ 段} \quad F_s(x) = -qx = -30x \quad (0 \leq x < 1)$$

$$M(x) = -\frac{1}{2}qx^2 = -15x^2 \quad (0 \leq x \leq 1)$$

$$CD \text{ 段} \quad F_s(x) = 10 \quad (1 < x < 2)$$

$$M(x) = 10x - 25 \quad (1 \leq x \leq 2)$$

$$DE \text{ 段} \quad F_s(x) = -10 \quad (2 < x < 3)$$

$$M(x) = 15 - 10x \quad (2 \leq x \leq 3)$$

$$EB \text{ 段} \quad F_s(x) = 120 - 30x \quad (3 < x \leq 4)$$

$$M(x) = -15(4-x)^2 \quad (3 \leq x \leq 4)$$

(2) 作剪力图、弯矩图, 如题 4.4 图(j₂)所示。

(3) 梁的最大剪力和弯矩为

$$|F_{s\max}| = 30 \text{ kN}, \quad |M_{\max}| = 15 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

(k) 如题 4.4 图(k)所示。

解法同题 4.4(a)。建立题 4.4 图(k₁)所示坐标系。

(1) 列剪力方程和弯矩方程。

$$AC \text{ 段} \quad F_s(x) = -qx \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$M(x) = -\frac{1}{2}qx^2 \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$CB \text{ 段} \quad F_s(x) = q(x - 2a) \quad (a \leq x \leq 2a)$$

$$M(x) = \frac{1}{2}qx^2 - 2qax + qa^2 \quad (a \leq x < 2a)$$

(2) 作剪力图、弯矩图, 如题 4.4 图(k₂)所示。

(3) 梁的最大剪力和弯矩为

$$|F_{s\max}| = qa, \quad |M_{\max}| = qa^2$$

(l) 如题 4.4 图(l)所示。

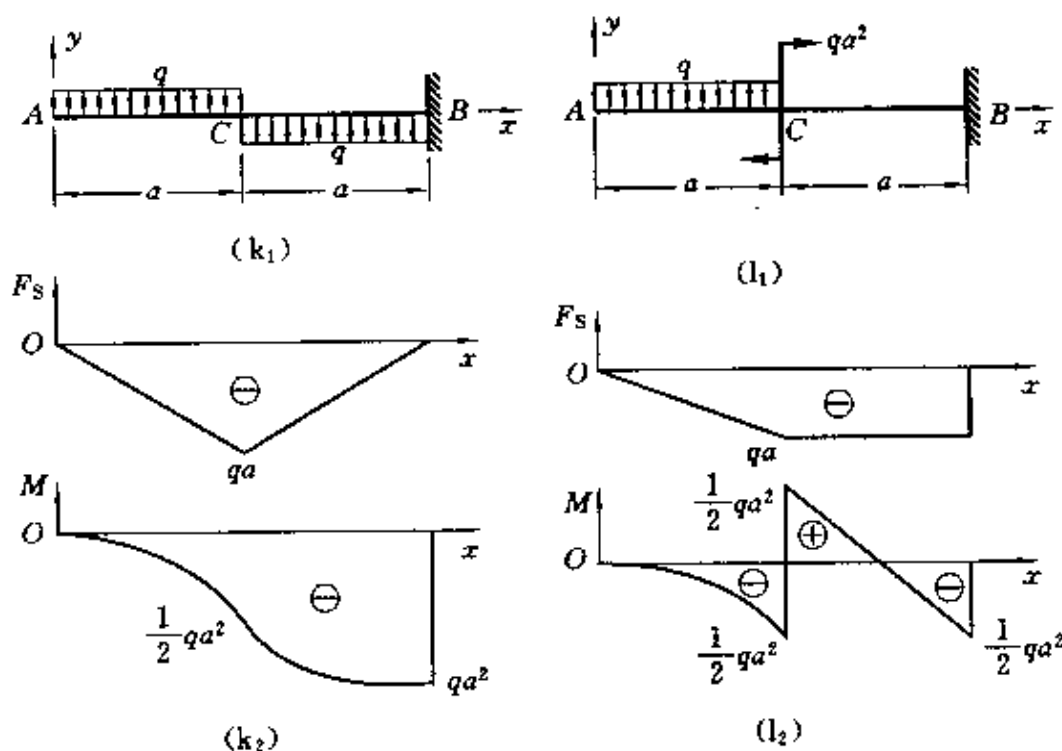
解法同题 4.4(a)。建立题 4.4 图(l₁)所示坐标系。

(1) 列剪力方程和弯矩方程。

$$AC \text{ 段} \quad F_s(x) = -qx \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$M(x) = -\frac{1}{2}qx^2 \quad (0 \leq x < a)$$

$$CB \text{ 段} \quad F_s(x) = -qa \quad (a \leq x < 2a)$$



续题 4.4 图

$$M(x) = -qa\left(x - \frac{a}{2}\right) + qa^2 \quad (a < x < 2a)$$

(2) 作剪力图、弯矩图, 如题 4.4 图(l₂)所示。

(3) 梁的最大剪力和弯矩为

$$|F_{S\max}| = qa, \quad |M_{\max}| = \frac{1}{2}qa^2$$

(m) 如题 4.4 图(m)所示。

解法同题 4.4(a)。建立题 4.4 图(m₁)所示坐标系。

(1) 列剪力方程和弯矩方程。

AC 段 $F_s(x) = \frac{q}{2}(a - 2x) \quad (0 < x \leq a)$

$$M(x) = \frac{qx}{2}(a - x) \quad (0 \leq x \leq a)$$

CB 段 $F_s(x) = \frac{q}{2}(2x - 3a) \quad (a \leq x < 2a)$

$$M(x) = \frac{q}{2}(x^2 - 3ax + 2a^2) \quad (a \leq x \leq 2a)$$

(2) 作剪力图、弯矩图, 如题 4.4 图(m₂)所示。

(3) 梁的最大剪力和弯矩为

$$|F_{S\max}| = \frac{qa}{2}, \quad |M_{\max}| = \frac{1}{8}qa^2$$

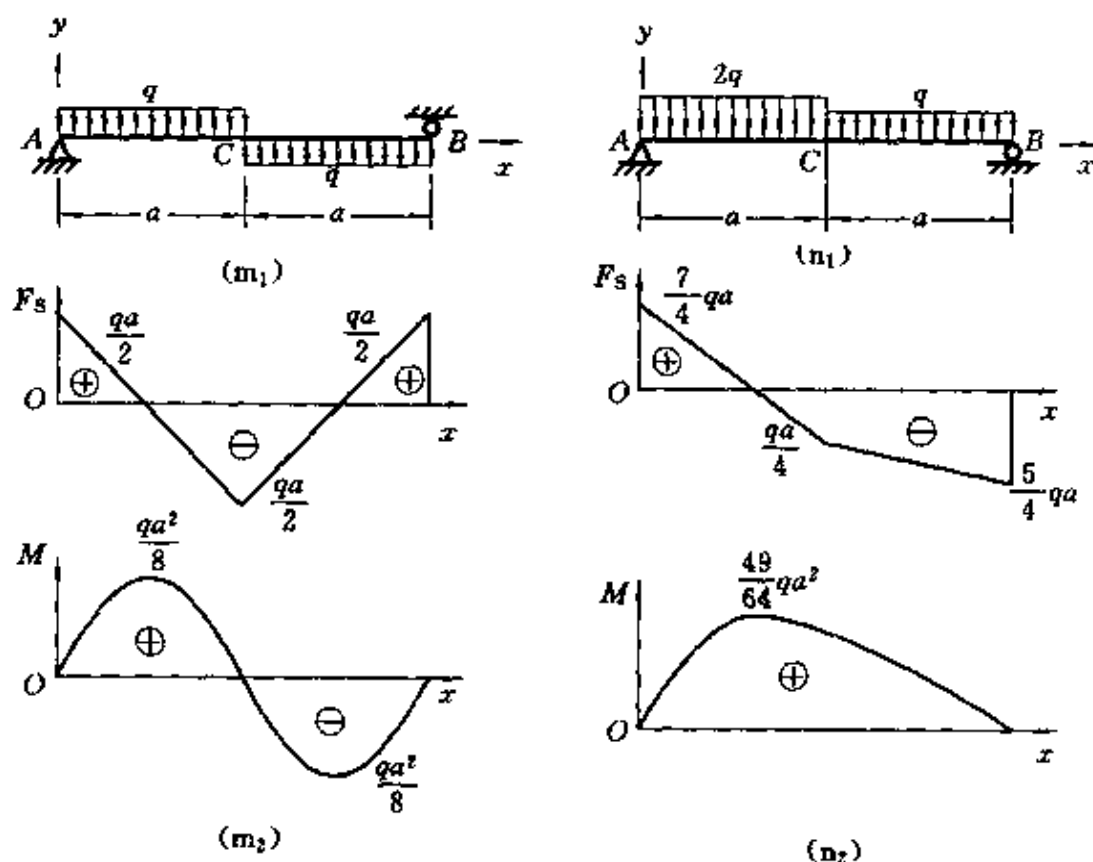
(n) 如题 4.4 图(n)所示。

解法同题 4.4(a)。建立题 4.4 图(n₁)所示坐标系。

(1) 列剪力方程和弯矩方程。

AC 段 $F_S(x) = \frac{q}{4}(7a - 8x) \quad (0 < x \leq a)$

$$M(x) = \frac{1}{4}qx(7a - 2x) \quad (0 \leq x \leq a)$$



续题 4.4 图

$$CB \text{ 段} \quad F_s(x) = \frac{q}{4}(3a - 4x) \quad (a \leq x < 2a)$$

$$M(x) = \frac{q}{4}(2a^2 + 3ax - 2x^2) \quad (a \leq x \leq 2a)$$

(2) 作剪力图、弯矩图, 如题 4.4 图(n₂)所示。

(3) 梁的最大剪力和弯矩为

$$|F_{s\max}| = \frac{7}{4}qa, \quad |M_{\max}| = \frac{49}{64}qa^2$$

(o) 如题 4.4 图(o)所示。

解法同题 4.4(a)。建立题 4.4 图(o₁)所示坐标系。

(1) 列剪力方程和弯矩方程。

$$AC \text{ 段} \quad F_s(x) = qx \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$M(x) = \frac{1}{2}qx^2 \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$CD \text{ 段} \quad F_s(x) = q(2a - x) \quad (a \leq x \leq 3a)$$

$$M(x) = \frac{1}{2}qx^2 - q(x - a)^2 \quad (a \leq x \leq 3a)$$

$$DB \text{ 段} \quad F_s(x) = q(x - 4a) \quad (3a \leq x \leq 4a)$$

$$M(x) = \frac{q}{2}(4a - x)^2 \quad (3a \leq x \leq 4a)$$

(2) 作剪力图、弯矩图, 如题 4.4 图(o₂)所示。

(3) 梁的最大剪力和弯矩为

$$|F_{s\max}| = qa, \quad |M_{\max}| = qa^2$$

(p) 如题 4.4 图(p)所示。

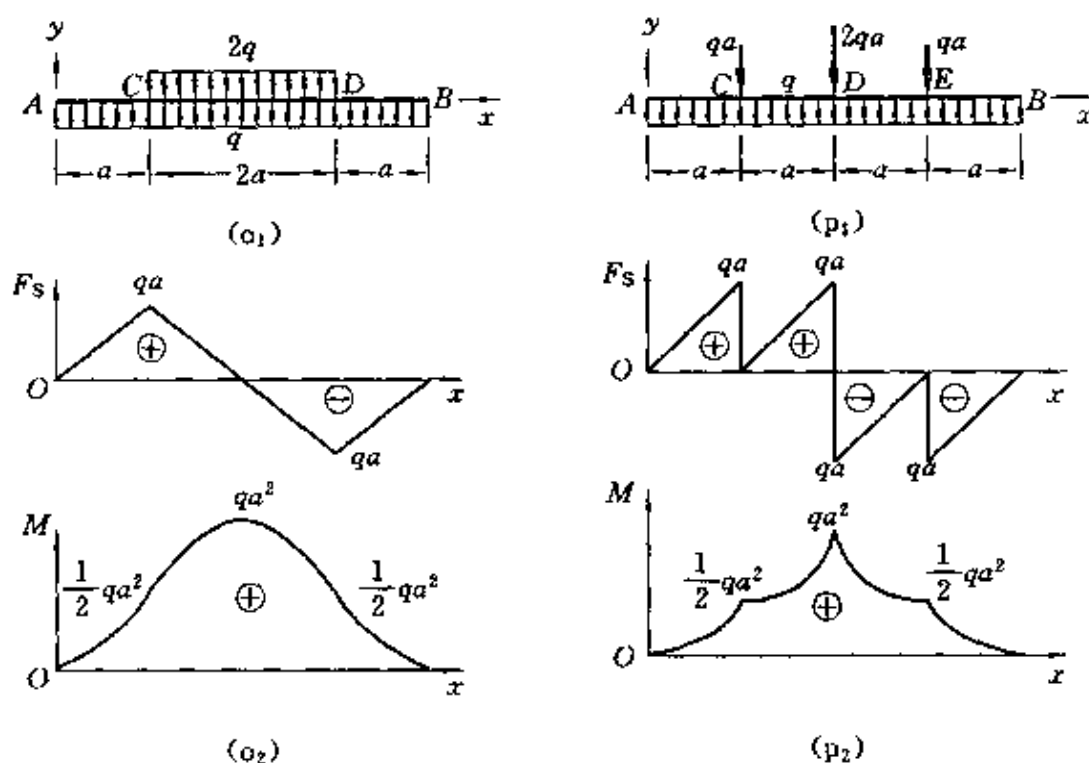
解法同题 4.4(a)。建立题 4.4 图(p₁)所示坐标系。

(1) 列剪力方程和弯矩方程。

$$AC \text{ 段} \quad F_s(x) = qx \quad (0 \leq x < a)$$

$$M(x) = \frac{1}{2}qx^2 \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$CD \text{ 段} \quad F_s(x) = qx - qa \quad (a < x < 2a)$$



续题 4.4 图

$$M(x) = q \frac{x^2}{2} - qa(x - a) \quad (a \leq x \leq 2a)$$

DE 段 $F_s(x) = qx - 3qa \quad (2a < x < 3a)$

$$M(x) = \frac{1}{2}qx^2 - 3qax + 5qa^2 \quad (2a \leq x \leq 3a)$$

EB 段 $F_s(x) = q(x - 4a) \quad (3a < x \leq 4a)$

$$M(x) = \frac{q}{2}(4a - x)^2 \quad (3a \leq x \leq 4a)$$

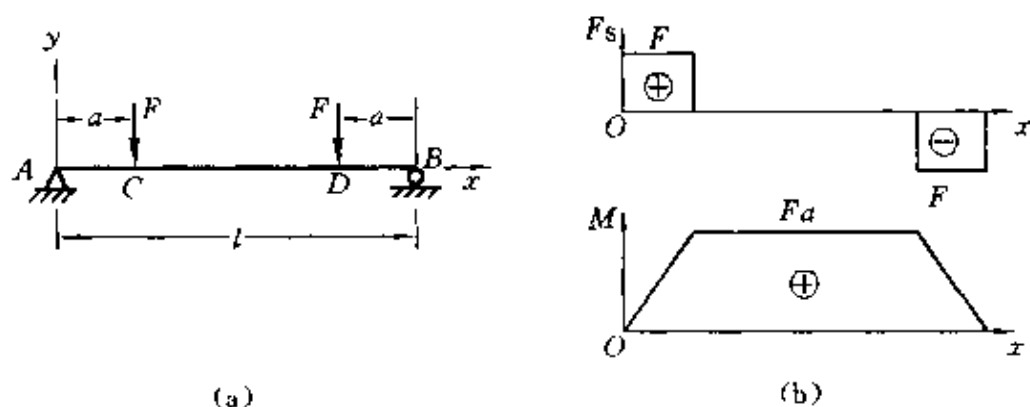
(2) 作剪力图、弯矩图, 如题 4.4 图(p₂)所示。

(3) 梁的最大剪力和弯矩为

$$|F_{s\max}| = qa, \quad |M_{\max}| = qa^2$$

4.5 作题 4.5 图(a)所示梁的剪力图 and 弯矩图。梁在 CD 段的变形称为纯弯曲。试问纯弯曲有何特征?

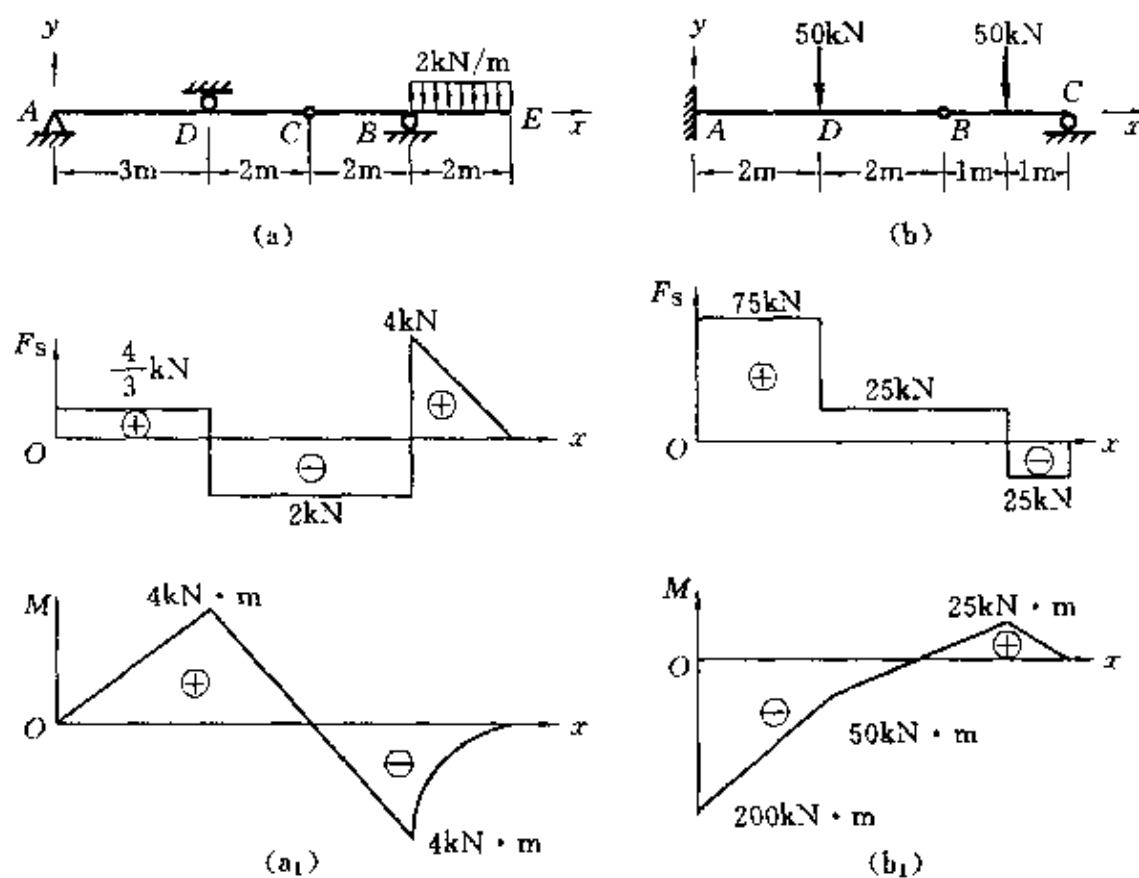
解 作弯矩图和剪力图, 如题 4.5 图(b)所示。从梁的剪力图 and 弯矩图可知, 在 CD 段, 梁的横截面上的内力只有弯矩, 并且等



题 4.5 图

于常数,剪力等于零。因此,纯弯曲梁的横截面上只有正应力没有剪应力。纯弯曲梁的正应力公式为精确解。

4.6 作题 4.6 图(a)、(b)所示各梁的剪力图和弯矩图。



题 4.6 图

解 (a) 如题 4.6 图(a)所示。

根据平衡条件, 求出各支座反力

$$F_{RA} = \frac{4}{3} \text{ kN}, \quad F_{RD} = \frac{10}{3} \text{ kN}, \quad F_{RB} = 6 \text{ kN}$$

应用载荷集度、剪力和弯矩间的关系, 直接作剪力图和弯矩图, 如题 4.6 图(a₁)所示。

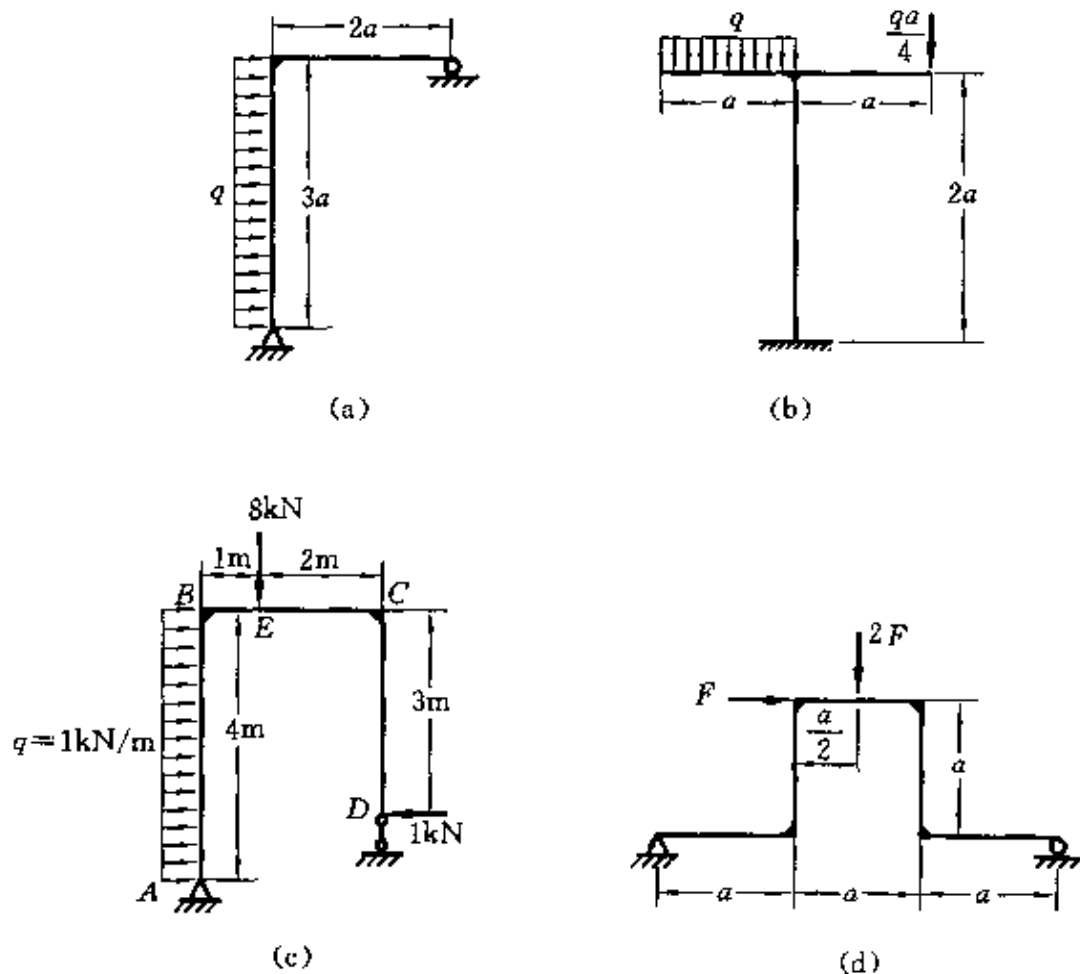
(b) 如题 4.6 图(b)所示。

根据平衡条件, 求出各支座反力

$$F_{RA} = 75 \text{ kN}, \quad F_{RC} = 25 \text{ kN}, \quad M_A = -200 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

应用载荷集度、剪力和弯矩间的关系, 直接作剪力图和弯矩图, 如题 4.6 图(b₁)所示。

4.7 作题 4.7 图(a)、(b)、(c)、(d)所示的刚架弯矩图。



题 4.7 图

解 (a) 如题 4.7 图(a)所示。

取整体为研究对象,受力图如题 4.7 图(a₁)所示,由平衡条件有

$$\sum F_x = 0, \quad q \times 3a - F_{RAx} = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{RC} - F_{RAy} = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_C = 0, \quad q \times 3a \times \frac{3}{2}a = F_{RAy} \times 2a \quad (3)$$

解①、②、③式得

$$F_{RAx} = 3qa, \quad F_{RC} = F_{RAy} = \frac{9}{4}qa$$

作弯矩图,如题 4.7 图(a₂)所示。

(b) 如题 4.7 图(b)所示。

作弯矩图,如题 4.7 图(b₁)所示。

(c) 如题 4.7 图(c)所示。

取整体为研究对象,受力图如题 4.7 图(c₁)所示,由平衡条件有

$$\sum F_x = 0, \quad q \times 4 - 1 - F_{RAx} = 0 \quad (1)$$

$$\sum M_A = 0, \quad 1 \times 1 + F_{RD} \times 3 - 8 \times 1 - q \times 4 \times 2 = 0 \quad (2)$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{RAy} + F_{RD} - 8 = 0 \quad (3)$$

解①、②、③式得

$$F_{RAx} = 3 \text{ kN}, \quad F_{RD} = 5 \text{ kN}, \quad F_{RAy} = 3 \text{ kN}$$

作弯矩图,如题 4.7 图(c₂)所示。

(d) 如题 4.7 图(d)所示。

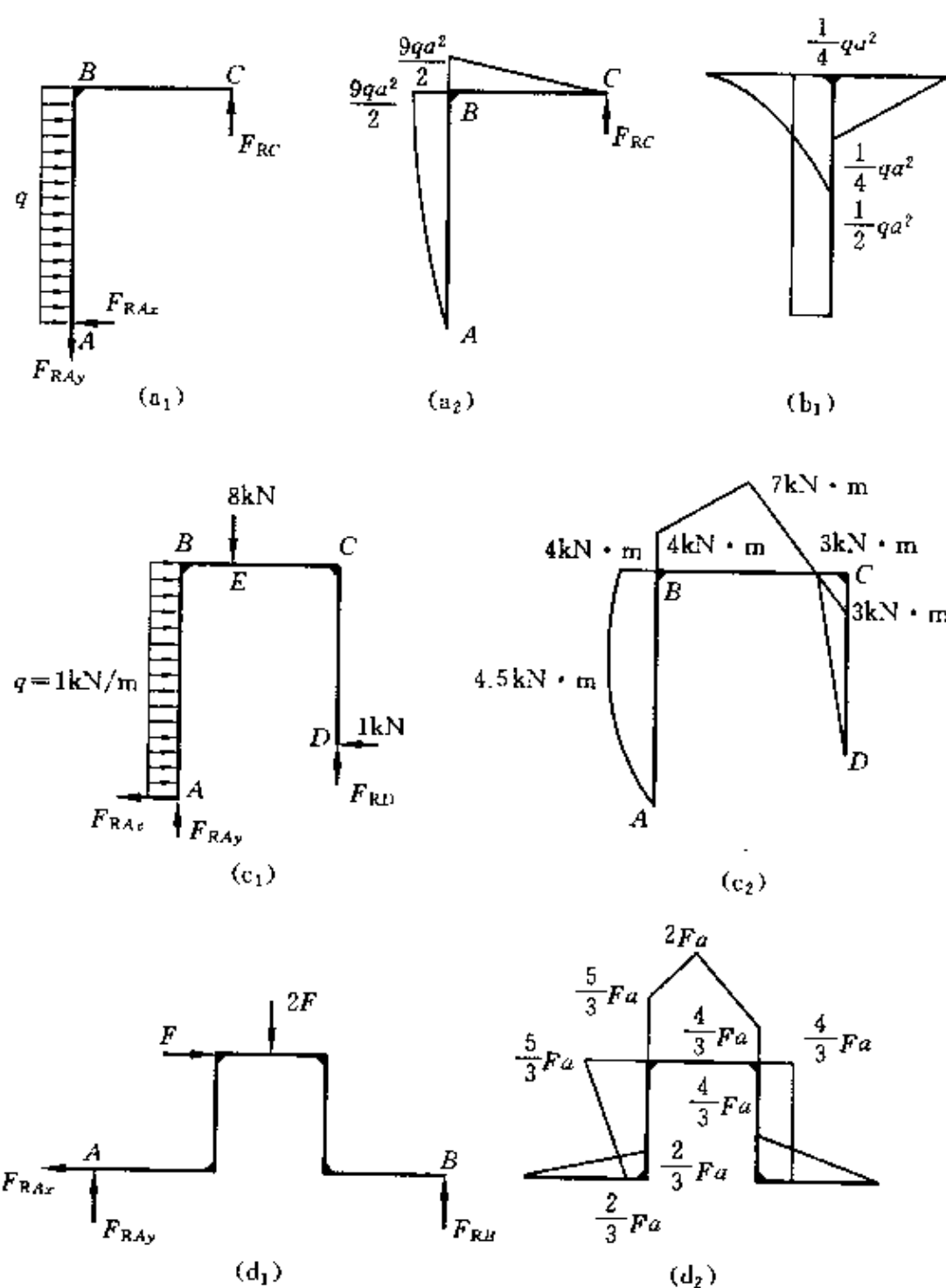
取整体为研究对象,受力图如题 4.7 图(d₁)所示,由平衡条件有

$$\sum F_x = 0, \quad -F_{RAx} + F = 0 \quad (1)$$

$$\sum M_A = 0, \quad F_{RB} \times 3a - 2F \times \frac{3}{2}a - Fa = 0 \quad (2)$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{RAy} + F_{RB} - 2F = 0 \quad (3)$$

解①、②、③式得

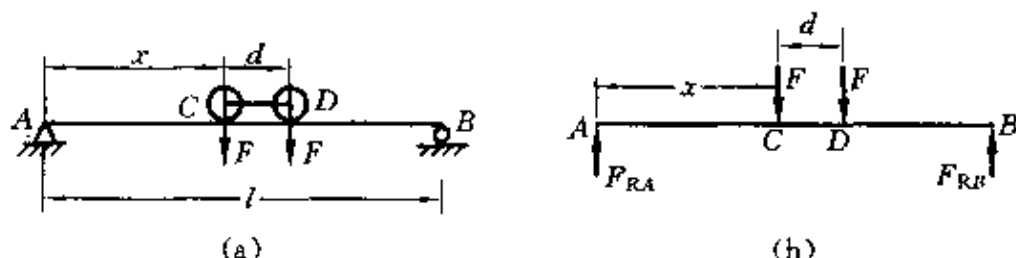


续题 4.7 图

$$F_{RAx} = F, \quad F_{RB} = \frac{4}{3}F, \quad F_{RAy} = \frac{2}{3}F$$

作弯矩图, 如题 4.7 图(d₂)所示。

4.8 如题 4.8 图(a)所示,桥式起重机大梁上的小车的每个轮子对大梁的压力均为 F ,试问小车在什么位置时梁内的弯矩为最大? 其最大弯矩等于多少? 最大弯矩的作用截面在何处? 设小车的轮距为 d ,大梁的跨度为 l 。



题 4.8 图

解 取大梁为研究对象,作受力图,如题 4.8 图(b)所示,根据平衡条件有

$$\sum M_A = 0, \quad F_{RB}l - Fx - F(x + d) = 0$$

$$F_{RB} = \frac{F(2x + d)}{l}$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{RA} + F_{RB} = 2F$$

$$F_{RA} = \frac{F(2l - d - 2x)}{l}$$

AC 段的弯矩方程 $M(x) = \frac{F(2l - d - 2x)}{l}x$

$M(x)$ 取极值的条件是其一阶导数等于零,即

$$\frac{dM}{dx} = 0, \quad 2l - d - 4x = 0, \quad x = \frac{2l - d}{4}$$

AC 段最大弯矩在左轮着力点 C 处

$$M_{\max}^C = \frac{F}{2}(l - d) + \frac{Fd^2}{8l}$$

此时 BD 段的最大弯矩产生在 D 轮着力点处,其大小为

$$M_{\max}^D = \frac{F(2x + d)}{l}(l - x - d) = \frac{F}{2}(l - d) - \frac{3Fd^2}{8l}$$

将以上左右两轮着力点处的 M_{\max} 相比较,可知梁在左轮着力

点C处截面上弯矩最大。因为结构对称,若右轮的着力点与右支座的距离等同于前一种情况下左轮距左支座的距离,那么最大弯矩将产生在右轮着力点处。其数值和前一种情况的 M_{\max} 相等。

4.9 土壤与静水压力往往按线性规律分布。若简支梁在按线性规律分布的载荷作用下(题4.9图(a)),试作剪力图和弯矩图。

解 利用平衡方程 $\sum M_B=0$ 求支反力 F_{RA} 时,三角形分布载荷对B点的力矩,等于载荷面积与其形心到B点距离的乘积。这样,由 $\sum M_B=0$,得

$$F_{RA}l - \frac{q_0 l}{2} \times \frac{l}{3} = 0$$

$$F_{RA} = \frac{q_0 l}{6}$$

同理,由 $\sum M_A=0$,可以求得

$$F_{RB} = \frac{q_0 l}{3}$$

以A端为坐标原点,在坐标为 x 的截面上,载荷集度为

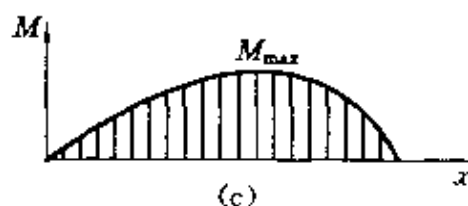
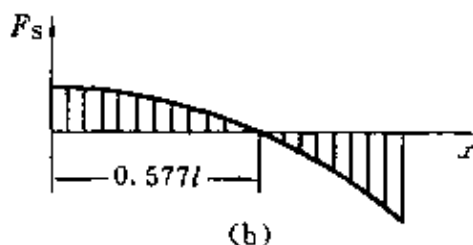
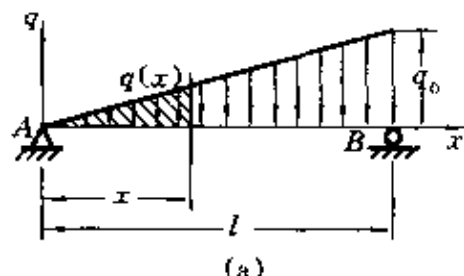
$$q(x) = q_0 \frac{x}{l}$$

在这一截面的左侧,分布载荷的合力等于图中画阴影线的三角形面积。 x 截面上的剪力和弯矩分别为

$$F_s(x) = F_{RA} - \frac{q(x)x}{2} = \frac{q_0 l}{6} - \frac{q_0 x^2}{2l} \quad (1)$$

$$M(x) = F_{RA}x - \frac{q(x)x}{2} \times \frac{x}{3} = \frac{q_0 l x}{6} \left(1 - \frac{x^2}{l^2} \right) \quad (2)$$

由①式和②式作剪力图(题4.9图(b))和弯矩图(题4.9图(c))。最大弯矩发生于 $F_s(x)=0$ 的截面上,令①式等于零,即



题4.9图

$$\frac{q_0 l}{6} - \frac{q_0 x^2}{2l} = 0$$

由此解出 $x = \frac{l}{\sqrt{3}} = 0.577l$

将上式代入②式, 求出最大弯矩为

$$M_{\max} = \frac{q_0 l^2}{9\sqrt{3}} = \frac{q_0 l^2}{15.6}$$

在②式中令 $x=l/2$, 求出跨度中点截面上的弯矩为

$$M_{l/2} = \frac{q_0 l^2}{16}$$

可见, M_{\max} 与 $M_{l/2}$ 相差很小, 故可用跨度中点截面上的弯矩代替最大弯矩。

还可以用另一种方法求解。由公式(4-3), 得

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} = q(x) = -q_0 \frac{x}{l}$$

将上式两端积分两次, 得

$$\frac{dM(x)}{dx} = F_s(x) = -\frac{q_0}{2l}x^2 + C \quad (3)$$

$$M(x) = -\frac{q_0}{6l}x^3 + Cx + D \quad (4)$$

梁的两端为铰支座, 弯矩应等于零, 故有以下边界条件:

$$x=0 \text{ 时, } M(x)=0$$

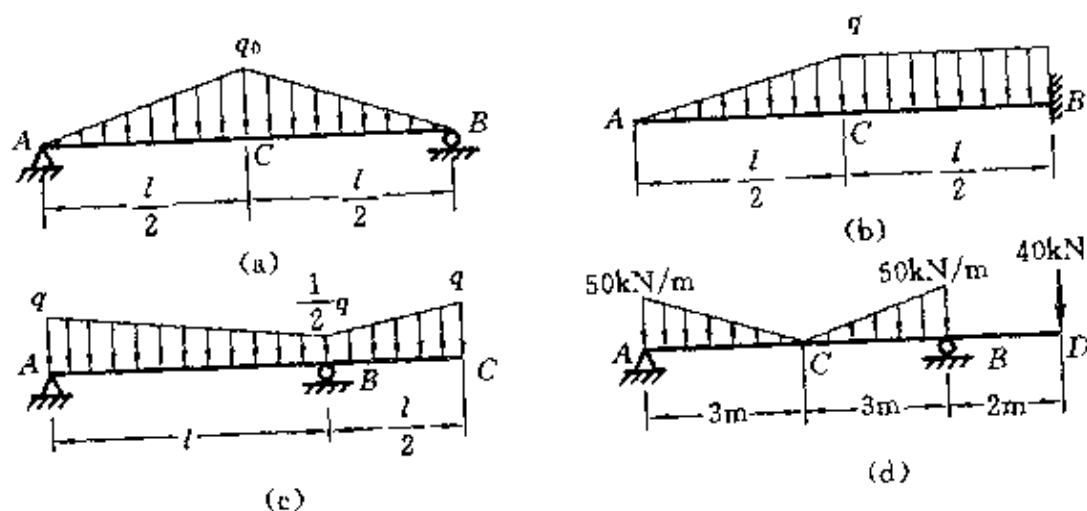
$$x=l \text{ 时, } M(x)=0$$

使③、④两式满足以上边界条件, 得

$$C = \frac{q_0 l}{6}, \quad D = 0$$

代回③式和④式, 便可得到剪力方程和弯矩方程, 依据剪力方程和弯矩方程, 画剪力图和弯矩图。

4.10 作题 4.10 图(a)、(b)、(c)、(d)所示各梁的剪力图和弯矩图。求出最大剪力和最大弯矩。



题 4.10 图

解 (a) 如题 4.10 图(a)所示。

根据平衡条件, 求出支座反力

$$F_{RA} = F_{RB} = \frac{1}{4}q_0l$$

AC 段的剪力方程和弯矩方程分别为

$$F_S(x) = \frac{1}{4}q_0l - \frac{q_0}{l}x^2 \quad \left(0 \leq x \leq \frac{l}{2}\right)$$

$$M(x) = \frac{1}{4}q_0lx - \frac{q_0}{3l}x^3 \quad \left(0 \leq x \leq \frac{l}{2}\right)$$

因为梁的支承和载荷对称于梁的跨度中点(题 4.10 图(a₁)), 所以剪力图反对称, 弯矩图对称。作剪力图和弯矩图分别如题 4.10 图(a₂)和(a₃)所示。

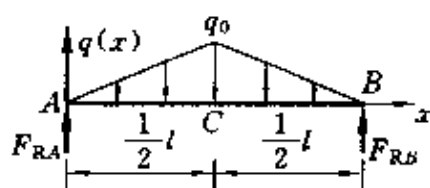
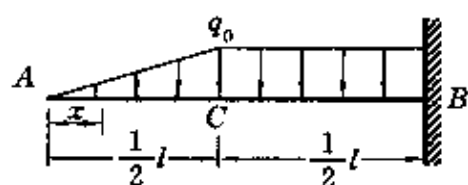
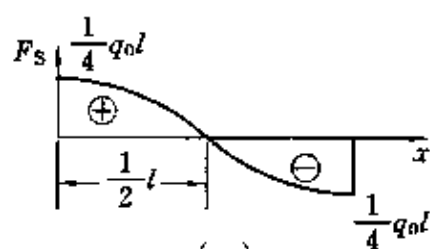
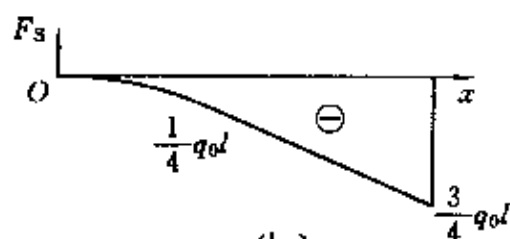
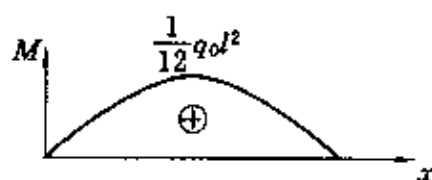
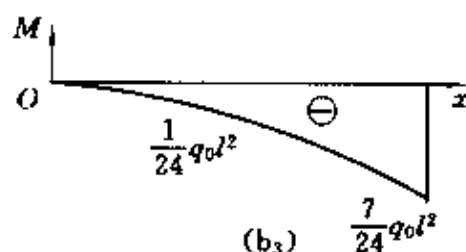
最大剪力和弯矩为

$$|F_{S_{\max}}| = \frac{1}{4}q_0l, \quad |M_{\max}| = \frac{1}{12}q_0l^2$$

(b) 如题 4.10 图(b)所示。

载荷集度(题 4.10 图(b₁))为

$$\text{AC 段} \quad q(x) = -\frac{2q_0x}{l} \quad \left(0 \leq x \leq \frac{l}{2}\right)$$

(a₁)(b₁)(a₂)(b₂)(a₃)(b₃)

续题 4.10 图

CB 段 $q(x) = -q_0 \quad \left(\frac{l}{2} \leq x \leq l \right)$

剪力方程为

AC 段 $F_S(x) = -\frac{q_0 x^2}{l} \quad \left(0 \leq x \leq \frac{l}{2} \right)$

CB 段 $F_S(x) = \frac{q_0}{4}(l - 4x) \quad \left(\frac{l}{2} \leq x \leq l \right)$

弯矩方程为

AC 段 $M(x) = -\frac{q_0 x^3}{3l} \quad \left(0 \leq x \leq \frac{l}{2} \right)$

CB 段 $M(x) = \frac{q_0}{24}(6lx - l^2 - 12x^2) \quad \left(\frac{l}{2} \leq x \leq l \right)$

作剪力图和弯矩图分别如题 4.10 图(b₂)和(b₃)所示。

最大剪力和弯矩为

$$|F_{S\max}| = \frac{3}{4}q_0l, \quad |M_{\max}| = \frac{7}{24}q_0l^2$$

(c) 如题 4.10 图(c)所示。

载荷集度(题 4.10 图(c₁))为

$$AB \text{ 段} \quad q_1(x) = -\frac{q(2l-x)}{2l} \quad (0 \leq x \leq l)$$

$$BC \text{ 段} \quad q_2(x) = -\frac{q}{2l}(2x-l) \quad \left(l \leq x \leq \frac{3l}{2}\right)$$

支座反力为

$$F_{S1} = \frac{3ql}{4}, \quad F_{S2} = \frac{3ql}{8}$$

$$h_1 = \frac{4l}{9}, \quad h_2 = \frac{2l}{9}$$

F_{S1} 为 AB 段 $q_1(x)$ 的合力, F_{S2} 为 BC 段 $q_2(x)$ 的合力。

应用平衡条件求得支座反力

$$F_{RA} = \frac{5ql}{16}, \quad F_{RB} = \frac{13ql}{16}$$

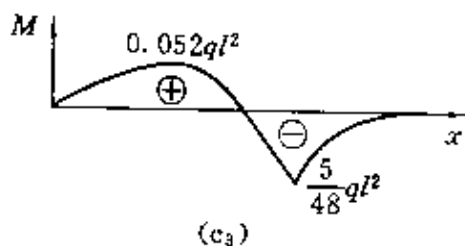
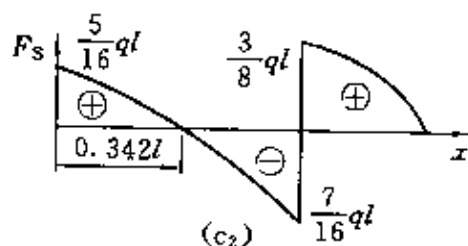
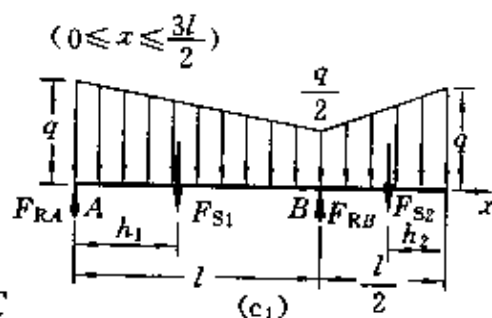
剪力方程为

AB 段

$$\begin{aligned} F_{S1}(x) &= F_{RA} + \int_0^x q_1(x) dx \\ &= \frac{5}{16}ql - \int_0^x \frac{q(2l-x)}{2l} dx \\ &= \frac{5}{16}ql - \frac{q}{2l} \left(2lx - \frac{x^2}{2} \right) \\ &= \frac{qx^2}{4l} - qx + \frac{5}{16}ql \quad (0 \leq x \leq l) \end{aligned}$$

BC 段

$$F_{S2}(x) = \int_l^x q_2(x) dx + F_{RB} - \frac{7}{16}ql$$



续题 4.10 图

$$\begin{aligned}
 &= - \int_l^x \frac{q}{2l}(2x-l)dx + \frac{3}{8}ql = + \frac{3}{8}ql - \frac{q}{2l}(x^2 - lx) \Big|_l^x \\
 &= - \frac{q}{2l}x^2 + \frac{q}{2}x + \frac{3}{8}ql \quad \left(l < x \leq \frac{3l}{2} \right)
 \end{aligned}$$

弯矩方程为

AB 段

$$M_1(x) = \int_0^x F_{S1}(x)dx = \frac{qx^3}{12l} - \frac{1}{2}qx^2 + \frac{5}{16}qlx \quad (0 \leq x \leq l)$$

BC 段

$$\begin{aligned}
 M_2(x) &= \int_{3l/2}^x F_{S2}(x)dx \\
 &= - \frac{q}{6l}x^3 + \frac{q}{4}x^2 + \frac{3}{8}qlx - \frac{9}{16}ql^2 \quad \left(l \leq x \leq \frac{3l}{2} \right)
 \end{aligned}$$

作剪力图和弯矩图分别如题 4.10 图(c₂)和(c₃)所示。

在 AB 段 $F_{S1}(x)=0$ 处, $M_1(x)$ 有极值, 即

$$\frac{1}{4} \left(\frac{x}{l} \right)^2 - \left(\frac{x}{l} \right) + \frac{5}{16} = 0$$

解上式得 $\frac{x}{l} = \frac{4 - \sqrt{11}}{2} \approx 0.342$

将上式代入弯矩方程可得

$$\begin{aligned}
 M_1(x) \Big|_{x=0.342l} &= \frac{q(0.342l)^3}{12l} - \frac{1}{2}q(0.342l)^2 + \frac{5}{16}ql(0.342l) \\
 &= 0.052ql^2
 \end{aligned}$$

将 $x=l$ 代入 $M_1(x)$ 或 $M_2(x)$ 中, 可得最大弯矩。

最大剪力和弯矩为

$$|F_{S\max}| = \frac{7}{16}ql$$

$$|M_{\max}| = \frac{5}{48}ql^2$$

(d) 如题 4.10 图(d)所示。

支座反力(题 4.10 图(d₁))

$$F_{S1} = F_{S2} = \left(\frac{1}{2} \times 50 \times 3 \right) \text{ kN} \\ = 75 \text{ kN}$$

$$h_1 = h_2 = \left(\frac{1}{3} \times 3 \right) \text{ m} = 1 \text{ m}$$

$$F_{RA} = 61.7 \text{ kN}$$

$$F_{RB} = 128 \text{ kN}$$

AC 段

载荷集度为

$$q_1(x) = - \left(50 - \frac{50}{3}x \right) \text{ kN/m} \\ (0 \leq x \leq 3)$$

载荷集度、剪力、弯矩之间的微分和积分关系得

$$\frac{dF_S(x)}{dx} = q(x)$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = F_S(x)$$

$$F_{S1}(x) = \int_0^x q_1(x)dx + F_{RA} = -50x + \frac{25}{3}x^2 + 61.7$$

$$M_1(x) = \int_0^x F_{S1}(x)dx + 61.7 = -25x^2 + \frac{25}{9}x^3 + 61.7x$$

所以 AC 段的剪力方程和弯矩方程分别为

$$F_{S1}(x) = -50x + 8.33x^2 + 61.7 \quad (0 \leq x \leq 3)$$

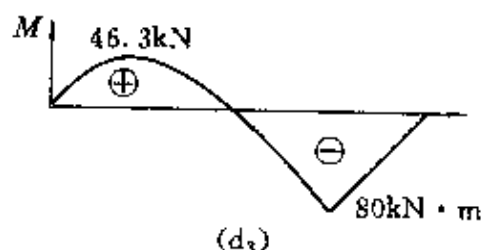
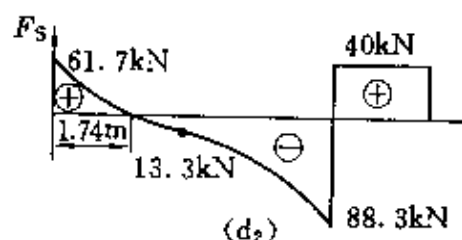
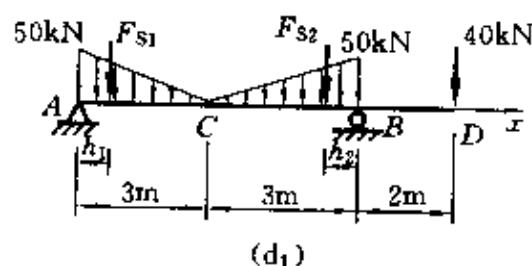
$$M_1(x) = -25x^2 + 2.78x^3 + 61.7x \quad (0 \leq x \leq 3)$$

当 $F_{S1}(x) = 0$ 时 $M_1(x)$ 有极值, 即

$$-50x + 8.33x^2 + 61.7 = 0$$

解得 $x = 1.74 \text{ m}$, 代入弯矩方程, 得

$$M_1(x) \Big|_{x=1.74} = [-25(1.74)^2 + 2.78(1.74)^3]$$



续题 4.10 图

$$+ 61.7 \times 1.74] \text{ kN} \cdot \text{m} = 46.3 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

CB 段

载荷集度为

$$q_2(x) = -\frac{50}{3}(x-3) \quad (3 \leq x \leq 6)$$

剪力方程为

$$F_{S2}(x) + 13.3 = \int_3^x q_2(x) dx = -\int_3^x \frac{50}{3}(x-3) dx$$

$$F_{S2}(x) = -8.33x^2 + 50x - 88.3 \quad (3 \leq x \leq 6)$$

弯矩方程为

$$\begin{aligned} M_2(x) &= F_{RA}x - F_{S1}(x-1) - \frac{1}{2}q_2(x)(x-3) \frac{x-3}{3} \\ &= 61.7x - 75(x-1) - \frac{1}{2} \times \frac{50}{3}(x-3)^3 \times \frac{1}{3} \\ &= -2.78x^3 + 25x^2 - 88.3x + 150 \quad (3 \leq x \leq 6) \end{aligned}$$

作剪力图和弯矩图分别如题 4.10 图(d₂)和(d₃)所示。

最大剪力和弯矩为

$$|F_{S\max}| = 88.3 \text{ kN}, \quad |M_{\max}| = 80 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

4.11 简支梁上的分布载荷按抛物线规律变化(题 4.11 图

(a)), 其方程为 $q(x) = \frac{4q_0x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right)$, 试作剪力图和弯矩图。

解 因为载荷和支承都对称, 所以只要求出分布载荷对梁的合力, 便可确定支座反力。

梁上承受的合力

$$F = \int_0^l q(x) dx = \int_0^l \frac{4q_0x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) dx = \frac{2}{3}q_0l$$

由于对称, 支座反力(题 4.11 图(b))

$$F_{RA} = F_{RB} = \frac{1}{3}q_0l$$

梁上任意截面上的剪力方程和弯矩方程为

$$F_s(x) = \int_0^x q(x) dx$$

$$= -\frac{4q_0}{l} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3l} \right) + C$$

$$M(x) = \int_0^x F_s(x) dx$$

$$= -\frac{4q_0}{l} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12l} \right) + Cx + D$$

利用边界条件, 确定积分常数 C 和 D :

当 $x=0$ 时, $F_s(x) = \frac{1}{3}q_0l$, 所以

$$C = \frac{1}{3}q_0l$$

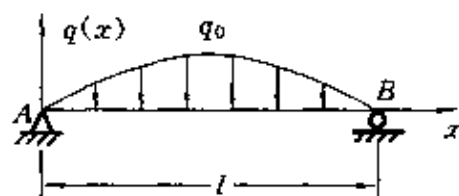
当 $x=0$ 时, $M(x) = 0$, 所以 $D = 0$

所以梁的剪力方程和弯矩方程为

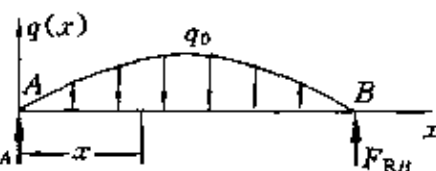
$$F_s(x) = -\frac{4q_0}{l} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3l} \right) + \frac{1}{3}q_0l$$

$$M(x) = -\frac{4q_0}{l} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12l} \right) + \frac{1}{3}q_0lx$$

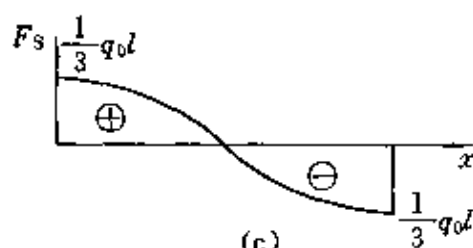
分别作剪力图和弯矩图如题 4.11 图 (c)、(d) 所示。



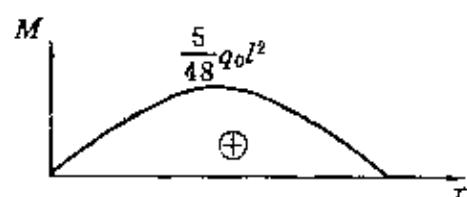
(a)



(b)



(c)



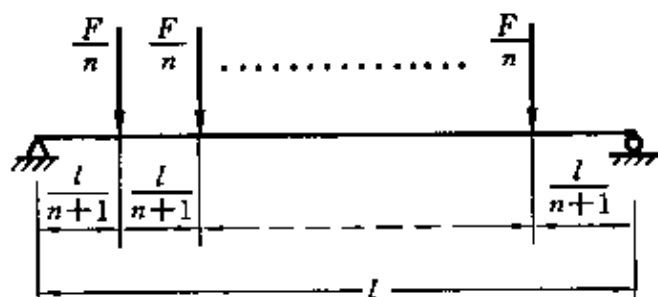
(d)

题 4.11 图

4.12 如题 4.12 图所示, 某简支梁上作用有 n 个间距相等的集中力, 其总载荷为 F , 每个载荷等于 F/n 。梁的跨度为 l , 载荷的间距为 $\frac{l}{n+1}$ 。(1) 试导出梁中最大弯矩的一般公式。(2) 将 (1) 问的答案与承受均布载荷 q 的简支梁的最大弯矩相比较, 设 $ql = F$ 。

解 (1) 由于梁的结构和载荷都对称, 故当 n 为奇数时, 最大弯矩发生在跨度中点处的截面上。当 n 为偶数时, 在跨度中点的两侧, 距离中点为 $\frac{l}{2(n+1)}$ 的截面上产生最大弯矩, 跨度中点处的截面上也有最大弯矩。

当 n 为奇数时最大弯矩一侧有 $\frac{n-1}{2}$ 个 F 力, 故



题 4.12 图

$$\begin{aligned}
 M_{\max} &= \frac{F}{2} \frac{l}{2} - \frac{F}{n} \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{n+1} \right) - \dots - \frac{F}{n} \left(\frac{l}{2} - \frac{(n-1)l/2}{n+1} \right) \\
 &= \frac{Fl}{4} - \frac{F}{n} \frac{l}{2} \frac{n-1}{2} + \frac{F}{n} \frac{l}{n+1} \left(1 + 2 + \dots + \frac{n-1}{2} \right) \\
 &= \left(\frac{n+1}{n} \right) \frac{Fl}{8} \quad \text{①}
 \end{aligned}$$

当 n 为偶数时最大弯矩一侧有 $\frac{n}{2}$ 个 F 力, 故

$$\begin{aligned}
 M_{\max} &= \frac{Fl}{4} - \frac{F}{n} \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{n+1} \right) - \dots - \frac{F}{n} \left(\frac{l}{2} - \frac{nl/2}{n+1} \right) \\
 &= \left(\frac{n+2}{n+1} \right) \frac{Fl}{8} \quad \text{②}
 \end{aligned}$$

(2) 与等效均布载荷 $q = \frac{F}{l}$ 时的最大弯矩的比较。

承受均布载荷时, 梁内的最大弯矩发生在跨度中点处的截面上, 其值为

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} = \frac{F}{l} \times \frac{l^2}{8} = \frac{Fl}{8} \quad \text{③}$$

当 $n=7$ 时, 由①式得 $M_{\max} = \frac{8}{7} \left(\frac{Fl}{8} \right) = 1.14 \frac{Fl}{8}$

当 $n=8$ 时, 由②式得 $M_{\max} = \frac{10}{9} \left(\frac{Fl}{8} \right) = 1.11 \frac{Fl}{8}$

随着 n 的增加, 最大弯矩逐渐趋近于均布载荷作用下的最大弯矩。

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 由①式得

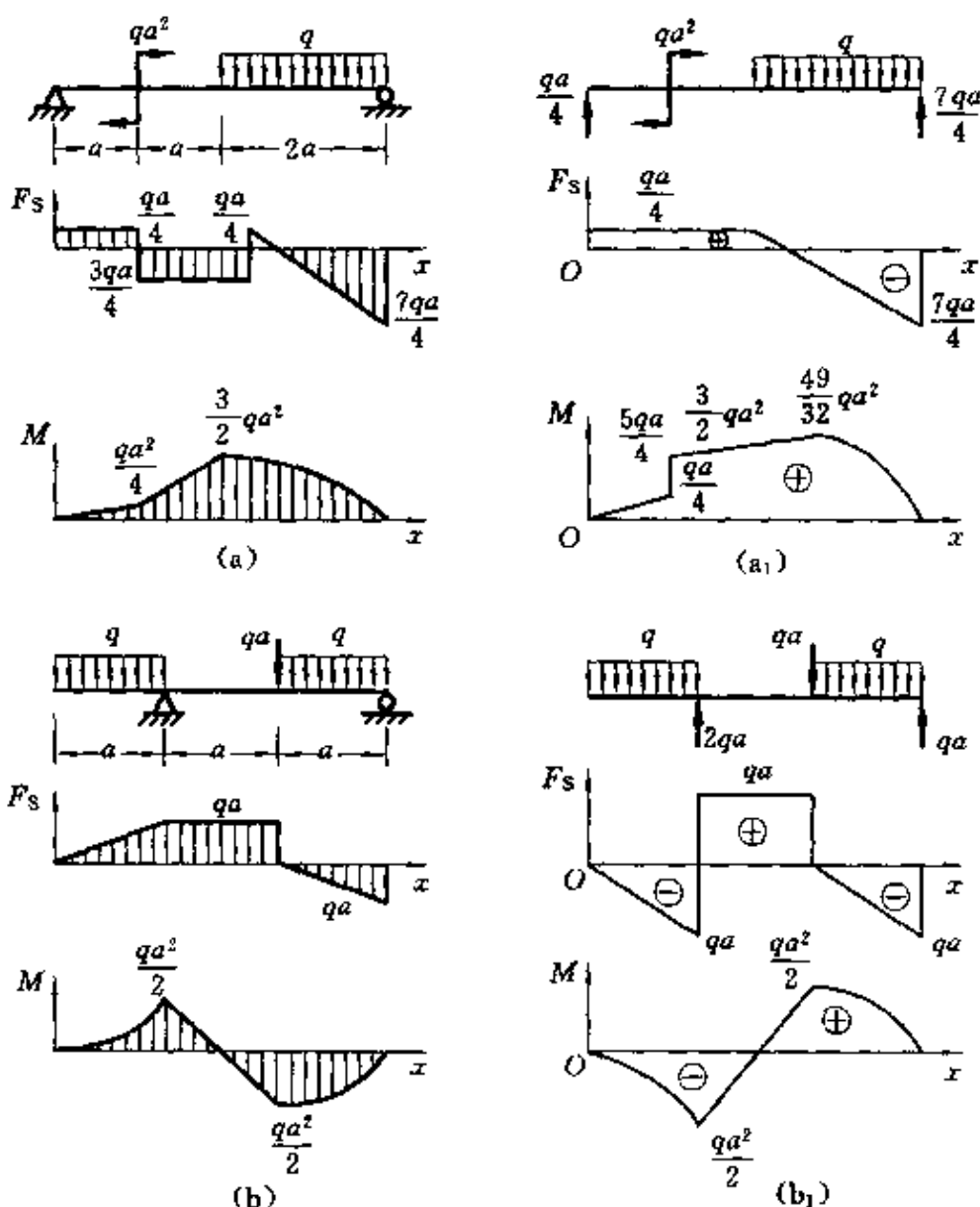
$$M_{\max} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \times \frac{Fl}{8} = \frac{Fl}{8}$$

或

$$M_{\max} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} \times \frac{Fl}{8} = \frac{Fl}{8}$$

这一结果与载荷集度为 $q = \frac{F}{l}$ 的均布载荷作用下的最大弯矩完全相同(见③式)。

4.13 试根据弯矩、剪力和载荷集度间的导数关系,改正题4.13图(a)、(b)、(c)和(d)所示 F_s 图和 M 图中的错误。

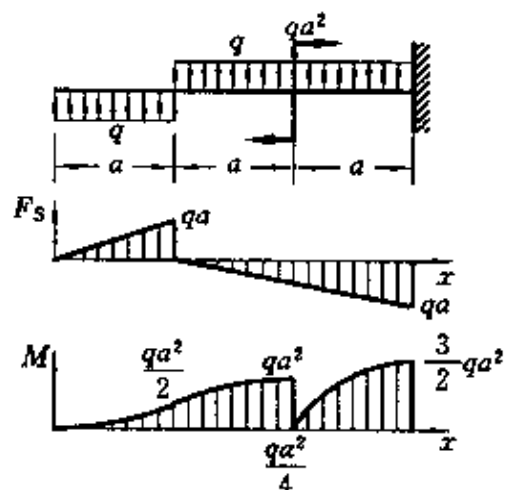


题 4.13 图

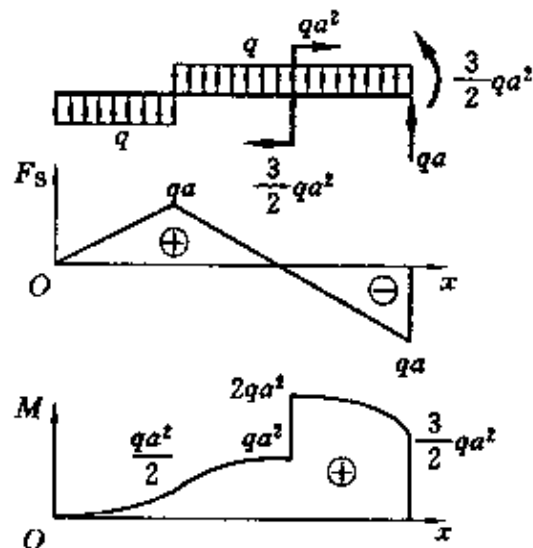
解 (a) 根据平衡条件, 求出支座反力并标示在题 4.13 图 (a₁) 中, 正确的剪力图和弯矩图也画在题 4.13 图 (a₁) 中。

(b) 根据平衡条件, 求出支座反力并标示在题 4.13 图 (b₁) 中, 正确的剪力图和弯矩图也画在题 4.13 图 (b₁) 中。

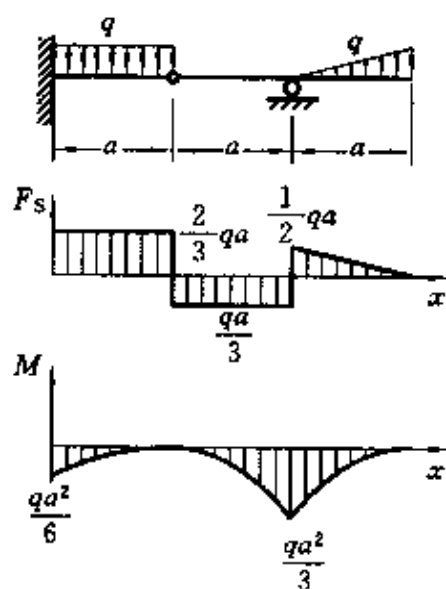
(c) 根据平衡条件, 求出支座反力并标示在题 4.13 图 (c₁) 中, 正确的剪力图和弯矩图也画在题 4.13 图 (c₁) 中。



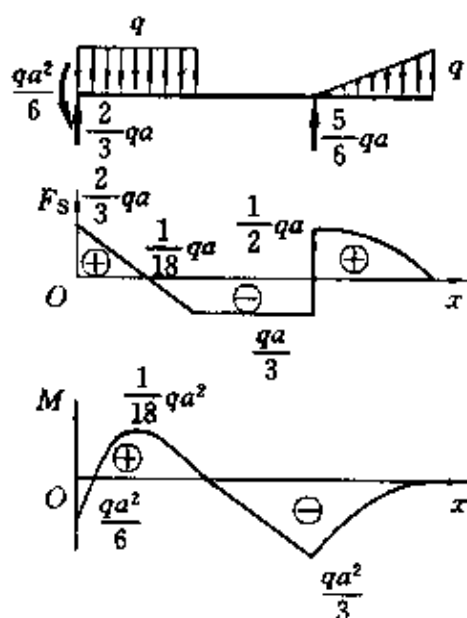
(c)



(c₁)



(d)



(d₁)

续题 4.13 图

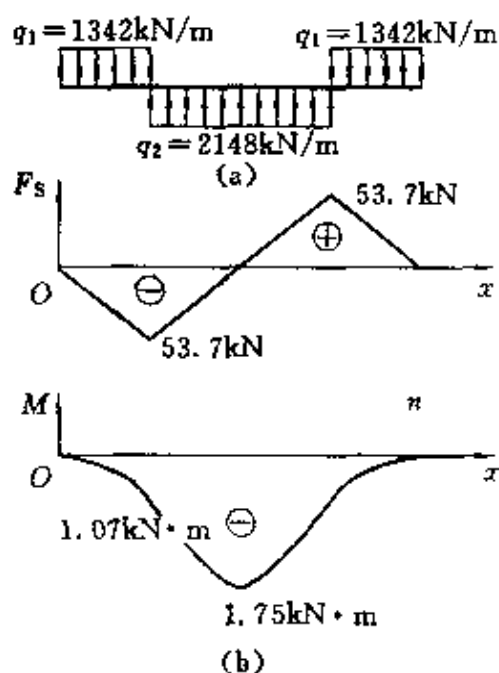
(d) 根据平衡条件, 求出支座反力并标示在题 4.13 图(d₁)中, 正确的剪力图和弯矩图也画在题 4.13 图(d₁)中。

4.14 试作题 2.68 中柴油机活塞销的剪力图和弯矩图, 设作用于活塞销上的力是均匀分布的。

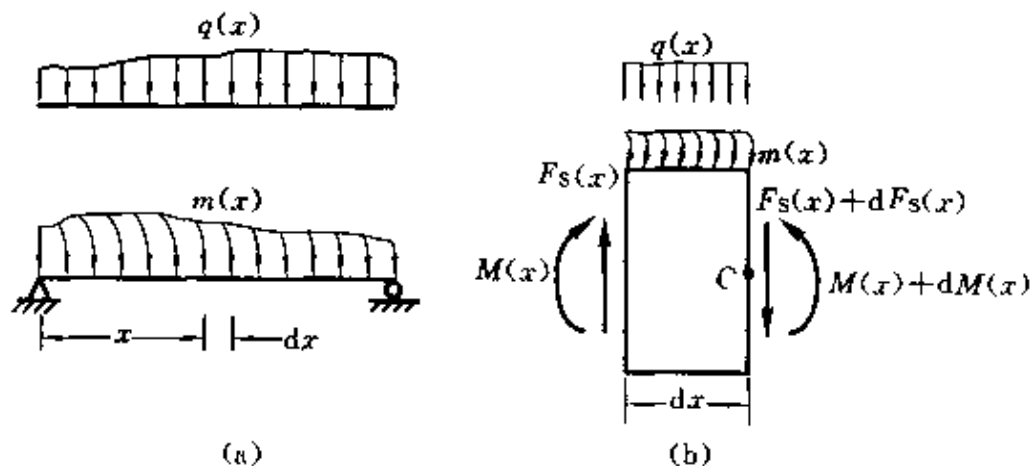
解 活塞销的受力图如题 4.14 图(a)所示, 根据载荷集度、剪力、弯矩之间的关系可以作出剪力图和弯矩图, 如题 4.14 图(b)所示。

由剪力图、弯矩图可以看出, 载荷对称时弯矩图也对称, 而剪力图反对称。若载荷反对称, 则剪力图对称, 弯矩图反对称。

4.15 设沿梁的轴线作用有集度为 $m(x)$ 的分布弯曲力偶矩和集度为 $q(x)$ 的分布力(题 4.15 图(a))。试导出 $q(x)$ 、 $m(x)$ 、 $F_s(x)$ 和 $M(x)$ 之间的导数关系。



题 4.14 图



题 4.15 图

解 从梁中取出长为 dx 的微段(题 4.15 图(b))。由平衡条件

得

$$\begin{aligned}\sum F_y = 0, \quad F_s(x) - [F_s(x) + dF_s(x)] - q(x)dx &= 0 \\ \sum M_c &= 0 \\ -M(x) + M(x) + dM(x) - F_s(x)dx + q(x)dx \\ &\times \frac{dx}{2} - m(x)dx = 0\end{aligned}$$

忽略上式中的二阶微量 $q(x)dx \times \frac{dx}{2}$, 得

$$\frac{dF_s(x)}{dx} = -q(x), \quad \frac{dM(x)}{dx} = F_s(x) + m(x)$$

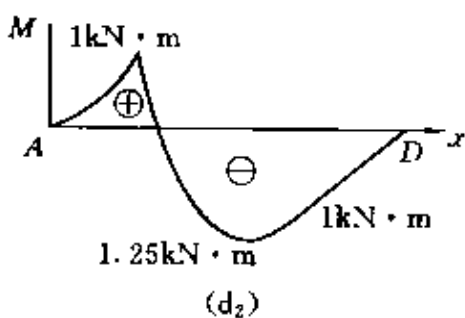
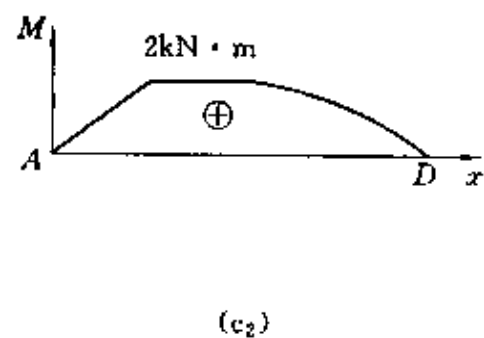
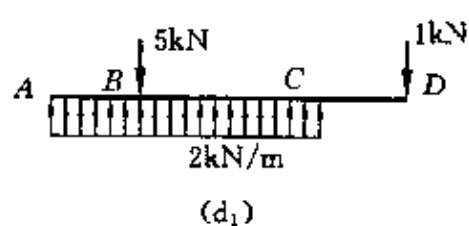
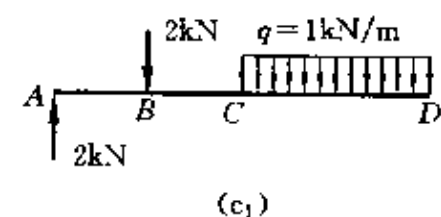
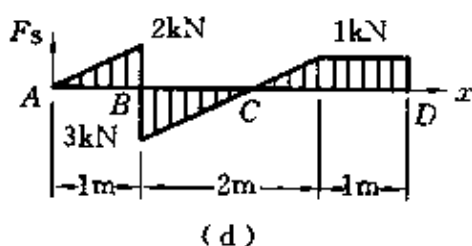
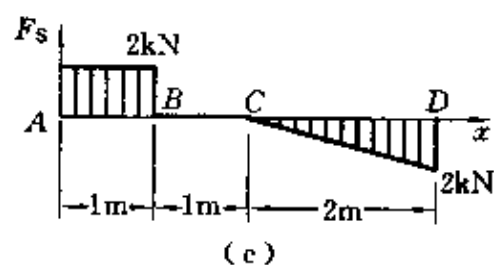
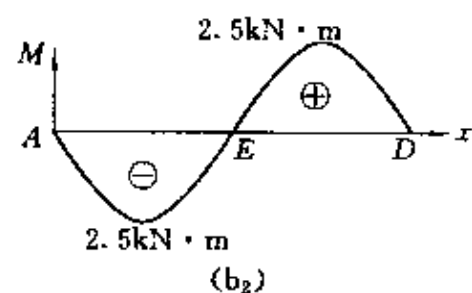
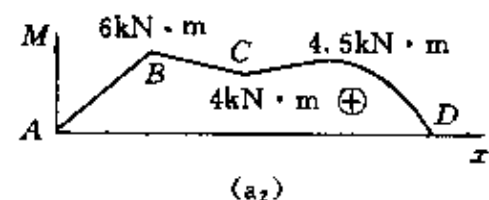
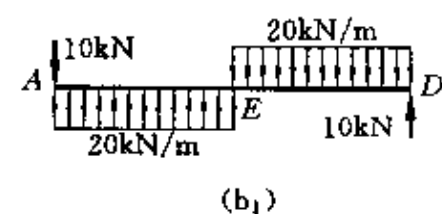
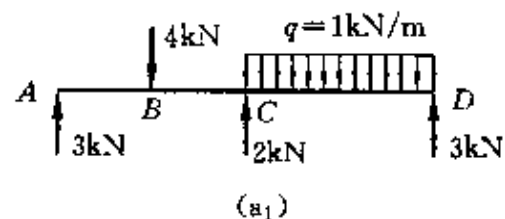
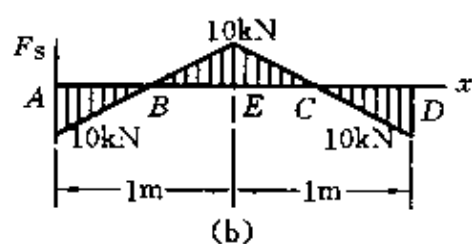
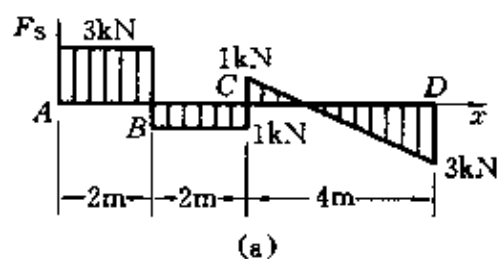
4.16 设梁的剪力图如题 4.16 图(a)、(b)、(c)、(d)所示, 试作弯矩图及载荷图。已知梁上没有作用集中力偶。

解 如题 4.16 图(a)所示。根据集度载荷、剪力、弯矩间的关系, 从左向右观察剪力图, 因为 AB、BC 段的剪力图为水平线, 所以该两段内的 $q=0$, 即无分布载荷, CD 段的 F_s 图为斜直线, 斜率为负, 所以该段上作用有指向朝下的均布载荷, A、B、C、D 四处有剪力突变, 说明该四处有集中力作用, 方向顺着突变的方向, 大小为剪力图在该处的突变值。因此在 A 处有向上的 3 kN、B 处有向下的 4 kN、C 处有向上的 2 kN、D 处有向上的 3 kN 的集中力作用, 作载荷图如题 4.16 图(a₁)所示。根据载荷图和 F_s 图, 作弯矩图如题 4.16 图(a₂)所示。

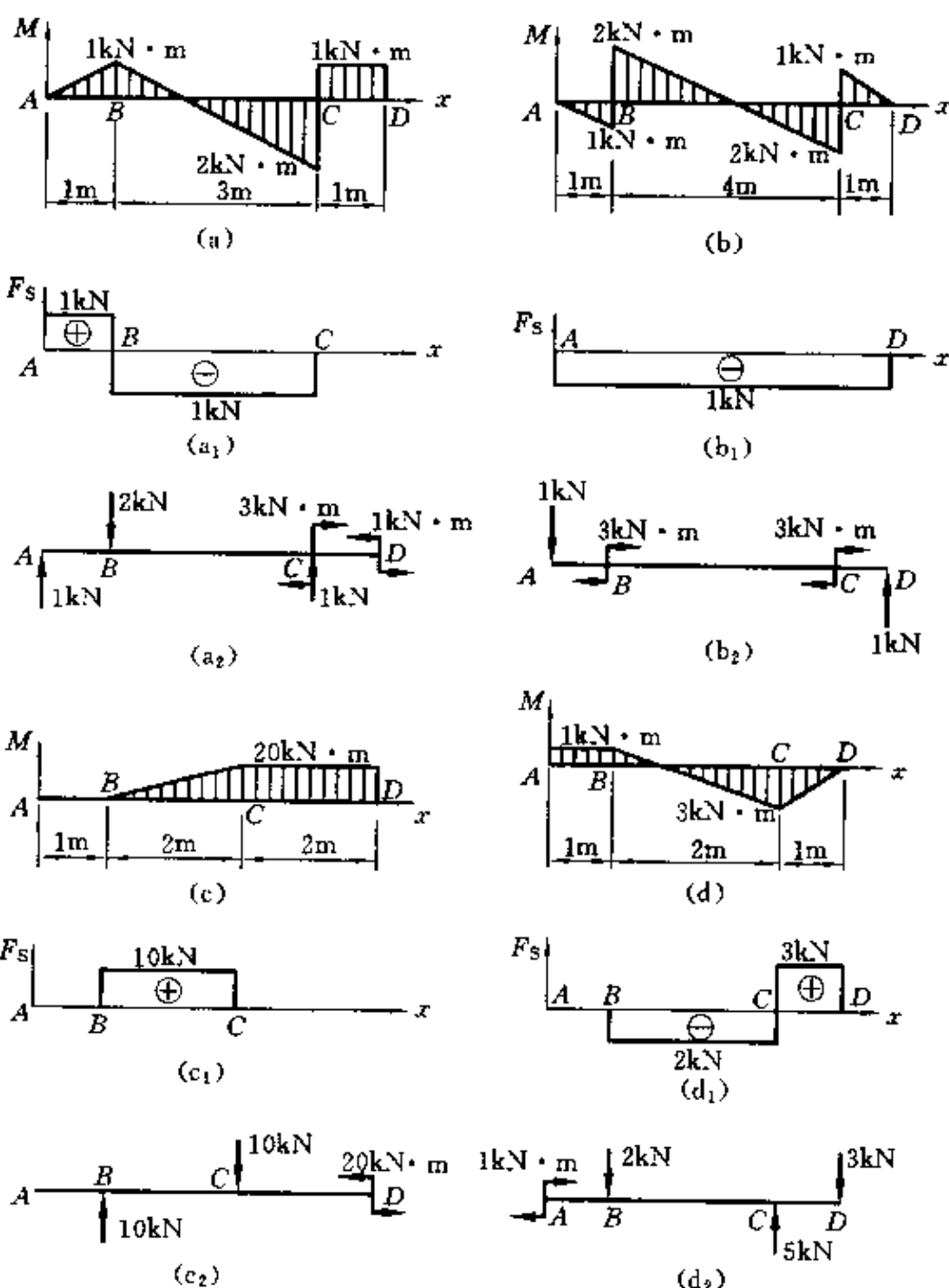
仿照题 4.16 图(a)的方法, 解题 4.16 图(b)、(c)、(d), 作出载荷图、弯矩图如题 4.16 图(b₁)、(b₂)、(c₁)、(c₂)及(d₁)、(d₂)所示。

4.17 已知梁的弯矩图如题 4.17 图(a)、(b)、(c)、(d)所示, 试作梁的载荷图和剪力图。

解 (a) 如题 4.17 图(a)所示。梁的 AB、BC、CD, 这三段的 M 图都是直线, 故在这三段上, 无分布载荷。根据集中力偶处弯矩有突变可知, C、D 处有集中力偶作用, 大小为 M 图突变值, 突增的力偶为顺时针转向, 突减的力偶为逆时针转向。所以 C 处力偶大小



题 4.16 图



题 4.17 图

为 $3 \text{ kN} \cdot \text{m}$, 顺时针; D 处力偶大小为 $1 \text{ kN} \cdot \text{m}$, 逆时针。根据集中力作用处弯矩图有折角, 可以判定 A 、 B 、 C 处有集中力作用, 分别记为 F_A 、 F_B 、 F_C , B 处的弯矩值为 $1 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $M_B = F_A \times 1$, 得 $F_A = 1 \text{ kN}$, C 处的弯矩值为 $-2 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $M_C = F_A \times 4 - F_B \times 3$, 得 $F_B = 2$

kN, D 处的弯矩值为 0, $M_D = F_A \times 5 - F_B \times 4 + F_C \times 1 + 3 - 1$, 得 $F_C = 1$ kN。

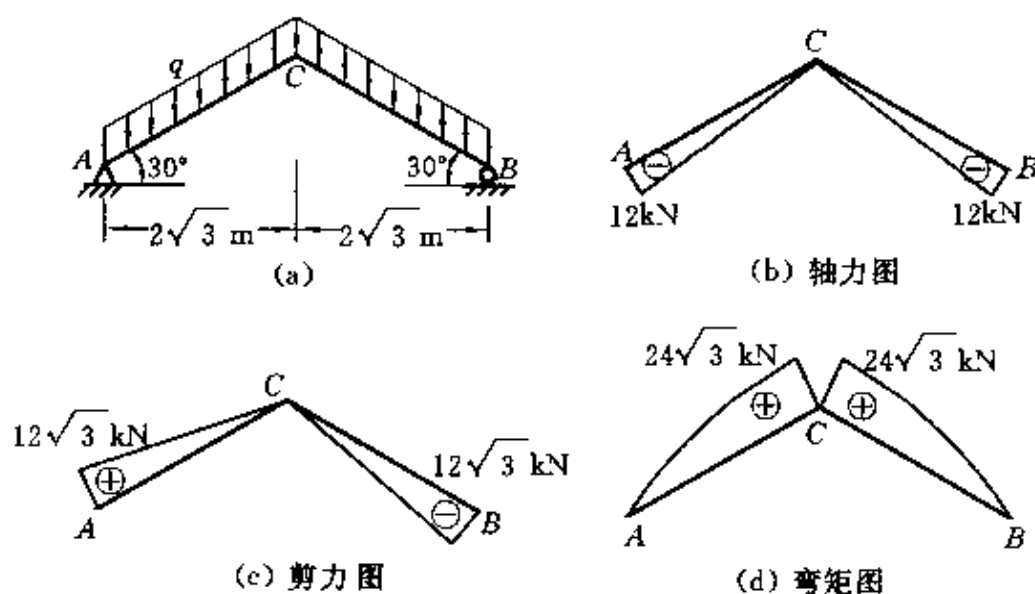
根据以上分析, 作剪力图、载荷图如题 4.17 图(a₁)、(a₂)所示。

(b) 仿照题 4.17 图(a)的方法, 作剪力图、载荷图如题 4.17 图(b₁)、(b₂)所示。

(c) 仿照题 4.17 图(a)的方法, 作剪力图、载荷图如题 4.17 图(c₁)、(c₂)所示。

(d) 仿照题 4.17 图(a)的方法, 作剪力图、载荷图如题 4.17 图(d₁)、(d₂)所示。

4.18 如题 4.18 图(a)所示, 设沿刚架斜杆轴线作用有 $q = 6$ kN/m 的均布载荷。作刚架的剪力、弯矩和轴力图。



题 4.18 图

解 首先根据平衡条件求约束反力。因为结构对称, 故有

$$F_{RA} = F_{RB} = \frac{q \times 2\sqrt{3}}{\cos 30^\circ} = \frac{6 \times 2\sqrt{3}}{\cos 30^\circ} \text{ kN} = 24 \text{ kN}$$

以 AC 杆的轴线为 x 轴, 坐标原点取在 A 点, 均布载荷在 AC 斜杆上 dx 微段产生的轴力为

$$dF_N = q \sin 30^\circ dx$$

则在斜杆 AC 的任一横截面上的轴力为

$$F_N = \int_0^x q \sin 30^\circ dx = 3x$$

考虑了支座 A 的反力后轴力方程为

$$F_N(x) = 3x - F_{RA} \sin 30^\circ = 3x - 12 \quad (0 < x \leq 4)$$

均布载荷在斜杆 AC 上 dx 微段产生的剪力为

$$dF_S = q \cos 30^\circ dx$$

则在斜杆 AC 的任一横截面上产生的剪力为

$$F_S = \int_0^x q \cos 30^\circ dx = 3\sqrt{3}x$$

考虑了支座 A 的反力后,剪力方程为

$$\begin{aligned} F_S(x) &= F_{RA} \cos 30^\circ - 3\sqrt{3}x \\ &= 12\sqrt{3} - 3\sqrt{3}x \quad (0 \leq x \leq 4) \end{aligned}$$

均布载荷在斜杆 AC 上 dx 微段产生的弯矩为

$$M = \int_0^x F_S dx = \frac{3\sqrt{3}}{2} x^2$$

考虑了支座 A 的反力后弯矩方程为

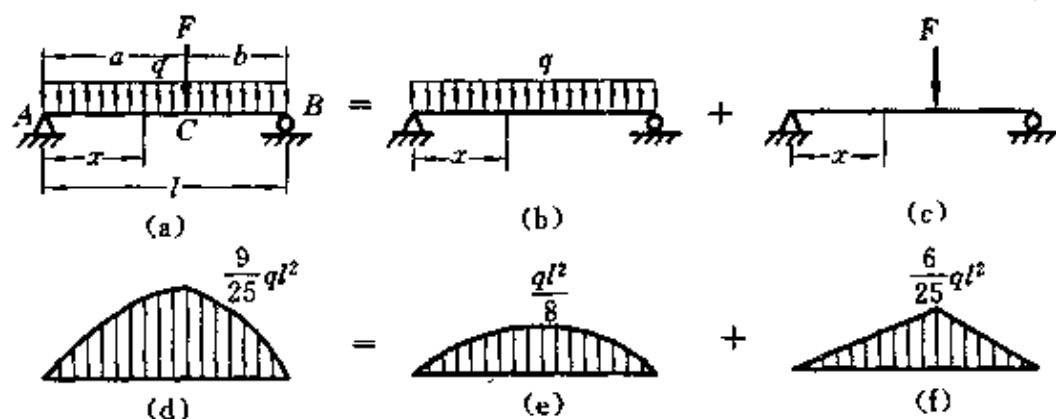
$$M(x) = 12\sqrt{3}x - \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2 \quad (0 \leq x \leq 4)$$

根据轴力方程、剪力方程、弯矩方程可以作出 AC 杆的轴力图、剪力图、弯矩图。利用对称性可画出 BC 杆的轴力图、剪力图、弯矩图,如题 4.18 图(b)、(c)、(d)所示。

4.19 如题 4.19 图(a)、(b)、(c)所示,桥式起重机的自重是集度为 q 的均布载荷,起吊的重量为 F 。以此为例,试说明作弯矩图的叠加法。

解 在小变形的情况下,用变形前的位置计算反力和弯矩,它们都与外力成线性关系,可用叠加法求解。由平衡方程求出支座反力为

$$F_{RA} = \frac{ql}{2} + \frac{Fb}{l}, \quad F_{RB} = \frac{ql}{2} + \frac{Fa}{l}$$



题 4.19 图

F_{RA} 和 F_{RB} 中的两项分别是 q 和 F 各自单独作用时的反力, 二者叠加即为 q 和 F 联合作用时的反力。

AC 段的弯矩方程为

$$M = \left(\frac{ql}{2}x - \frac{q}{2}x^2 \right) + \frac{Fb}{l}x \quad (0 \leq x \leq a)$$

CB 段的弯矩方程为

$$M = \left(\frac{ql}{2}x - \frac{q}{2}x^2 \right) + \frac{Fa}{l}(l - x) \quad (a \leq x \leq l)$$

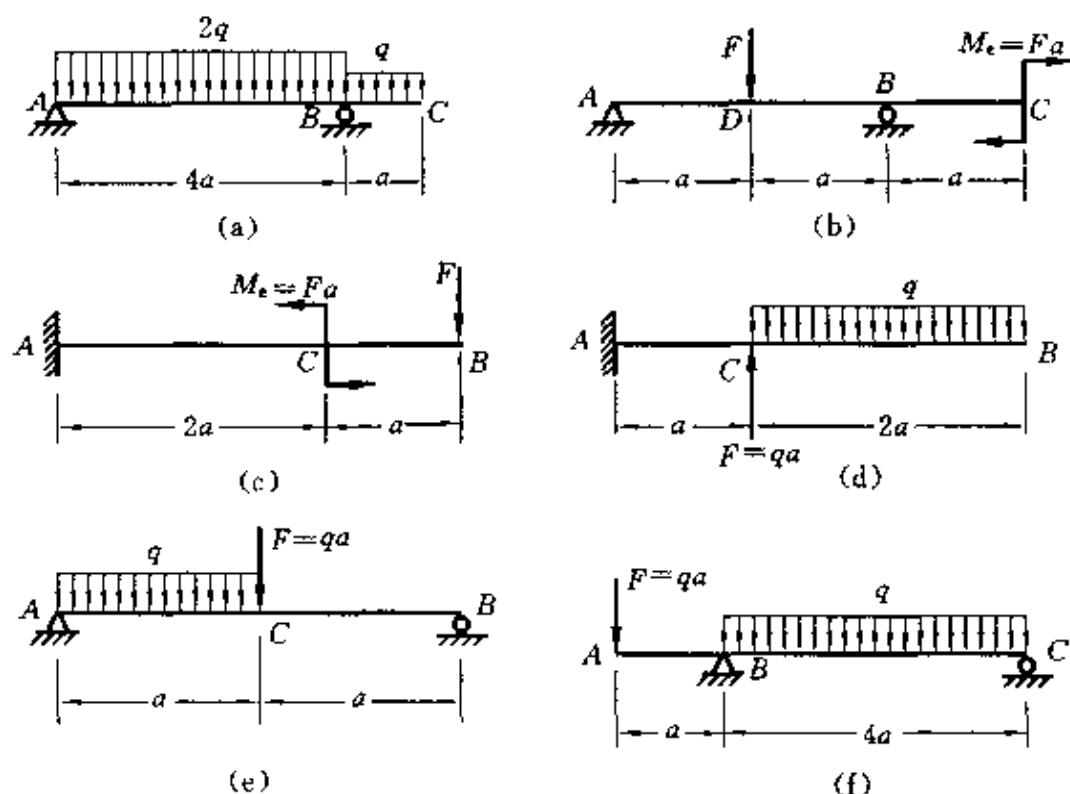
因以上二式右边的两项, 分别是 q 和 F 各自单独作用时的弯矩, 两者叠加就是 q 和 F 联合作用时的弯矩。因此, 作弯矩图也可以用叠加法求解, 例如, 当 $F=ql$ 、 $a=\frac{3}{5}l$ 、 $b=\frac{2}{5}l$ 时, q 和 F 各自单独作用下的弯矩图如题 4.19 图(e)和(f)所示, 二者叠加, 得 q 和 F 共同作用下的弯矩图如题 4.19 图(d)所示。

当然, 作剪力图和轴力图也可使用叠加法。

4.20 用叠加法绘出题 4.20 图(a)、(b)、(c)、(d)、(e)、(f)所示的各梁的弯矩图。

解 (a) 题 4.20 图(a)所示的简支梁的弯矩图可由 $2q$ 和 q 单独作用(题 4.20 图(a₁)、(a₂))下的弯矩图(题 4.20 图(a₃)、(a₄))相叠加得到, 题 4.20 图(a₅)便是题 4.20 图(a)所示简支梁的弯矩图。

(b) F 和 $M_c=Fa$ 单独作用(题 4.20 图(b₁)、(b₂))时的弯矩



题 4.20 图

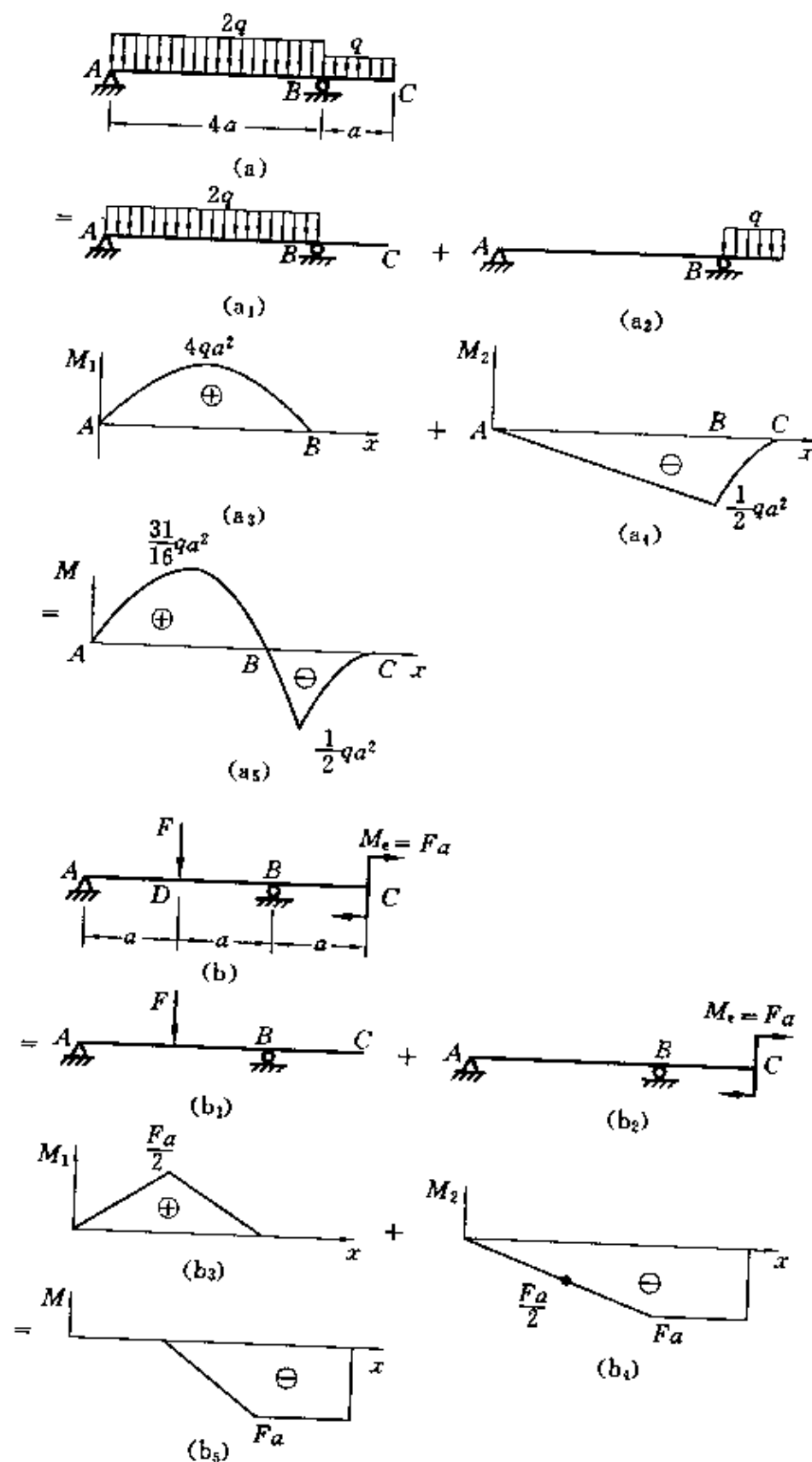
图由题 4.20 图(b₃)、(b₄)相叠加,便是题 4.20 图(b)所示受载情况下的弯矩图,如题 4.20 图(b₅)所示。

(c) F 和 M_c 联合作用(题 4.20 图(c))时的弯矩图,等于 F 和 M_c 单独作用(题 4.20 图(c₁)、(c₂))时的弯矩图(题 4.20 图(c₃)、(c₄))的叠加(题 4.20 图(c₅))。

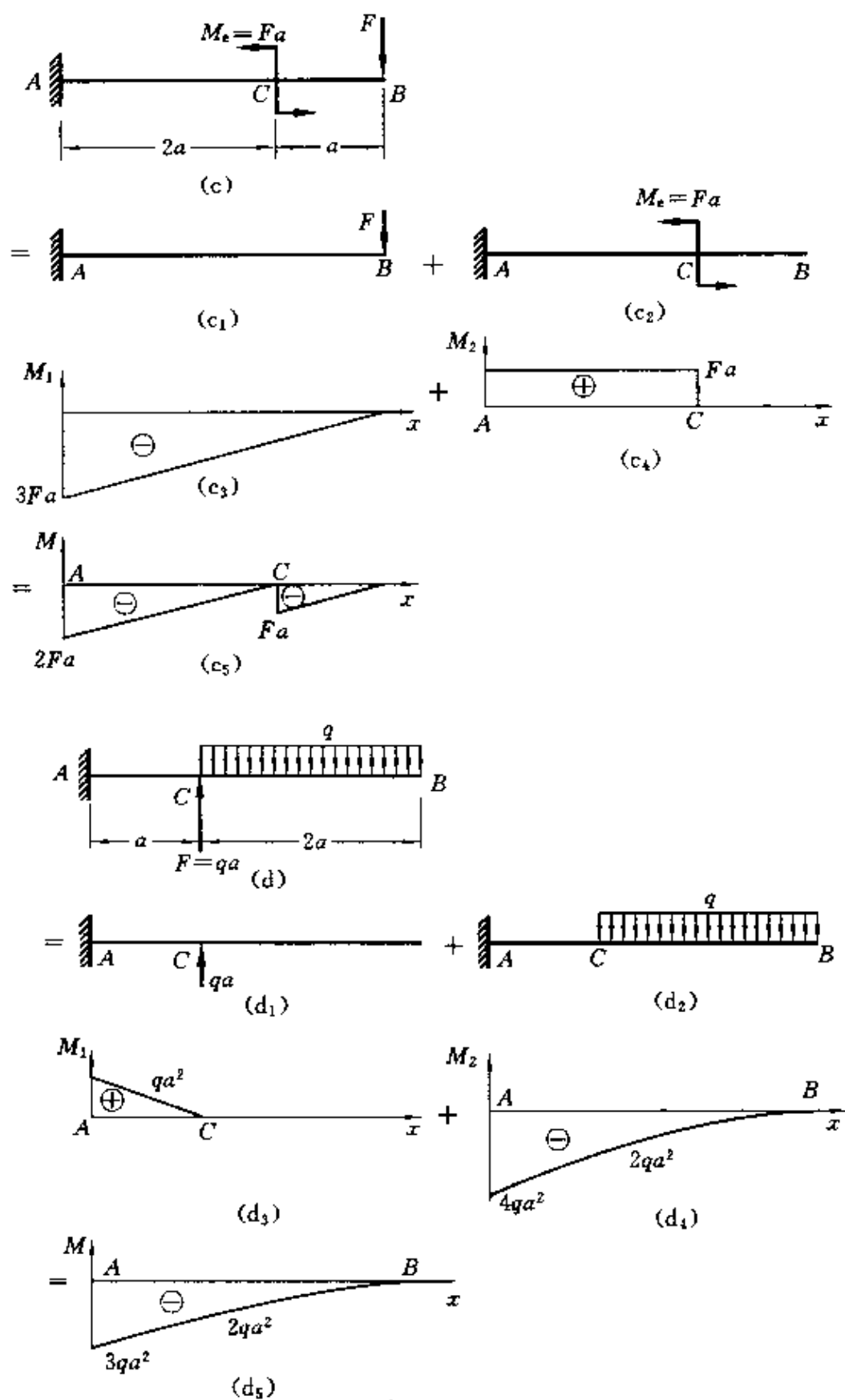
(d) 分别作 $F=qa$ 和 q 单独作用(题 4.20 图(d₁)、(d₂))时的弯矩图(题 4.20 图(d₃)、(d₄)),相叠加后得题 4.20 图(d)所示梁的弯矩图(题 4.20 图(d₅))。

(e) 分别作 $F=qa$ 和 q 单独作用(题 4.20 图(e₁)、(e₂))时的弯矩图(题 4.20 图(e₃)、(e₄)),然后叠加,便可得题 4.20 图(e)所示梁的弯矩图(题 4.20 图(e₅))。

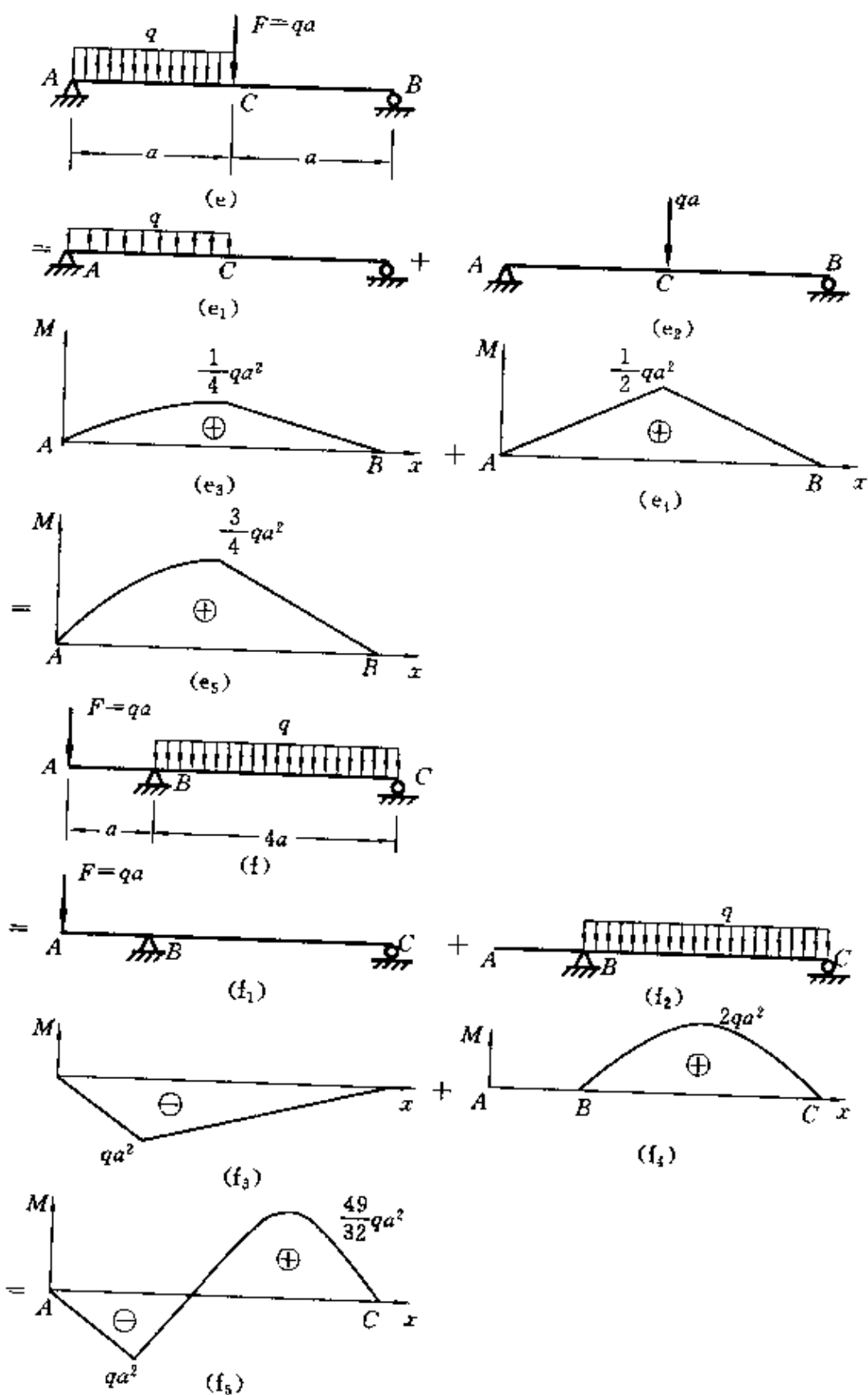
(f) 分别作 $F=qa$ 和 q 单独作用(题 4.20 图(f₁)、(f₂))下的弯矩图(题 4.20 图(f₃)、(f₄)),然后二者叠加便可得题 4.20 图(f)所示梁的弯矩图,如题 4.20 图(f₅)所示。



续题 4.20 图



续题 4.20 图



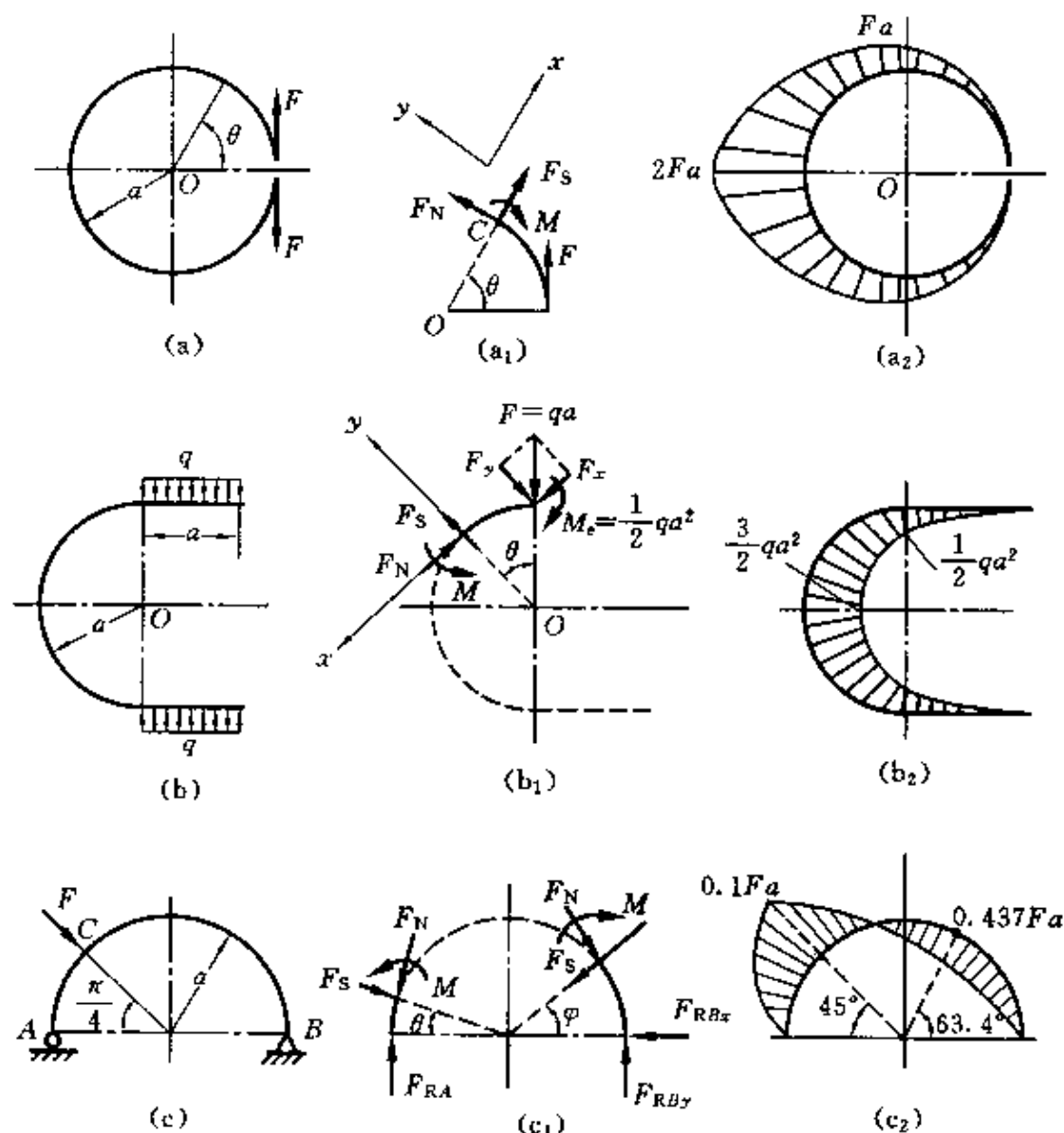
续题 4.20 图

4.21 写出题 4.21 图(a)、(b)、(c)所示各曲杆的轴力、剪力和弯矩的方程式,并作弯矩图。设曲杆的轴线皆为圆形。

解 (a) 应用平衡条件列轴力、剪力和弯矩方程(题 4.21 图(a₁))。

$$\sum F_y = 0, \quad F_N + F \cos \theta = 0, \quad F_N(\theta) = -F \cos \theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

$$\sum F_x = 0, \quad F_S + F \sin \theta = 0, \quad F_S(\theta) = -F \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$



题 4.21 图

$$\sum M_C = 0, \quad M(\theta) = Fa - Fa\cos\theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

曲杆的弯矩图可根据它的弯矩方程作出,如题 4.21 图(a₂)所示。

(b) 将直杆部分上的均布载荷向曲杆端点简化为力 $F = qa$ 和力偶矩 $M_e = \frac{1}{2}qa^2$, 建立如题 4.21 图(b₁)所示坐标系, 将 $F = qa$ 分解为一对正交分力

$$F_x = qa\sin\theta, \quad F_y = qa\cos\theta$$

应用平衡条件列出曲杆的轴力、剪力和弯矩方程

$$F_N(\theta) = -qa\sin\theta, \quad F_S(\theta) = qa\cos\theta$$

$$M(\theta) = \frac{1}{2}qa^2 + qa^2\sin\theta$$

式中, $0 \leq \theta \leq \pi$ 。根据弯矩方程,作曲杆的弯矩图如题 4.21 图(b₂)所示。

(c) 由平衡条件求得曲杆的约束反力(题 4.21 图(c))

$$F_{RBx} = \frac{\sqrt{2}}{2}F, \quad F_{RA} = F_{RBy} = \frac{\sqrt{2}}{4}F$$

AC 段的轴力、剪力和弯矩方程(题 4.21 图(c₁))

$$F_N(\theta) = -F_{RA}\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{4}F\cos\theta \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\right)$$

$$F_S(\theta) = F_{RA}\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{4}F\sin\theta \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\right)$$

$$M(\theta) = -F_{RA}a(1 - \cos\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{4}Fa(1 - \cos\theta) \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\right)$$

CB 段的轴力、剪力和弯矩方程(图 4.21 图(c₁))

$$\begin{aligned} F_N(\varphi) &= -(F_{RBy}\cos\varphi + F_{RBx}\sin\varphi) \\ &= -\left(\frac{\sqrt{2}}{4}F\cos\varphi + \frac{\sqrt{2}}{2}F\sin\varphi\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_S(\varphi) &= (-F_{RBy}\sin\varphi + F_{RBx}\cos\varphi) \\ &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}F\sin\varphi + \frac{\sqrt{2}}{2}F\cos\varphi\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M(\varphi) &= R_{Bx}a\sin\varphi - R_{By}a(1 - \cos\varphi) \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2}Fa\sin\varphi - \frac{\sqrt{2}}{4}Fa(1 - \cos\varphi) \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{4}Fa(2\sin\varphi + \cos\varphi - 1)
 \end{aligned}$$

式中, $0 \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}$ 。

根据弯矩方程, 作弯矩图如题 4.21 图(c₂)所示, 当 $\varphi = 63.4^\circ$ 时, 弯矩达到最大值

$$|M_{\max}| = 0.437Fa$$

第五章 弯曲应力

知识要点

1. 梁的正应力、正应力强度条件

(1) 中性层与中性轴

① 中性层——弯曲变形时,梁内有一层纵向纤维,既不伸长也不缩短,因而它们不受拉应力或压应力,该纤维层称为梁的中性层。

② 中性轴——中性层与横截面的交线(即横截面上正应力为零的各点之连线)。

③ 中性轴的位置——在弹性范围内,平面弯曲的梁,其中性轴通过截面的形心,且与载荷作用面垂直。

(2) 梁轴线的曲率与弯矩间的关系

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{EI_z}$$

(3) 梁横截面上的正应力

① 分布规律——任一点正应力的大小与该点至中性轴的垂直距离成正比,中性轴的一侧为拉应力,另一侧为压应力。

② 计算公式:

$$\sigma = \frac{My}{I_z}, \quad \sigma_{\max} = \frac{M_{\max} y_{\max}}{I_z} = \frac{M_{\max}}{W_z}$$

对于纯弯曲梁,上式为精确解,对于横力弯曲,上式为近似解(当 $L/h \geq 5$ 时,误差约为 2%)。

(4) 梁的正应力强度条件

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma]$$

强度计算的三类问题:

① 强度校核 $\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma]$

② 截面设计 $W_z \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}$, 由 W_z 计算截面尺寸。

③ 许用载荷计算 $M_{\max} \leq [\sigma] W_z$, 由 M_{\max} 计算许用载荷。

2. 梁的切应力、切应力强度条件

(1) 矩形截面梁的切应力

① 分布规律——切应力方向与剪切力方向平行, 其大小沿截面宽度均匀分布, 沿高度成抛物线变化。

② 计算公式:

$$\tau = \frac{F_s S_z^*}{b I_z} = \frac{6}{b} \frac{F_s}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right), \quad \tau_{\max} = \tau|_{y=\pm \frac{h}{2}} = \frac{3}{2} \frac{F_s}{A}$$

(2) 工字形截面梁的切应力

① 分布规律——铅垂方向的切应力的分布规律与矩形截面相同。

② 计算公式: $\tau = \frac{F_s S_z^*}{b I_z}$

腹板部分: $\tau = \frac{F_s}{b I_z} \left[\frac{B}{8} (H^2 - h^2) + \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \right]$

注意: ①翼缘部分, 铅垂方向的切应力很小, 主要为水平方向切应力。

② 铅垂方向的切应力主要由腹板承受(为95%~97%), 且腹板上 τ_{\max} 与 τ_{\min} 相差不大。故工字形截面上的最大切应力近似地为

$$\tau_{\max} \approx \frac{F_s}{bh}$$

(3) 圆形截面梁的最大切应力

① 切应力分布假设——截面上同高度各点的切应力作用线汇交于一点, 其铅垂分量沿截面宽度均匀分布, 沿高度按抛物线规律变化。

② 最大切应力计算公式

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{F_S}{A} = \frac{4}{3} \frac{F_S}{\pi R^2}$$

(4) 梁的切应力强度条件

$$\tau_{\max} = \frac{F_{S\max} S_{z\max}^*}{bI_z} \leq [\tau]$$

(5) 受弯构件强度问题的说明

① 对于细长杆而言,由弯矩产生的正应力是主要的,剪力产生的切应力是次要的。故只需考虑正应力强度,但当构件较粗短、剪力较大而弯矩较小时,或在薄壁截面梁中,应核算切应力强度。

② σ_{\max} 发生在 M_{\max} 截面上、下边缘处,该处 $\tau=0$; τ_{\max} 发生在 $F_{S\max}$ 截面的中性轴上,该处 $\sigma=0$ 。对于其他既有正应力又有切应力的点(如工字形截面的翼缘与腹板连接处的点)则其强度条件不能用 $\sigma \leq [\sigma], \tau \leq [\tau]$, 应计算该点的主应力并应用强度理论进行核算。

习题详解

5.1 把直径 $d=1\text{ mm}$ 的钢丝绕在直径为 2 m 的卷筒上,试计算该钢丝中产生的最大应力。设 $E=200\text{ GPa}$ 。

解 把钢丝绕到卷筒上后,钢丝内的弯矩 M 和中性层曲率之间的关系是

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

因此弯矩和曲率半径之间的关系为

$$M = \frac{EI}{\rho}$$

由弯曲正应力公式得

$$\sigma_{\max} = \frac{My_{\max}}{I} = \frac{Ey_{\max}}{\rho}$$

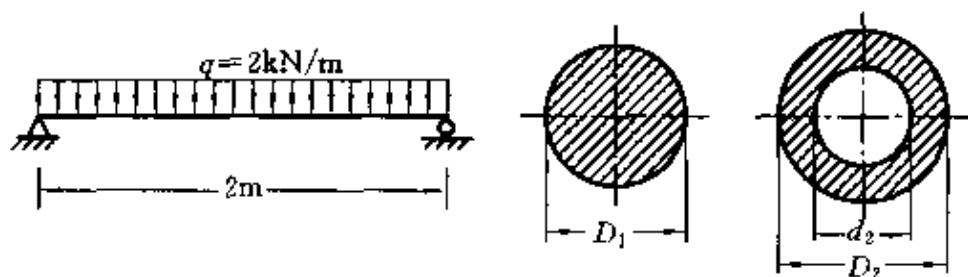
钢丝绕在直径为 D 的卷筒上后产生弯曲变形,其中性层的曲率半径

$$\rho = \frac{D+d}{2} \approx \frac{D}{2} \quad (\text{因 } D \gg d)$$

将 $y_{\max} = d/2$ 代入最大应力表达式中得

$$\sigma_{\max} = \frac{Ed/2}{D/2} = \frac{200 \times 10^9 \times 1 \times 10^{-3}/2}{2/2} \text{ Pa} = 100 \text{ MPa}$$

5.2 简支梁承受均布载荷作用,如题 5.2 图所示。若分别采用截面面积相等的实心圆和空心圆截面,且 $D_1 = 40 \text{ mm}$, $d_2/D_2 = 3/5$,试分别计算它们的最大正应力。并问空心圆截面比实心圆截面的最大正应力减少了百分之几?



题 5.2 图

解 因空心与实心圆截面面积相等,所以

$$\frac{\pi}{4} D_1^2 = \frac{\pi}{4} (D_2^2 - d_2^2)$$

$$D_1^2 = D_2^2 - d_2^2 = D_2^2 - \left(\frac{3}{5} D_2 \right)^2 = \left(\frac{4}{5} D_2 \right)^2$$

将 $D_1 = 40 \text{ mm}$ 代入上式,得

$$D_2 = 50 \text{ mm}, \quad d_2 = 30 \text{ mm}$$

均布载荷作用下的简支梁,最大弯矩产生在梁的跨度中点处截面上

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} = \frac{2 \times 10^3 \times 2^2}{8} \text{ N} \cdot \text{m} = 1 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

最大正应力发生在梁跨度中点处截面的上下边缘上。

实心圆截面梁的最大应力

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_1} = \frac{32M_{\max}}{\pi D_1^3} = \frac{32 \times 10^3}{\pi (0.04)^3} \text{ Pa} = 159 \text{ MPa}$$

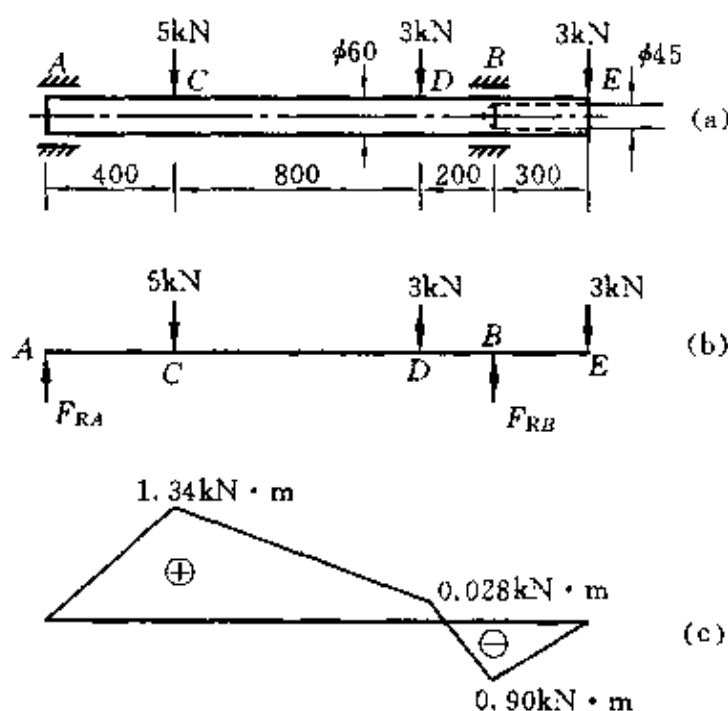
空心圆截面梁的最大应力

$$\begin{aligned}\sigma'_{\max} &= \frac{M_{\max}}{W_2} = \frac{M_{\max}}{\frac{\pi D_2^3}{32} \left[1 - \left(\frac{d_2}{D_2} \right)^4 \right]} \\ &= \frac{32 \times 10^3}{\pi (0.05)^3 [1 - (3/5)^4]} \text{ Pa} = 93.6 \text{ MPa}\end{aligned}$$

空心圆截面梁比实心圆截面梁的最大正应力减少了

$$\frac{\sigma_{\max} - \sigma'_{\max}}{\sigma_{\max}} = \frac{159 - 93.6}{159} = 41.1 \%$$

5.3 某圆轴的外伸部分系空心圆截面, 载荷情况如题 5.3 图 (a) 所示。试作该轴的弯矩图, 并求该轴内的最大正应力。



题 5.3 图

解 根据平衡条件, 求出支座反力并标示在题 5.3 图 (b) 中:

$$\sum M_A = 0, \quad F_{RB} = 7.64 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{RA} = 3.36 \text{ kN}$$

作圆轴的弯矩图,如题 5.3 图(c)所示。

因 C 截面的弯矩虽然比 B 截面的弯矩大,但 B 截面的抗弯截面系数比 C 截面的小,所以最大正应力可能发生在 C 截面或 B 截面。C 截面上的最大正应力

$$\sigma_C = \frac{M_C}{W_1} = \frac{32 \times 1.34 \times 10^3}{\pi \times 0.06^3} \text{ Pa} = 63.2 \text{ MPa}$$

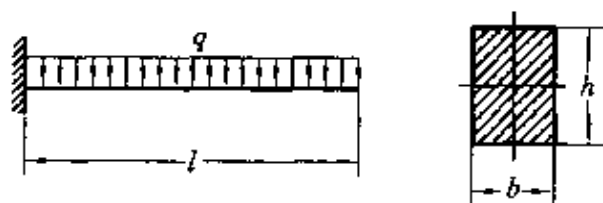
B 截面上的最大正应力

$$\sigma_B = \frac{M_B}{W_2} = \frac{32 \times 0.9 \times 10^3}{\pi \times 0.06^3 \times \left[1 - \left(\frac{45}{60}\right)^4\right]} \text{ Pa} = 62.1 \text{ MPa}$$

所以

$$\sigma_{\max} = \sigma_C = 63.2 \text{ MPa}$$

5.4 矩形截面悬臂梁如题 5.4 图所示,已知 $l=4 \text{ m}$, $b/h=2/3$, $q=10 \text{ kN/m}$, $[\sigma]=10 \text{ MPa}$ 。试确定此梁横截面的尺寸。



题 5.4 图

解 显而易见,梁的最大弯矩发生在固定端截面上

$$M_{\max} = \frac{1}{2}ql^2 = \left(\frac{1}{2} \times 10 \times 4^2\right) \text{ kN} \cdot \text{m} = 80 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

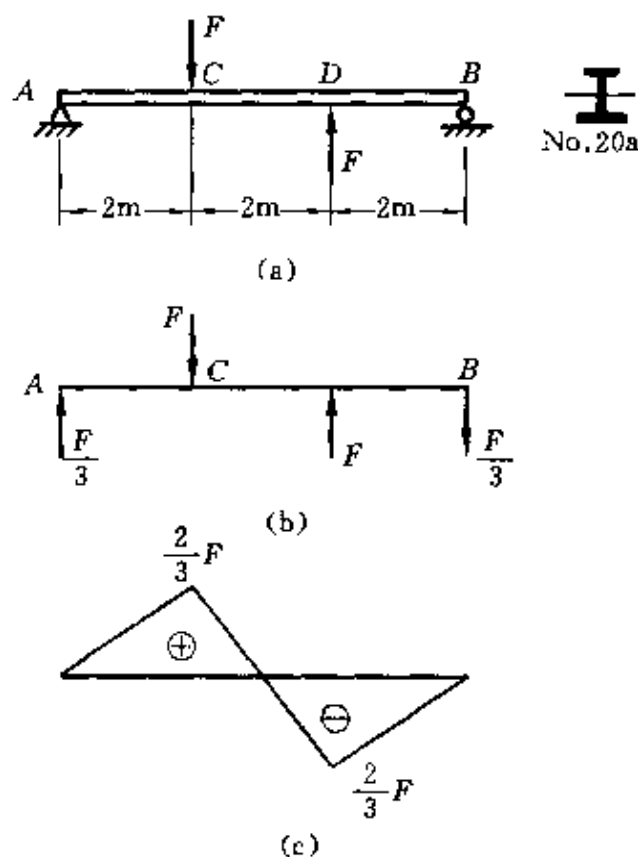
梁的强度条件为
$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{80 \times 10^3}{\frac{1}{6}bh^2} \leq [\sigma]$$

将 $b = \frac{2}{3}h$ 代入上式得

$$\frac{6 \times 80 \times 10^3}{\frac{2}{3}hh^2} \leq [\sigma], \quad h^3 \geq \left(\frac{3 \times 6 \times 80 \times 10^3}{2 \times 10 \times 10^6}\right) \text{ m}^3$$

所以 $h = 416 \text{ mm}$, $b = \frac{2}{3}h = 277 \text{ mm}$

5.5 No. 20a 工字钢梁的支承和受力情况如题 5.5 图(a)所示。若 $[\sigma] = 160 \text{ MPa}$, 试求许可载荷 F 。



题 5.5 图

解 利用平衡条件, 求出支座反力并表示在题 5.5 图(b)中, 画弯矩图如题 5.5 图(c)所示, 最大弯矩为 $\frac{2}{3}F$ 。

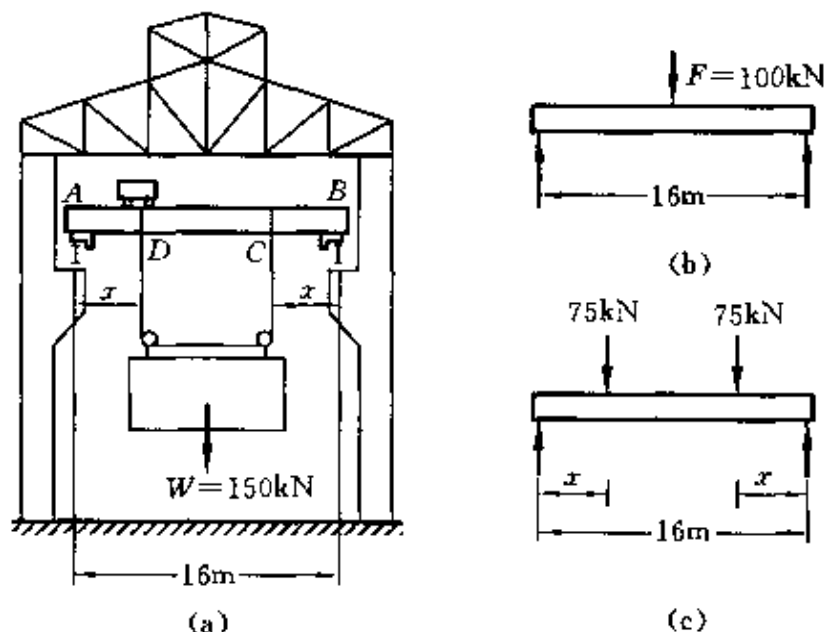
由梁的强度条件
$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{\frac{2}{3}F}{W} \leq [\sigma]$$

查附录三型钢表, No. 20a 工字钢的 $W = 237 \text{ cm}^3$, 代入上式, 可确定许可载荷

$$F \leq \frac{3[\sigma]W}{2} = \frac{3 \times 160 \times 10^6 \times 237 \times 10^{-6}}{2} \text{ N} = 56.9 \text{ kN}$$

5.6 如题 5.6 图(a)所示, 桥式起重机大梁 AB 的跨度 $l =$

16 m, 原设计最大起重量为 100 kN。在大梁上距 B 端为 x 的 C 点悬挂一根钢索, 绕过装在重物上的滑轮, 将另一端再挂在吊车的吊钩上, 使吊车驶到与 C 对称的位置 D。这样就可吊运 150 kN 的重物。试问 x 的最大值等于多少? 设只考虑大梁的正应力强度。



题 5.6 图

解 吊重 100 kN 和 150 kN 时梁的受力图分别如题 5.6 图 (b) 和 (c) 所示。题 5.6 图 (b) 中, 危险截面在梁的跨度中点处, 其上的弯矩 $M_1 = \frac{Fl}{4}$ (kN·m), 危险点的应力

$$\sigma_1 = \frac{M_1}{W} = \frac{(100 \times 16)/4}{W} = \frac{Fl/4}{W} = \frac{400}{W}$$

题 5.6 图 (c) 中, 危险截面在 C、D 处, 其上的弯矩为 $M_2 = 75x$ (kN·m), 危险点的应力

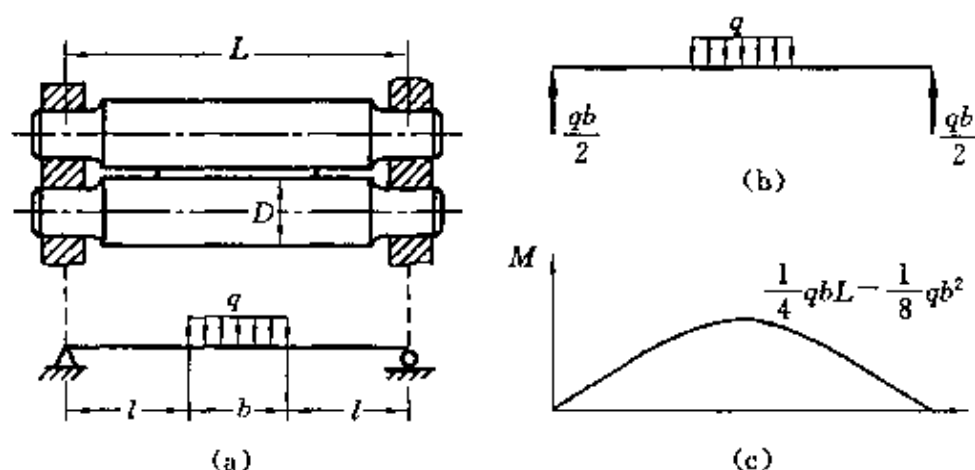
$$\sigma_2 = \frac{M_2}{W} = \frac{75x}{W}$$

根据强度条件, 原设计吊重为 100 kN 时, 梁内最大应力 σ_1 已达到许用应力, 所以为了能安全工作, 应有

$$\sigma_2 \leq \sigma_1, \quad \frac{75x}{W} \leq \frac{400}{W}$$

x 的最大值为 $x \leq \frac{400}{75} \text{ m} = 5.33 \text{ m}$

5.7 题 5.7 图 (a) 所示轧辊轴直径 $D=280 \text{ mm}$, 跨长 $L=1000 \text{ mm}$, $l=450 \text{ mm}$, $b=100 \text{ mm}$ 。轧辊材料的弯曲许用应力 $[\sigma]=100 \text{ MPa}$ 。求轧辊能承受的最大轧制力。



题 5.7 图

解 根据平衡条件求出轧辊轴的支承反力, 如题 5.7 图 (b) 所示, 画弯矩图如题 5.7 图 (c) 所示, 最大弯矩

$$M_{\max} = \frac{qb}{2} \times \frac{L}{2} - \frac{1}{2}q\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}qbL - \frac{1}{8}qb^2$$

由强度条件可确定许用载荷集度

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = q\left(\frac{1}{4}bL - \frac{1}{8}b^2\right) \bigg/ \left(\frac{\pi}{32}\right)D^3 \leq [\sigma]$$

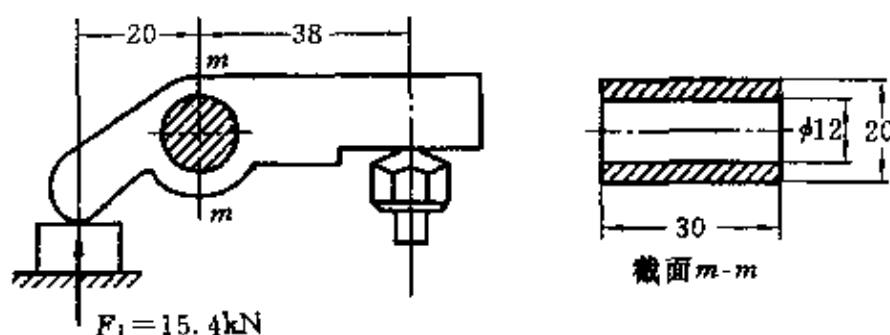
$$q \leq \frac{[\sigma] \frac{\pi}{32} D^3}{\frac{1}{4}bL - \frac{1}{8}b^2} = \frac{100 \times 10^6 \times \frac{\pi}{32} \times 0.28^3}{\frac{1}{4} \times 0.1 \times 1 - \frac{1}{8} \times 0.1^2} \text{ N/m}$$

$$= 9070 \text{ kN/m}$$

最大轧制力 $F=qb=(9070 \times 10^3 \times 0.1) \text{ N}=907 \text{ kN}$

5.8 压板的尺寸和载荷情况如题 5.8 图所示。材料为 45 钢, $\sigma_s=380 \text{ MPa}$, 取安全因数 $n=1.5$ 。试校核压板的强度。

解 最大弯矩



题 5.8 图

$$M_{\max} = (15.4 \times 10^3 \times 20 \times 10^{-3}) \text{ N} \cdot \text{m} = 308 \text{ N} \cdot \text{m}$$

压板的抗弯截面系数

$$W = \frac{I}{y_{\max}} = \frac{\frac{0.03}{12}(0.02^3 - 0.012^3)}{0.01} \text{ m}^3 = 1570 \text{ mm}^3$$

压板的最大应力

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{308}{1570 \times 10^{-9}} \text{ Pa} = 196 \text{ MPa}$$

压板材料的许用应力

$$[\sigma] = \frac{\sigma_s}{n} = \frac{380}{1.5} \text{ MPa} = 253 \text{ MPa}$$

因最大应力小于许用应力,所以压板可以安全工作。

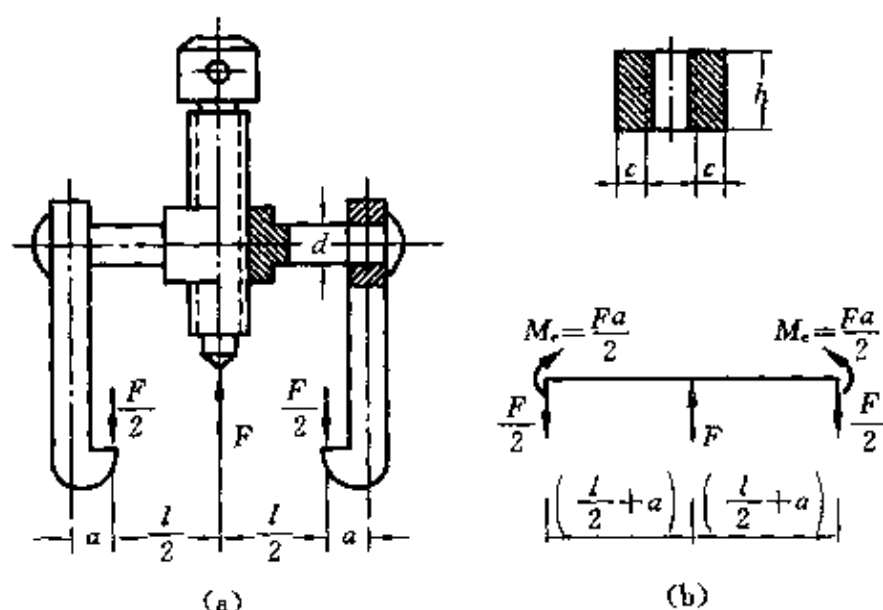
5.9 拆卸工具如题 5.9 图(a)所示。若 $l = 250 \text{ mm}$, $a = 30 \text{ mm}$, $h = 60 \text{ mm}$, $c = 16 \text{ mm}$, $d = 58 \text{ mm}$, $[\sigma] = 160 \text{ MPa}$, 试按横梁中央截面的强度确定许可顶压力 F 。

解 横梁的受力图可简化为题 5.9 图(b)所示的受力图。危险截面在跨度中点,即 F 力作用点处,此截面的最大弯矩

$$M_{\max} = \frac{F}{2} \left(\frac{l}{2} + a \right) - \frac{Fa}{2} = \frac{Fl}{4}$$

危险截面的抗弯截面系数

$$W = \frac{I}{y_{\max}} = \frac{\frac{1}{12} \times h^3 \times 2c}{h/2} = \frac{1}{3} h^2 c$$



题 5.9 图

根据强度条件
$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{Fl/4}{\frac{1}{3}h^2c} \leq [\sigma]$$

可确定许可顶压力

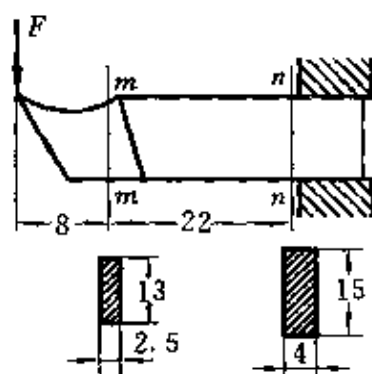
$$F \leq \frac{4}{3l}h^2c[\sigma] = \frac{4 \times 0.06^2 \times 0.016 \times 160 \times 10^6}{3 \times 0.25} \text{ N} = 49.2 \text{ kN}$$

5.10 割刀在切割工件时,受到 $F=1 \text{ kN}$ 的切削力作用。割刀尺寸如题 5.10 图所示。试求割刀内的最大弯曲应力。

解 最大弯曲应力可能产生在 $m-m$ 截面,也可能产生在 $n-n$ 截面,虽然 $m-m$ 截面上的弯矩比 $n-n$ 截面上的小,但它的抗弯截面系数也比 $n-n$ 截面的小,所以两个截面上的最大应力都应当求出,并加以比较,方可决定割刀内的最大应力。

$m-m$ 截面

$$W_1 = \left[\frac{1}{6} \times 2.5 \times 10^{-3} \times (13 \times 10^{-3})^2 \right] \text{ m}^3 = 70.4 \times 10^{-9} \text{ m}^3$$



题 5.10 图

$$M_1 = (8 \times 10^{-3} \times 10^3) \text{ N} \cdot \text{m} = 8 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\sigma_1 = \frac{M_1}{W_1} = \frac{8}{70.4 \times 10^{-9}} \text{ Pa} = 114 \text{ MPa}$$

$n-n$ 截面

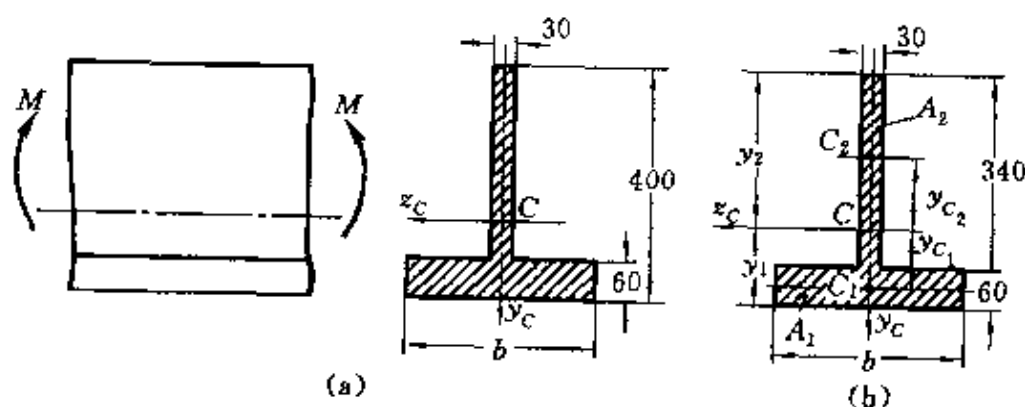
$$W_2 = \left[\frac{1}{6} \times 4 \times 10^{-3} \times (15 \times 10^{-3})^2 \right] \text{ m}^3 = 150 \times 10^{-9} \text{ m}^3$$

$$M_2 = (30 \times 10^{-3} \times 10^3) \text{ N} \cdot \text{m} = 30 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\sigma_2 = \frac{M_2}{W_2} = \frac{30}{150 \times 10^{-9}} \text{ Pa} = 200 \text{ MPa}$$

所以割刀内最大应力为 $\sigma_{\max} = 200 \text{ MPa}$

5.11 题 5.11 图(a)所示的为一承受纯弯曲的铸铁梁,其截面为 T 形,材料的拉伸和压缩许用应力之比 $[\sigma_t]/[\sigma_c] = 1/4$ 。求水平翼板的合理宽度 b 。



题 5.11 图

解 水平翼板的合理宽度 b 将使铸铁梁内的最大拉应力和压应力分别达到各自的许用应力,即

$$\sigma_{t\max} = \frac{My_1}{I} = [\sigma_t], \quad \sigma_{c\max} = \frac{My_2}{I} = [\sigma_c] \quad (1)$$

$$\text{由①式得} \quad \frac{\sigma_{t\max}}{\sigma_{c\max}} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{[\sigma_t]}{[\sigma_c]} = \frac{1}{4} \quad (2)$$

$$\text{由几何条件知} \quad y_1 + y_2 = 400 \text{ mm} \quad (3)$$

$$\text{解②、③式得} \quad y_1 = 80 \text{ mm}, \quad y_2 = 320 \text{ mm}$$

上形截面上,对中性轴 z_c 的静面矩(题 5.11 图(b))应等于零,即

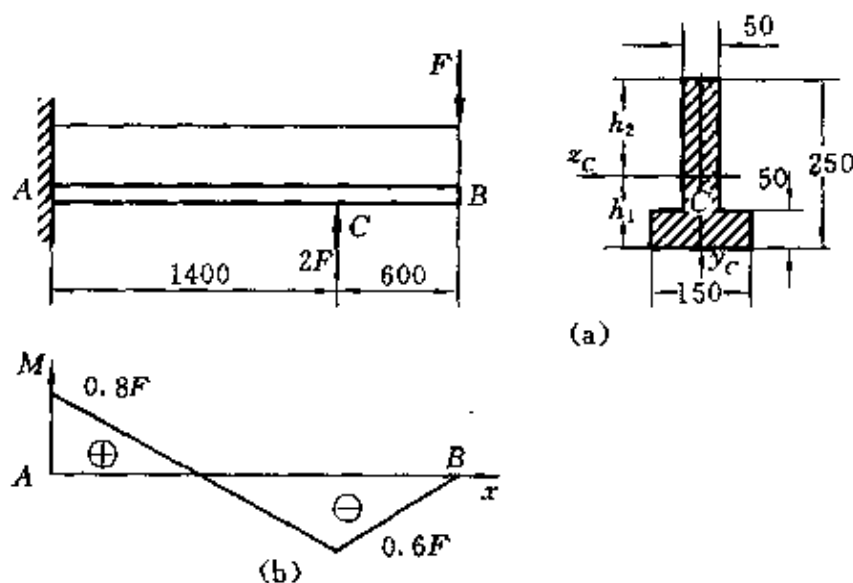
$$S_{z_c} = A_1 y_{c_1} + A_2 y_{c_2} = 0$$

$$[60b(80 - 30) - (30 \times 340)(320 - 170)] \text{ mm} = 0 \quad (4)$$

解④式,得

$$b = 510 \text{ mm}$$

5.12 上形截面铸铁悬臂梁,尺寸及载荷如题 5.12 图(a)所示。若材料的拉伸许用应力 $[\sigma_t] = 40 \text{ MPa}$, 压缩许用应力 $[\sigma_c] = 160 \text{ MPa}$, 截面对形心轴 z_c 的惯性矩 $I_{z_c} = 10180 \text{ cm}^4$, $h_1 = 9.64 \text{ cm}$, 试计算该梁的许可载荷 F 。



题 5.12 图

解 梁的弯矩图如题 5.12 图(b)所示,弯矩的两个极值分别为

$$M_1 = 0.8F, \quad M_2 = 0.6F$$

根据弯曲正应力的强度条件

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I_{z_c}} y_{\max} \leq [\sigma]$$

由 A 截面的强度要求确定许可载荷:

由抗拉强度要求得

$$F \leq \frac{1}{0.8} \times \frac{[\sigma_t] I_{z_c}}{h_1}$$

$$= \frac{1}{0.8} \times \frac{40 \times 10^6 \times 10180 \times 10^{-8}}{9.64 \times 10^{-2}} \text{ N} = 52.8 \text{ kN}$$

由抗压强度要求得

$$F \leq \frac{1}{0.8} \times \frac{[\sigma_c] I_{z_c}}{h_2}$$

$$= \frac{1}{0.8} \times \frac{160 \times 10^6 \times 10180 \times 10^{-8}}{15.4 \times 10^{-2}} \text{ N} = 132 \text{ kN}$$

由C截面的强度要求确定许可载荷:

由抗拉强度要求得

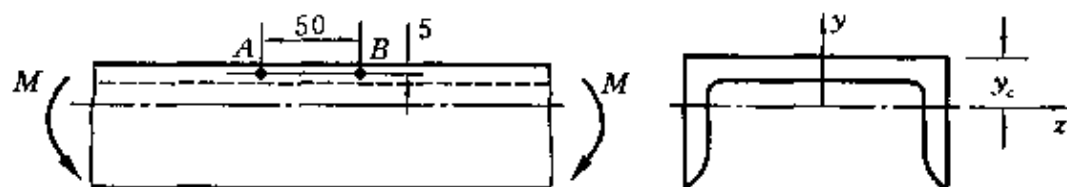
$$F \leq \frac{1}{0.6} \times \frac{[\sigma_t] I_{z_c}}{h_2}$$

$$= \frac{1}{0.6} \times \frac{40 \times 10^6 \times 10180 \times 10^{-8}}{15.4 \times 10^{-2}} \text{ N} = 44.1 \text{ kN}$$

显然C截面的压应力大于拉应力,不必进行计算。

许用载荷为 $F \leq 44.1 \text{ kN}$

5.13 如题5.13图所示,当20号槽钢受纯弯曲时,测出A、B两点间长度的改变为 $\Delta l = 27 \times 10^{-3} \text{ mm}$,材料的 $E = 200 \text{ GPa}$ 。试求梁截面上的弯矩 M 。



题5.13图

解 20号槽钢的截面几何性质查附录三型钢表可获得

$$y_c = 19.5 \text{ mm}, \quad I_z = 144 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

由胡克定律和弯曲正应力公式得

$$\sigma = E\varepsilon = E\Delta l/l \quad (1)$$

$$\sigma = My/I_z \quad (2)$$

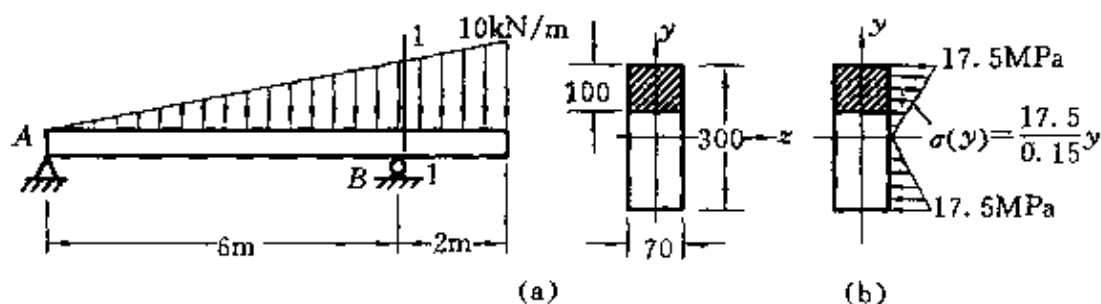
由①、②式得

$$M = \frac{I_z E \Delta l}{l y}$$

$$M = \frac{144 \times 10^4 \times 10^{-12} \times 200 \times 10^9 \times 27 \times 10^{-6}}{50 \times (19.5 - 5) \times 10^{-6}} \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$= 10.7 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

5.14 矩形截面梁的尺寸及载荷如题 5.14 图(a)所示。试求 1-1 截面上,在画阴影线的面积内,由 σdA 组成的内力系的合力。



题 5.14 图

解 利用平衡条件求出支座反力

$$\frac{1}{2} \times 10 \times 8 \times \frac{2}{3} = F_{RA} \times 6, \quad F_{RA} = \frac{40}{9} \text{ kN} (\uparrow)$$

因任一截面上的弯矩等于该截面以左梁上的所有外力对截面形心之矩的代数和,所以 1-1 截面上的弯矩为

$$M_B = \left[\frac{40}{9} \times 6 - \left(\frac{1}{2} \times 6 \times \frac{6 \times 10}{8} \right) \times \frac{1}{3} \times 6 \right] \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$= -\frac{55}{3} \text{ kN} \cdot \text{m}$$

横截面上的最大应力

$$\sigma_{\max} = \frac{M_B y_{\max}}{I_z} = \frac{\left(\frac{55}{3} \times 10^3 \times 0.15 \right) \times 12}{0.07 \times 0.3^3} \text{ Pa} = 17.5 \text{ MPa}$$

弯曲正应力沿横截面高度方向的分布规律(题 5.14 图(b))为

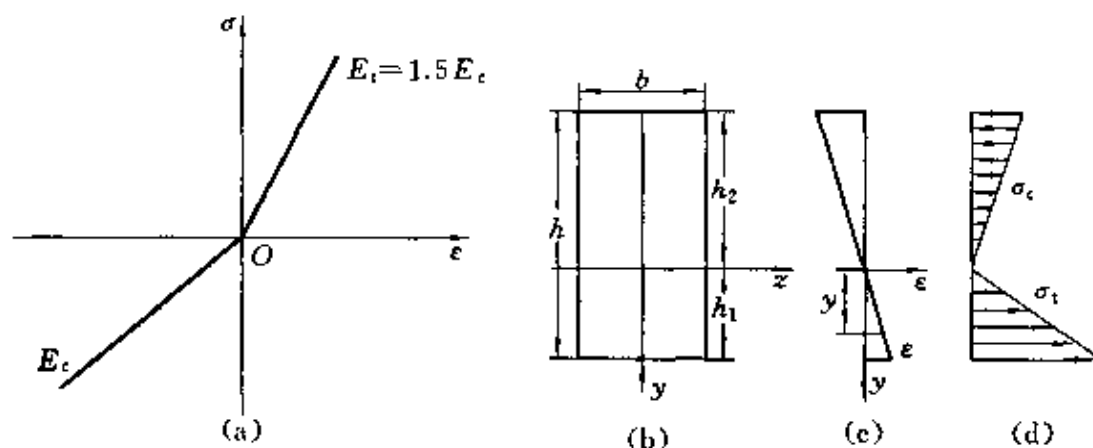
$$\sigma(y) = \frac{17.5}{0.15} y$$

所以 1-1 截面阴影部分由 σdA 组成的内力系的合力

$$F_N = \int \sigma dA = \int_{0.05}^{0.15} \sigma(y) b dy$$

$$= \left[\int_{0.05}^{0.15} \frac{17.5 \times 10^6}{0.15} \times 0.07y dy \right] \text{N} = 81.7 \text{ kN}$$

5.15 如题 5.15 图(a)、(b)所示,设梁的横截面为矩形,高 300 mm,宽 150 mm,截面上正弯矩的数值为 $240 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 。材料的抗拉弹性模量 E_t 为抗压弹性模量 E_c 的 1.5 倍。若应力未超过材料的比例极限,试求最大拉应力及最大压应力。



题 5.15 图

解 解此题的关键是确定梁的中性轴位置。由于平面假设成立,所以纵向应变沿梁的高度仍按线性分布,即 $\epsilon = \frac{y}{\rho}$, 如题 5.15 图(c)所示。由胡克定律可知,截面上的拉应力和压应力分别是

$$\sigma_t = E_t \frac{y}{\rho}, \quad \sigma_c = E_c \frac{y}{\rho}$$

最大拉应力与最大压应力分别是

$$\sigma_{t\max} = E_t \frac{h_1}{\rho}, \quad \sigma_{c\max} = E_c \frac{h_2}{\rho} \quad (1)$$

应力分布如题 5.15 图(d)所示。

设截面的下边缘距中性轴 z 为 h_1 , 上边缘距中性轴 z 为 h_2 , 利用截面上轴力为零的条件,可确定中性轴位置,即

$$F_N = \int \sigma_t dA + \int \sigma_c dA = 0$$

$$\int_0^{h_1} E_t \frac{y}{\rho} b dy - \int_0^{h_2} E_c \frac{y}{\rho} b dy = 0$$

$$\frac{1}{2} E_t \frac{h_1}{\rho} h_1 b - \frac{1}{2} E_c \frac{h_2}{\rho} h_2 b = 0$$

由上式得 $E_t h_1^2 = E_c h_2^2$

将 $E_t = 1.5 E_c$ 代入上式中, 得

$$\sqrt{3} h_1 = \sqrt{2} h_2 \quad (2)$$

利用几何关系, 有 $h_1 + h_2 = h \quad (3)$

联立②、③式求解, 确定中性轴位置为

$$h_2 = \frac{\sqrt{3} h}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = 0.551 h = (0.551 \times 300) \text{ mm} = 165 \text{ mm}$$

$$h_1 = h - h_2 = 0.449 h = (0.449 \times 300) \text{ mm} = 135 \text{ mm}$$

为了计算最大拉应力和最大压应力, 只要求出梁变形后的曲率 $1/\rho$, 代入①式即可。

应用梁截面上的内力系对中性轴之矩等于该截面上的弯矩这一静力学条件, 便可确定曲率 $1/\rho$, 即

$$M = \frac{1}{2} E_t \frac{h_1}{\rho} h_1 b \times \frac{2}{3} h_1 + \frac{1}{2} E_c \frac{h_2}{\rho} h_2 b \times \frac{2}{3} h_2 = \frac{1}{3\rho} (E_t h_1^3 + E_c h_2^3) b$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{3M}{(E_t h_1^3 + E_c h_2^3) b}$$

将 $1/\rho$ 表达式代入①式, 得

最大拉应力

$$\sigma_{\text{tmax}} = \frac{3ME_t h_1}{(E_t h_1^3 + E_c h_2^3) b} = \frac{9Mh_1}{(3h_1^3 + 2h_2^3) b}$$

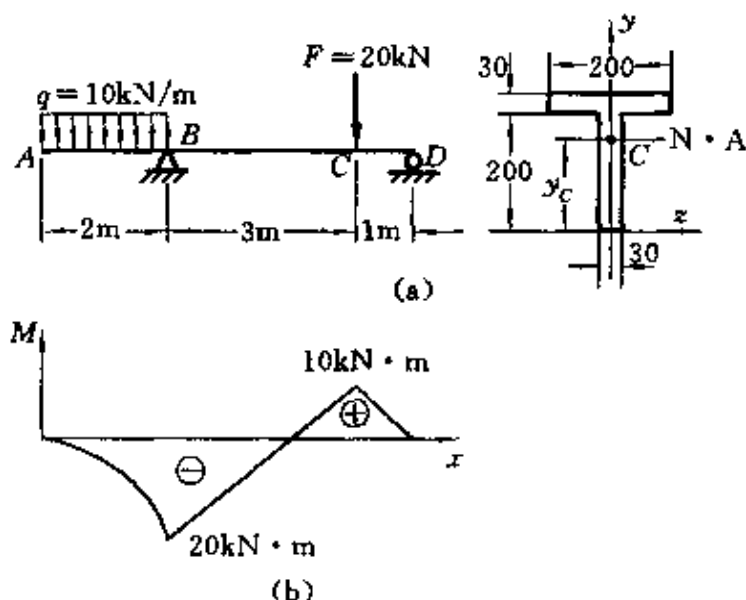
$$= \frac{9 \times 240 \times 10^3 \times 0.135}{(3 \times 0.135^3 + 2 \times 0.165^3) \times 0.15} \text{ Pa} = 119 \text{ MPa}$$

最大压应力

$$\sigma_{\text{cmax}} = \frac{3ME_c h_2}{(E_t h_1^3 + E_c h_2^3) b} = \frac{6Mh_2}{(3h_1^3 + 2h_2^3) b}$$

$$= \frac{6 \times 240 \times 10^3 \times 0.165}{(3 \times 0.135^3 + 2 \times 0.165^3) \times 0.15} \text{ Pa} = 96.8 \text{ MPa}$$

5.16 铸铁梁的载荷及横截面尺寸如题 5.16 图(a)所示。许用拉应力 $[\sigma_t] = 40 \text{ MPa}$ ，许用压应力 $[\sigma_c] = 160 \text{ MPa}$ 。试按正应力强度条件校核梁的强度。若载荷不变，但将 T 形横截面倒置，即翼缘在下成为上形，是否合理？何故？



题 5.16 图

解 截面的几何性质

$$y_C = \frac{20 \times 3 \times 10 + 20 \times 3 \times 21.5}{2 \times 20 \times 3} \text{ cm} = 15.8 \text{ cm}$$

$$I_{N \cdot A} = \left[\frac{1}{12} \times 3 \times 20^3 + 20 \times 3 \times 5.8^2 + \frac{1}{12} \times 20 \times 3^3 + 20 \times 3 \times (21.5 - 15.8)^2 \right] \text{ cm}^4 = 6010 \text{ cm}^4$$

作梁的弯矩图如题 5.16 图(b)所示。

B 截面

$$\sigma_{\max}^+ = \frac{20 \times 10^3 \times (23 - 15.8) \times 10^{-2}}{6010 \times 10^{-8}} \text{ Pa}$$

$$= 24 \text{ MPa} < [\sigma_t] = 40 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\max}^- = \frac{20 \times 10^3 \times 15.8 \times 10^{-2}}{6010 \times 10^{-8}} \text{ Pa}$$

$$= 52.6 \text{ MPa} < [\sigma_c] = 160 \text{ MPa}$$

C 截面

$$\sigma_{\max}^+ = \frac{10 \times 10^3 \times 15.8 \times 10^{-2}}{6010 \times 10^{-8}} \text{ Pa}$$

$$= 26.3 \text{ MPa} < [\sigma_t] = 40 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\max}^- = \frac{10 \times 10^3 \times (23 - 15.8) \times 10^{-2}}{6010 \times 10^{-8}} \text{ Pa}$$

$$= 12 \text{ MPa} < [\sigma_c] = 160 \text{ MPa}$$

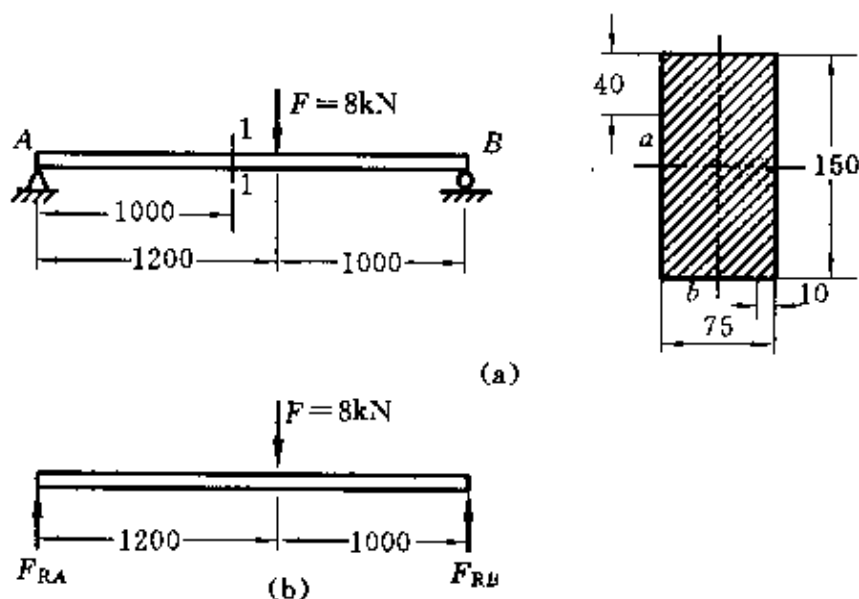
由此可知,最大应力小于许用应力,安全。

若截面倒置呈 \perp 形,则 B 截面的最大拉应力将增大为

$$\sigma_{\max}^+ = 52.6 \text{ MPa} > [\sigma_t]$$

显然这样抗拉强度不够,因而截面倒置使用不合理。

5.17 试计算题 5.17 图(a)所示矩形截面简支梁的 1-1 截面上 a 点和 b 点的正应力和切应力。



题 5.17 图

解 应用平衡条件求出支座反力(题 5.17 图(b))

$$\sum M_B = 0, \quad F_{RA} \times 2200 = F \times 1000, \quad F_{RA} = 3.46 \text{ kN}$$

1-1 截面上的内力

$$F_S = F_{RA} = 3.64 \text{ kN}, \quad M = F_{RA} \times 1 = 3.64 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

a 点的正应力和切应力

$$\sigma_a = \frac{My_1}{I_z} = \frac{3.64 \times 10^3 \times (75 - 40) \times 10^{-3}}{\frac{1}{12} \times 75 \times 10^{-3} \times 0.15^3} \text{ Pa} = 6.04 \text{ MPa}$$

$$\tau_a = \frac{F_S S_z^*}{I_z b} = \frac{3.64 \times 10^3 \times 40 \times 75 \times 55 \times 10^{-9}}{\frac{1}{12} \times 75 \times 10^{-3} \times 0.15^3 \times 75 \times 10^{-3}} \text{ Pa}$$

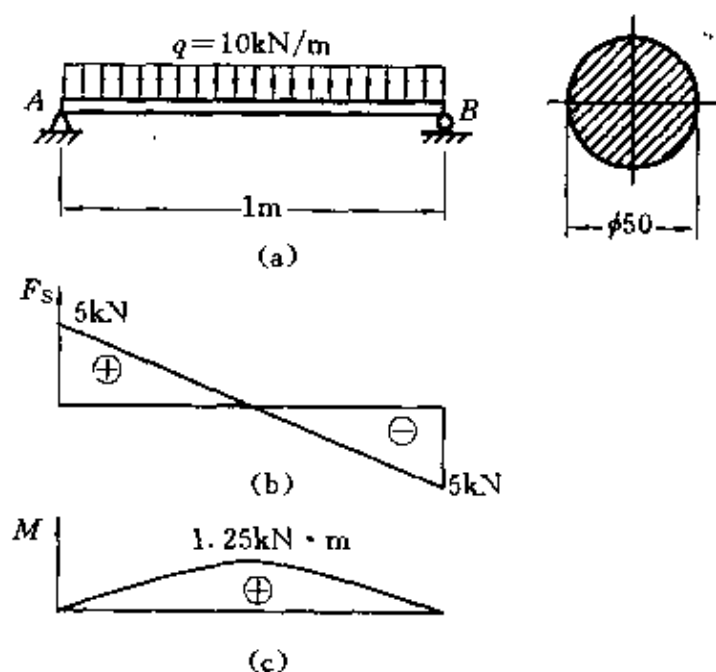
$$= 0.379 \text{ MPa}$$

b 点的正应力和切应力

$$\sigma_b = \frac{M}{W_z} = \frac{3.64 \times 10^3}{\frac{1}{6} \times 0.075 \times 0.15^2} \text{ Pa} = 12.9 \text{ MPa}$$

$$\tau_b = 0$$

5.18 如题 5.18 图(a)所示, 试计算在均布载荷作用下, 圆截面简支梁内的最大正应力和最大切应力, 并指出它们发生于何处。



题 5.18 图

解 画出的简支梁的剪力图和弯矩图如题 5.18 图(b)、(c)所

示,则

$$M_{\max} = \frac{1}{8}ql^2 = 1.25 \text{ kN} \cdot \text{m}, \quad F_{S\max} = 5 \text{ kN}$$

最大正应力

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{1.25 \times 10^3}{\frac{\pi}{32} \times 0.05^3} \text{ Pa} = 102 \text{ MPa}$$

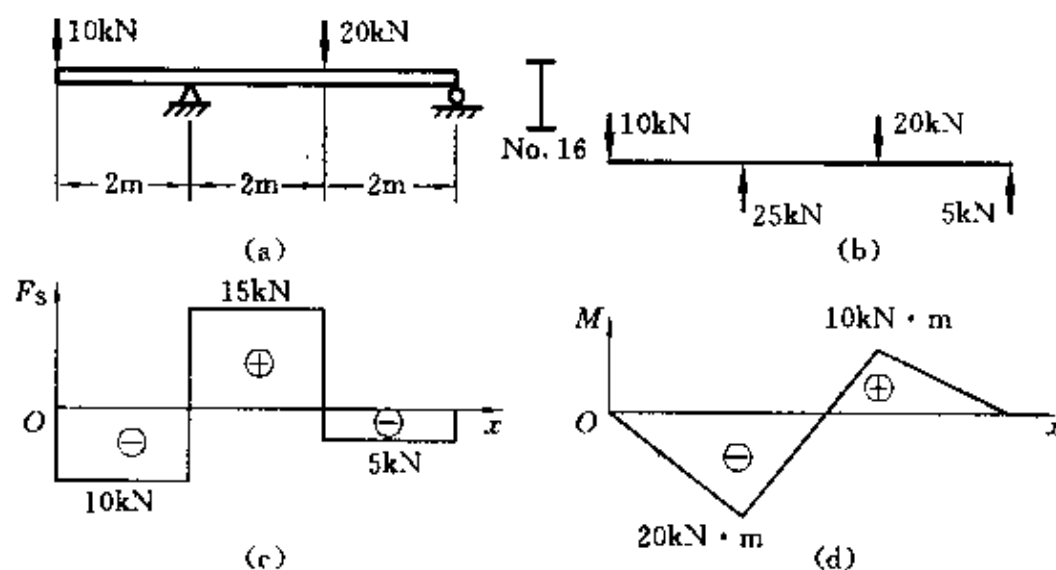
最大正应力发生在跨中点处圆截面竖向直径的上、下端点上,如题 5.18 图(a)所示。

最大切应力

$$\tau_{\max} = \frac{4F_{S\max}}{3\pi R^2} = \frac{4 \times 5 \times 10^3}{3\pi \times 0.025^2} \text{ Pa} = 3.4 \text{ MPa}$$

最大切应力发生在 A、B 截面的中性轴上。

5.19 试计算题 5.19 图(a)所示 No. 16 工字钢截面梁内的最大正应力和最大切应力。



题 5.19 图

解 利用平衡条件求出工字梁的约束反力并标示在题 5.19 图(b)中,作剪力图和弯矩图,分别如题 5.19 图(c)、(d)所示。No. 16 工字钢截面的几何性质可查附录三型钢表获得。

$$I_z = 1130 \text{ cm}^4, \quad W_z = 141 \text{ cm}^3$$

$$I_z/S = 13.8 \text{ cm}, \quad d = 6 \text{ mm (腹板宽度)}$$

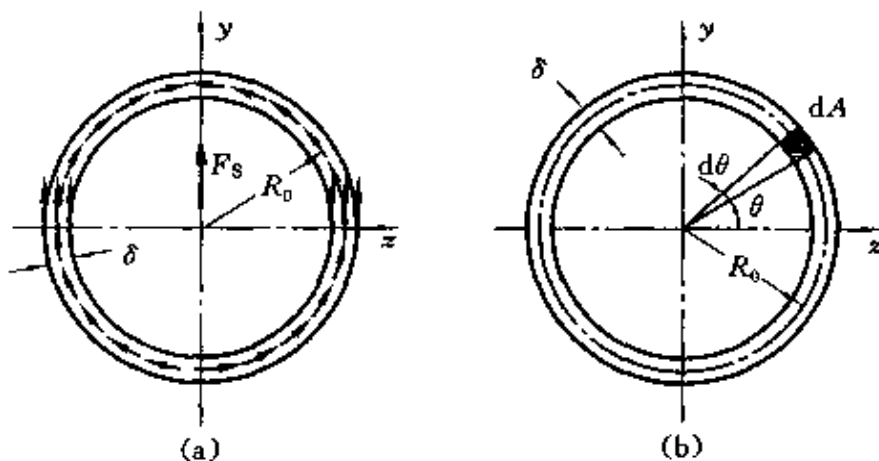
式中, I_z/S 是截面对中性轴的惯性矩与半截面的静矩之比。

最大正应力和最大切应力

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{20 \times 10^3}{141 \times 10^{-6}} \text{ Pa} = 142 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\max} = \frac{F_{S\max} S_{z\max}^*}{b I_z} = \frac{15 \times 10^3}{6 \times 10^{-3} \times 13.8 \times 10^{-2}} \text{ Pa} = 18.1 \text{ MPa}$$

5.20 如题5.20图(a)所示,若圆环形截面梁的壁厚 δ 远小于平均半径 R_0 ,试求截面上的最大切应力。设剪力 F_S 已知。



题5.20图

$$\text{解 } I_z = \frac{1}{4} \pi \left(R_0 + \frac{\delta}{2} \right)^4 - \frac{1}{4} \pi \left(R_0 - \frac{\delta}{2} \right)^4 \approx \pi R_0^3 \delta$$

圆环的半截面积对中性轴 z 的静面矩(题5.20图(b))

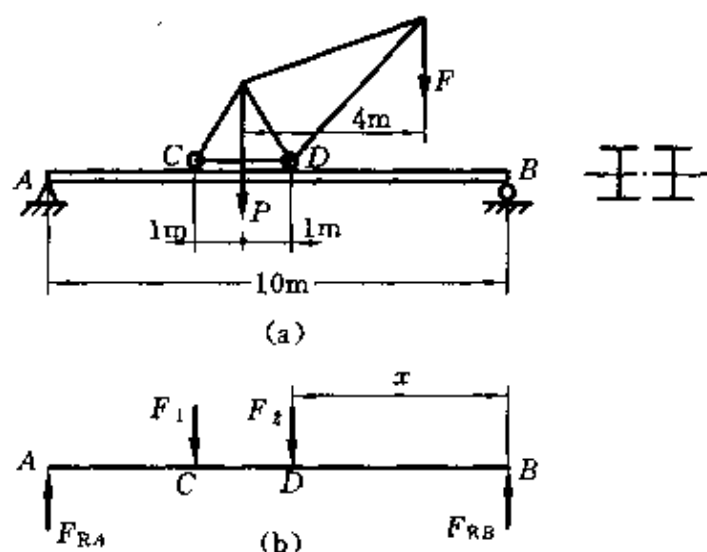
$$S_z^* = \int_{A/2} y dA = \int_0^\pi (R_0 \sin \theta) \delta R_0 d\theta = R_0^2 \delta \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 2 R_0^2 \delta$$

截面上最大切应力产生在中性轴上,即

$$\tau_{\max} = \frac{F_S S_z^*}{b I_z} = \frac{F_S \times 2 R_0^2 \delta}{(2 \delta) \pi R_0^3 \delta} = \frac{F_S}{\pi R_0 \delta}$$

5.21 如题5.21图(a)所示,起重机下面的轨道的梁由两根工字钢梁组成,起重机自重 $P=50 \text{ kN}$,起重量 $F=10 \text{ kN}$ 。许用应

力 $[\sigma]=160\text{ MPa}$, $[\tau]=100\text{ MPa}$ 。若暂不考虑梁的自重, 试按正应力强度条件选定工字钢型号, 然后再按切应力强度条件进行校核。



题 5.21 图

解 取起重机为研究对象, 利用平衡条件可求出起重机对梁的作用力。

$$F_1 = 10\text{ kN}, \quad F_2 = 50\text{ kN}$$

梁的受力图如题 5.21 图 (b) 所示。应用平衡条件求出支座反力, 即

$$\sum M_A = 0, \quad F_{RB} = \frac{F_2(10-x) + F_1(8-x)}{10} = 58 - 6x$$

根据梁的受力情况可知, 最大弯矩将发生在截面 C 或截面 D 上。由于 $F_2 > F_1$, 最大弯矩必发生在 D 截面内, 因 C、D 是移动的, 所以 D 截面上的弯矩是 x 的函数, 即

$$M_D = F_{RB}x = 58x - 6x^2$$

M_D 取极值的条件是 M_D 对 x 的一阶导数等于零, 即

$$\frac{dM_D}{dx} = 0, \quad 58 - 12x = 0, \quad x = \frac{29}{6}$$

当 $x = 29/6$ 时最大弯矩为

$$M_{D\max} = \left[58 \times \frac{29}{6} - 6 \times \left(\frac{29}{6} \right)^2 \right] \text{ kN} \cdot \text{m} = 140 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

应用强度条件设计截面,即

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{D\max}}{2W_z} \leq [\sigma]$$

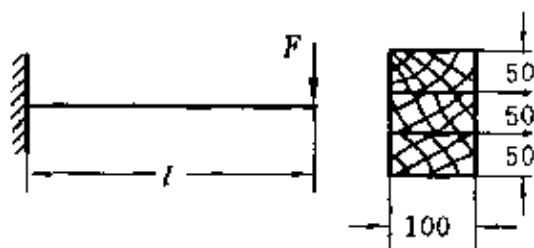
$$W_z \geq \frac{M_{D\max}}{2[\sigma]} = \frac{140 \times 10^3}{2(160 \times 10^6)} \text{ m}^3 = 438 \text{ cm}^3$$

查附录三型钢表选取两根No. 28a 工字钢。No. 28a 工字钢的 $W_z = 508 \text{ cm}^3$, 对中性轴的半截面积的惯性矩与静面矩之比 $I_z/S_z^* = 24.6 \text{ cm}$, 腹板宽度 $d = 8.5 \text{ mm}$ 。所以最大切应力是当小车的 D 轮无限靠近 B 支座时, 剪力最大, $F_s = 58 \text{ kN}$ 时取最大值, 即

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{F_s S_z^*}{2dI_z} = \frac{58 \times 10^3}{2 \times 8.5 \times 10^{-3} \times 24.6 \times 10^{-2}} \text{ Pa} \\ &= 13.9 \text{ MPa} < [\tau] = 100 \text{ MPa} \end{aligned}$$

最大切应力小于许用切应力, 故安全。

5.22 由三根木条胶合而成的悬臂梁截面尺寸如题 5.22 图所示, 跨度 $l = 1 \text{ m}$ 。若胶合面上的许用切应力为 0.34 MPa , 木材的许用弯曲正应力为 $[\sigma] = 10 \text{ MPa}$, 许用切应力为 $[\tau] = 1 \text{ MPa}$,



题 5.22 图

试求许可载荷 F 。

解 (1) 按木条弯曲正应力强度要求确定许可载荷

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{Fl}{W} = \frac{F \times 1}{\frac{1}{6} \times 0.1 \times 0.15^2} \leq [\sigma] = 10 \times 10^6 \text{ Pa}$$

解上式得 $F \leq 3750 \text{ N}$

(2) 按木条切应力强度要求确定许可载荷

$$\tau = \frac{3}{2} \times \frac{F_s}{A} = \frac{3}{2} \times \frac{F}{0.1 \times 0.15} \leq [\tau] = 1 \times 10^6 \text{ Pa}$$

解上式得 $F \leq 10000 \text{ N}$

(3) 按胶合面的切应力强度要求确定许可载荷

$$F_s = \int_0^x \tau(x) s dx = \int_0^x \frac{3q(l-2x)}{4sh} s dx = \frac{3qx}{4h} (l-x)$$

横截面 $bb'c'c$ 上正应力合力

$$\begin{aligned} F_N &= \int_0^{h/2} \sigma(x) s dy = \int_0^{h/2} \frac{M(x)}{I_z} y s dy = \int_0^{h/2} \frac{\left(\frac{ql}{2}x - \frac{1}{2}qx^2\right)}{\frac{1}{12}sh^3} y s dy \\ &= \frac{\left(\frac{ql}{2}x - \frac{1}{2}qx^2\right)}{\frac{1}{12}sh^3} \times \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^2 s}{2} = \frac{3q}{4h} x(l-x) \end{aligned}$$

$$F_s - F_N = \frac{3qx}{4h} (l-x) - \frac{3qx}{4h} (l-x) = 0$$

满足平衡条件 $\sum X=0$ 。 F_s 、 F_N 组成一个逆时针方向力偶，与该力偶矩平衡的是截面 $abcd$ 上的挤压应力和截面 $aa'd'd$ 上的剪力 $ql/4$ 所组成的顺时针力偶矩。

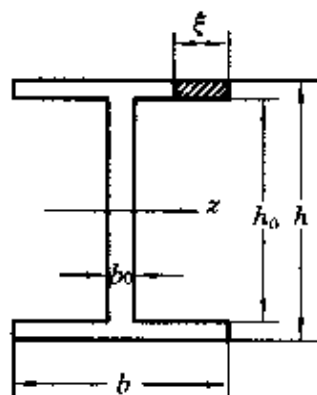
中性层上除剪应力外，还有挤压应力，挤压应力沿横截面高度方向按三次曲线分布， $\sigma_{bs}(y) = \frac{q}{2sh^3} (h^3 + 3h^2y - 4y^3)$ ，最大挤压应力产生在梁上表面，大小是 q/s ，中性层上的挤压应力是最大挤压应力之半，即

$$\sigma_{bs} = \frac{q}{2s}$$

满足平衡条件

$$\begin{aligned} \sum M_o &= N \left(\frac{2}{3} \times \frac{h}{2} \right) + (\sigma_{bs}s) \frac{x^2}{2} - \frac{ql}{4} x \\ &= \frac{qx(l-x)}{4} + \frac{qx^2}{4} - \frac{ql}{4} x = 0 \end{aligned}$$

5.24 如题 5.24 图所示，若梁的截面为宽翼缘工字形，横截面上的剪力为 F_s ，试求翼缘上平行于 z 轴的切应力分布规律，并求最大切应力。



题 5.24 图

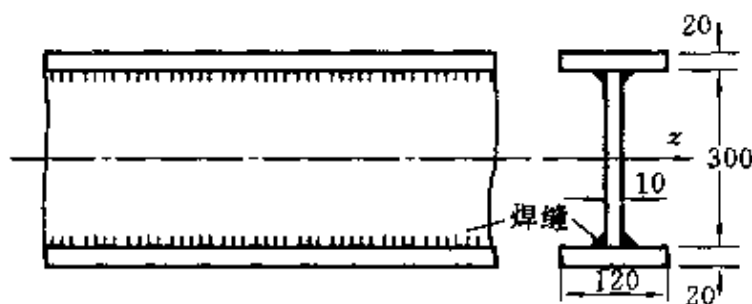
解 由切应力公式得

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{F_s S^*}{\delta I_z^*} = \frac{F_s \xi \left(\frac{h-h_0}{2} \right) \left(\frac{h_0}{2} + \frac{h-h_0}{2} \times \frac{1}{2} \right)}{\frac{h-h_0}{2} I_z} \\ &= \frac{F_s \xi \left(\frac{h-h_0}{2} \right) \left(\frac{h+h_0}{4} \right)}{\frac{h-h_0}{2} I_z} = \frac{F_s \xi (h+h_0)}{4 I_z}\end{aligned}$$

当 $\xi = \frac{b}{2}$ 时, 切应力最大

$$\tau_{\max} = \frac{F_s b (h + h_0)}{8 I_z}$$

5.25 题5.25图所示宽翼缘工字梁由钢板焊接而成。若横截面上剪力为 $F_s = 180 \text{ kN}$, 试求每单位长度焊缝所必须传递的力。



题 5.25 图

解 假设梁为一整体工字梁, 则应首先算出腹板与翼缘连接处的切应力。这时

$$S_z^* = (20 \times 120 \times 160 \times 10^{-9}) \text{ m}^3 = 384 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$\begin{aligned}I_z &= \left[\frac{1}{12} (120 \times 340^3 - 110 \times 300^3) \times 10^{-12} \right] \text{ m}^4 \\ &= 146 \times 10^{-6} \text{ m}^4\end{aligned}$$

$$\tau = \frac{F_s S_z^*}{I_z b} = \left(\frac{180 \times 10^3 \times 384 \times 10^{-6}}{146 \times 10^{-6} \times 0.01} \right) \text{ Pa} = 47.3 \text{ MPa}$$

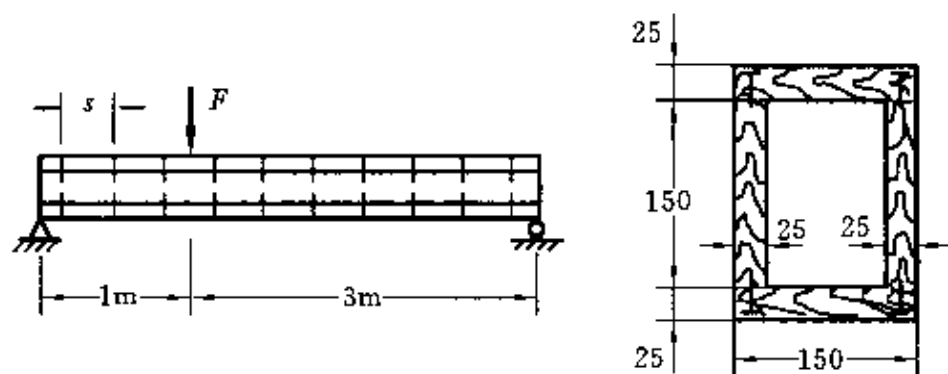
腹板厚为 10 mm, 在腹板与翼缘连接处, 长为 1 mm 的纵截面面积

为 $1 \times 10 \text{ mm}^2$, 这一面积上的剪力为

$$f_s = (47.3 \times 10^6 \times 10 \times 10^{-6}) \text{ N} = 473 \text{ N}$$

这一剪力就是每单位长度焊缝所必须传递的力。

5.26 用螺钉将四块木板连接而成的箱形梁如题 5.26 图所示。每块木板的横截面面积皆为 $150 \text{ mm} \times 25 \text{ mm}$ 。若每一螺钉的许可剪力为 1.1 kN , 试确定螺钉的间距 s 。设 $F = 5.5 \text{ kN}$ 。



题 5.26 图

解 箱形梁的横截面对中性轴的惯性矩为

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{1}{12} \times 150 \times 200^3 - \frac{1}{12} \times 100 \times 150^3 \right) \text{ mm}^4 \\ &= 7.19 \times 10^7 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

顶板横截面对中性轴的静面矩为

$$S_z^* = [25 \times 150 \times (75 + 25/2)] \text{ mm}^3 = 3.28 \times 10^5 \text{ mm}^3$$

箱形梁横截面上的最大剪力为

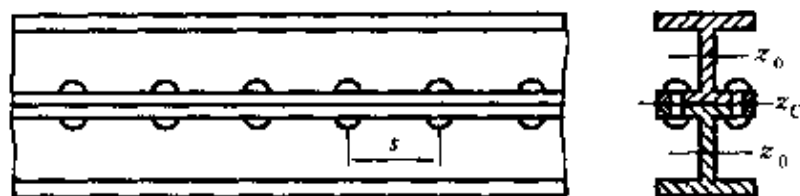
$$F_s = \frac{3}{4} F = \left(\frac{3}{4} \times 5.5 \right) \text{ kN} = 4.13 \text{ kN}$$

螺钉所在处的纵截面上的剪力流为 $f_s = F_s S_z^* / I_z$ 。螺钉所在处纵截面上许可的单位长度上的剪力 $f_s' = 2F_{s\text{螺}} / s$, 根据强度条件应有 $f_s = f_s'$, 可得螺钉的间距

$$s = \frac{2F_{s\text{螺}}}{f_s} = \frac{2F_{s\text{螺}} I_z}{F_s S_z^*} = \frac{2 \times 1100 \times 7.19 \times 10^{-5}}{4.13 \times 10^3 \times 3.28 \times 10^{-4}} \text{ m} = 117 \text{ mm}$$

5.27 题 5.27 图所示梁由两根 No. 36a 工字钢铆接而成。铆

钉的间距为 $s = 150 \text{ mm}$, 直径 $d = 20 \text{ mm}$, 许用切应力 $[\tau] = 90 \text{ MPa}$ 。梁横截面上的剪力 $F_s = 40 \text{ kN}$ 。试校核铆钉的剪切强度。



题 5.27 图

解 查附录三型钢表可获得 No. 36a 工字钢截面对自身的中性轴的惯性矩为 $I_{z_0} = 15800 \text{ cm}^4$, 截面面积为 $A = 76.48 \text{ cm}^2$, 截面高度为 $h = 36 \text{ cm}$ 。组合截面对中性轴的惯性矩为

$$I_{z_c} = 2(I_{z_0} + d^2 A) = 2(15800 + 18^2 \times 76.48) \text{ cm}^4 \\ = 81200 \text{ cm}^4$$

一根工字钢的截面对中性轴 z_c 的静面矩为

$$S_{z_c}^* = 18 \times 76.48 \text{ cm}^3 = 1380 \text{ cm}^3$$

铆钉连接处的纵截面上的剪力流

$$f_s = \frac{F_s S_{z_c}^*}{I_{z_c}} = \frac{40 \times 10^3 \times 1380 \times 10^{-6}}{81200 \times 10^{-8}} \text{ N/m} = 68 \text{ kN/m}$$

由铆钉间距 $s = \frac{2F_{s\text{铆}}}{f_s}$ 可得每个铆钉承受的剪力为

$$F_{s\text{铆}} = \frac{s f_s}{2} = \frac{0.15 \times 68 \times 10^3}{2} \text{ N} = 5100 \text{ N}$$

铆钉的切应力

$$\tau = \frac{F_{s\text{铆}}}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{5100 \times 4}{\pi \times 0.02^2} \text{ Pa} = 16.2 \text{ MPa} < [\tau] = 90 \text{ MPa}$$

因铆钉的切应力小于许用切应力, 故安全。

5.28 试计算题 5.12 中的梁在许可载荷作用下的最大切应力。

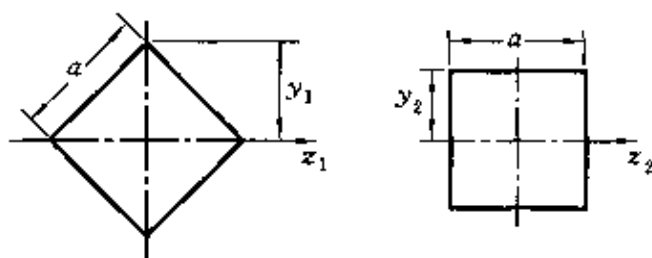
解 因梁承受的最大剪力 $F_s = 44.1 \text{ kN}$ (题 5.12 计算结果),

所以最大切应力

$$\tau_{\max} = \frac{F_s S_{z_c}^*}{b I_{z_c}} = \frac{44.1 \times 10^3 \times 50 \times 153.6 \times \frac{153.6}{2} \times 10^{-9}}{50 \times 10^{-3} \times 10180 \times 10^{-8}} \text{ Pa}$$

$$= 5.11 \text{ MPa}$$

5.29 截面为正方形的梁按题5.29图所示两种方式放置。问哪种方式比较合理？



题5.29图

解 从题15.13的解答可知，正多边形面积对任一形心轴的 I_{z_c} 都相等。题5.29图所示两种放置方式的正方形，它们的形心主惯性矩都为

$$I_{z_c} = \frac{1}{12} a^4$$

但是它们的抗弯截面系数不相等，分别为

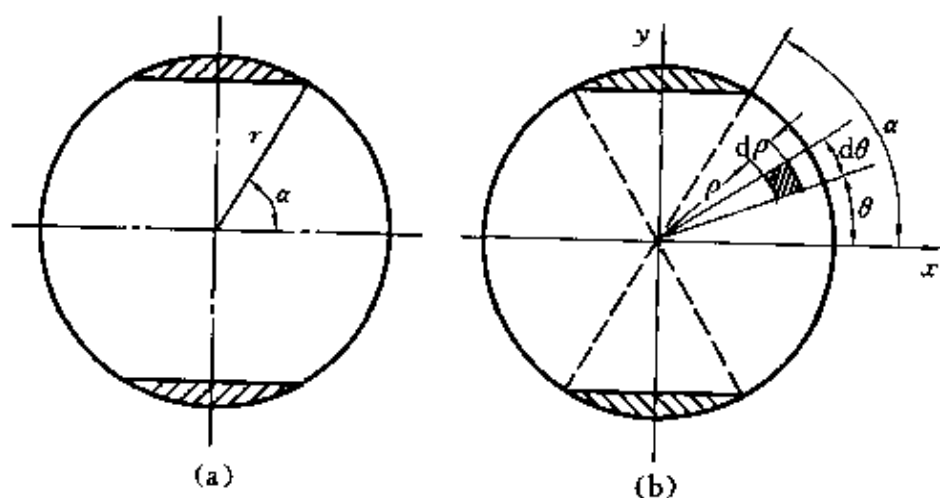
$$W_{z_1} = \frac{I_{z_c}}{y_1} = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3, \quad W_{z_2} = \frac{I_{z_c}}{y_2} = \frac{1}{6} a^3$$

因 $W_{z_1} < W_{z_2}$

所以第二种放置较合理。

5.30 如题5.30图(a)所示，半径为 r 的圆形梁截面，切掉画阴影线的部分后，反而有可能使抗弯截面系数增大(何故?)。试求使 W 为极值的 α ，并问这对梁的抗弯刚度有何影响？

解 由题5.30图(b)可以看出，切掉阴影线部分后剩余的面积，是由4个相同的直角三角形面积和4个相同的扇形面积组成的，一个直角三角形面积对水平直径的惯性矩为



题 5.30 图

$$I_{1x} = \frac{1}{4}bh^3 = \frac{1}{4}(r\cos\alpha)(r\sin\alpha)^3 = \frac{1}{4}r^4\cos\alpha\sin^3\alpha$$

一个扇形面积对水平直径的惯性矩为

$$\begin{aligned} I_{2x} &= \int_A y^2 dA = \int_0^r \int_0^\alpha (\rho\sin\theta)^2 (\rho d\theta d\rho) \\ &= \int_0^r \rho^3 d\rho \int_0^\alpha \sin^2\theta d\theta = \frac{r^4}{4} \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha \right) \end{aligned}$$

因为圆截面在中性轴附近聚集了较多的材料,而离中性轴远处的材料却较少。当切掉适当的小弓形面积后,使离中性轴远处的材料密集度增大,这样抗弯截面系数必增大。

切去阴影部分后,剩余面积对水平直径的惯性矩

$$\begin{aligned} I_x &= 4I_{1x} + 4I_{2x} = r^4 \left(\frac{1}{2}\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right) + r^4 \cos\alpha \sin^3\alpha \\ &= \frac{r^4}{2} \left(\alpha - \frac{1}{4}\sin 4\alpha \right) = \frac{r^4}{8} (4\alpha - \sin 4\alpha) \end{aligned}$$

抗弯截面系数

$$\begin{aligned} W_x &= \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{\frac{r^4}{8} (4\alpha - \sin 4\alpha)}{r\sin\alpha} = \frac{r^3 (4\alpha - \sin 4\alpha)}{8\sin\alpha} \\ \frac{dW_x}{d\alpha} &= \frac{r^3}{8} \left[\frac{(4 - 4\cos 4\alpha)\sin\alpha - (4\alpha - \sin 4\alpha)\cos\alpha}{\sin^2\alpha} \right] = 0 \end{aligned}$$

$$(4 - 4\cos 4\alpha)\sin \alpha - (4\alpha - \sin 4\alpha)\cos \alpha = 0$$

解以上方程得两个解 $\alpha = 0$, $\alpha = 78^\circ$

$\alpha = 0$ 无意义, 应舍去。

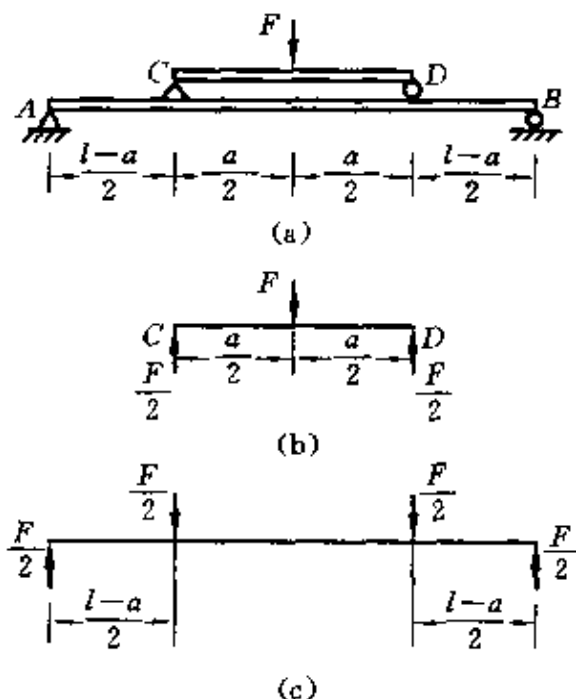
当 $\alpha = 78^\circ$ 时, W 达到最大值

$$W_{x\max} = 0.791r^3, \quad I_x = 0.774r^4$$

未切前 $W_x = \frac{1}{4}\pi r^3 = 0.785r^3, \quad I_x = \frac{1}{4}\pi r^4 = 0.785r^4$

从以上比较可知切后抗弯截面系数 W_x 增大, 而抗弯刚度 EI_x 降低, 因而使梁的抗断裂能力提高, 抗弯曲变形能力降低。

5.31 如题 5.31 图(a)所示, 为改善载荷分布, 在主梁 AB 上安置辅助梁(副梁) CD 。设主梁和辅助梁的抗弯截面系数分别为 W_1 和 W_2 , 材料相同, 试求辅助梁的合理长度 a 。



题 5.31 图

解 本题为结构优化设计问题。

主梁和副梁的最大应力分别为

$$\sigma_1 = M_{\pm} / W_1, \quad \sigma_2 = M_{\text{中}} / W_2 \quad \textcircled{1}$$

因主、副梁的材料相同,所以它们的许用应力 $[\sigma]$ 也应相同,合理的设计应是使主、副梁的最大应力同时达到许用应力,因此有

$$\sigma_1 = \sigma_2$$

由题 5.31 图(b)、(c)可得到

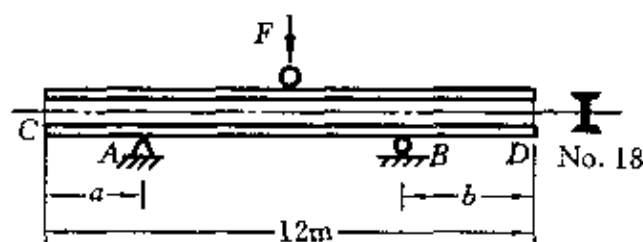
$$M_{\pm} = F(l-a)/4, \quad M_{\text{中}} = Fa/4 \quad (2)$$

所以,由①、②式得 $\frac{F(l-a)/4}{W_1} = \frac{Fa/4}{W_2}$

即 $W_2 l = aW_1 + W_2 a$

由上式可得辅助梁的合理长度 $a = \frac{W_2 l}{W_1 + W_2}$

5.32 如题 5.32 图所示,在 No. 18 工字钢梁上作用着可移动的载荷 F 。为提高梁的承载能力,试确定 a 和 b 的合理数值及相应的许可载荷。设 $[\sigma]=160 \text{ MPa}$ 。



题 5.32 图

解 此题为结构优化设计问题。首先考虑 F 力在梁上的三个特殊位置时梁的弯矩。

F 力作用在左端 C 处时,最大弯矩产生在 A 截面,其上的弯矩为

$$M_A = Fa$$

F 力作用在右端 D 处时,最大弯矩产生在 B 截面,其上的弯矩为

$$M_B = Fb$$

F 力作用在 AB 之间时,最大弯矩产生在 AB 的对称截面上,弯矩为

$$M = F(l-a-b)/4 \quad (l = 12 \text{ m})$$

合理的设计是使三种情况下的弯矩相等,即

$$Fa = Fb = F(l - a - b)/4$$

解上式得 $a = b = l/6 = 12/6 \text{ m} = 2 \text{ m}$

查附录三型钢表, No. 18 工字钢

$$W = 185 \text{ cm}^3$$

根据强度条件, 梁能承受的最大弯矩为

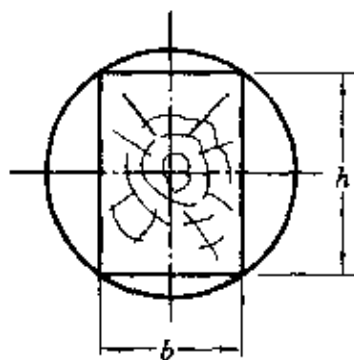
$$\begin{aligned} M_{\max} &\leq [\sigma]W = (160 \times 10^6 \times 185 \times 10^{-6}) \text{ N} \cdot \text{m} \\ &= 29.6 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

因 $M_{\max} = aF$

所以许可载荷为 $F < 14.8 \text{ kN}$

体育器材中的双杠, 其立柱在横梁上的支承点位置即是按 $a = b = l/6$ 的关系确定的。

5.33 如题 5.33 图所示, 我国营造法式中, 矩形截面梁的尺寸比例是 $h/b = 3/2$ 。试用弯曲正应力强度证明: 用圆木锯出的矩形截面梁, 上述尺寸比例接近最佳比值。



题 5.33 图

解 根据题意 h/b 的最佳值应是使梁的抗弯截面系数为最大, 这样才能使梁的承载能力最大。

设圆木截面的直径为 d , 则有

$$b^2 + h^2 = d^2 \quad (1)$$

所以抗弯截面系数

$$W = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(d^2 - b^2)}{6}$$

若以 b 为自变量, 则 W 取极值的条件是 W 对 b 的导数等于零, 即

$$\frac{dW}{db} = \frac{d^2 - 3b^2}{6} = 0 \quad (2)$$

解①、②式得

$$h = \sqrt{2}b, \quad \frac{h}{b} = \sqrt{2} = 1.414$$

这与我国传统的营造法式中 $h/b=3/2=1.5$ 很接近。

5.34 如题 5.34 图所示,在均布载荷作用下的等强度悬臂梁,其横截面为矩形,且宽度 b 为常量。试求截面高度 h 沿梁轴线的变化规律。

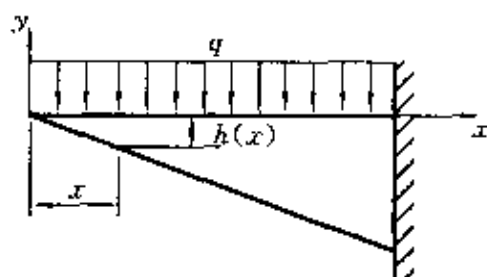
解 所谓等强度梁,就是梁的任一截面上的最大应力都达到许用应力 $[\sigma]$ 的数值,即

$$\sigma_{\max} = \frac{M(x)}{W(x)} = [\sigma] \quad (1)$$

在题 3.34 图所示情况下

$$M(x) = \frac{1}{2}qx^2 \quad (2)$$

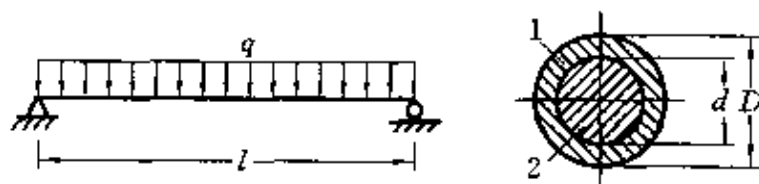
$$W(x) = \frac{1}{6}b[h(x)]^2 \quad (3)$$



题 5.34 图

联立①、②、③式,解得 $h(x) = \sqrt{\frac{3q}{b[\sigma]}}x$

5.35 均布载荷作用下的简支梁由圆管及实心圆杆套合而成(题 5.35 图),变形后两杆仍密切接触。两杆材料的弹性模量分别为 E_1 和 E_2 ,且 $E_1=2E_2$ 。试求两杆各自承担的弯矩。



题 5.35 图

解 梁的最大弯矩为 $M_{\max} = \frac{1}{8}ql^2$

这一弯矩由圆管和实心圆杆共同承担,设二者分担的弯矩分别为 M_1 和 M_2 ,则有

$$M_1 + M_2 = \frac{ql^2}{8} \quad (1)$$

根据变形协调条件,圆管和实心圆杆弯曲变形后,它们的轴线曲率应相同,即

$$\frac{M_1}{E_1 I_1} = \frac{M_2}{E_2 I_2} \quad (2)$$

式中, I_1 和 I_2 分别为圆管和实心圆杆的形心惯性矩,

$$I_1 = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64}, \quad I_2 = \frac{\pi d^4}{64}$$

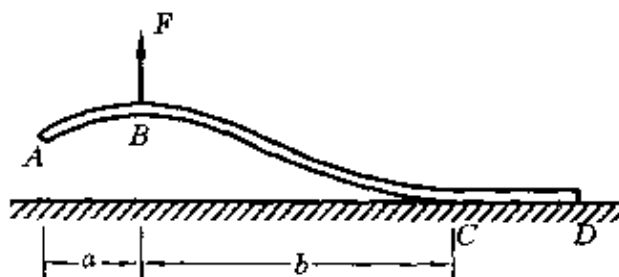
将以上二式代入②式,并考虑到 $E_1 = 2E_2$, 得

$$\frac{M_1}{2(D^4 - d^4)} = \frac{M_2}{d^4} \quad (3)$$

联合①、③式可解出

$$M_1 = \frac{(D^4 - d^4)ql^2}{4(2D^4 - d^4)}, \quad M_2 = \frac{d^4 ql^2}{8(2D^4 - d^4)}$$

5.36 如题 5.36 图所示,以 F 力将置放于地面的钢筋提起。若钢筋单位长度的重量为 q , 当 $b = 2a$ 时,试求所需的 F 力。



题 5.36 图

解 钢筋在 B 点被施加 F 力提高地面时,可视为在集中力 F 和 载荷集度为 q 的均布载荷联合作用下,产生题 5.36 图所示的弯曲变形。根据力 F 的大小不同,钢筋离开地面部分的长度也不同。 CD 段各截面(包括 C 截面)的弯矩为零。因此有

$$M_C = Fb - \frac{1}{2}q(a+b)^2 = 0$$

解上式,得

$$F = 2.25qa$$

第六章 弯曲变形

知识要点

1. 弯曲变形的概念

(1) 挠曲线

弯曲变形后梁的轴线变为挠曲线。平面弯曲时,挠曲线为外力作用平面内的平面曲线。

(2) 平面弯曲时的变形

在小变形情况下,梁的任意二横截面绕各自的中性轴作相对转动,杆件的轴线变为平面曲线,其变形程度以挠曲线的曲率来量度。

① 纯弯曲时,弯矩-曲率关系 $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$

② 横力弯曲时,弯矩-曲率关系 $\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{EI}$

(3) 平面弯曲时的位移

① 挠度——横截面形心在垂直于梁轴线方向上的线位移,以 w 表示。

② 转角——横截面绕其中性轴旋转的角位移,以 θ 表示。

w 和 θ 的正负号由所选坐标系的正方向来确定。沿 y 轴正方向的挠度为正。转角 θ 的正负号判定规则为,将 x 轴绕原点旋转 90° 而与 y 轴重合,若 θ 和它的转向相同,则为正,反之为负。

(4) 挠曲线近似微分方程

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

(5) 受弯曲构件的刚度条件

$$w_{\max} \leq [w], \quad \theta_{\max} \leq [\theta]$$

2. 积分法求梁的挠度和转角

由 $\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$ 得

$$\frac{dw}{dx} = \theta = \int \frac{M(x)}{EI} dx + C,$$

$$w = \iint \frac{M(x)}{EI} dx dx + Cx + D$$

积分常数 C 、 D 由边界条件和连续性条件确定。对于梁上有突变载荷(集中力、集中力偶、间断性分布力)的情况,梁的弯矩 $M(x)$ 不是光滑连续函数,应用上式时,应分段积分,每分一段就多出现两个积分常数。因此除了用边界条件外,还要用连续性条件确定所有的积分常数。

3. 叠加原理求梁的挠度和转角

(1) 叠加原理

各载荷同时作用下梁任一截面的挠度和转角等于各个载荷单独作用时同一截面挠度和转角的代数和。

(2) 叠加原理的限制

叠加原理要求梁某个截面的挠度和转角与该截面的弯矩成线性关系,因此要求:

- ① 弯矩 M 与曲率 $1/\rho$ 成线性关系,这就要求材料是线弹性材料。
- ② 曲率 $1/\rho$ 与挠度成线性关系,这就要求梁变形为小变形。

4. 弯曲时的超静定问题——超静定梁

(1) 超静定梁

约束反力数目多于可应用的独立的静力平衡方程数的梁称为超静定梁,它的未知力不能用静力平衡方程完全确定,必须由变形相容条件和力与变形间的物理关系建立补充方程,然后联立静力平衡方程与补充方程,求解所有的未知数。

(2) 求解简单超静定梁的变形比较法

① 多余约束——超静定梁中多于维持其静力平衡所必须的约束。

② 基本系统——超静定梁解除多余约束后的静定系统。

③ 解题步骤：

a. 选择多余约束，确定基本系统，并以相应于多余约束的反力作为基本系统的未知外力。

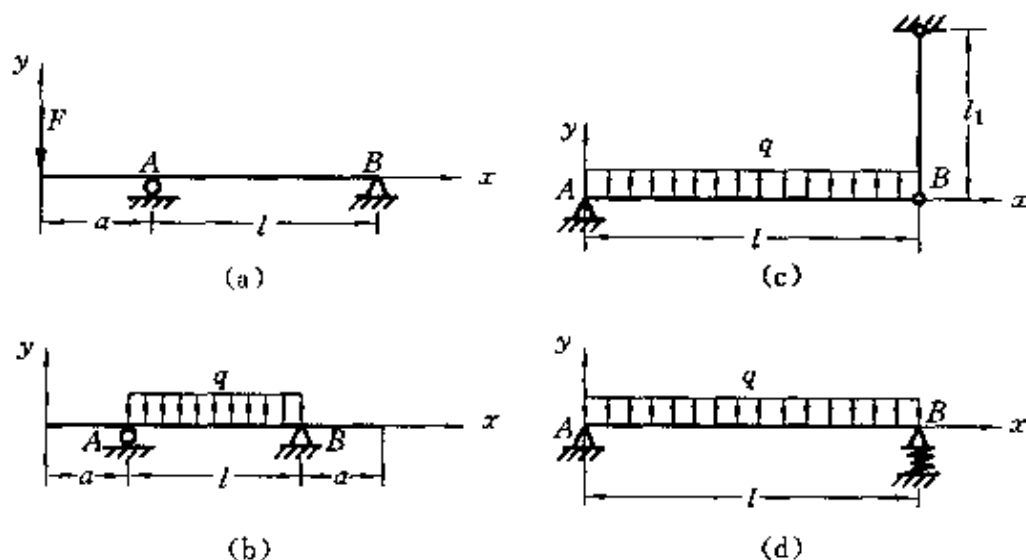
b. 比较基本系统与超静定梁在多余约束处的变形，应用叠加原理列出变形相容方程。

c. 应用弯曲变形表(附录二)写出力-变形间的物理关系，代入变形相容方程得到补充方程，由补充方程求解相应于多余约束的未知反力。

d. 由静力平衡方程求解其余的约束反力。

习题详解

6.1 写出题6.1图所示各梁的边界条件。在题6.1图(d)中支座 B 的弹簧刚度为 $k(\text{N/m})$ 。



题 6.1 图

解 (a) 如题 6.1 图(a)所示。

$$x = a, \quad w_A = 0$$

$$x = a + l, \quad w_B = 0$$

(b) 如题 6.1 图(b)所示。

$$x = a, \quad w_A = 0$$

$$x = a + l, \quad w_B = 0$$

(c) 如题 6.1 图(c)所示。

$$x = 0, \quad w_A = 0$$

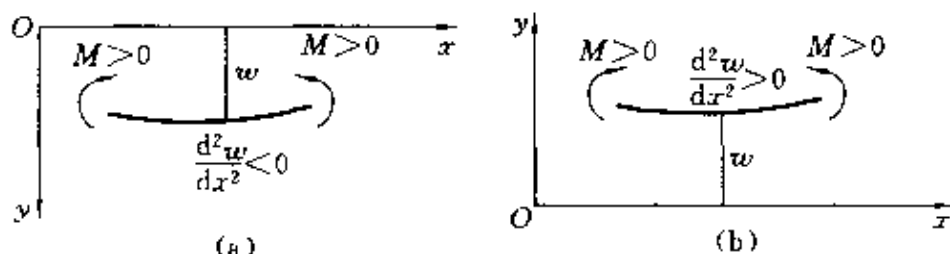
$$x = l, \quad w_B = \Delta l_1$$

(d) 如题 6.1 图(d)所示。

$$x = 0, \quad w_A = 0$$

$$x = l, \quad w_B = -\frac{F_{RB}}{k}$$

6.2 如将坐标系取为 y 轴向下为正(题 6.2 图(a)), 试证明挠曲线的微分方程 $\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M}{EI}$ 应改写成 $\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$ 。



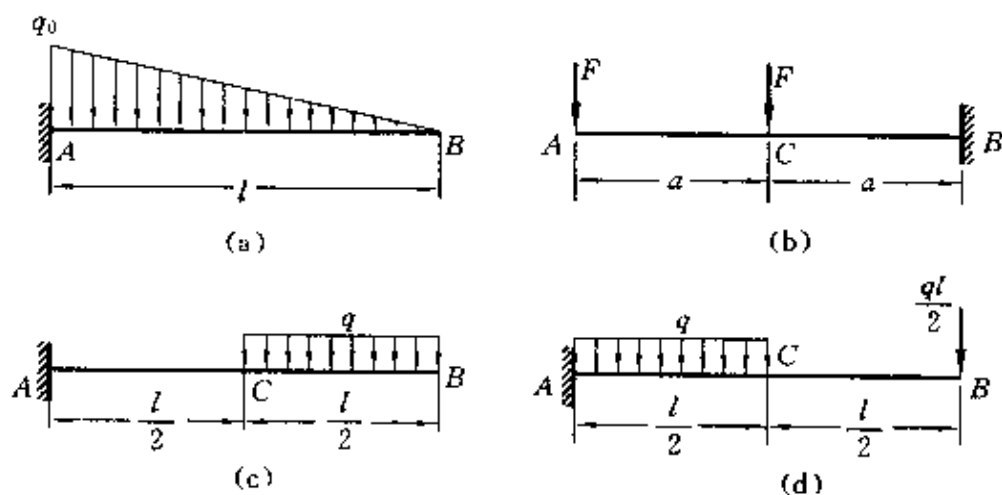
题 6.2 图

解 在高等数学中, 曲率 $\frac{1}{\rho} = \left(\frac{dw}{dx} \right)^2$ (近似公式) 的正负号是取决于坐标系的, 它描述曲线的斜率随 x 的增大是在变小或在增大, 曲线的斜率随 x 的增大亦增大者, 该曲线的曲率为正, 否则为负, 这是不能人为规定的。在材料力学中, 一般规定使梁变形后凹面向上的 M 为正, 凹面向下的 M 为负, 所以题 6.2 图(a)、(b)所示的弯矩是人为地规定为正。在题 6.2 图(b)中, 弯矩与曲率同号, 所以挠曲线微分方程为 $EIw'' = M$ 。而在题 6.2 图(a)中, 弯矩与曲率

反号,故挠曲线微分方程为 $EIw'' = -M$ 。

应当说明的是,在材料力学中,梁通常是水平放置的,坐标系的选取是以梁轴线为 x 轴,指向朝右为正, y 轴与 x 轴垂直,指向朝上为正,因此规定,梁弯曲后凹面向上的弯矩为正,否则为负。严格地讲,应当是,梁弯曲后轴线的曲率为正的弯矩为正,否则为负。材料力学的规定在通常情况下是符合这一原则的,但对竖立的梁、刚架等的弯曲变形,材料力学的规定则不适用。

6.3 用积分法求题 6.3 图(a)、(b)、(c)、(d)所示各梁的挠曲线方程及自由端的挠度和转角。设 EI 为常数。



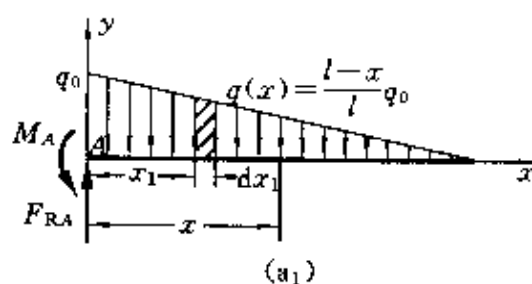
题 6.3 图

解 (a) 选取如题 6.3 图(a₁)所示的坐标系。

解法一 根据平衡条件求出支座反力

$$F_{RA} = \frac{q_0 l}{2}, \quad M_A = \frac{q_0 l^2}{6}$$

任一截面上的弯矩 $M(x)$ 由三部



续题 6.3 图

分组成: 支座反力 F_{RA} 、 M_A 对 x 截面的弯矩及分布载荷对 x 截面的弯矩, 即

$$M(x) = M_1 + M_2 + M_3$$

$$M_1 = F_{RA}x = \frac{1}{2}q_0lx, \quad M_2 = -M_A = -\frac{1}{6}q_0l^2$$

$$M_3 = -\int_0^x \left[(x-x_1) \frac{q_0(l-x_1)}{l} dx_1 \right] = \frac{q_0x^3}{6l} - \frac{q_0l^2}{2}$$

所以弯矩方程为

$$M(x) = \frac{1}{2}q_0lx - \frac{1}{6}q_0l^2 + \frac{1}{6l}q_0x^3 - \frac{1}{2}q_0l^2 = -\frac{q_0}{6l}(l-x)^3$$

挠曲线微分方程及其积分为

$$EIw'' = M(x) = -\frac{q_0}{6l}(l-x)^3$$

$$EIw' = \frac{q_0}{24l}(l-x)^4 + C$$

$$EIw = -\frac{q_0}{120l}(l-x)^5 + Cx + D$$

由边界条件确定积分常数:

$$\text{由 } x=0, \quad \theta_A = w'|_{x=0} = 0 \text{ 得} \quad C = -\frac{q_0l^3}{24}$$

$$\text{由 } x=0, \quad f_A = w|_{x=0} = 0 \text{ 得} \quad D = \frac{q_0l^4}{120}$$

所以挠曲线方程为

$$w(x) = \frac{-q_0}{120lEI}(l-x)^5 - \frac{q_0l^3}{24EI}x + \frac{q_0l^4}{120EI}$$

$$\text{转角方程为} \quad w'(x) = \frac{q_0}{24lEI}(l-x)^4 - \frac{q_0l^3}{24EI}$$

自由端的挠度和转角

$$w_B = w(x)|_{x=l} = -\frac{q_0l^4}{30EI}, \quad \theta_B = w'(x)|_{x=l} = -\frac{q_0l^3}{24EI}$$

解法二 第一种解法要先列出弯矩方程 $M(x)$,在三角形分布载荷情况下,这种解法比较麻烦,因此,这里介绍一种不用列弯矩方程,直接对载荷集度函数 $q(x)$ 积分的方法。应用(6-3)式,有

$$EIw^{(4)} = -\frac{l-x}{l}q_0$$

$$EIw^{(3)} = -q_0x + \frac{q_0}{2l}x^2 + C_1$$

$$EIw'' = -\frac{1}{2}q_0x^2 + \frac{1}{6l}q_0x^3 + C_1x + C_2$$

$$EIw' = -\frac{1}{6}q_0x^3 + \frac{1}{24l}q_0x^4 + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3$$

$$EIw = -\frac{1}{24}q_0x^4 + \frac{1}{120l}q_0x^5 + \frac{1}{6}C_1x^3 + \frac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4$$

利用边界条件确定积分常数,有6个可利用的边界条件,我们只需选用4个便可确定4个积分常数:

$$\text{由 } x=0 \text{ 时, } w=0, \text{ 得 } C_4=0$$

$$\text{由 } x=0 \text{ 时, } w'=0, \text{ 得 } C_3=0$$

$$\text{由 } x=l \text{ 时, } F_S=F_{RA}=\frac{1}{2}q_0l, \text{ 得 } C_1=\frac{1}{2}q_0l$$

$$\text{由 } x=l \text{ 时, } M=-\frac{1}{6}q_0l^2, \text{ 得 } C_2=-\frac{1}{6}q_0l^2$$

所以挠曲线方程与转角方程为

$$w(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{24}q_0x^4 + \frac{1}{120l}q_0x^5 + \frac{1}{12}q_0lx^3 - \frac{1}{12}q_0l^2x^2 \right)$$

$$w'(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{6}q_0x^3 + \frac{1}{24l}q_0x^4 + \frac{1}{4}q_0lx^2 - \frac{1}{6}q_0l^2x \right)$$

$$\text{自由端的挠度 } w_B = w(x)|_{x=l} = -\frac{q_0l^4}{30EI}$$

$$\text{自由端的转角 } \theta_B = w'(x)|_{x=l} = -\frac{q_0l^3}{24EI}$$

(b) 选取如题6.3图(b₁)所示的坐标系。

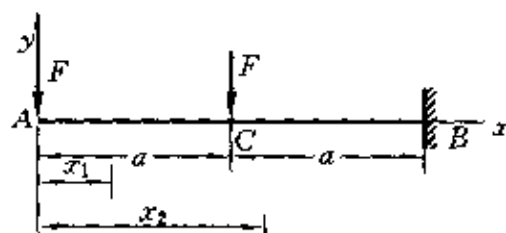
AC段弯矩方程、挠曲线微分

方程及其积分为

$$M_1(x_1) = -Fx_1 \quad (0 \leq x_1 \leq a)$$

$$EIw_1'' = -Fx_1$$

$$EIw_1' = -F\frac{x_1^2}{2} + C_1$$



(b₁)

续题6.3图

$$EIw_1 = -F \frac{x_1^3}{6} + C_1x_1 + D_1$$

CB 段弯矩方程、挠曲线微分方程及其积分为

$$M_2(x_2) = Fa - 2Fx_2 \quad (a \leq x_2 \leq 2a)$$

$$EIw_2'' = Fa - 2Fx_2$$

$$EIw_2' = Fax_2 - Fx_2^2 + C_2$$

$$EIw_2 = Fa \frac{x_2^2}{2} - F \frac{x_2^3}{3} + C_2x_2 + D_2$$

由边界条件和连续性条件确定积分常数:

$$\text{由 } x_2 = 2a, \quad w_2' = 0 \text{ 得 } C_2 = 2Fa^2$$

$$\text{由 } x_2 = 2a, \quad w_2 = 0 \text{ 得 } D_2 = -\frac{10}{3}Fa^3$$

$$\text{由 } x_1 = x_2 = a, \quad w_1' = w_2' \text{ 得}$$

$$-F \frac{a^2}{2} + C_1 = Fa^2 - Fa^2 + 2Fa^2 \quad (1)$$

由 $x_1 = x_2 = a, w_1 = w_2$ 得

$$-F \frac{a^3}{6} + C_1a + D_1 = Fa \frac{a^2}{2} - F \frac{a^3}{3} + 2Fa^3 - \frac{10}{3}Fa^3 \quad (2)$$

联立①、②式求解,得

$$C_1 = \frac{5}{2}Fa^2, \quad D_1 = -\frac{7}{2}Fa^3$$

各段挠曲线方程和转角方程

$$w_1(x_1) = \frac{1}{EI} \left(-F \frac{x_1^3}{6} + \frac{5}{2}Fa^2x_1 - \frac{7}{2}Fa^3 \right)$$

$$w_2(x_2) = \frac{1}{EI} \left(-F \frac{x_2^3}{3} + \frac{1}{2}Fax_2^2 + 2Fa^2x_2 - \frac{10}{3}Fa^3 \right)$$

$$\theta_1(x_1) = w_1'(x_1) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{F}{2}x_1^2 + \frac{5}{2}Fa^2 \right)$$

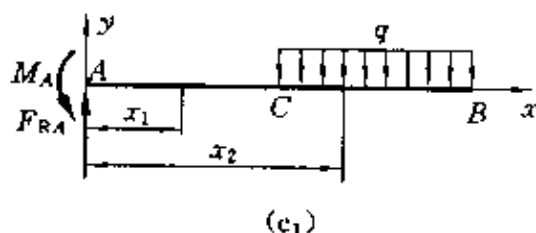
$$\theta_2(x_2) = w_2'(x_2) = \frac{1}{EI} (Fax_2 - Fx_2^2 + 2Fa^2)$$

自由端的挠度和转角

$$w_A = w_1(x_1)|_{x_1=0} = -\frac{7Fa^3}{2EI}, \quad \theta_A = w'_1(x_1)|_{x_1=0} = \frac{5Pa^2}{2EI}$$

(c) 选取如题 6.3 图 (c₁) 所示的坐标系。

弯矩方程、挠曲线微分方程及其积分为



续题 6.3 图

$$M_1(x_1) = -q \frac{l}{2} \left(\frac{3}{4}l - x_1 \right) \quad \left(0 \leq x_1 \leq \frac{l}{2} \right)$$

$$EIw''_1 = -q \frac{l}{2} \left(\frac{3}{4}l - x_1 \right)$$

$$EIw'_1 = q \frac{l}{4} \left(\frac{3}{4}l - x_1 \right)^2 + C_1$$

$$EIw_1 = -q \frac{l}{12} \left(\frac{3}{4}l - x_1 \right)^3 + C_1 x_1 + D_1$$

$$CB \text{ 段} \quad M_2(x_2) = -\frac{1}{2}q(l - x_2)^2 \quad \left(\frac{l}{2} \leq x_2 \leq l \right)$$

$$EIw''_2 = -\frac{1}{2}q(l - x_2)^2$$

$$EIw'_2 = \frac{1}{6}q(l - x_2)^3 + C_2$$

$$EIw_2 = -\frac{1}{24}q(l - x_2)^4 + C_2 x_2 + D_2$$

由边界条件和连续性条件确定积分常数:

$$\text{由 } x_1=0, \quad w'_1=0, \text{ 得} \quad C_1 = -\frac{9}{64}ql^3$$

$$\text{由 } x_1=0, \quad w_1=0, \text{ 得} \quad D_1 = \frac{9}{256}ql^4$$

$$\text{由 } x_1=x_2=\frac{l}{2}, \quad w'_1=w'_2, \quad w_1=w_2, \text{ 得}$$

$$C_2 = -\frac{7}{48}ql^3, \quad D_2 = \frac{5}{128}ql^4$$

各段的挠曲线方程和转角方程

$$w_1(x_1) = \frac{1}{EI} \left[-q \frac{l}{12} \left(\frac{3}{4}l - x_1 \right)^3 - \frac{9}{64}ql^3x_1 + \frac{9}{256}ql^4 \right]$$

$$w_2(x_2) = \frac{1}{EI} \left[-\frac{1}{24}q(l-x_2)^4 - \frac{7}{48}ql^3x_2 + \frac{5}{128}ql^4 \right]$$

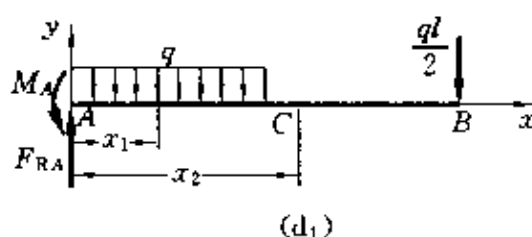
$$\theta_1(x_1) = w'_1(x_1) = \frac{1}{EI} \left[\frac{ql}{4} \left(\frac{3}{4}l - x_1 \right)^2 - \frac{9}{64}ql^3 \right]$$

$$\theta_2(x_2) = w'_2(x_2) = \frac{1}{EI} \left[\frac{q}{6}(l-x_2)^3 - \frac{7}{48}ql^3 \right]$$

自由端的挠度和转角

$$w_B = w_2(x_2)|_{x_2=l} = -\frac{41ql^4}{384EI}$$

$$\theta_B = w'_2(x_2)|_{x_2=l} = -\frac{7ql^3}{48EI}$$



(d) 选取如题 6.3 图 (d₁) 所

续题 6.3 图

示的坐标系。

弯矩方程、挠曲线微分方程及其积分为

AC 段

$$M_1(x_1) = - \left[\frac{ql}{2}(l-x_1) + \frac{1}{2}q \left(\frac{l}{2} - x_1 \right)^2 \right] \quad \left(0 \leq x_1 \leq \frac{l}{2} \right)$$

$$EIw''_1 = - \left[\frac{ql}{2}(l-x_1) + \frac{1}{2}q \left(\frac{l}{2} - x_1 \right)^2 \right]$$

$$EIw'_1 = q \frac{l}{4}(l-x_1)^2 + \frac{1}{6}q \left(\frac{l}{2} - x_1 \right)^3 + C_1$$

$$EIw_1 = - \left[\frac{ql}{12}(l-x_1)^3 + \frac{1}{24}q \left(\frac{l}{2} - x_1 \right)^4 \right] + C_1x_1 + D_1$$

CB 段 $M_2(x_2) = -\frac{1}{2}ql(l-x_2) \quad \left(\frac{l}{2} \leq x_2 \leq l \right)$

$$EIw''_2 = -\frac{1}{2}ql(l-x_2)$$

$$EIw'_2 = \frac{1}{4}ql(l-x_2)^2 + C_2$$

$$EIw_2 = -\frac{1}{12}ql(l-x_2)^3 + C_2x_2 + D_2$$

由边界条件和连续性条件确定积分常数:

$$\text{由 } x_1=0, w'_1=0, \text{ 得 } C_1 = -\frac{13}{48}ql^3$$

$$\text{由 } x_1=0, w_1=0, \text{ 得 } D_1 = \frac{11}{128}ql^4$$

$$\text{由 } x_1=x_2=\frac{l}{2}, w'_1=w'_2, \text{ 得 } C_2 = -\frac{13}{48}ql^3$$

$$\text{由 } x_1=x_2=\frac{l}{2}, w_1=w_2, \text{ 得 } D_2 = \frac{11}{128}ql^4$$

各段挠曲线方程和转角方程

$$w_1(x_1) = \frac{1}{EI} \left[-q \frac{l}{12} (l-x_1)^3 - \frac{1}{24} q \left(\frac{l}{2} - x_1 \right)^4 - \frac{13}{48} ql^3 x_1 + \frac{11}{128} ql^4 \right]$$

$$w_2(x_2) = \frac{1}{EI} \left[-\frac{1}{12} ql (l-x_2)^3 - \frac{13}{48} ql^3 x_2 + \frac{11}{128} ql^4 \right]$$

$$\theta_1(x_1) = w'_1(x_1) = \frac{1}{EI} \left[\frac{ql}{4} (l-x_1)^2 + \frac{q}{6} \left(\frac{l}{2} - x_1 \right)^3 - \frac{13}{48} ql^3 \right]$$

$$\theta_2(x_2) = w'_2(x_2) = \frac{1}{EI} \left[\frac{ql}{4} (l-x_2)^2 - \frac{13}{48} ql^3 \right]$$

自由端的挠度和转角

$$w_B = w_2(x_2)|_{x_2=l} = -\frac{71ql^4}{384EI}, \quad \theta_B = w'_2(x_2)|_{x_2=l} = -\frac{13ql^3}{48EI}$$

6.4 用积分法求题 6.4 图(a)、(b)、(c)、(d)所示各梁的挠曲线方程、端截面转角 θ_A 和 θ_B 、跨度中点的挠度和最大挠度。设 EI 为常量。

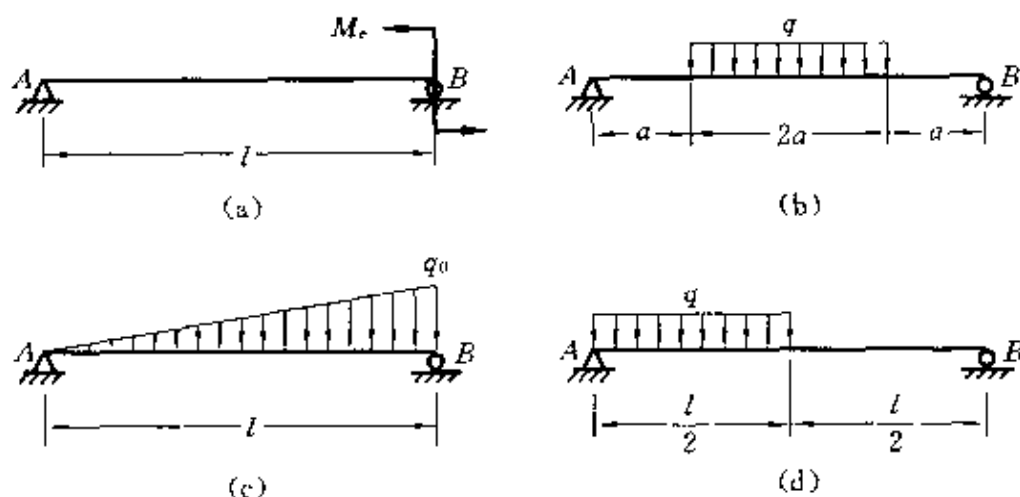
解 (a) 如题 6.4 图(a₁)所示。

根据平衡条件, 求出支座反力

$$F_{RA} = \frac{m}{l}$$

弯矩方程、挠曲线微分方程及其积分为

$$M(x) = \frac{M_c}{l}x$$

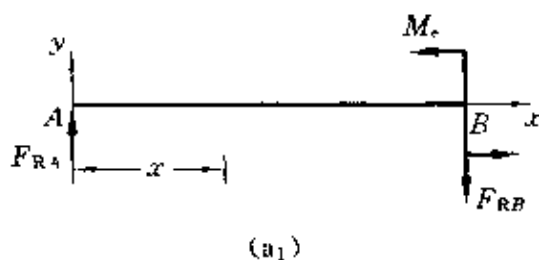


题 6.4 图

$$EIw'' = \frac{M_c}{l}x$$

$$EIw' = \frac{M_c}{2l}x^2 + C$$

$$EIw = \frac{M_c}{6l}x^3 + Cx + D$$



续题 6.4 图

由边界条件确定积分常数:

由 $x=0, w=0$, 得 $D=0$

由 $x=l, w=0$, 得 $C = -\frac{M_cl}{6}$

挠曲线方程和转角方程为

$$w(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{M_c}{6l}x^3 - \frac{M_cl}{6}x \right)$$

$$\theta(x) = w'(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{M_c}{2l}x^2 - \frac{M_cl}{6} \right)$$

端截面转角 θ_A, θ_B 和跨中挠度、最大挠度:

$$w'|_{x=0} = \theta_A = -\frac{M_cl}{6EI}$$

$$w'|_{x=l} = \theta_B = \frac{M_cl}{3EI}$$

$$w|_{x=l/2} = w_{l/2} = -\frac{M_e l^2}{16EI}$$

挠度取极值的条件是 $\frac{dw}{dx} = 0$, 即

$$\frac{M_e}{2l}x^2 - \frac{M_e l}{6} = 0, \quad x = \frac{l}{\sqrt{3}}$$

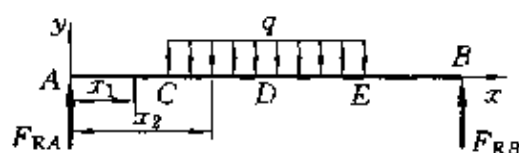
最大挠度

$$w_{\max} = \frac{1}{EI} \left(\frac{M_e}{6l} \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{3}} l^3 - \frac{M_e l}{6} \frac{l}{\sqrt{3}} \right) = -\frac{M_e l^2}{9\sqrt{3}EI}$$

(b) 如题 6.4 图 (b₁) 所示。

根据平衡条件求出支座反力

$$F_{RA} = F_{RB} = qa$$



(b₁)

弯矩方程、挠曲线微分方程及其积分
分为 (因结构和载荷均对称, 故只
考虑 AD 段)

续题 6.4 图

AC 段 $M_1(x_1) = qax_1 \quad (0 \leq x_1 \leq a)$

$$EIw_1'' = qax_1$$

$$EIw_1' = \frac{1}{2}qax_1^2 + C_1$$

$$EIw_1 = \frac{1}{6}qax_1^3 + C_1x_1 + D_1$$

CD 段 $M_2(x_2) = qax_2 - \frac{q(x_2 - a)^2}{2} \quad (a \leq x_2 \leq 3a)$

$$EIw_2'' = qax_2 - \frac{q(x_2 - a)^2}{2}$$

$$EIw_2' = \frac{1}{2}qax_2^2 - q \frac{(x_2 - a)^3}{6} + C_2$$

$$EIw_2 = \frac{1}{6}qax_2^3 - q \frac{(x_2 - a)^4}{24} + C_2x_2 + D_2$$

由边界条件和连续性条件确定积分常数:

由 $x_1 = 0, w_1 = 0$, 得 $D_1 = 0$

$$\text{由 } x_1 = x_2 = a, w'_1 = w'_2, \text{ 得 } C_1 = C_2$$

$$\text{由 } x_1 = x_2 = a, w_1 = w_2, \text{ 得 } D_2 = 0$$

$$\text{由 } x_2 = 2a, w'_2 = 0, \text{ 得 } C_1 = C_2 = -\frac{11}{6}qa^3$$

各段挠曲线方程和转角方程为

$$w_1(x_1) = \frac{1}{EI} \left(qa \frac{x_1^3}{6} - \frac{11}{6} qa^3 x_1 \right)$$

$$w_2(x_2) = \frac{1}{EI} \left[qa \frac{x_2^3}{6} - \frac{q(x_2 - a)^4}{24} - \frac{11}{6} qa^3 x_2 \right]$$

$$\theta_1(x_1) = w'_1(x_1) = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} qax_1^2 - \frac{11}{6} qa^3 \right)$$

$$\theta_2(x_2) = w'_2(x_2) = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} qax_2^2 - \frac{q}{6} (x_2 - a)^3 - \frac{11}{6} qa^3 \right)$$

$$\text{端截面转角 } \theta_A = w'_1(x_1)|_{x_1=0} = -\theta_B = -\frac{11}{6} \frac{qa^3}{EI}$$

最大挠度产生在跨度中点处

$$w_{l/2} = w_{\max} = w_2(x_2)|_{x_2=2a} = -\frac{19qa^4}{8EI}$$

(c) 如题 6.4 图(c₁)所示。

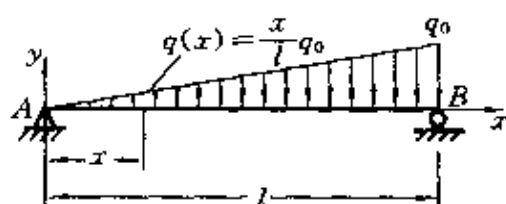
分布载荷集度、挠曲线微分方程及其积分为

$$q(x) = -\frac{q_0 x}{l}$$

$$EIw^{(4)} = -\frac{q_0 x}{l}$$

$$EIw^{(3)} = -\frac{q_0 x^2}{2l} + C_1$$

$$EIw'' = -\frac{q_0 x^3}{6l} + C_1 x + C_2$$



(c₁)

续题 6.4 图

$$EIw' = -\frac{q_0 x^4}{24l} + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

$$EIw = -\frac{q_0 x^5}{120l} + \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4$$

由边界条件确定积分常数

$$\text{由 } x=0, w''=0, \text{ 得 } C_2=0$$

$$\text{由 } x=l, w''=0, \text{ 得 } C_1=\frac{q_0 l}{6}$$

$$\text{由 } x=0, w=0, \text{ 得 } C_4=0$$

$$\text{由 } x=l, w=0, \text{ 得 } C_3=-\frac{7}{360}q_0 l^3$$

挠度方程为

$$w(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{q_0 x^5}{120l} + \frac{q_0 l}{36} x^3 - \frac{7}{360} q_0 l^3 x \right) \quad (1)$$

转角方程为

$$\theta(x) = w'(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{q_0 x^4}{24l} + \frac{q_0 x^2 l}{12} - \frac{7}{360} q_0 l^3 \right) \quad (2)$$

挠度取极值的条件是 $\frac{dw}{dx}=0$, 即

$$-\frac{q_0 x^4}{24l} + \frac{q_0 l}{12} x^2 - \frac{7q_0 l^3}{360} = 0$$

$$x = \left(1 - \sqrt{\frac{8}{15}} \right)^{1/2} l = \sqrt{0.27} l = 0.52l$$

将 $x=0.52l$ 代入①式, 得最大挠度

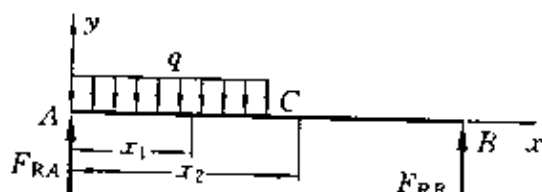
$$w_{\max} = w(x) \big|_{x=0.52l} = -\frac{5.01 q_0 l^4}{768 EI}$$

端截面转角

$$\theta_A = w'(x) \big|_{x=0} = -\frac{7q_0 l^3}{360 EI}, \quad \theta_B = w'(x) \big|_{x=l} = \frac{q_0 l^3}{45 EI}$$

跨度中点挠度

$$\begin{aligned} w_{l/2} &= w(x) \big|_{x=l/2} \\ &= -\frac{5q_0 l^4}{768 EI} \end{aligned}$$



(d₁)

(d) 如题 6.4 图(d₁)所示。

根据平衡条件求出支座反力

续题 6.4 图

$$F_{RA} = \frac{3}{8}ql, \quad F_{RB} = \frac{1}{8}ql$$

弯矩方程、挠曲线微分方程及其积分为

AC 段

$$M_1(x_1) = \frac{3}{8}qlx_1 - \frac{1}{2}qx_1^2 \quad \left(0 \leq x_1 \leq \frac{l}{2}\right)$$

$$EIw_1'' = \frac{3}{8}qlx_1 - \frac{1}{2}qx_1^2$$

$$EIw_1' = \frac{3}{16}qlx_1^2 - \frac{1}{6}qx_1^3 + C_1$$

$$EIw_1 = \frac{1}{16}qlx_1^3 - \frac{1}{24}qx_1^4 + C_1x_1 + D_1$$

BC 段 $M_2(x_2) = \frac{1}{8}ql(l - x_2) \quad \left(\frac{l}{2} \leq x_2 \leq l\right)$

$$EIw_2'' = \frac{1}{8}ql(l - x_2)$$

$$EIw_2' = -\frac{1}{16}ql(l - x_2)^2 + C_2$$

$$EIw_2 = \frac{1}{48}ql(l - x_2)^3 + C_2x_2 + D_2$$

由边界条件和连续性条件确定积分常数:

由 $x_1=0, w_1=0$, 得 $D_1=0$

由 $x_1=x_2=\frac{l}{2}, w_1'=w_2', w_1=w_2$, 得

$$C_1 = -\frac{3}{128}ql^3, \quad C_2 = \frac{7}{384}ql^3$$

由 $x_2=l, w_2=0$ 得 $D_2 = -\frac{7}{384}ql^4$

各段挠曲线方程和转角方程

$$w_1(x_1) = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{16}qlx_1^3 - \frac{1}{24}qx_1^4 - \frac{3}{128}ql^3x_1 \right)$$

$$w_2(x_2) = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{48}ql(l - x_2)^3 + \frac{7}{384}ql^3x_2 - \frac{7}{384}ql^4 \right)$$

$$\theta_1(x_1) = w'_1(x_1) = \frac{1}{EI} \left[\frac{3}{16} q l x_1^2 - \frac{1}{6} q x_1^3 - \frac{3}{128} q l^3 \right]$$

$$\theta_2(x_2) = w'_2(x_2) = \frac{1}{EI} \left[-\frac{q l}{16} (l - x_2)^2 + \frac{7}{384} q l^3 \right]$$

端截面转角

$$\theta_A = w'_1(x_1)|_{x_1=0} = -\frac{3}{128} \frac{q l^3}{EI}, \quad \theta_B = w'_2(x_2)|_{x_2=l} = \frac{7}{384} \frac{q l^3}{EI}$$

挠度取极值的条件是 $\frac{dw_1}{dx_1} = 0$, 即

$$\frac{3}{16} x_1^2 l - \frac{1}{6} x_1^3 - \frac{3}{128} l^3 = 0, \quad x_1 = \left(1 - \sqrt{\frac{7}{24}} \right) l = 0.46l$$

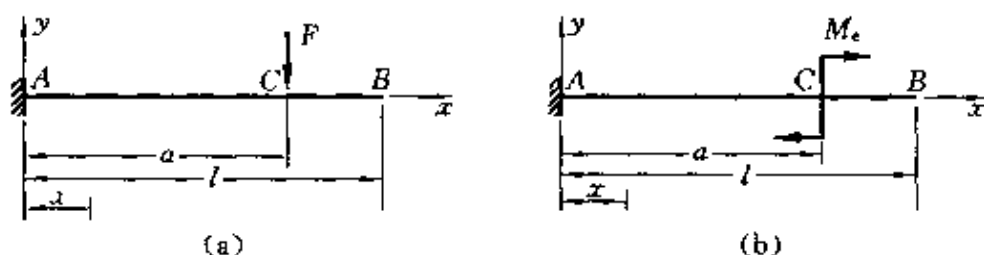
最大挠度

$$w_{\max} = w_1(x_1)|_{x_1=0.46l} = -\frac{5.04 q l^4}{768 EI} = -0.00656 \frac{q l^4}{EI}$$

跨度中点挠度

$$w_{l/2} = w_1(x_1)|_{x_1=l/2} = -\frac{5 q l^4}{768 EI}$$

6.5 求题 6.5 图所示悬臂梁的挠曲线方程及自由端的挠度和转角。设 EI 为常量。求解时应注意到梁在 CB 段内无载荷, 故 CB 仍为直线。



题 6.5 图

解 (a) 如题 6.5 图(a)所示。

弯矩方程、挠曲线微分方程及其积分为

$$M(x) = -F(a - x) \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$EI w'' = -F(a - x)$$

$$EIw' = \frac{1}{2}F(a-x)^2 + C$$

$$EIw = -\frac{1}{6}F(a-x)^3 + Cx + D$$

由边界条件确定积分常数:

$$\text{由 } x=0, w'=0, \text{ 得 } C = -\frac{1}{2}Fa^2$$

$$\text{由 } x=0, w=0, \text{ 得 } D = \frac{1}{6}Fa^3$$

挠曲线方程和转角方程

$$w(x) = \frac{1}{EI} \left[-\frac{F}{6}(a-x)^3 - \frac{1}{2}Fa^2x + \frac{1}{6}Fa^3 \right]$$

$$\theta(x) = w'(x) = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2}F(a-x)^2 - \frac{1}{2}Fa^2 \right]$$

C 截面的挠度和转角

$$w_c = w(x)|_{x=a} = -\frac{1}{3} \frac{Fa^3}{EI}, \quad \theta_c = w'(x)|_{x=a} = \frac{1}{2} \frac{Fa^2}{EI}$$

$$\text{自由端的转角} \quad \theta_B = \theta_c = -\frac{1}{2} \frac{Fa^2}{EI}$$

自由端的挠度

$$\begin{aligned} w_B &= w_c + \theta_c(l-a) \\ &= -\frac{Fa^3}{3EI} - \frac{1}{2} \frac{Fa^2}{EI}(l-a) = -\frac{Fa^2}{6EI}(3l-a) \end{aligned}$$

(b) 如题 6.5 图(b)所示。

弯矩方程、挠曲线微分方程及其积分为

$$M(x) = -M_e \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$EIw'' = -M_e$$

$$EIw' = -M_e x + C$$

$$EIw = -\frac{1}{2}M_e x^2 + Cx + D$$

由边界条件确定积分常数:

$$\text{由 } x=0, w'=0, \text{ 得 } C=0$$

由 $x=0, w=0$, 得 $D=0$

挠曲线方程和转角方程

$$w(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} M_e x^2 \right), \quad \theta(x) = w'(x) = \frac{1}{EI} (-M_e x)$$

C 截面的挠度和转角

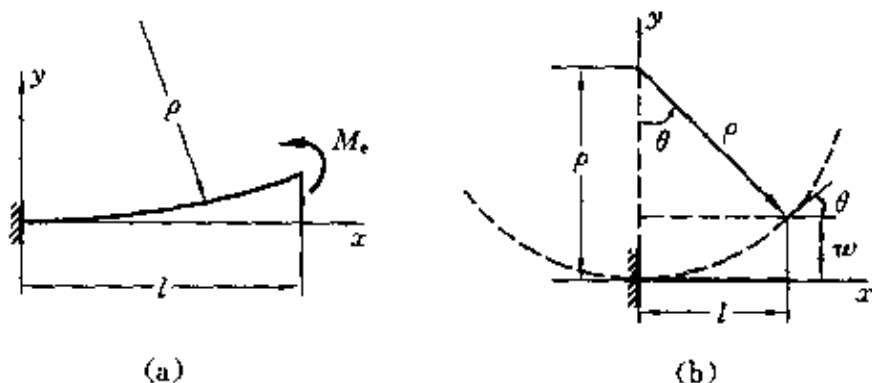
$$w_C = w(x)|_{x=a} = -\frac{M_e a^2}{2EI}, \quad \theta_C = w'(x)|_{x=a} = -\frac{M_e a}{EI}$$

自由端的转角和挠度

$$\theta_B = \theta_C = -\frac{M_e a}{EI}$$

$$w_B = w_C + \theta_C(l-a) = -\frac{M_e a^2}{2EI} - \frac{M_e a}{EI}(l-a) = -\frac{M_e a}{EI} \left(l - \frac{a}{2} \right)$$

6.6 如题 6.6 图(a)所示,若只在悬臂梁的自由端作用弯曲力偶矩 M_e ,使其成为纯弯曲,则由 $\frac{1}{\rho} = \frac{M_e}{EI}$ 知 $\rho = \text{常量}$,挠曲线应为圆弧。若由微分方程 $\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M}{EI}$ 积分,将得到 $w(x) = \frac{M_e x^2}{2EI}$ 。它表明挠曲线是一抛物线。何以产生这种差别?试求按两种结果所得最大挠度的相对误差。



题 6.6 图

解 对题 6.6 图(a)情况,梁受纯弯曲,弯矩方程为 $M(x) = M_e$ 。代入挠曲线近似微分方程 $\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M}{EI} = \frac{M_e}{EI}$, 积分求解,得挠曲线方程及自由端的挠度分别为

$$w(x) = \frac{M_e x^2}{2EI} \quad (1)$$

$$w_1 = w(x)|_{x=l} = \frac{M_e l^2}{2EI} \quad (2)$$

①式是抛物线方程。但由曲率-弯矩关系式 $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = \frac{M_e}{EI}$ 可知, 因 M_e 为常数, 挠曲线的曲率半径 $\rho = \text{const}$, 所以挠曲线方程应是圆方程, 这种差别是因在推导曲率方程时将

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 w}{dx^2} \bigg/ \left[1 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \approx \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M_e}{EI}$$

中的二阶微量 $\left(\frac{dw}{dx} \right)^2$ 略去。这在小变形情况下, 近似性相当好。

由题 6.6 图(b)可见, 自由端的挠度 w 的精确值为

$$w = \rho - \rho \cos \theta \quad (3)$$

将 $\cos \theta$ 用泰勒公式展开

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots$$

$$\text{由题 6.6 图(b)可见} \quad \theta = \frac{l}{\rho} = \frac{M_e l}{EI} \quad (4)$$

取 $\cos \theta$ 的泰勒展开式前两项代入③式中, 得

$$w = \rho \left(\frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} + \dots \right) \quad (5)$$

将④式代入⑤式, 得

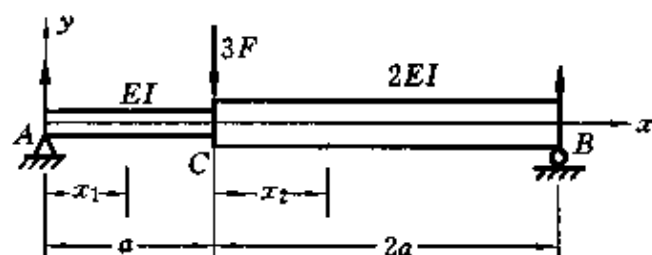
$$w = \frac{EI}{M_e} \left(\frac{M_e^2 l^2}{2E^2 I^2} - \frac{M_e^4 l^4}{24E^4 I^4} + \dots \right) = \frac{M_e l^2}{2EI} - \frac{M_e^3 l^4}{24(EI)^3} + \dots$$

与近似值②式相比较二者误差为

$$\left| \frac{w - w_1}{w_1} \right| \approx \frac{M_e^3 l^2}{12(EI)^2} = \frac{1}{3} \left(\frac{w_1}{l} \right)^2$$

6.7 用积分法求题 6.7 图所示变截面梁的挠曲线方程、端截面转角和最大挠度。

解 先应用平衡条件求出支座反力 $F_{RA} = 2F$, $F_{RH} = F$ 。用积分



题 6.7 图

法求解时,在方法上略作改变,这对分段积分可能带来一些方便。在 AC 段内积分时,把原点放在这一段的左端,弯矩方程、挠曲线方程微分及其积分:

$$M_1(x_1) = 2Fx_1 \quad (0 \leq x_1 \leq a)$$

$$\frac{d^2w_1}{dx_1^2} = \frac{2Fx_1}{EI}$$

$$\theta_1(x_1) = \frac{dw_1}{dx_1} = \frac{F}{EI}x_1^2 + C_1 \quad ①$$

$$w_1(x_1) = \frac{F}{3EI}x_1^3 + C_1x_1 + C_2 \quad ②$$

在截面 A 上, $x_1=0, \theta_1=\theta_A, w_1=0$, 故有

$$C_1 = \theta_A, \quad C_2 = 0$$

将 C_1 和 C_2 代入①和②式,并令 $x_1=a$,求得截面 C 的转角和挠度分别为

$$\theta_C = \frac{Fa^2}{EI} + \theta_A, \quad w_C = \frac{Fa^3}{3EI} + \theta_A a$$

在 CB 段内积分时,把原点也放在这一段的左端,即放在截面 C 上。这时, $0 \leq x_2 \leq 2a$, 抗弯刚度为 $2EI$,

$$M_2(x_2) = 2F(a + x_2) - 3Fx_2$$

$$\frac{d^2w_2}{dx^2} = \frac{F}{EI}(a + x_2) - \frac{3F}{2EI}x_2 = \frac{Fa}{EI} - \frac{F}{2EI}x_2$$

$$\theta_2(x_2) = \frac{dw_2}{dx} = \frac{Fa}{EI}x_2 - \frac{F}{4EI}x_2^2 + C_3 \quad ③$$

$$w_2(x_2) = \frac{Fa}{2EI}x_2^2 - \frac{F}{12EI}x_2^3 + C_3x_2 + C_4 \quad ④$$

在截面 C 上, $x_2=0, \theta_2=\theta_C, F_2=F_C$, 因而有

$$C_3 = \theta_C = \frac{Fa^2}{EI} + \theta_A, \quad C_4 = w_C = \frac{Fa^2}{3EI} + \theta_A a$$

把 C_3 和 C_4 代入③、④两式, 得 CB 段的转角及挠曲线方程

$$\theta_2(x_2) = \frac{Fa}{EI}x_2 - \frac{F}{4EI}x_2^2 + \frac{Fa^2}{EI} + \theta_A \quad (5)$$

$$w_2(x_2) = \frac{Fa}{2EI}x_2^2 - \frac{F}{12EI}x_2^3 + \left(\frac{Fa^2}{EI} + \theta_A\right)x_2 + \frac{Fa^3}{3EI} + \theta_A a \quad (6)$$

最后将 B 端的边界条件

$$x_2 = 2a, \quad w_2 = w_B = 0$$

代入⑥式, 得出

$$0 = \frac{Fa}{2EI}(2a)^2 - \frac{F}{12EI}(2a)^3 + \left(\frac{Fa^2}{EI} + \theta_A\right)2a + \frac{Fa^3}{3EI} + \theta_A a$$

由此求出
$$\theta_A = -\frac{11Fa^2}{9EI}$$

求得 θ_A 后, 将其代入①、②、⑤、⑥诸式, 就完全确定了各段的 θ 和 w 。进一步可以确定端截面的转角和最大挠度, 这些留给读者去完成。

6.8 用积分法求梁(题 6.8

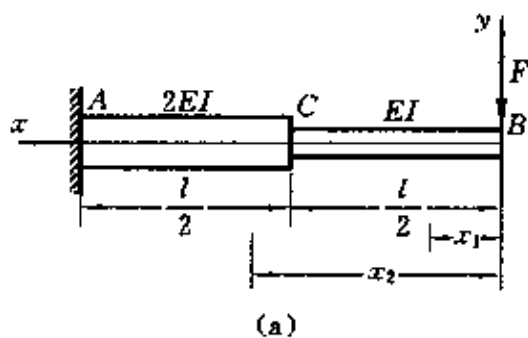
图(a)、(b))的最大转角和最大挠度。在题 6.8 图(b)的情况下, 梁对跨度中点对称, 所以可以只考虑梁的二分之一。

解 (a) 如题 6.8 图(a)所示。

弯矩方程、挠曲线微分方程及其积分为

$$BC \text{ 段} \quad M_1(x_1) = -Fx_1 \quad \left(0 \leq x_1 \leq \frac{l}{2}\right)$$

$$EIw_1'' = -Fx_1$$



题 6.8 图

$$EIw_1' = -\frac{F}{2}x_1^2 + C_1$$

$$EIw_1 = -\frac{F}{6}x_1^3 + C_1x_1 + D_1$$

CA 段 $M_2(x_2) = -Fx_2 \quad \left(\frac{l}{2} \leq x_2 \leq l \right)$

$$2EIw_2'' = -Fx_2$$

$$2EIw_2' = -\frac{F}{2}x_2^2 + C_2$$

$$2EIw_2 = -\frac{F}{6}x_2^3 + C_2x_2 + D_2$$

由边界条件和连续条件确定积分常数:

由 $x_1 = x_2 = l/2, w_1' = w_2'$, 得 $C_1 = -\frac{5}{16}Fl^2$

由 $x_1 = x_2 = l/2, w_1 = w_2$, 得 $D_1 = -\frac{3}{16}Fl^3$

由 $x_2 = l, w_2' = 0$, 得 $C_2 = \frac{F}{2}l^2$

由 $x_2 = l, w_2 = 0$, 得 $D_2 = -\frac{1}{3}Fl^3$

挠曲线方程和转角方程

$$w_1(x_1) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{F}{6}x_1^3 + \frac{5}{16}Fl^2x_1 - \frac{3}{16}Fl^3 \right)$$

$$w_2(x_2) = \frac{1}{2EI} \left(-\frac{F}{6}x_2^3 + \frac{F}{2}l^2x_2 + \frac{1}{3}Fl^3 \right)$$

$$\theta_1(x_1) = w_1'(x_1) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{F}{2}x_1^2 - \frac{5}{16}Fl^2 \right)$$

$$\theta_2(x_2) = w_2'(x_2) = \frac{1}{2EI} \left(-\frac{F}{2}x_2^2 + \frac{F}{2}l^2 \right)$$

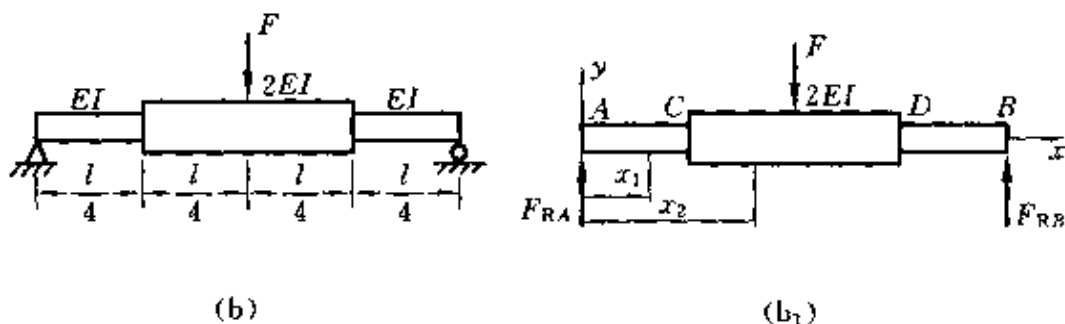
最大挠度和最大转角

$$|\theta_{\max}| = w_1'(x_1)|_{x_1=0} = \frac{5Fl^2}{16EI}, \quad |w_{\max}| = w_1(x_1)|_{x_1=0} = \frac{3Fl^3}{16EI}$$

本题坐标轴 x 正向向左, 这样只改变转角的正负号, 而不改变

最大转角的绝对值。

(b) 如题 6.8 图(b)、(b₁)所示。



续题 6.8 图

因结构和载荷均对称,故可只考虑梁的一半。

根据平衡条件可求出支座反力

$$F_{RA} = F_{RB} = \frac{F}{2}$$

弯矩方程、挠曲线微分方程及其积分为

$$AC \text{ 段} \quad M_1(x_1) = \frac{F}{2}x_1 \quad \left(0 \leq x_1 \leq \frac{l}{4} \right)$$

$$EIw_1'' = \frac{F}{2}x_1$$

$$EIw_1' = \frac{F}{4}x_1^2 + C_1$$

$$EIw_1 = \frac{F}{12}x_1^3 + C_1x_1 + D_1$$

$$CD \text{ 段} \quad M_2(x_2) = \frac{F}{2}x_2 \quad \left(\frac{l}{4} \leq x_2 \leq \frac{l}{2} \right)$$

$$2EIw_2'' = \frac{F}{2}x_2$$

$$2EIw_2' = \frac{F}{4}x_2^2 + C_2$$

$$2EIw_2 = \frac{F}{12}x_2^3 + C_2x_2 + D_2$$

由边界条件和连续条件确定积分常数:

$$\text{由 } x_1=0, w_1=0, \text{ 得 } D_1=0$$

$$\text{由 } x_2=l/2, w'_2=0, \text{ 得 } C_2=-\frac{1}{16}Fl^2$$

$$\text{由 } x_1=x_2=l/4, w'_1=w'_2, \text{ 得 } C_1=-\frac{5}{128}Fl^2$$

$$\text{由 } x_1=x_2=l/4, w_1=w_2, \text{ 得 } D_2=-\frac{1}{384}Fl^3$$

挠曲线方程和转角方程

$$w_1(x_1) = \frac{1}{EI} \left(\frac{F}{12}x_1^3 - \frac{5}{128}Fl^2x_1 \right)$$

$$w_2(x_2) = \frac{1}{2EI} \left(\frac{F}{12}x_2^3 - \frac{1}{16}Fl^2x_2 - \frac{1}{384}Fl^3 \right)$$

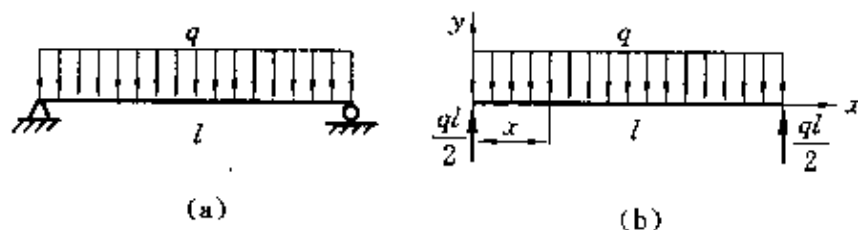
$$\theta_1(x_1) = w'_1(x_1) = \frac{1}{EI} \left(\frac{F}{4}x_1^2 - \frac{5}{128}Fl^2 \right)$$

$$\theta_2(x_2) = w'_2(x_2) = \frac{1}{2EI} \left(\frac{F}{4}x_2^2 - \frac{1}{16}Fl^2 \right)$$

最大转角和最大挠度

$$|\theta_{\max}| = w'_1(x_1)|_{x_1=0} = \frac{5Fl^2}{128EI}, |w_{\max}| = w_2(x_2)|_{x_2=l/2} = \frac{3Fl^3}{256EI}$$

6.9 将微分方程 $\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M}{EI}$ 的两端对 x 微分两次, 并使用关系式 $\frac{d^2M}{dx^2} = q(x)$, 即可得出 $\frac{d^4w}{dx^4} = \frac{q(x)}{EI}$ 。试用以上四阶微分方程讨论在题 6.9 图(a)所示均布载荷作用下, 简支梁的弯曲变形。



题 6.9 图

解 挠曲线微分方程及其积分为

$$EIw^{(4)} = -q$$

$$EIw^{(3)} = -qx + C_1$$

$$EIw'' = -\frac{1}{2}qx^2 + C_1x + C_2$$

$$EIw' = -\frac{1}{6}qx^3 + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3$$

$$EIw = -\frac{1}{24}qx^4 + \frac{1}{6}C_1x^3 + \frac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4$$

利用边界条件确定积分常数,积分常数虽然有4个,但边界条件有6个,可任选其中4个就可以确定所有的积分常数。这6个边界条件是(见题6.9图(b))

$$x=0 \text{ 时, } w(0)=0, \quad F_s(0)=\frac{ql}{2}, \quad M(0)=0$$

$$x=l \text{ 时, } w(l)=0, \quad F_s(l)=-\frac{ql}{2}, \quad M(l)=0$$

首选 $x=0$ 时的3个边界条件,再选一个 $w(l)=0$ 的条件最方便计算。

$$\text{由 } x=0, w''=0, \text{ 得 } C_2=0$$

$$\text{由 } x=0, w^{(3)}=\frac{ql}{2}, \text{ 得 } C_1=\frac{ql}{2}$$

$$\text{由 } x=l, w=0, \text{ 得 } C_3=-\frac{1}{24}ql^3$$

$$\text{由 } x=0, w=0, \text{ 得 } C_4=0$$

挠曲线方程和转角方程

$$w(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{24}qx^4 + \frac{1}{12}qlx^3 - \frac{1}{24}ql^3x \right)$$

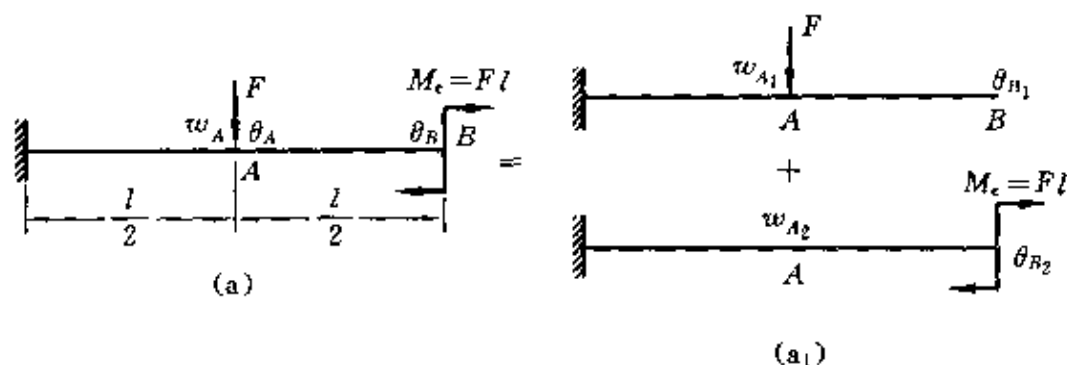
$$\theta(x) = w'(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{6}qx^3 + \frac{1}{4}qlx^2 - \frac{1}{24}ql^3 \right)$$

最大转角和最大挠度

$$|\theta_{\max}| = \theta(x)|_{x=0} = \frac{ql^3}{24EI}, \quad w_{\max} = w(x)|_{x=l/2} = -\frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI}$$

6.10 用叠加法求题6.10图(a)、(b)、(c)、(d)所示各梁截面A的挠度和截面B的转角。 EI 为已知常数。

解 (a) 如题 6.10 图(a)、(a₁)所示。



题 6.10 图

对题 6.10 图(a₁),查附录二可得

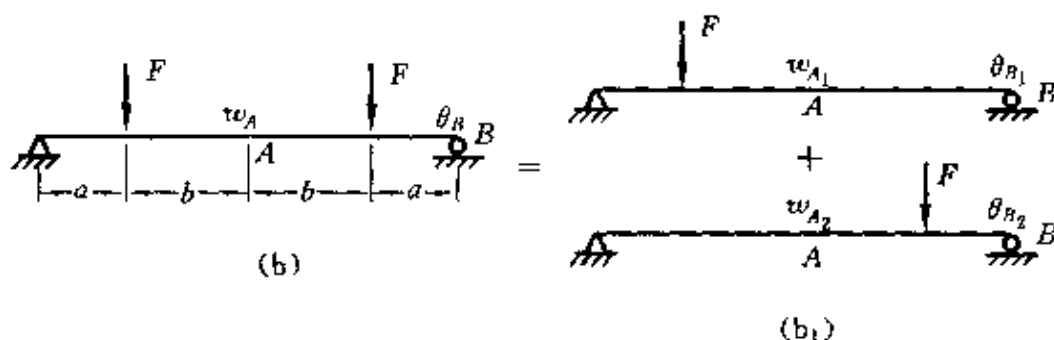
$$w_{A_1} = -\frac{Fl^3}{24EI}, \quad w_{A_2} = -\frac{M_c(l/2)^2}{2EI} = -\frac{Fl^3}{8EI}$$

$$\theta_{B_1} = \theta_A = -\frac{Fl^2}{8EI}, \quad \theta_{B_2} = -\frac{M_cl}{EI} = -\frac{Fl^2}{EI}$$

由叠加原理有

$$w_A = w_{A_1} + w_{A_2} = -\frac{Fl^3}{6EI}, \quad \theta_B = \theta_{B_1} + \theta_{B_2} = -\frac{9Fl^2}{8EI}$$

(b) 如题 6.10 图(b)、(b₁)所示。



续题 6.10 图

查附录二可得题 6.10 图(b₁)中的 w_{A_1} 、 w_{A_2} 、 θ_{B_1} 、 θ_{B_2} ,应用叠加原理有

$$w_A = w_{A_1} + w_{A_2}$$

$$= \left\{ -\frac{Fa(a+b)}{6EI(2a+2b)} [(2a+2b)^2 - (a+b)^2 - a^2] \right\} \times 2$$

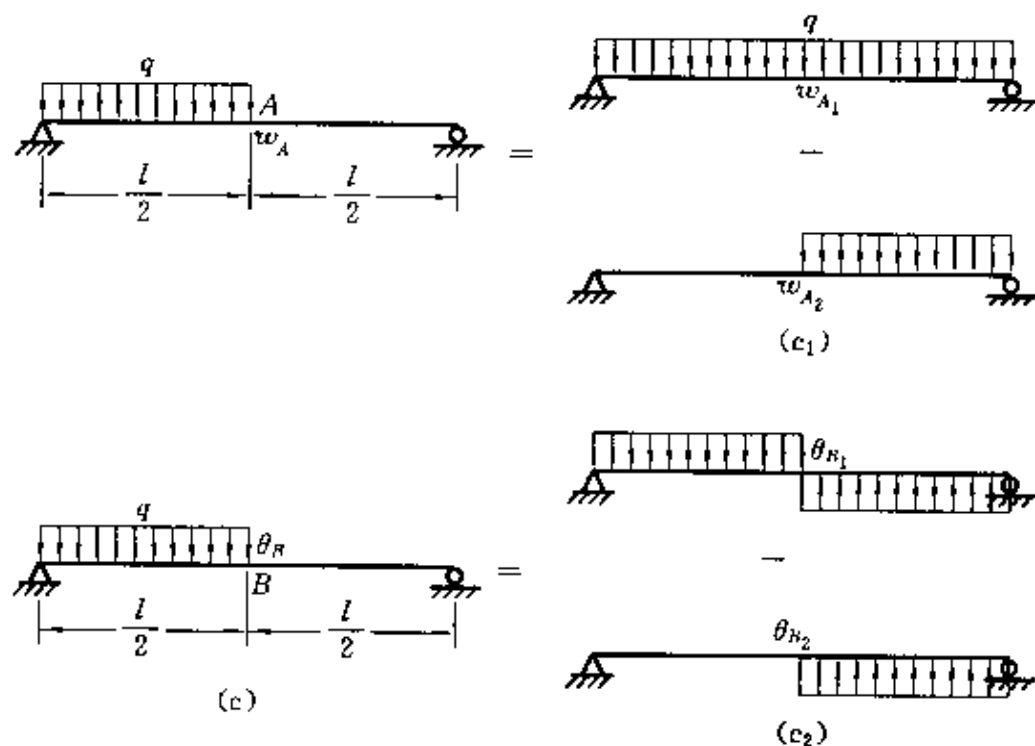
$$= -\frac{Fa}{6EI} (3b^2 + 6ab + 2a^2)$$

$$\theta_R = \theta_{B_1} + \theta_{B_2}$$

$$= \frac{F(2b+a)a(4b+3a)}{6EI(2a+2b)} + \frac{Fa(2b+a)(2b+3a)}{6EI(2a+2b)}$$

$$= \frac{Fa(2b+a)}{2EI}$$

(c) 如题 6.10 图(c)、(c₁)、(c₂)所示。



续题 6.10 图

由题 6.10 图(c)、(c₁)可见

$$w_A = w_{A_1} - w_{A_2}$$

因 $w_A = w_{A_2}$, 查附录二得 $w_{A_1} = \frac{5ql^4}{384EI}$

所以 $w_A = \frac{1}{2}w_{A_1} = \frac{5ql^4}{768EI} \quad (\downarrow)$

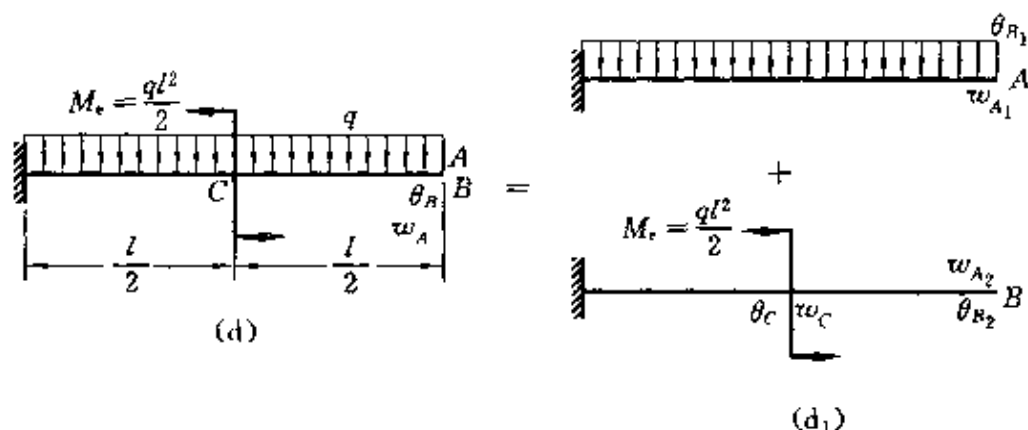
由题 6.10 图(c)、(c₂)可见

$$\theta_B = \theta_{B_1} - \theta_{B_2}, \quad \theta_H = \theta_{H_2}$$

而 $\theta_{B_1} = \frac{2ql^3}{384EI}$, 所以

$$\theta_H = \frac{1}{2}\theta_{B_1} = \frac{ql^3}{384EI} \quad (\circ)$$

(d) 如题 6.10 图 (d)、(d₁) 所示。



续题 6.10 图

查附录二, 并用叠加原理可得

$$w_{A_2} = w_C + \theta_C \times \frac{l}{2} = \frac{M_c(l/2)^2}{2EI} + \frac{M_c l/2}{EI} \times \frac{l}{2} = \frac{3ql^4}{16EI}$$

$$w_A = w_{A_1} + w_{A_2} = -\frac{ql^4}{8EI} + \frac{3ql^4}{16EI} = \frac{ql^4}{16EI}$$

$$\theta_B = \theta_{B_2} + \theta_{B_1} = -\frac{ql^3}{6EI} + \frac{(ql^2/2)(l/2)}{EI} = \frac{ql^3}{12EI}$$

6.11 用叠加法求题 6.11 图 (a)、(b)、(c)、(d) 所示外伸梁外伸端的挠度和转角。设 EI 为常数。

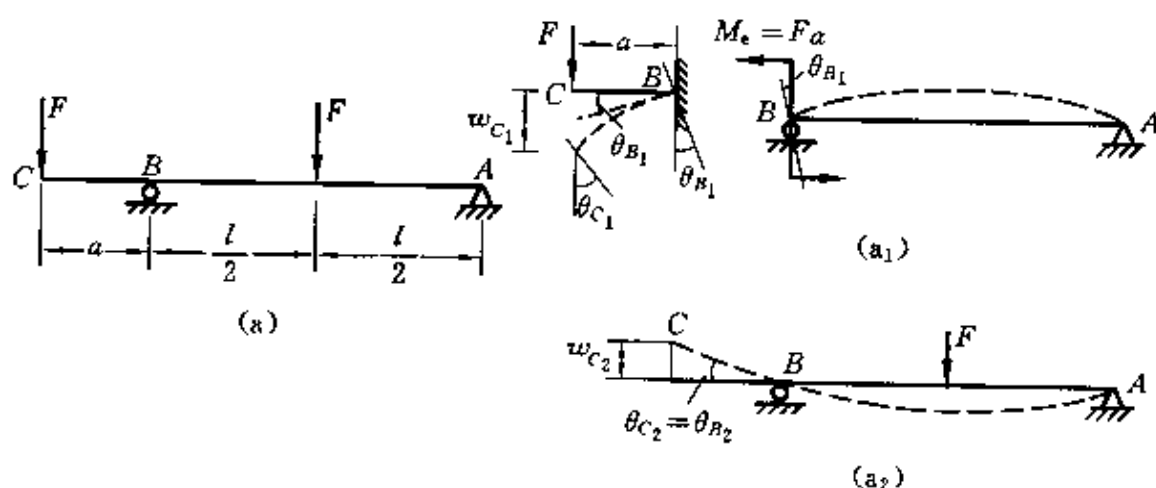
解 (a) 如题 6.11 图 (a) 所示, 将外伸部分 BC 段看作悬臂梁 (题 6.11 图 (a₁)、(a₂))。

应用叠加法

$$\theta_C = \theta_{C_1} + \theta_{C_2}$$

在单一载荷作用下梁的变形, 可应用附录二求得

$$\theta_{B_1} = \frac{M_c l}{3EI} = \frac{F a l}{3EI}, \quad \theta_{B_2} = -\frac{F l^2}{16EI}$$



题 6.11 图

$$\theta_{C_1} = \theta_{B_1} + \frac{Fa^2}{2EI} = \frac{Fal}{3EI} + \frac{Fa^2}{2EI}, \quad \theta_{C_2} = \theta_{B_2} = -\frac{Fl^2}{16EI}$$

$$w_{C_1} = -\left(\theta_{B_1}a + \frac{Fa^3}{3EI}\right) = -\frac{Fa^2l}{3EI} - \frac{Fa^3}{3EI}$$

$$w_{C_2} = |\theta_{B_2}a| = \frac{Fl^2a}{16EI}$$

应用叠加法

$$\begin{aligned} \theta_C &= \theta_{C_1} + \theta_{C_2} = \frac{Fal}{3EI} + \frac{Fa^2}{2EI} - \frac{Fl^2}{16EI} \\ &= \frac{F}{48EI}(24a^2 + 16al - 3l^2) \end{aligned}$$

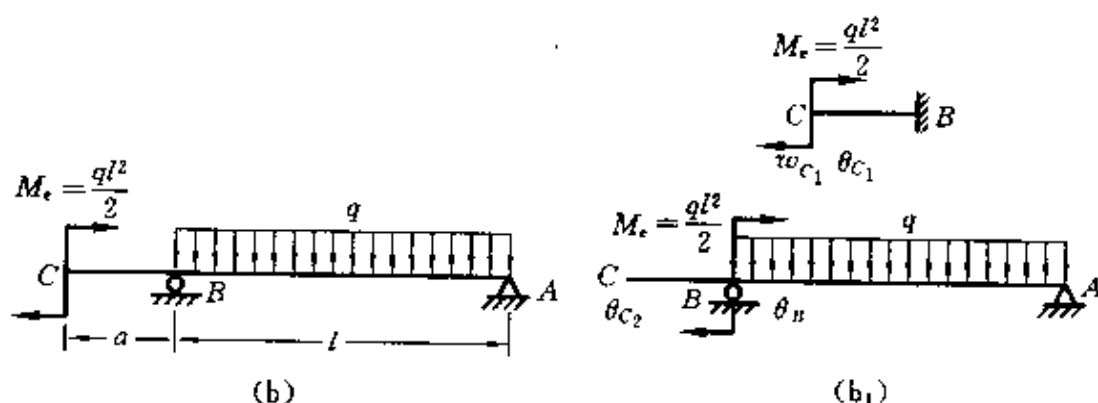
$$\begin{aligned} w_C &= w_{C_1} + w_{C_2} = -\frac{Fa^2l}{3EI} - \frac{Fa^3}{3EI} + \frac{Fl^2a}{16EI} \\ &= \frac{Fa}{48EI}(3l^2 - 16al - 16a^2) \end{aligned}$$

(b) 如题 6.11 图(b)、(b₁)所示。

查附录二,并应用叠加法,可得

$$\theta_{C_2} = \theta_B = \theta_{B_1} + \theta_{B_2} = -\frac{M_e l}{3EI} - \frac{ql^3}{24EI} = -\frac{5ql^3}{24EI}$$

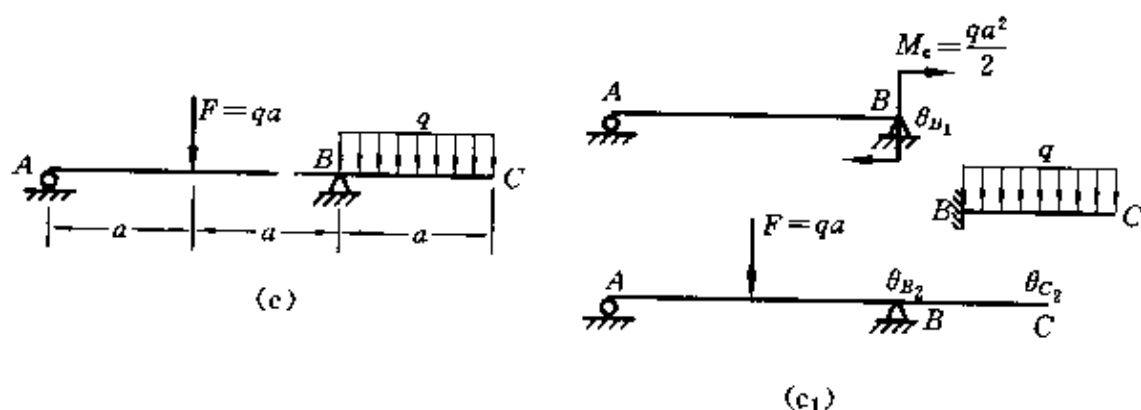
$$\theta_C = \theta_{C_1} + \theta_{C_2} = -\frac{M_e a}{EI} - \frac{5ql^3}{24EI} = -\frac{ql^2}{24EI}(5l + 12a)$$



续题 6.11 图

$$w_C = w_{C_1} + |\theta_B a| = \frac{(ql^2/2)a^2}{2EI} + \frac{5ql^3}{24EI}a = \frac{qal^2}{24EI}(5l + 6a)$$

(c) 如题 6.11 图(c)、(c1)所示。



续题 6.11 图

在单一载荷作用下,外伸端的转角和挠度可查附录二得到

$$\begin{aligned}\theta_{B_1} &= -\frac{M_c l}{3EI} = -\frac{\left(\frac{1}{2}qa^2\right)(2a)}{3EI} = -\frac{qa^3}{3EI} \\ \theta_{B_2} &= \frac{Fl^2}{16EI} = \frac{(qa)(2a)^2}{16EI} = \frac{qa^3}{4EI} \\ \theta_{C_1} &= -\frac{ql^3}{6EI} + \theta_{B_1} = -\frac{qa^3}{6EI} - \frac{qa^3}{3EI} = -\frac{qa^3}{2EI} \\ \theta_{C_2} &= \theta_{B_2} = \frac{qa^3}{4EI}\end{aligned}$$

$$w_{C_1} = -\frac{qa^4}{8EI} - \theta_{B_1}a = -\frac{qa^4}{8EI} - \frac{qa^4}{3EI} = -\frac{11qa^4}{24EI}$$

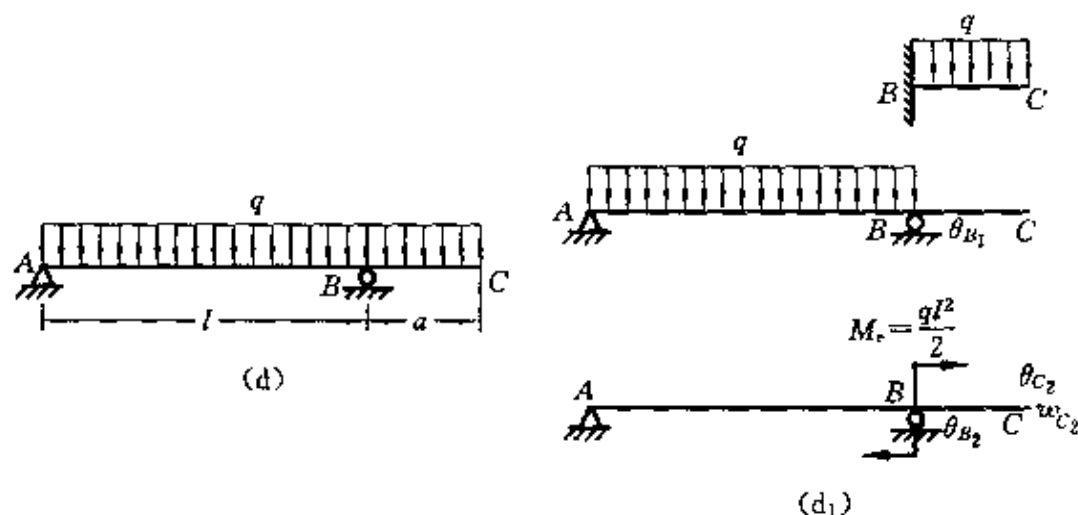
$$w_{C_2} = \theta_{B_2}a = \frac{qa^4}{4EI}$$

应用叠加法求载荷系作用下外伸端的转角和挠度

$$\theta_C = \theta_{C_1} + \theta_{C_2} = -\frac{qa^3}{2EI} + \frac{qa^3}{4EI} = -\frac{qa^3}{4EI}$$

$$w_C = w_{C_1} + w_{C_2} = -\frac{11qa^4}{24EI} + \frac{qa^4}{4EI} = -\frac{5qa^4}{24EI}$$

(d) 如题 6.11 图(d)、(d₁)所示。



续题 6.11 图

在单一载荷作用下,自由端的转角和挠度可查附录二得到

$$\theta_{B_1} = \frac{ql^3}{24EI}$$

$$\theta_{B_2} = -\frac{M_e l}{3EI} = -\frac{\left(\frac{1}{2}qa^2\right)l}{3EI} = -\frac{qa^2 l}{6EI}$$

$$\theta_{C_1} = \theta_{B_1} - \frac{qa^3}{6EI} = \frac{ql^3}{24EI} - \frac{qa^3}{6EI}$$

$$\theta_{C_2} = \theta_{B_2} = -\frac{qa^2 l}{6EI}$$

$$w_{c_1} = \theta_{B_1} a - \frac{qa^4}{8EI} = \frac{qal^3}{24EI} - \frac{qa^4}{8EI}$$

$$w_{c_2} = \theta_{B_2} a = -\frac{qa^3l}{6EI}$$

在载荷系作用下,应用叠加法可得自由端的转角和挠度(题 6.11 图(d))

$$\theta_c = \theta_{c_1} + \theta_{c_2} = \frac{ql^3}{24EI} - \frac{qa^2l}{6EI} - \frac{qa^3}{6EI}$$

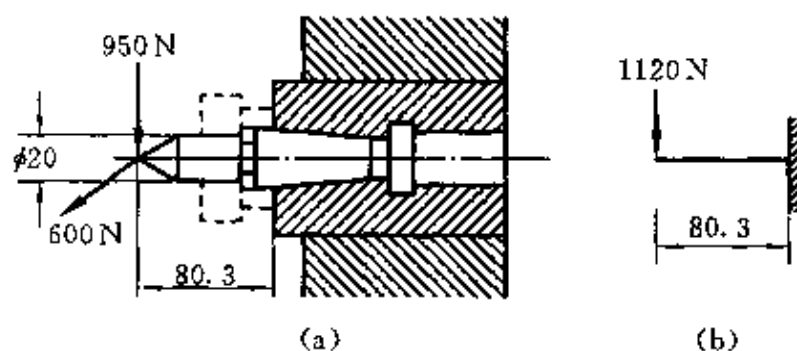
$$= \frac{q}{24EI} (l^3 - 4a^2l - 4a^3)$$

$$w_c = w_{c_1} + w_{c_2} = -\frac{qa^4}{8EI} + \frac{ql^3a}{24EI} - \frac{qa^3l}{6EI}$$

$$= -\frac{qa}{24EI} (3a^3 + 4a^2l - l^3)$$

6.12 某磨床尾架如题 6.12 图(a)所示。顶尖上的作用力在垂直方向的分量 $F_v = 950 \text{ N}$, 在水平方向的分量 $F_h = 600 \text{ N}$ 。顶尖材料的弹性模量 $E = 210 \text{ GPa}$ 。求顶尖的总挠度和总转角。

提示:先求顶尖上的合力,然后再求总挠度和总转角。



题 6.12 图

解 顶尖上的合力

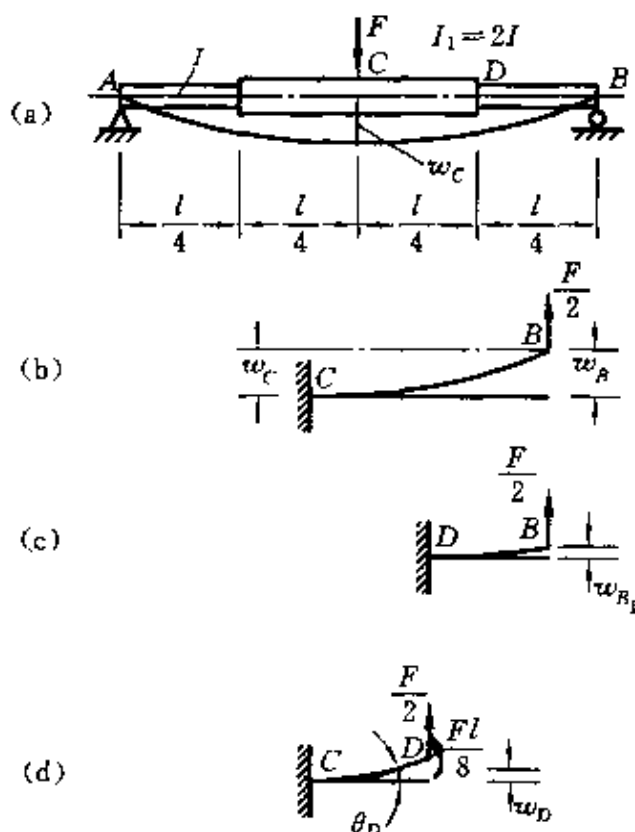
$$F = \sqrt{F_v^2 + F_h^2} = \sqrt{950^2 + 600^2} \text{ N} = 1120 \text{ N}$$

顶尖的力学模型如题 6.12 图(b)所示,它的总挠度和总转角查附录二可得

$$w_{\text{总}} = \frac{Fl^3}{3EI} = \frac{1120 \times (80.3 \times 10^{-3})^3 \times 64}{3 \times 210 \times 10^9 \times \pi \times 0.02^4} \text{ m} = 0.117 \text{ mm}$$

$$\theta_{\text{总}} = \frac{Fl^2}{2EI} = \frac{1120 \times (80.3 \times 10^{-3})^2 \times 64}{2 \times 210 \times 10^9 \times \pi \times 0.02^4} \text{ rad} = 0.0219 \text{ rad}$$

6.13 变截面梁如题 6.13 图(a)所示,试求跨度中点C的挠度。



题 6.13 图

解 因变形对称,跨度中点C截面的转角为零,挠曲线在C点的切线是水平的。所以可把变截面梁的CB段看作悬臂梁(题6.13图(b)),自由端B的挠度 $|w_B|$ 也就是AB梁跨度中点的挠度 $|w_C|$ 。而 $|w_B|$ 又可用叠加法求出。

首先,把BD段看作是截面D固定的悬臂梁(题6.13图(c))。利用附录二求得B端的挠度

$$w_{B_1} = \frac{(F/2)(l/4)^3}{3EI} = \frac{Fl^3}{384EI}$$

其次,截面D上的剪力和弯矩分别是 $F/2$ 和 $Fl/8$ 。由于这两个因素引起的截面D的转角和挠度(题6.13图(d)),可利用附录二第1栏和第2栏的公式求出,即

$$\theta_D = \frac{\frac{Fl}{8} \times \frac{l}{4}}{EI_1} + \frac{\frac{F}{2} \times \left(\frac{l}{4}\right)^2}{2EI_1} = \frac{3Fl^2}{64EI_1} = \frac{3Fl^2}{128EI}$$

$$w_D = \frac{\frac{Fl}{8} \times \left(\frac{l}{4}\right)^2}{2EI_1} + \frac{\frac{F}{2} \times \left(\frac{l}{4}\right)^3}{3EI_1} = \frac{5Fl^3}{768EI_1} = \frac{5Fl^3}{1536EI}$$

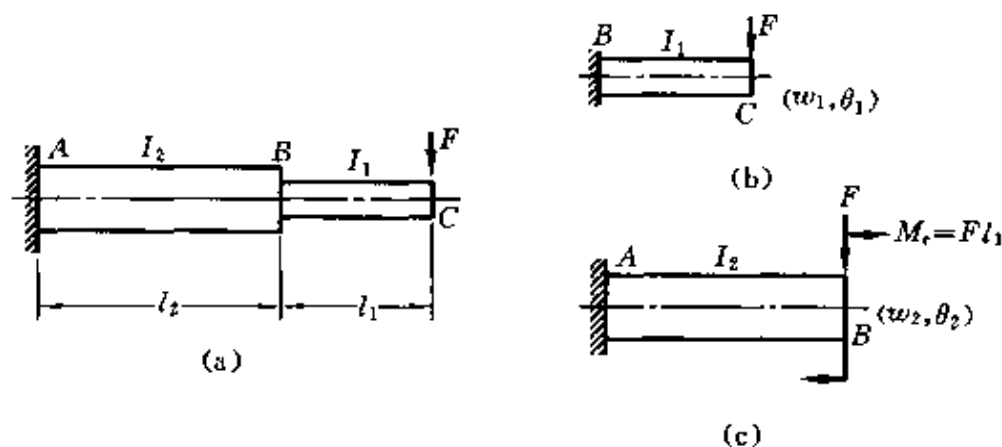
B端由于 θ_D 和 w_D 而引起的挠度是

$$w_{B_2} = w_D + \theta_D \times \frac{l}{4} = \frac{5Fl^3}{1536EI} + \frac{3Fl^2}{128EI} \times \frac{l}{4} = \frac{7Fl^3}{768EI}$$

叠加 w_{B_1} 和 w_{B_2} ,求出

$$|w_C| = |w_B| = |w_{B_1} + w_{B_2}| = \frac{Fl^3}{384EI} + \frac{7Fl^3}{768EI} = \frac{3Fl^3}{256EI}$$

6.14 求题6.14图(a)所示变截面梁自由端的挠度和转角。



题6.14图

解 在题6.14图(b)中,应用附录二可得

$$w_1 = -\frac{Fl_1^3}{3EI_1}, \quad \theta_1 = -\frac{Fl_1^2}{2EI_1}$$

在题6.14图(c)中,应用附录二可得

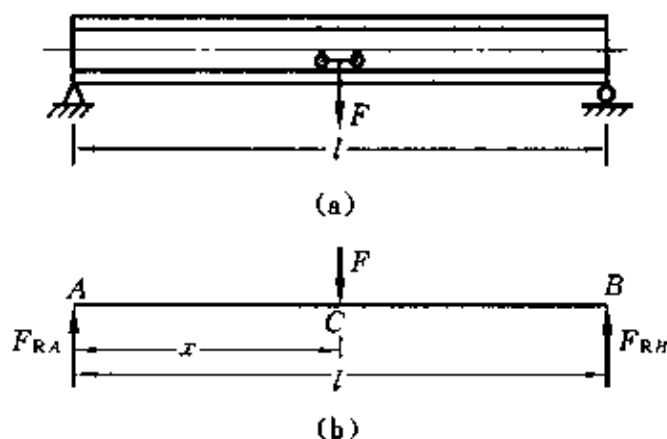
$$w_2 = -\frac{Fl_2^3}{3EI_2} - \frac{Fl_1l_2^2}{2EI_2}, \quad \theta_2 = -\frac{Fl_2^2}{2EI_2} - \frac{Fl_1l_2}{EI_2}$$

在题 6.14 图(a)中,可应用叠加法求得梁的自由端的转角和挠度

$$\theta_C = \theta_1 + \theta_2 = -\frac{Fl_1^2}{2EI_1} - \frac{Fl_2}{EI_2}\left(\frac{l_2}{2} + l_1\right)$$

$$w_C = w_1 + w_2 + \theta_2 l_1 = -\frac{F}{3E}\left(\frac{l_1^3}{I_1} + \frac{l_2^3}{I_2}\right) - \frac{Fl_1l_2}{EI_2}(l_1 + l_2)$$

6.15 题 6.15 图(a)所示的桥式起重机的最大载荷为 $F=20\text{ kN}$ 。起重机大梁为 32a 工字钢, $E=210\text{ GPa}$, $l=8.76\text{ m}$ 。规定 $[\omega]=l/500$ 。校核大梁的刚度。



题 6.15 图

解 查附录三型钢表, No. 32a 工字钢 $I=11100\text{ cm}^4$ 。起重机上的小车吊着重物 F 是移动的。在题 6.15 图(b)所示状态中, 支座反力可根据平衡条件求出

$$F_{RA} = F(l-x)/l$$

起重机大梁内的弯矩

$$M(x) = F_{RA}x = \frac{F(l-x)}{l}x$$

$M(x)$ 取最大值的条件使其对 x 的一次导数等于零, 二次导数小于零, 即

$$\frac{dM}{dx} = 0, \quad 2x = l$$

所以 $\frac{d^2M}{dx^2} = -\frac{2F}{l} < 0, \quad x = l/2$

将 $x = l/2$ 代入弯矩方程得

$$M_{\max} = Fl/4$$

查附录二集中力作用于跨度中点的简支梁, 可得其最大挠度为

$$w_{\max} = \frac{Fl^3}{48EI} = \frac{20 \times 10^3 \times 8.76^3}{48 \times (210 \times 10^9) \times 11100 \times 10^{-8}} \text{ m} = 12.1 \text{ mm}$$

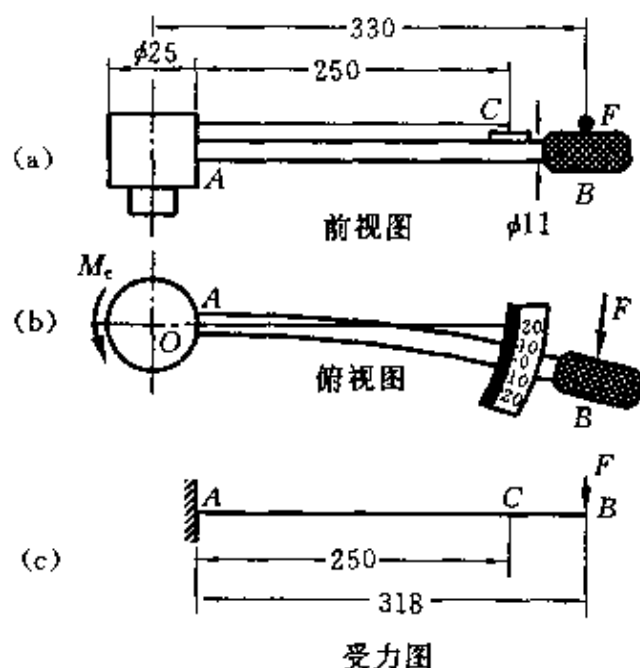
刚度校核

$$[w] = \frac{l}{500} = \frac{8.76}{500} \text{ m} = 17.5 \text{ mm}$$

$w_{\max} < [w]$, 故满足刚度要求。

6.16 弹簧扳手的主要尺寸及其受力简图如题 6.16 图所示。材料的 $E = 210 \text{ GPa}$ 。当扳手产生 $200 \text{ N} \cdot \text{m}$ 的力矩时, 试求 C 点 (刻度所在处) 的挠度。

解 当产生 $200 \text{ N} \cdot \text{m}$ 的力矩时, 应施加的力 F 为



题 6.16 图

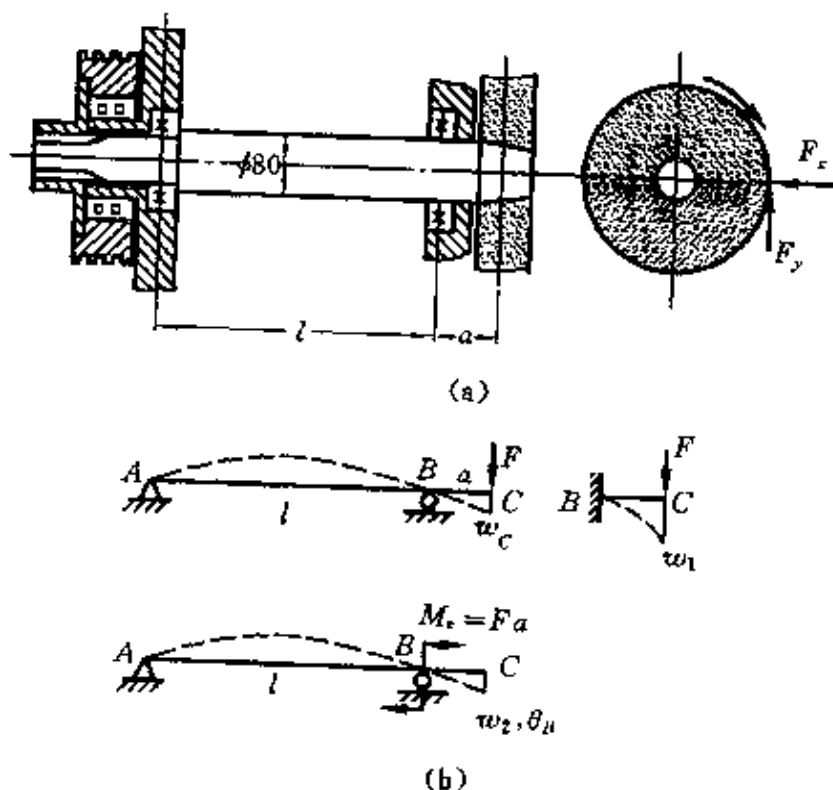
$$M = 0.33F = 200 \text{ N} \cdot \text{m}, \quad F = \frac{200}{0.33} \text{ N} = 606 \text{ N}$$

查附录二得C点的挠度

$$w_c = \frac{Fx^2}{6EI}(3l - x) = \frac{606 \times 0.25^2(3 \times 0.318 - 0.25)}{6 \times 210 \times 10^9 \times \frac{\pi}{64} \times 0.011^4} \text{ m}$$

$$= 29.4 \text{ mm}$$

6.17 磨床砂轮主轴的示意图如题 6.17 图(a)所示。轴的外伸段的长度 $a = 100 \text{ mm}$, 轴承间距离 $l = 350 \text{ mm}$, $E = 210 \text{ GPa}$ 。 $F_y = 600 \text{ N}$, $F_z = 200 \text{ N}$ 。试求主轴外伸端的总挠度。



题 6.17 图

解 磨床砂轮主轴可以简化为外伸梁, 如题 6.17 图(b)所示。主轴外伸端的总挠度 w_c 可用叠加法求得

$$w_c = w_1 + w_2$$

查附录二, 可得

$$w_1 = \frac{Fa^3}{3EI}, \quad w_2 = \theta_B a = \left(\frac{F a l}{3EI} \right) a = \frac{F a^2 l}{3EI}$$

主轴外伸端的总挠度

$$w_c = w_1 + w_2 = \frac{Fa^3}{3EI} + \frac{Fa^2l}{3EI} = \frac{Fa^2}{3EI}(l + a) \quad (\downarrow)$$

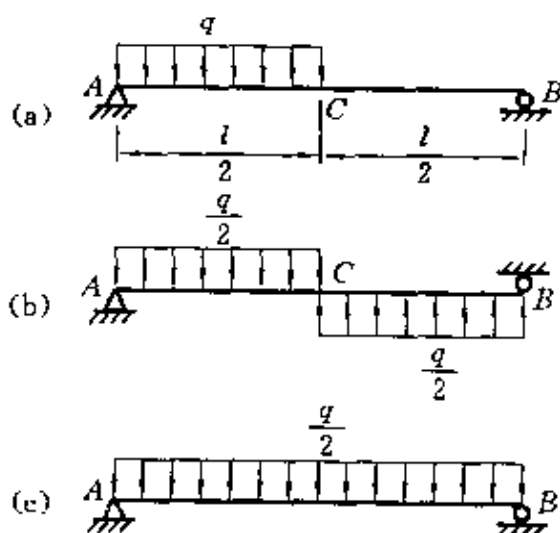
主轴外伸端受的合力

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{200^2 + 600^2} \text{ N} = 632 \text{ N}$$

所以总挠度

$$\begin{aligned} w_c &= \frac{632 \times 0.1^2 \times (0.35 + 0.1)}{3 \times 210 \times 10^9 \times \frac{\pi}{64} \times 0.08^4} \text{ m} \\ &= 2.25 \times 10^{-3} \text{ mm} \quad (\downarrow) \end{aligned}$$

6.18 在简支梁的一半跨度内作用均布载荷 q (题 6.18 图(a)), 试求跨度中点的挠度。设 EI 为常量。



解 把题 6.18 图(a)中的载荷看作是题 6.18 图(b)和(c)中两种载荷的叠加。但是在题 6.18 图(b)所示载荷作用下, 跨度中点的挠度等于零。查附录二可得题 6.18 图(a)所示梁跨度中点的挠度

题 6.18 图

$$w_c = -\frac{5 \times \frac{q}{2} l^4}{384EI} = -\frac{5ql^4}{768EI}$$

6.19 用叠加法求简支梁在题 6.19 图(a)、(b)所示载荷作用下跨度中点的挠度。设 EI 为常量。

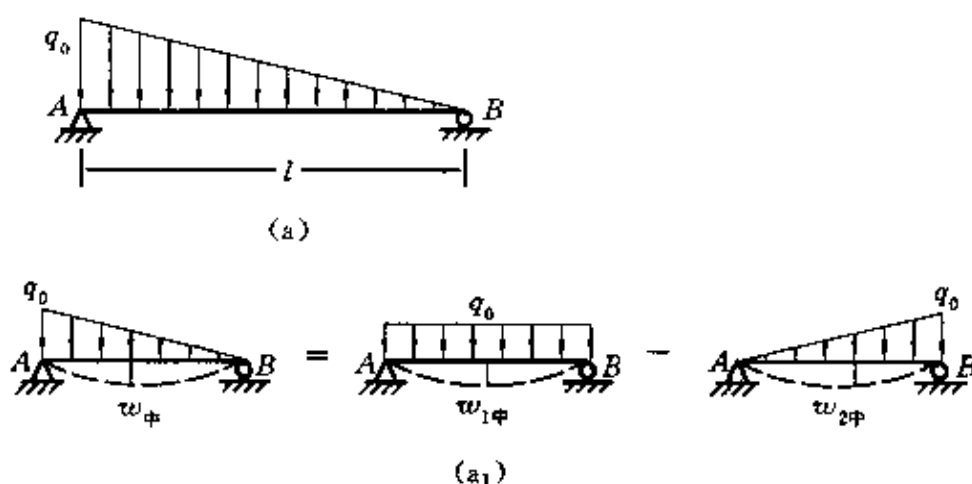
解 (a) 如题 6.19 图(a)、(a₁)所示。

由题 6.19 图(a₁)可见

$$w_{中} = w_{1中} - w_{2中}, \quad w_{2中} = w_{中}$$

查附录二可得

$$w_{1中} = \frac{5q_2 l^4}{384EI}$$



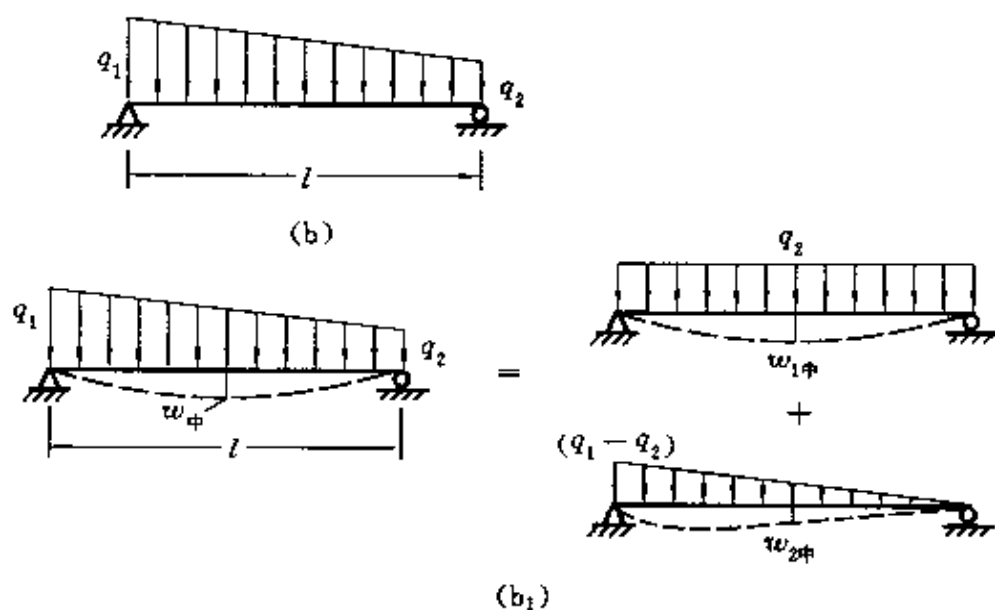
题 6.19 图

所以

$$2w_{\text{中}} = w_{1\text{中}}$$

$$w_{\text{中}} = \frac{1}{2}w_{1\text{中}} = \frac{1}{2} \times \frac{5q_0 l^4}{384EI} = \frac{5q_0 l^4}{768EI}$$

(b) 如题 6.19 图 (b)、(b₁) 所示。



续题 6.19 图

由题 6.19 图 (b₁) 可见

$$w_{\text{中}} = w_{1\text{中}} + w_{2\text{中}}$$

查附录二可得

$$w_{1中} = \frac{5q_2 l^4}{384EI}$$

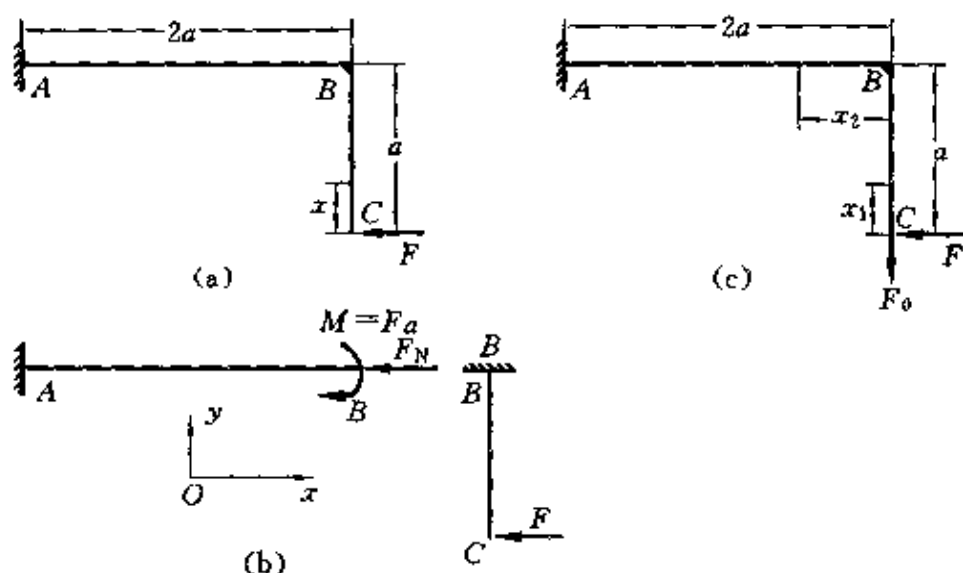
利用题 6.19 图(a)的结果有

$$w_{2中} = \frac{5(q_1 - q_2)l^4}{768EI}$$

所以应用叠加法可得题 6.19 图(b)所示简支梁跨度中点的挠度

$$w_{中} = \frac{5q_2 l^4}{384EI} + \frac{5(q_1 - q_2)l^4}{768EI} = \frac{5(q_1 + q_2)l^4}{768EI}$$

6.20 求题 6.20 图(a)所示简单刚架自由端 C 的水平位移和垂直位移。设 EI 为常量。



题 6.20 图

解 解法一 叠加法

沿 B 截面把刚架分成两部分。如题 6.20 图(b)所示。在水平杆 AB 的 B 截面上作用有轴力 $F_N = F$ 和弯矩 $M = Fa$ 。查附录二可得在 M 作用下, B 截面的挠度和转角

$$w_B = -\frac{2Fa^3}{EI}, \quad \theta_B = -\frac{2Fa^2}{EI}$$

把 BC 杆作为上端固定的悬臂梁, 如题 6.20 图(c)所示。C 截面的水平位移可查附录二得到

$$(w_C)_H = -\frac{Fa^3}{3EI}$$

应用叠加法,题 6.20 图(a)所示刚架自由端 C 的垂直和水平位移分别为

$$(w_C)_V = w_B = -\frac{2Fa^3}{EI}$$

$$(w_C)_h = (w_C)_H + a\theta_B = -\frac{Fa^3}{3EI} - \frac{2Fa^3}{EI} = -\frac{7Fa^3}{3EI}$$

解法二 用卡氏定理求解

刚架的应变能(题 6.20 图(a))

$$V_\epsilon = \int_0^a \frac{(Fx)^2}{2EI} dx + \int_0^{2a} \frac{(Fa)^2}{2EI} dx$$

则 C 点的水平位移

$$\begin{aligned} (w_C)_h &= \frac{\partial V_\epsilon}{\partial F} = \int_0^a \frac{Fx^2}{EI} dx + \int_0^{2a} \frac{Fa^2}{EI} dx \\ &= \frac{Fa^3}{3EI} + \frac{2Fa^3}{EI} = \frac{7Fa^3}{3EI} \quad (\leftarrow) \end{aligned}$$

在 C 点加一垂直方向的虚载荷 F_0 (题 6.20 图(c)),则刚架的总应变能

$$V_\epsilon = \int_0^a \frac{(Fx_1)^2}{2EI} dx_1 + \int_0^{2a} \frac{(Fa + F_0x_2)^2}{2EI} dx_2$$

C 点的垂直方向位移

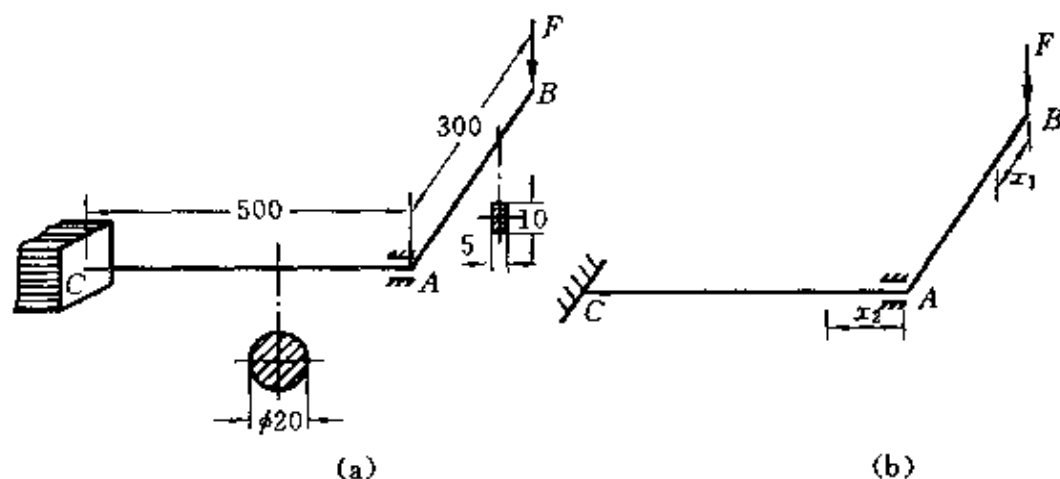
$$(w_C)_V = \frac{\partial V_\epsilon}{\partial F_0} = \int_0^{2a} \frac{(Fa + F_0x_2)x_2}{EI} dx_2$$

$$\text{令 } F_0=0, \text{ 则 } (w_C)_V = \int_0^{2a} \frac{Fax_2}{EI} dx_2 = \frac{2Fa^3}{EI} \quad (\downarrow)$$

6.21 题 6.21 图(a)所示角拐 BAC, A 处为一轴承, 允许 AC 轴的端截面在轴承内自由转动, 但不能上下移动。已知 $F=60 \text{ N}$, $E=210 \text{ GPa}$, $G=0.4E$ 。试求截面 B 的垂直位移。

解 解法一 叠加法

B 截面的垂直位移是由两部分组成的: 一是因 AC 杆的扭转



题 6.21 图

变形使 A 截面产生绕 AC 轴线的扭转角,从而使 AB 杆绕 AC 轴线作刚体转动,使 B 点产生的垂直位移为

$$w_{B_1} = \varphi_A \times 300 \times 10^{-3}$$

$$\varphi_A = \frac{Tl}{GI_p} = \frac{F \times 300 \times 10^{-3} \times 500 \times 10^{-3}}{GI_p}$$

二是 AB 杆自身的弯曲变形使 B 点产生的垂直位移为

$$w_{B_2} = \frac{F \times (300 \times 10^{-3})^3}{3EI}$$

所以 B 点的垂直位移可应用叠加法得到

$$w_B = w_{B_1} + w_{B_2} = \left[\frac{F \times 0.3 \times 0.5}{GI_p} \times 0.3 + \frac{F \times 0.3^3}{3EI} \right] \text{ m}$$

$$= \left[\frac{60 \times 0.3 \times 0.5 \times 0.3}{0.4 \times 210 \times 10^9 \times \frac{\pi}{32} \times (0.02)^4} + \frac{60 \times 0.3^3}{3 \times 210 \times 10^9 \times \left(\frac{5 \times 10^3}{12} \right) \times 10^{-12}} \right] \text{ m}$$

$$= 8.22 \text{ mm} \quad (\downarrow)$$

解法二 能量法(卡氏定理)

直角拐的总应变能(题 6.21 图(b))

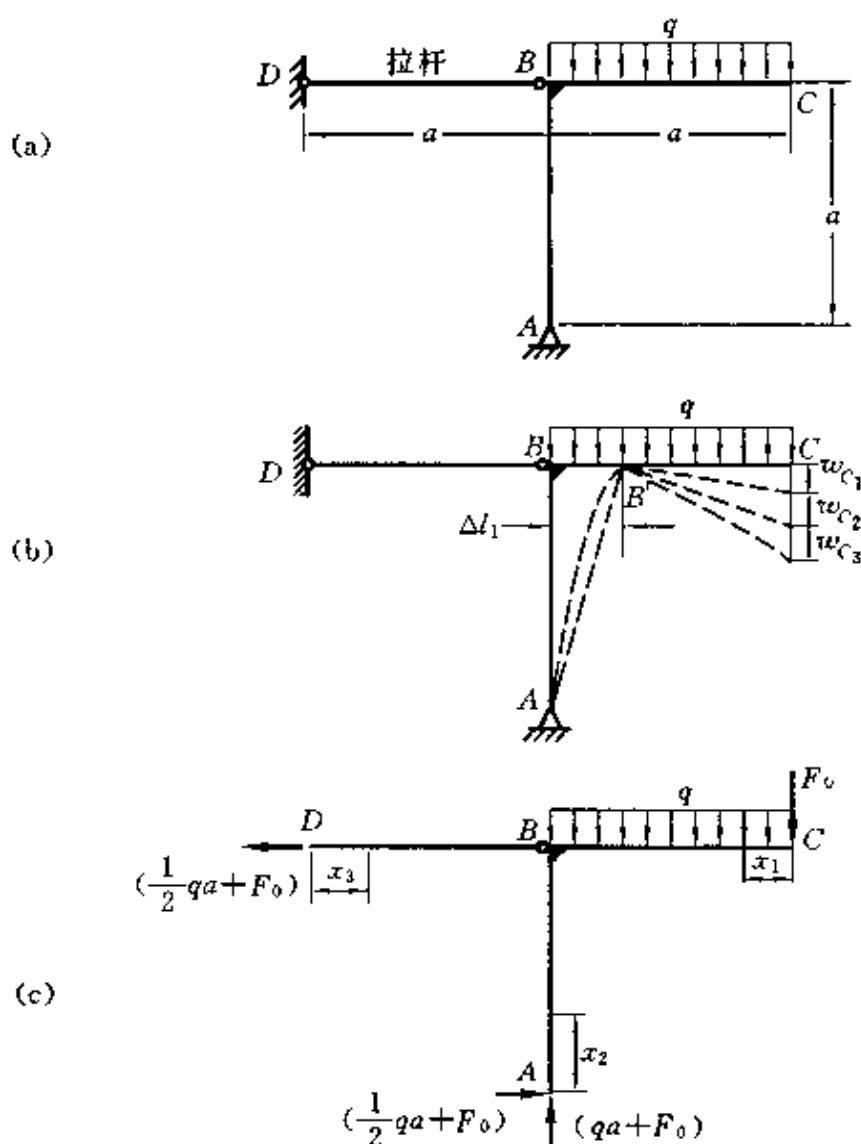
$$V_e = \int_0^{0.3} \frac{(Fx_1)^2 dx_1}{2EI} + \int_0^{0.5} \frac{(0.3F)^2 dx_2}{2GI_p}$$

截面 B 的垂直位移

$$w_B = \frac{\partial V_e}{\partial F} = \int_0^{0.3} \frac{Fx_1^2 dx_1}{EI} + \int_0^{0.5} \frac{0.3^2 F dx_2}{GI_p}$$

这一结果与叠加法完全相同。

6.22 如题 6.22 图(a)所示, 刚架 ABC 的 $EI = \text{常量}$; 拉杆 BD 的横截面面积为 A , 弹性模量为 E 。试求 C 点的垂直位移。



题 6.22 图

解 解法一 叠加法

根据平衡条件很容易求出 BD 杆内的轴力(题 6.22 图(b))

$$F_{NBD} = \frac{1}{2}qa$$

C 点的垂直位移是由 AB 、 BC 和 BD 杆的变形引起的, 由于 BD 杆伸长 Δl , 使 B 点平移(因是小变形, 忽略了 B 点位移的垂直分量)到 B' 点(题 6.22 图(b)), 从而使 C 点下降了 w_{C_1} ,

$$w_{C_1} = \Delta l = \frac{F_{NBD}l}{EA} = \frac{\left(\frac{1}{2}qa\right)a}{EA} = \frac{qa^2}{2EA}$$

因 B 处为刚性结点, 分布载荷 q 对该点产生力矩, 使 AB 杆弯曲, 引起 B 截面产生转角, B 截面转角引起 C 点的垂直位移为(查附录二)

$$w_{C_2} = \theta_B a = \frac{M_B l}{3EI} a = \frac{\left(\frac{1}{2}qa^2\right)a}{3EI} = \frac{qa^3}{6EI}$$

BC 杆可视为一悬臂梁, 在均布载荷作用下, C 点的垂直位移为(查附录二)

$$w_{C_3} = \frac{qa^4}{8EI}$$

所以 C 点的总垂直位移

$$\begin{aligned} w_C &= w_{C_1} + w_{C_2} + w_{C_3} = \frac{qa^2}{2EA} + \frac{qa^3}{6EI} + \frac{qa^4}{8EI} \\ &= \frac{qa^2}{2EA} + \frac{7qa^3}{24EI} \quad (\downarrow) \end{aligned}$$

解法二 能量法

在 C 点加垂直方向的虚力 F_0 , $F_0=0$ 。根据平衡条件计算出支座反力并标示在题 6.22 图(c)中。

$$CB \text{ 段的弯矩 } \begin{cases} M_1 = F_0 x_1 + \frac{1}{2} q x_1^2 \\ \overline{M}_1 = \frac{\partial M_1}{\partial F_0} = x_1 \end{cases} \quad (0 \leq x_1 \leq a)$$

$$\begin{aligned}
 \text{BA 段的弯矩} \quad & \begin{cases} M_2 = \left(\frac{1}{2}qa + F_0 \right) x_2 \\ \bar{M}_2 = \frac{\partial M_2}{\partial F_0} = x_2 \end{cases} \quad (0 \leq x_2 \leq a) \\
 \text{BD 段的轴力} \quad & \begin{cases} F_N = \frac{1}{2}qa + F_0 \\ \bar{F}_N = \frac{\partial F_N}{\partial F_0} = 1 \end{cases} \quad (0 \leq x_3 \leq a)
 \end{aligned}$$

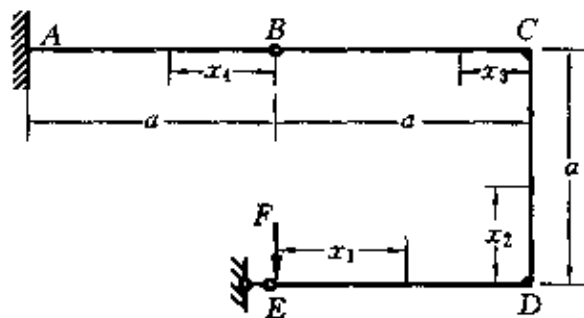
AB 杆的压缩变形能, 与其弯曲变形能比较, 可略去不计。应用莫尔积分, 得

$$\begin{aligned}
 w_C &= \int_0^a \frac{M_1 \bar{M}_1}{EI} dx_1 + \int_0^a \frac{M_2 \bar{M}_2}{EI} dx_2 + \int_0^a \frac{F_N \bar{F}_N}{EA} dx_3 \\
 &= \frac{1}{EI} \left[\int_0^a \left(F_0 x_1 + \frac{1}{2} q x_1^2 \right) x_1 dx_1 + \int_0^a \left(\frac{1}{2} qa + F_0 \right) x_2^2 dx_2 \right] \\
 &\quad + \frac{1}{EA} \int_0^a \left[\left(\frac{1}{2} qa + F_0 \right) \times 1 \right] dx_3
 \end{aligned}$$

令上式中 $F_0 = 0$, 得

$$\begin{aligned}
 w_C &= \frac{1}{EI} \left(\int_0^a \frac{1}{2} q x_1^3 dx_1 + \int_0^a \frac{1}{2} q a x_2^2 dx_2 \right) + \frac{1}{EA} \int_0^a \frac{1}{2} q a dx_3 \\
 &= \frac{1}{EI} \left(\frac{qa^4}{8} + \frac{qa^4}{6} \right) + \frac{qa^2}{2EA} = \frac{7qa^4}{24EI} + \frac{qa^2}{2EA} \quad (\downarrow)
 \end{aligned}$$

6.23 如题 6.23 图所示, 刚架 BCDE 用铰与悬臂梁的自由端 B 相连接, EI 相同, 且等于常量。若不计结构的自重, 试求 F 力作用点 E 的位移。



题 6.23 图

解 用能量法

$$M_1 = Fx_1, \quad \bar{M}_1 = \frac{\partial M_1}{\partial F} = x_1 \quad (0 \leq x_1 \leq a)$$

$$M_2 = Fa, \quad \bar{M}_2 = \frac{\partial M_2}{\partial F} = a \quad (0 \leq x_2 \leq a)$$

$$M_3 = Fa - F(a - x_3) = Fx_3, \quad \bar{M}_3 = \frac{\partial M_3}{\partial F} = x_3 \quad (0 \leq x_3 \leq a)$$

$$M_4 = Fx_4, \quad \bar{M}_4 = \frac{\partial M_4}{\partial F} = x_4 \quad (0 \leq x_4 \leq a)$$

应用莫尔积分有

$$\begin{aligned} w_E &= \sum \int \frac{M \bar{M}}{EI} dx \\ &= \int_0^a \frac{M_1 \bar{M}_1}{EI} dx_1 + \int_0^a \frac{M_2 \bar{M}_2}{EI} dx_2 + \int_0^a \frac{M_3 \bar{M}_3}{EI} dx_3 + \int_0^a \frac{M_4 \bar{M}_4}{EI} dx_4 \\ &= \int_0^a \frac{Fx_1^2}{EI} dx_1 + \int_0^a \frac{Fa^2}{EI} dx_2 + \int_0^a \frac{Fx_3^2}{EI} dx_3 + \int_0^a \frac{Fx_4^2}{EI} dx_4 \\ &= \frac{2Fa^3}{EI} \quad (\downarrow) \end{aligned}$$

6.24 悬臂梁如题 6.24 图所示,有载荷 F 沿梁移动。若使载荷移动时总保持相同的高度,试问应将梁轴线预先弯成怎样的曲线? 设 $EI = \text{常量}$ 。

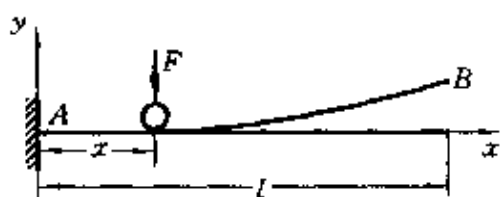
解 设 AB 曲线的方程为 $w = f(x)$, 当载荷 F 移动到 x 处时, AB 杆在 F 力作用点处的挠度为 $-w(x)$, 欲使载荷移动时总保持同一高度即沿水平 (x 轴) 方向, 则必须

$$f(x) + [-w(x)] = 0$$

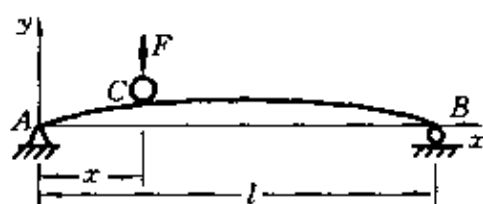
即(查附录二)

$$f(x) = w(x) = -\frac{Fx^3}{3EI}$$

6.25 如题 6.25 图所示,滚轮沿简支梁移动时,要求滚轮恰好走一水平路径,试问需将梁的轴线预先弯成怎样的曲线? 设 $EI = \text{常量}$ 。



题 6.24 图



题 6.25 图

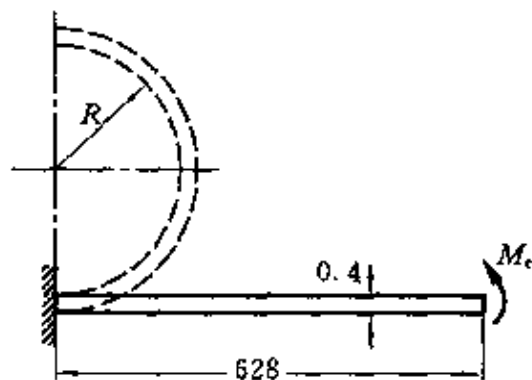
解 集中力作用下的简支(直)梁,其力作用点的挠度查附录二得

$$w_C = -\frac{Fx(l-x)}{6EI}[l^2 - x^2 - (l-x)^2] = -\frac{Fx^2(l-x)^2}{3EI}$$

欲使滚轮走水平路径,则集中力作用点C的预制高度值,应恰好和直梁对应点的挠度相等,所以预弯成的曲线方程应当就是直梁受集中力时的挠曲线方程

$$w(x) = w_C = \frac{Fx^2(l-x)^2}{3EI}$$

6.26 如题 6.26 图所示,一端固定的板条截面尺寸为 $0.4 \text{ mm} \times 6 \text{ mm}$,将它弯成半圆形。求力偶矩 M_e 及最大正应力 σ_{\max} 的数值。设 $E=200 \text{ GPa}$ 。试问这种情况下,能否用 $\sigma = \frac{M}{W}$ 计算应力?能否用 $\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M}{EI}$ 计算变形?何故?



题 6.26 图

解 由曲率和弯矩的关系

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R} = \frac{M}{EI}$$

得板条内的弯矩

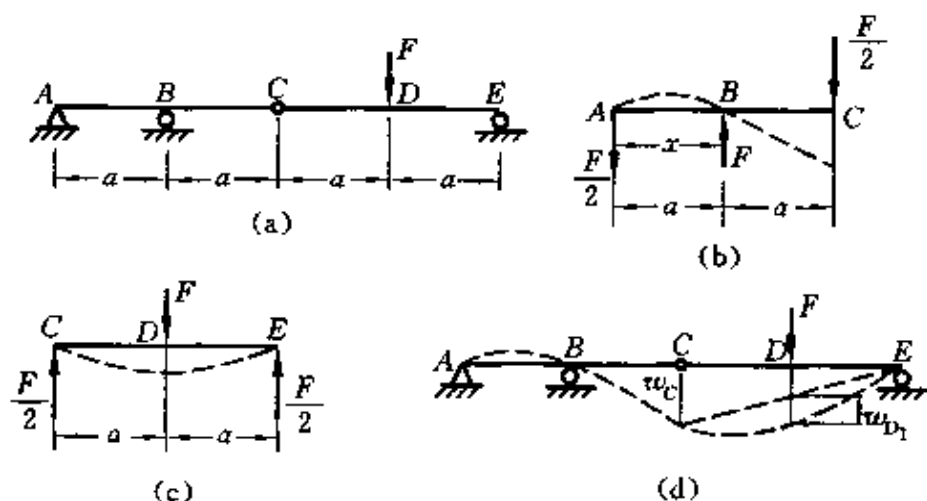
$$\begin{aligned} M &= \frac{EI}{R} = \frac{200 \times 10^9 \times \frac{1}{12} \times (0.4 \times 10^{-3})^3 \times 0.006}{0.628/\pi} \text{ N} \cdot \text{m} \\ &= 0.032 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

板条的弯曲正应力

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{0.032}{\frac{1}{6}(0.4 \times 10^{-3})^2 \times 0.006} \text{ Pa} = 200 \text{ MPa} = \sigma_p$$

因是纯弯曲,板条内的弯矩为常量,所以上式求出的弯曲正应力也就是最大正应力。因为它未超过材料的比例极限,所以可用 $\sigma = \frac{M}{W}$ 计算弯曲应力。但是不能用 $\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M}{EI}$ 计算变形,因为公式 $\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M}{EI}$ 除了只适用于线弹性变形外,还只适用于小变形,这是因为曲率-弯矩关系式 $\frac{1}{\rho} = \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M}{EI}$ 是一个近似微分方程,而 $\frac{d^2w/dx^2}{[1+(dw/dx)^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{M}{EI}$ 才是适用于弯曲变形的普遍情况。只有当小变形时挠曲线极平坦, $\frac{dw}{dx}$ 很小, $\left(\frac{dw}{dx}\right)^2$ 与 1 相比可忽略不计,才有 $\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M}{EI}$ 。小变形假设是材料力学的基本假设之一。

6.27 题 6.27 图(a)中两根梁的 EI 相同,且等于常量。两梁由铰链相互连接。试求 F 力作用点 D 的位移。



题 6.27 图

解 解法一 用卡氏定理

将题 6.27 图(a)所示梁从铰链 C 处拆成两部分,左半部分为外伸梁,右半部分为简支梁,根据平衡条件计算出支座反力并标示在题 6.27 图(b)、(c)中,从受力的观点来看,这两部分完全相同,因此题 6.27 图(a)所示梁的总应变能为

$$V_{\epsilon} = \int_0^a \left[\frac{1}{2EI} \left(\frac{F}{2}x \right)^2 dx \right] \times 4$$

F 力作用点 D 的位移为(题 6.27 图(a))

$$\delta_D = \frac{\partial V_{\epsilon}}{\partial F} = \frac{\partial}{\partial F} \int_0^a \left[\frac{1}{2EI} \left(\frac{F}{2}x \right)^2 dx \right] \times 4 = \frac{Fa^3}{3EI} \quad (\downarrow)$$

解法二 叠加法

CE 段可看成简支梁(题 6.27 图(c)),D 的挠度查附录二可得

$$w_{D_1} = -\frac{F(2a)^3}{48EI} = -\frac{Fa^3}{6EI}$$

AC 段可视为外伸梁,C 点挠度将引起 D 点的位移(题 6.27 图(d)),此位移等于 AC 段弯曲变形在 C 点产生的位移 w_C 之半。查附录二,C 点挠度(题 6.27 图(b))为

$$w_C = -\frac{Fa^3}{3EI}$$

D 点的位移

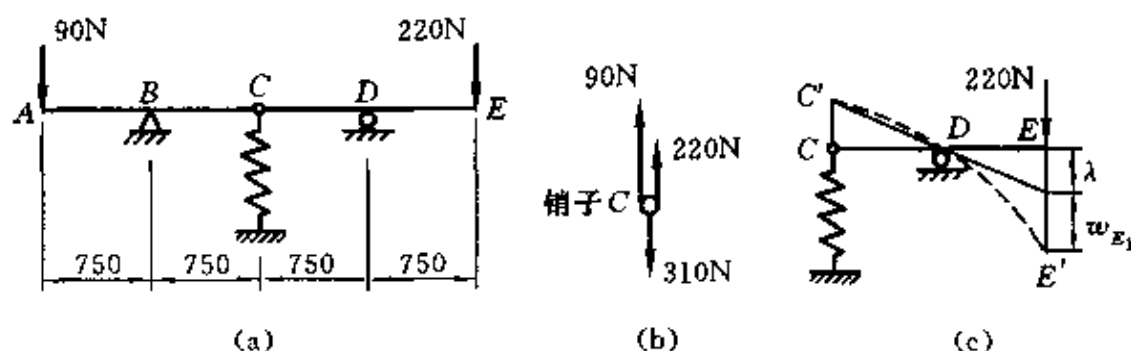
$$w_D = w_{D_1} + \frac{w_C}{2} = -\frac{Fa^3}{6EI} - \frac{Fa^3}{6EI} = -\frac{Fa^3}{3EI}$$

6.28 如题 6.28 图(a)所示,若 CDE 梁端点 E 的位移等于弹簧伸长的 1.5 倍,试求 CDE 梁的抗弯刚度 EI。设弹簧的平均半径 $R=80 \text{ mm}$,簧丝直径 $d=20 \text{ mm}$,圈数 $n=7$, $G=80 \times 10^9 \text{ Pa}$ 。

解 根据平衡条件,弹簧在铰链 C 处受拉力为 310 N(题 6.28 图(b))。弹簧变形为

$$\lambda = \frac{64FR^3n}{Gd^4} = \frac{64 \times 310 \times 0.08^3 \times 7}{80 \times 10^9 \times 0.02^4} \text{ m} = 5.55 \text{ m} \quad \textcircled{1}$$

把 CE 段看成有弹性支座 C 的外伸梁(题 6.28 图(c)),查附录二得 E 处作用 220 N 产生的位移



题 6.28 图

$$w_{E_1} = \frac{2Fa^3}{3EI} \quad (2)$$

CE 段与普通的外伸梁不同之处仅仅是铰链 C 处不是刚性支座,而是弹性支座,因此 CE 段因弹性支座 C 处的弹簧伸长产生 CE 段绕 D 点的刚性旋转,使 E 点下降 λ ,在此基础上,CE 梁又产生弯曲变形,使 E 点产生挠度 w_{E_1} ,所以 E 点的总位移为

$$w_E = w_{E_1} + \lambda$$

又由题意

$$w_E = 1.5\lambda$$

所以

$$w_{E_1} = w_E - \lambda = 1.5\lambda - \lambda = 0.5\lambda \quad (3)$$

由②、③式,得

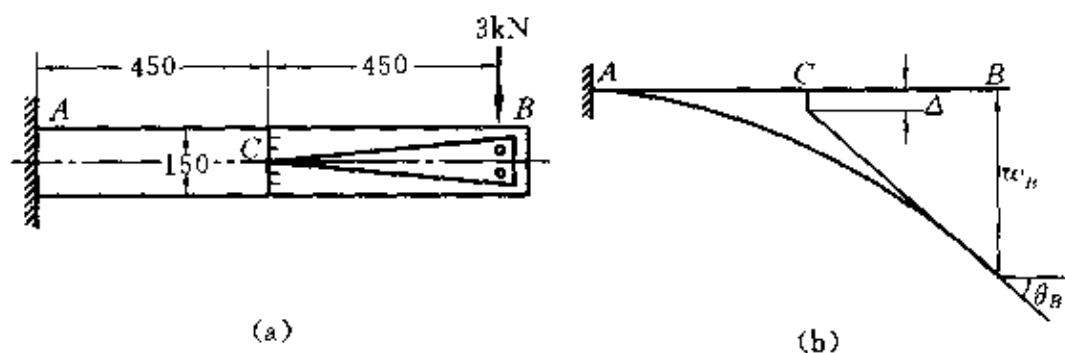
$$w_{E_1} = \frac{2Fa^3}{3EI} = 0.5\lambda$$

梁的刚度

$$EI = \frac{4Fa^3}{3\lambda} = \frac{4 \times 220 \times 0.75^3}{3 \times 5.55 \times 10^{-3}} \text{ N} \cdot \text{m}^2 = 2.23 \times 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}^2$$

6.29 悬臂梁的横截面尺寸为 $75 \text{ mm} \times 150 \text{ mm}$,在截面 B 上固定一个指针 BC,如题 6.29 图(a)所示。在集中力 3 kN 作用下,试求指针 C 端的位移。设 $E = 200 \text{ GPa}$ 。

解 指针 BC 只有 B 端与梁固结,在梁变形过程中,指针不产生弹性变形,只随着梁的 B 截面作刚体运动,既有平移,又有转动。指针 C 端位移等于梁 B 端的挠度与因 B 截面转角而引起指针 C 端位移之差,如题 6.29 图(b)所示。所以指针 C 端的位移为



题 6.29 图

$$\Delta = w_B - \theta_B \times \frac{l}{2} = - \left(\frac{Fl^3}{3EI} - \frac{Fl^2}{2EI} \times \frac{l}{2} \right) = - \frac{Fl^3}{12EI}$$

$$= \frac{3000 \times 0.9^3}{12 \times 200 \times 10^9 \times \frac{1}{12} \times 0.075 \times 0.15^3} \text{ m} = 0.0432 \text{ mm}$$

6.30 等强度梁如题 6.30 图所示, 设 F 、 a 、 b 、 h 及弹性模量 E 均已知。试求梁的最大挠度。

解 (a) 如题 6.30 图(a)所示。

用积分法求解

BC 段

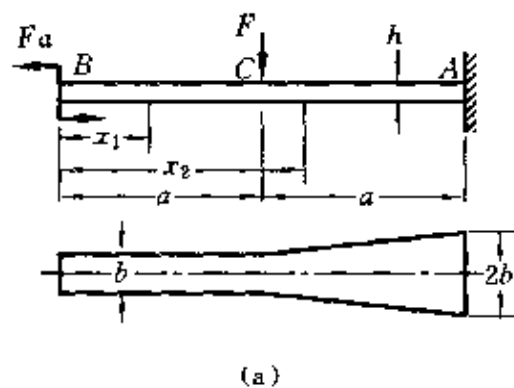
弯矩方程、挠曲线微分方程及其积分为

$$M_1(x_1) = -Fa \quad (0 \leq x_1 \leq a)$$

$$EI_1 w_1'' = -Fa$$

$$EI_1 w_1' = -Fax_1 + C_1$$

$$EI_1 w_1 = -\frac{1}{2}Fax_1^2 + C_1x_1 + D_1$$



题 6.30 图

上式中
$$I_1 = \frac{1}{12}bh^3$$

CA 段
$$I_2 = \frac{1}{12} \left(\frac{bx_2}{a} \right) h^3 = \frac{1}{12}bh^3 \frac{x_2}{a} = I_1 \frac{x_2}{a}$$

弯矩方程、挠曲线微分方程及其积分为

$$M_2(x_2) = -Fa - F(x_2 - a) = -Fx_2 \quad (a \leq x_2 \leq 2a)$$

$$EI_2 w_2'' = EI_1 \frac{x_2}{a} w_2'' = -Fx_2$$

$$EI_1 w_2'' = -Fa$$

$$EI_1 w_2' = -Fax_2 + C_2$$

$$EI_1 w_2 = -\frac{1}{2}Fax_2^2 + C_2x_2 + D_2$$

由连续条件和边界条件确定积分常数:

由 $x_1 = x_2 = a, w_1' = w_2', w_1 = w_2$, 得

$$C_1 = C_2, \quad D_1 = D_2$$

由 $x_2 = 2a, w_2' = 0, w_2 = 0$, 得

$$C_2 = 2Fa^2, \quad D_2 = -2Fa^3$$

挠曲线方程

$$w_1(x_1) = \frac{1}{EI_1} \left(-\frac{1}{2}Fax_1^2 + 2Fa^2x_1 - 2Fa^3 \right)$$

$$w_2(x_2) = \frac{1}{EI_1} \left(-\frac{1}{2}Fax_2^2 + 2Fa^2x_2 - 2Fa^3 \right)$$

最大挠度发生在自由端

$$w_{\max} = w_1(x_1) \big|_{x_1=0} = -\frac{2Fa^3}{EI_1} = -\frac{24Fa^3}{Ebh^3}$$

(b) 如题 6.30 图(b)所示。

因结构和载荷均对称, 所以只考虑梁的一半 AC 段。

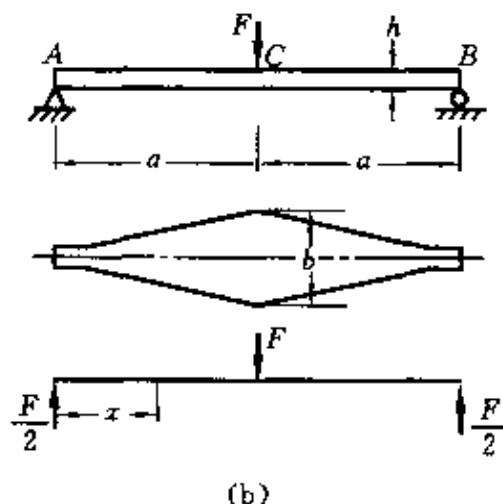
$$I_1 = \frac{1}{12}b(x)h^3 = \frac{1}{12} \left(\frac{b}{a}x \right) h^3$$

令 $I = \frac{1}{12}bh^3$ 则

$$I_1 = \frac{x}{a}I \quad (0 \leq x \leq a)$$

弯矩方程、挠曲线微分方程及其积分

$$M(x) = \frac{F}{2}x \quad (0 \leq x \leq a)$$



续题 6.30 图

$$EI_1 w'' = \frac{F}{2}x$$

将 $I_1 = \frac{x}{a}I$ 代入上式, 得 $EIw'' = \frac{Fa}{2}$

$$EIw' = \frac{Fa}{2}x + C$$

$$EIw = \frac{Fa}{4}x^2 + Cx + D$$

由边界条件确定积分常数:

由 $x=0, w=0$, 得 $D=0$

由 $x=a, w'=0$, 得 $C = -\frac{Fa^2}{2}$

挠曲线方程 $w(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{Fa}{4}x^2 - \frac{Fa^2}{2}x \right)$

最大挠度为 $w_{\max} = w(x)|_{x=a} = -\frac{Fa^3}{4EI} = -\frac{3Fa^3}{Ebh^3}$

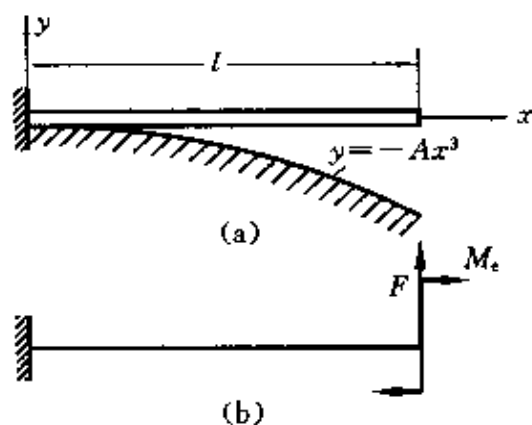
在题 6.30 图(b)中当 $x=0$ 时, $b(x)=0$, 即截面宽度等于零。这是不允许的。工程实际中将按剪切强度条件设计支座附近截面的宽度。根据剪应力强度条件

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{F_{S\max}}{A} = \frac{3}{2} \times \frac{F/2}{b_{\min}h} \leq [\tau]$$

求得最小截面宽度为 $b_{\min} \geq \frac{3F}{4h[\tau]}$

6.31 题 6.31 图(a)所示等截面梁, 抗弯刚度为 EI 。设梁下有一曲面 $y = -Ax^3$, 欲使梁变形后恰好与该曲面密合, 且曲面不受压力。试问梁上应加什么载荷? 并确定载荷的大小和方向。

解 欲使梁弯曲后恰好与曲面 $y = -Ax^3$ 密合, 并且曲面不受压力, 必须使梁的挠曲线方程为 $w = -Ax^3$ 。于是有



题 6.31 图

$$\frac{dw}{dx} = -3Ax^2, \quad \frac{d^2w}{dx^2} = -6Ax$$

代入挠曲线方程中得

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} = -6Ax$$

所以有

$$M(x) = -6AEIx = -Fx$$

$$F = 6AEI$$

假设先在梁自由端施加一力 $F = 6AEI$, 如题 6.31 图(b)所示。由附录二可查得梁的挠曲线方程为

$$w = \frac{Fx^2}{6EI}(3l - x)$$

令 $A = \frac{F}{6EI}$, 代入上式得 $w = -Ax^3 + \frac{Fx^2l}{2EI}$

与曲面方程比较多一项 $\frac{Fx^2l}{2EI}$, 再试加顺时针方向的力偶矩 M_e , 如题 6.31 图(b)所示。由附录二可查得在 M_e 作用下梁的挠曲线方程为

$$w = -\frac{M_e x^2}{2EI}$$

应满足

$$\frac{Fx^2l}{2EI} - \frac{M_e x^2}{2EI} = 0$$

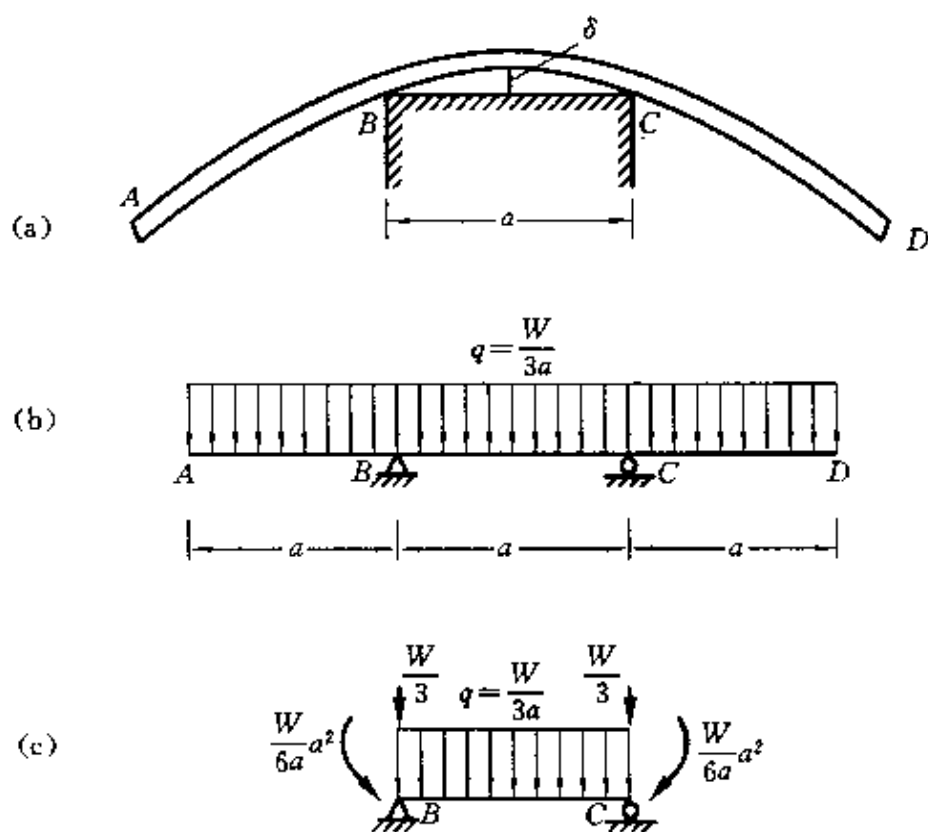
解上式得

$$M_e = Fl = 6AEI$$

所以应在梁自由端加一垂直向上的集中力 $F = 6AEI$ 和一顺时针方向的力偶矩 $M_e = 6AEI$ 。

6.32 如题 6.32 图(a)所示, 总重为 W 、长度为 $3a$ 的钢筋, 对称地放置于宽为 a 的刚性平台上。试求钢筋与平台间的最大间隙 δ 。设 $EI = \text{常量}$ 。

解 题 6.32 图(a)可视为在载荷集度 $q = \frac{W}{3a}$ 的均布载荷作用下的外伸梁, 如题 6.32 图(b)所示。最大间隙 δ 就是梁跨度中点的挠度。将 AB 、 CD 二外伸部分上的载荷平移至 B 、 C 两支座上, 如题 6.32 图(c)所示。题 6.32 图(c)与题 6.32 图(b)对于 BC 段梁的变



题 6.32 图

形而言,二者是等效的。题 6.32 图(c)中 BC 梁跨度中点的挠度即为钢筋与刚性平台间最大间隙 δ ,可应用叠加法求得(查附录二)

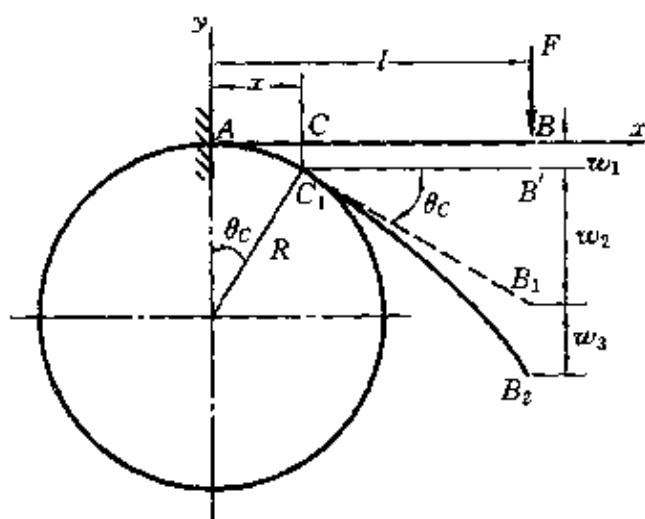
$$\delta = \frac{M_c l^2}{16EI} \times 2 - \frac{5ql^4}{384EI} = \frac{W}{6a}a^4 \times 2 - \frac{5 \times \frac{W}{3a}a^4}{384EI} = \frac{19Wa^3}{1152EI}$$

6.33 EI 为常数的悬臂梁的下面是一半径为 R 的刚性圆柱面(题 6.33 图)。在集中力 F 作用下,试求端点 B 的挠度。

解 当梁变形后曲率半径 $\rho > R$ 时,梁不与刚性圆柱面接触。当梁变形后曲率半径 $\rho = R$ 时,除固定端处 A 点与圆柱面接触外,梁仍不与圆柱面接触,设此时外力 $F = F_0$,于是有

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R} = \frac{M}{EI} = \frac{F_0 l}{EI}, \quad F_0 = \frac{EI}{Rl}$$

F_0 是使梁不与圆柱面接触的极限值,当 $F > F_0$ 时,梁有一部分与



题 6.33 图

圆柱面接触, 设 AC 段与圆柱面接触, $AC = x$ (题 6.33 图), 长度 x 由下式决定

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R} = \frac{F(l-x)}{EI}, \quad x = l - \frac{EI}{FR}$$

AC 段与梁接触后, C 点移至 C_1 点, B 点移至 B_1 点, C_1 点因刚性圆柱限制不能再下移; 但 B_1 点可以因 C_1B_1 段梁的弹性变形继续下移至 B_2 点, 所以梁自由端 B 点的位移 w_B 由三部分组成:

(1) 因 AC 段的变形引起的 w_1 , 可由几何关系确定

$$w_1 = - \left(R - \sqrt{R^2 - x^2} \right) \approx - \frac{1}{2} \frac{x^2}{R} = - \frac{\left(l - \frac{EI}{FR} \right)^2}{2R}$$

(2) 因 AC 段变形产生 C 截面转角 θ_c 引起 C_1B_1 段的刚体位移产生的 w_2

$$w_2 = \theta_c(l-x) = - \frac{EI}{FR^2} \left(l - \frac{EI}{FR} \right) \quad \left(\text{其中 } \theta_c = - \frac{x}{R} \right)$$

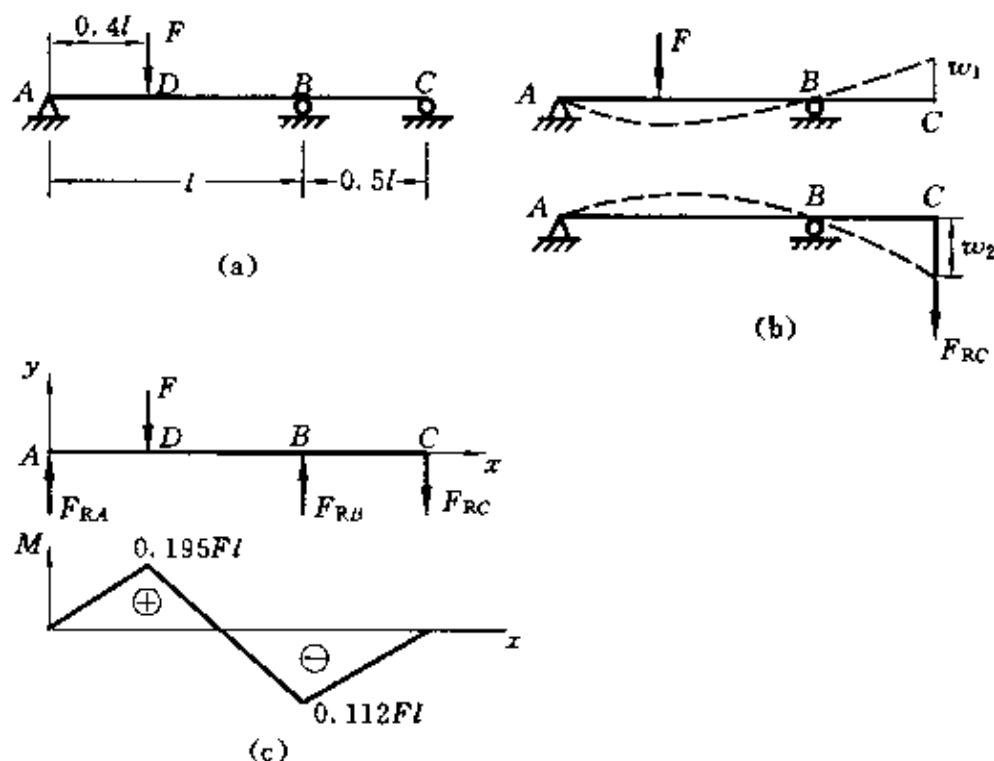
(3) C_1B_1 段的弹性变形引起的 w_3

$$w_3 = - \frac{F(l-x)^3}{3EI} = - \frac{(EI)^2}{3F^2R^3}$$

所以梁自由端 B 点的位移为

$$w_B = w_1 + w_2 + w_3 = -\frac{l^2}{2R} + \frac{(EI)^2}{6F^2R^3}$$

6.34 车床床头箱的一根传动轴简化成三支座等截面梁,如题 6.34 图(a)所示。试用变形比较法求解,并作轴的弯矩图。



题 6.34 图

解 本题为一次超静定问题。选取支座C 为多余约束,相应的静定基为外伸梁,如题 6.34 图(b)所示。因C 处是支座,所以不容许C 点有垂直方向位移,故变形协调方程为

$$w_C = w_1 + w_2 = 0 \quad (1)$$

利用附录二提供的公式可得

$$w_1 = \theta_B \times 0.5l = \frac{F \times 0.4l \times 0.6l \times (l + 0.4l)}{6EI} \times 0.5l$$

$$w_2 = -\frac{F_{RC}(0.5l)^2(l + 0.5l)}{3EI}$$

将 w_1, w_2 代入①式得

$$F_{RC} = 0.224F \quad (\downarrow)$$

多余约束反力 F_{RC} 确定后,可利用平衡条件求得另外两个约束反力

F_{RA}, F_{RB} (题 6.34 图(c))

$$\sum M_A = 0, \quad F_{RB}l - F(0.4l) - F_{RC}(1.5l) = 0$$

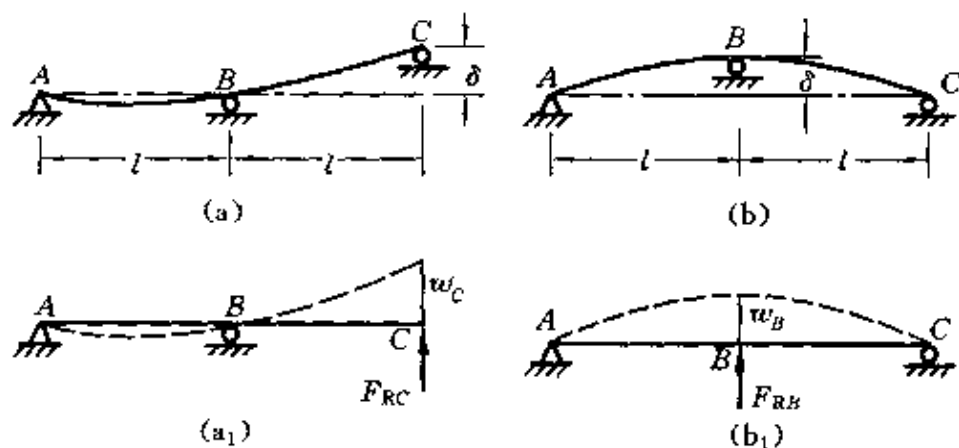
$$F_{RB} = 0.736F \quad (\uparrow)$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{RA} + F_{RB} - F_{RC} - F = 0$$

$$F_{RA} = 0.488F \quad (\uparrow)$$

弯矩图如题 6.34 图(c)所示。

6.35 题 6.35 图所示三支座等截面轴, 由于制造不精确, 轴承有高低。设 EI 、 δ 和 l 均为已知量, 试用变形比较法求题 6.35 图(a)、(b)所示两种情况的最大弯矩。



题 6.35 图

解 (a) 如题 6.35 图(a)所示, 这是一次超静定问题。解除 C 端约束, 代之以约束反力 F_{RC} , 成为如题 6.35 图(a₁)所示的外伸梁。比较题 6.35 图(a)与(a₁), C 点位移相等, 查附录二, 有

$$\delta = w_C = \frac{2F_{RC}l^3}{3EI}$$

所以

$$F_{RC} = \frac{3\delta EI}{2l^3}$$

最大弯矩发生在 B 截面上

$$M_{\max} = F_{RC}l = \frac{3\delta EI}{2l^2}$$

(b) 如题 6.35 图(b)所示。这是一次超静定问题。解除 B 支

座的约束,代之以约束反力 F_{RB} ,成为如题 6.35 图(b₁)所示的简支梁。比较题 6.35 图(b)与(b₁),B 点位移相等,查附录二,得

$$\delta = w_B = \frac{F_{RB}(2l)^3}{48EI} = \frac{F_{RB}l^3}{6EI}$$

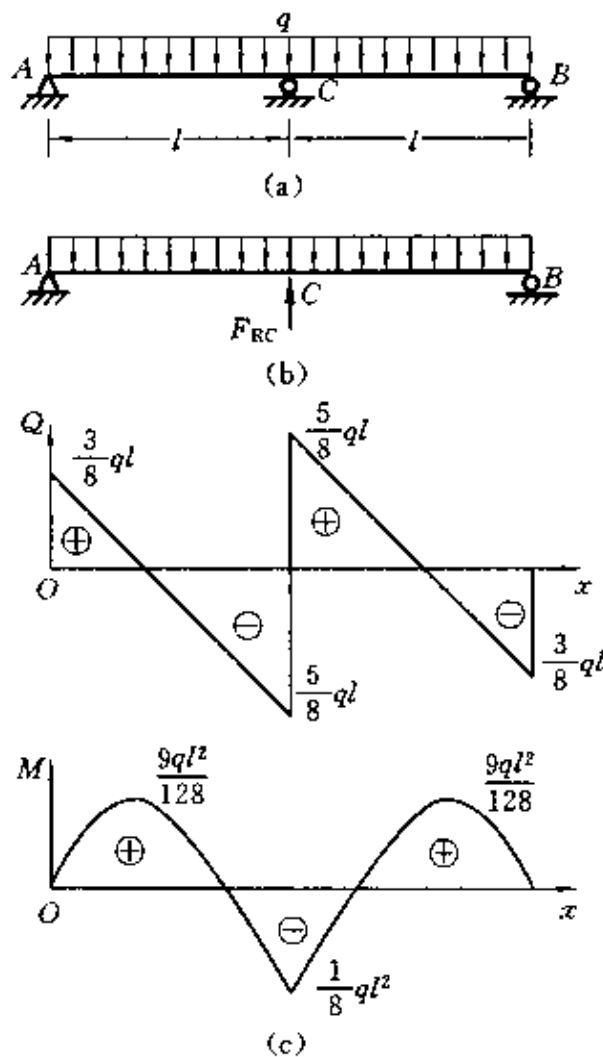
所以

$$F_{RB} = \frac{6EI\delta}{l^3}$$

最大弯矩发生在 B 截面上

$$M_{\max} = -\frac{1}{2}F_{RB}l = -\frac{3EI\delta}{l^2}$$

6.36 房屋建筑中的某一等截面梁简化成均布载荷作用下的双跨梁,如题 6.36 图(a)所示。试作梁的剪力图和弯矩图。



题 6.36 图

解 这是个一次超静定问题。解除C处约束,代之以约束反力 F_{RC} ,成为题6.36图(b)所示简支梁。查附录二并由叠加原理得题6.36图(b)所示简支梁跨度中点的挠度

$$w_C = \frac{-5q(2l)^4}{384EI} + \frac{F_{RC}(2l)^3}{48EI}$$

因C处有支座约束,挠度为零,即

$$w_C = 0$$

所以求得 $F_{RC} = \frac{5}{4}ql$

因结构和载荷均对称,根据平衡条件很容易求得另外两个支座反力

$$F_{RA} = F_{RB} = \frac{3}{8}ql$$

作梁的剪力图和弯矩图,如题6.36图(c)所示。

6.37 试用积分法求解题

6.37图(a)所示超静定梁。设 EI = 常量。

解 解除A处支座约束,代之以支座反力 F_{RA} (题6.37图(b)),则任意截面上的弯矩为

$$M(x) = F_{RA}x - \frac{q}{2}x^2$$

挠曲线微分方程及其积分为

$$EI \frac{d^2w}{dx^2} = M(x) = F_{RA}x - \frac{q}{2}x^2$$

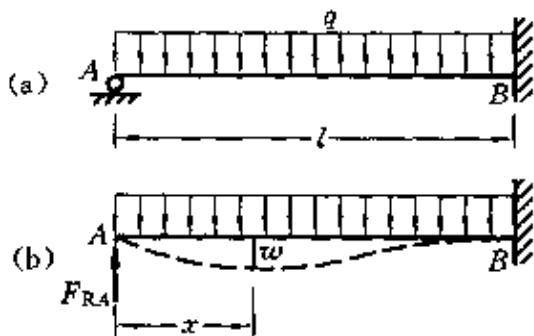
$$EI \frac{dw}{dx} = EI\theta = \frac{1}{2}F_{RA}x^2 - \frac{q}{6}x^3 + C \quad (1)$$

$$EIw = \frac{1}{6}F_{RA}x^3 - \frac{q}{24}x^4 + Cx + D \quad (2)$$

梁的左端为铰支座,故

$$x = 0 \text{ 时, } w = 0$$

梁的右端为固定支座,所以



题6.37图

$$x = l \text{ 时, } w = 0, \quad \theta = 0$$

把边界条件代入①、②式,得

$$D = 0$$

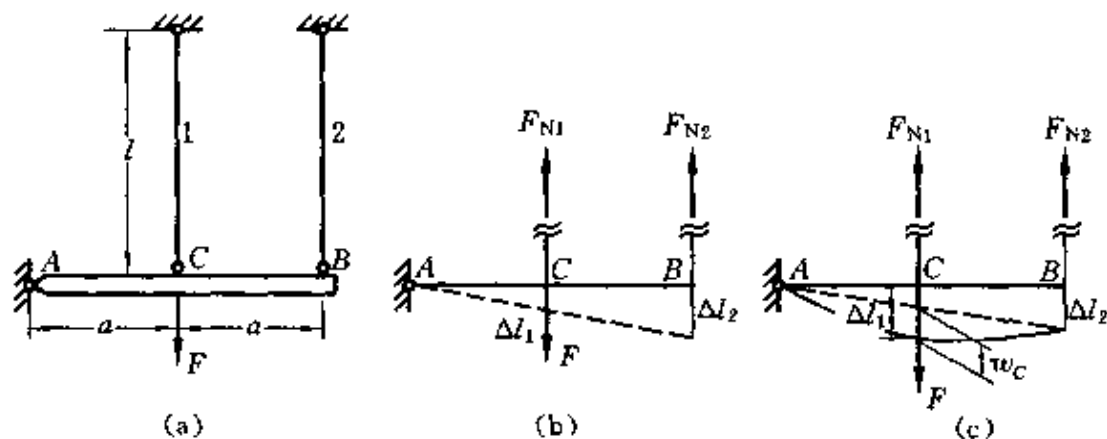
$$\frac{1}{2}F_{RA}l^2 - \frac{1}{6}ql^3 + C = 0 \quad (3)$$

$$\frac{1}{6}F_{RA}l^2 - \frac{1}{24}ql^3 + Cl = 0 \quad (4)$$

解③、④式,得 $C = -\frac{ql^3}{48}, \quad F_{RA} = \frac{3ql}{8}$

求得反力 F_{RA} 和积分常数后,不但可以解出原超静定梁的所有反力,而且还可以确定梁的挠度和转角方程。

6.38 题 6.38 图(a)所示结构中,1、2 两杆的抗拉刚度同为 EA 。(1)若将横梁 AB 视为刚体,试求 1、2 两杆的内力。(2)若考虑横梁的变形,且抗弯刚度为 EI ,试求 1、2 两杆的拉力。



题 6.38 图

解 (1) 将横梁视为刚体。

解除 1、2 杆的约束,以轴力 F_{N1} 、 F_{N2} 代之,如题 6.38 图(b)所示。静力平衡方程

$$\sum M_A = 0, \quad F_{N1}a + 2F_{N2}a = Fa$$

$$F_{N1} + 2F_{N2} = F \quad (1)$$

变形协调方程

$$2\Delta l_1 = \Delta l_2 \quad (2)$$

物理方程
$$\Delta l_1 = \frac{F_{N1}l}{EA}, \quad \Delta l_2 = \frac{F_{N2}l}{EA} \quad (3)$$

由②、③式得
$$2F_{N1} = F_{N2} \quad (4)$$

联立①、④式求解得

$$F_{N1} = \frac{F}{5}, \quad F_{N2} = \frac{2}{5}F$$

(2) 将横梁视为变形体。

解除 1、2 杆的约束,以轴力 F_{N1} 、 F_{N2} 代之,如题 6.38 图(c)所示。静力平衡方程不变,仍是①、②式。变形协调条件为

$$w_C + \frac{\Delta l_2}{2} = \Delta l_1$$

查附录二
$$w_C = \frac{(F - F_{N1})(2a)^3}{48EI}$$

故
$$\frac{(F - F_{N1})(2a)^3}{48EI} + \frac{\Delta l_2}{2} = \Delta l_1$$

$$\frac{(F - F_{N1})a^3}{6I} + \frac{F_{N2}l}{2A} = \frac{F_{N1}l}{A} \quad (5)$$

由①、⑤式得

$$F_{N1} = \frac{(3Il + 2a^3A)}{15Il + 2a^3A}F, \quad F_{N2} = \frac{6Il}{15Il + 2a^3A}F$$

6.39 题 6.39 图(a)所示结构中,AB 梁为 16 号工字钢;拉杆 BC 的截面为圆形, $d=10$ mm。两者均为 Q235 钢, $E=200$ GPa。试求梁及拉杆内的最大正应力。

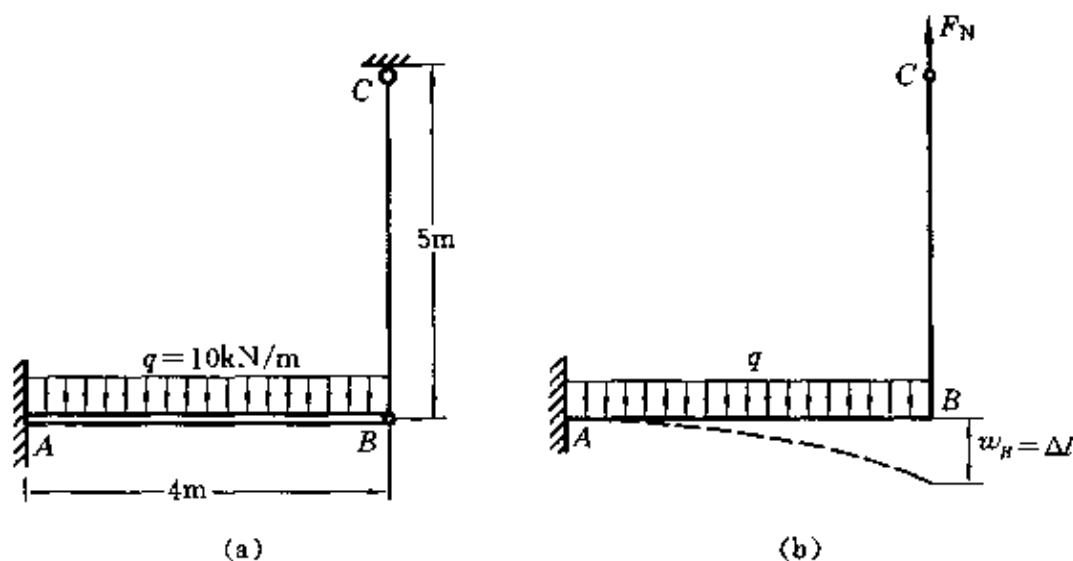
解 这是一次超静定问题。解除拉杆对梁的约束,代之以轴力 F_N ,如题 6.39 图(b)所示。变形协调条件是梁在均布载荷 q 和轴力 F_N 的作用下,梁在 B 点的挠度等于拉杆的伸长,即

$$w_B = \Delta l$$

查附录二并应用叠加原理得

$$\frac{ql^4}{8EI} - \frac{F_N l^3}{3EI} = \frac{F_N l'}{EA} \quad (1)$$

查附录三型钢表得 16 号工字钢的



题 6.39 图

$$I = 1130 \text{ cm}^4, \quad W = 141 \text{ cm}^3$$

把已知数据代入①式得

$$\begin{aligned} & \frac{10 \times 10^3 \times 4^4}{8 \times 200 \times 10^9 \times 1130 \times 10^{-8}} - \frac{F_N \times 4^3}{3 \times 200 \times 10^9 \times 1130 \times 10^{-8}} \\ &= \frac{F_N \times 5}{200 \times 10^9 \times \frac{\pi}{4} \times 0.01^2} \end{aligned}$$

解上式得 $F_N = 14.5 \text{ kN}$

最大弯矩在固定端处

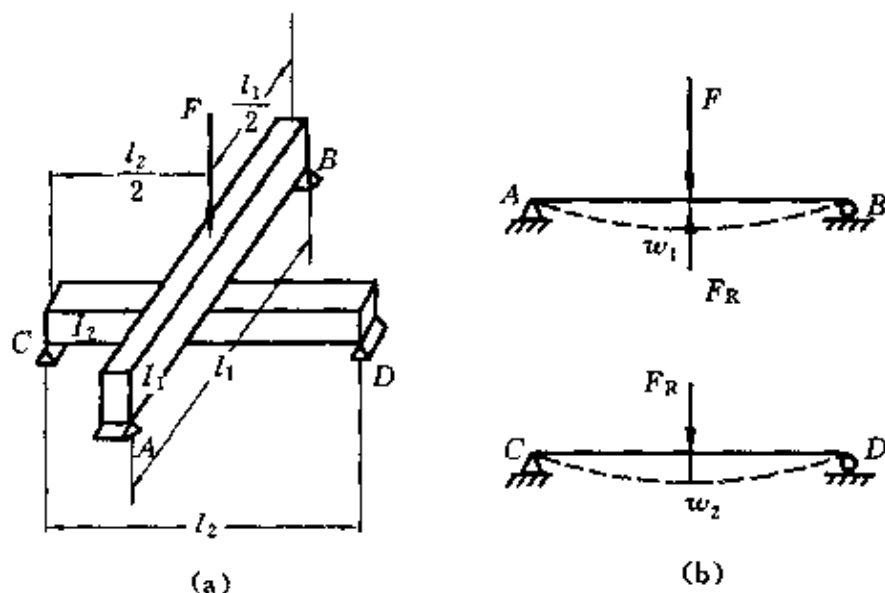
$$\begin{aligned} M_{\max} &= -\frac{1}{2}ql^2 + F_N l \\ &= \left(-\frac{1}{2} \times 10 \times 10^3 \times 4^2 + 14.5 \times 10^3 \times 4 \right) \text{ N} \cdot \text{m} \\ &= -22 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

杆内最大正应力 $\sigma_{\max} = \frac{F_N}{A} = \frac{14.5 \times 10^3}{\frac{\pi}{4} \times 0.01^2} \text{ Pa} = 185 \text{ MPa}$

梁内最大正应力

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{22 \times 10^3}{141 \times 10^{-6}} \text{ Pa} = 156 \text{ MPa}$$

6.40 题 6.40 图(a)所示二梁的材料相同,截面惯性矩分别为 I_1 和 I_2 。在无外载荷时两梁刚好接触。试求在 F 力作用下,二梁分别负担的载荷。



题 6.40 图

解 这是一次超静定问题,将二梁分开,如题 6.40 图(b)所示。根据变形协调条件,上、下梁在跨度中点的挠度应相等,即

$$w_1 = w_2$$

查附录二得

$$w_1 = \frac{(F - F_R)l_1^3}{48EI_1}, \quad w_2 = \frac{F_R l_2^3}{48EI_2}$$

所以

$$\frac{(F - F_R)l_1^3}{48EI_1} = \frac{F_R l_2^3}{48EI_2}$$

解上式得

$$F_R = \frac{I_2 l_1^3 F}{I_2 l_1^3 + I_1 l_2^3}$$

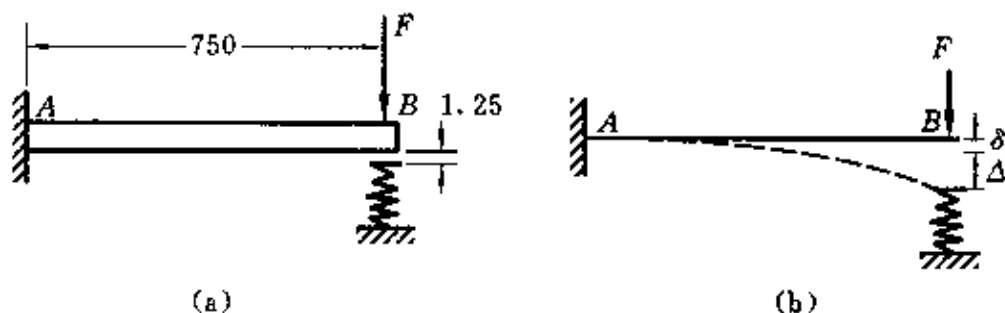
设上梁承担载荷为 F_1 , 下梁承担载荷为 F_2 , 且 $F_2 = F_R$, 根据静力平衡条件有

$$F_1 + F_2 = F$$

$$F_1 = F - F_2 = F - F_R = \frac{I_1 l_2^3}{I_2 l_1^3 + I_1 l_2^3} F$$

$$F_2 = F_R = \frac{I_2 l_1^3}{I_2 l_1^3 + I_1 l_2^3} F$$

6.41 题 6.41 图(a)所示悬臂梁的抗弯刚度 $EI = 30 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^2$ 。弹簧的刚度为 $175 \times 10^3 \text{ N/m}$ 。若梁与弹簧间的空隙为 1.25 mm ，当集中力 $F = 450 \text{ N}$ 作用于梁的自由端时，试问弹簧将分担多大的力。



题 6.41 图

解 这是个一次超静定问题，梁自由端的挠度 w_B 等于梁与弹簧之间的空隙 δ 和弹簧被压缩高度 Δ 之和(题 6.41 图(b))，对应于被压缩高度 Δ ，弹簧受压力为 F' 。因

$$w_B = \delta + \Delta$$

将查附录二得到的 $w_B = \frac{(F - F')}{3EI} l^3$ 及 $\Delta = \frac{F'}{C}$ ， $\delta = 1.25 \times 10^{-3}$ 代入上式得

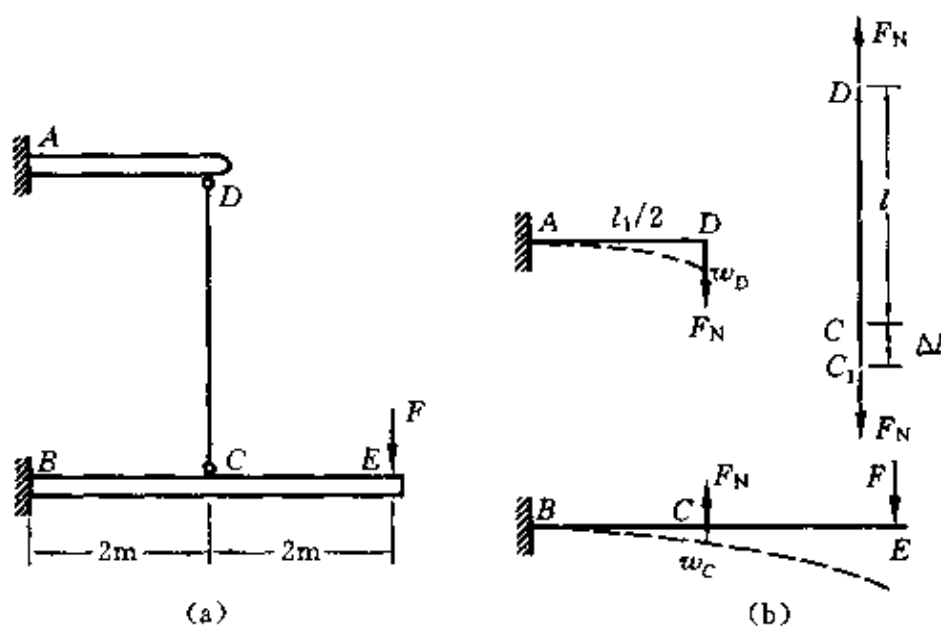
$$\left(\frac{F - F'}{3EI} \right) l^3 = \frac{F'}{C} + 1.25 \times 10^{-3}$$

$$\left(\frac{450 - F'}{3 \times 30 \times 10^3} \right) 0.75^3 = \frac{F'}{175 \times 10^3} + 1.25 \times 10^{-3}$$

解上式，得弹簧分担的力

$$F' = 82.6 \text{ N}$$

6.42 题 6.42 图(a)所示悬臂梁 AD 和 BE 的抗弯刚度同为 $EI = 24 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^2$ ，由钢杆 CD 相连接。 CD 杆的 $l = 5 \text{ m}$ ， $A = 3 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ ， $E = 200 \text{ GPa}$ 。若 $F = 50 \text{ kN}$ ，试求悬臂梁 AD 在 D 点的挠度。



题 6.42 图

解 这是个一次超静定问题。将 CD 杆拆出, 使系统成为两个悬臂梁和一个受轴向拉伸的杆, 如题 6.42 图 (b) 所示。设 BE 梁长 l_1 , 在 C 点的挠度 w_C 等于 AD 梁的挠度 w_D 与 CD 杆的伸长量 Δl 之和, 即

$$w_C = w_D + \Delta l \quad (1)$$

BE 梁在 C 点的挠度 w_C 可用叠加法求得, 它等于在 F_N 和 F 单独作用下 C 点挠度的代数和, 查附录二可得

$$\begin{aligned} w_C = w_F + w_{F_N} &= \frac{F(l_1/2)^2}{6EI} \left(3l_1 - \frac{l_1}{2} \right) - \frac{F_N}{3EI} \left(\frac{l_1}{2} \right)^3 \\ &= \frac{5Fl_1^3}{48EI} - \frac{F_N l_1^3}{24EI} \\ w_D &= \frac{F_N(l_1/2)^3}{3EI} = \frac{F_N l_1^3}{24EI} \\ \Delta l &= \frac{F_N l}{EA} \end{aligned} \quad (2)$$

将 w_C 、 w_D 和 Δl 代入①式中, 得

$$\frac{F_N l}{EA} + \frac{F_N l_1^3}{24EI} = \frac{5Fl_1^3}{48EI} - \frac{F_N l_1^3}{24EI}$$

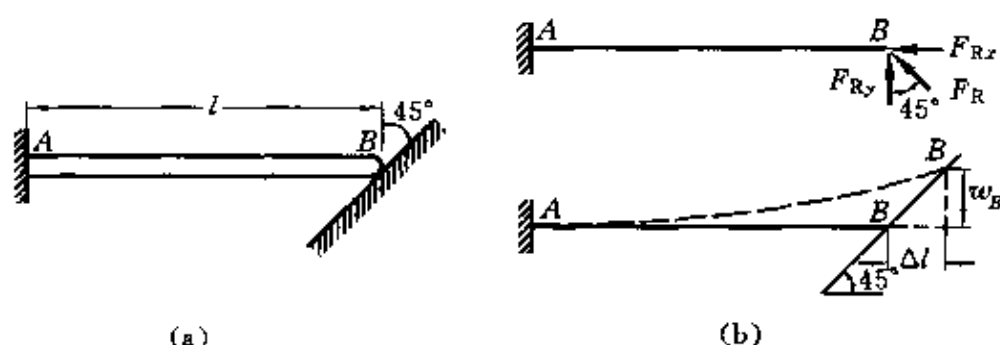
将 l, l_1, EI, E, A 和 F 的数据代入上式得

$$F_N = 45.5 \text{ kN}$$

将 F_N 值代入②式,得 AD 梁在 D 点的挠度

$$w_D = \frac{F_N l_1^3}{24EI} = \frac{45.5 \times 10^3 \times 4^3}{24 \times 24 \times 10^6} \text{ m} = 5.06 \text{ mm} \quad (\downarrow)$$

6.43 题6.43图(a)所示悬臂梁的自由端恰好与光滑斜面相接触。若温度升高 ΔT , 试求梁内最大弯矩。设 E, A, I, α 已知, 且梁的自重及轴力对弯曲变形的影响皆可略去不计。



题6.43图

解 这是个一次超静定问题。因温度的升高, 梁伸长 Δl , 它是斜面反力 F_R 和温升引起的膨胀共同作用的结果。由题6.43图(b)得几何关系

$$w_B = \Delta l = \Delta l_t - \Delta l_N$$

$$\frac{F_R l^3}{3EI} = \alpha \Delta T l - \frac{F_{Rx} l}{EA} \quad (1)$$

约束分力 F_R 的两个正交分量

$$F_{Rx} = F_{Ry} = F_R \cos 45^\circ \quad (2)$$

由①、②式得

$$F_{Rx} = \frac{\alpha \Delta T}{\frac{1}{EA} + \frac{l^2}{3EI}} = \frac{3\alpha \Delta T E I A}{3I + Al^2}$$

截面 A 为最大弯矩

$$M_{\max} = F_{Rx} l = \frac{3\alpha \Delta T l E A I}{3I + Al^2}$$

第七章 应力和应变分析 强度理论

知识要点

1. 应力状态的概念

(1) 一点处的应力状态

一般地说,物体受力后,同一截面上不同点的应力各不相同,而同一点在不同方向截面上的应力也各不相同,通过一点所有方向截面上的应力集合,称为一点的应力状态。

(2) 一点处应力状态的表示方法

围绕所研究的点,截取一个单元体(无穷小的正六面体),物体其余部分对该单元体的作用以单元体六个面上的应力分量来表示,这样的单元体就表示受力物体内一点处的应力状态。

(3) 主平面、主应力

① 主平面——单元体上无切应力作用($\tau=0$)的平面。

② 主应力——主平面上的正应力。主应力 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 是以其代数值排序的,即 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ 。

(4) 应力状态的分类

① 单向应力状态——三个主应力中,只有一个不为零的应力状态。如轴向拉(压)杆内一点的应力状态。

② 二向应力状态——三个主应力中,有两个不为零的应力状态。如薄壁压力容器筒壁内一点的应力状态。

③ 三向应力状态——三个主应力都不等于零的应力状态。如两个物体接触点处的应力状态。

2. 二向应力(平面应力)状态下的应力分析

(1) 二向应力状态分析的解析法

① 斜截面上的应力

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

符号规定：

- 正应力 σ 以拉应力为正。
- 切应力 τ 以对单元体内任一点产生顺时针转向的为正。
- 方向角 α 以逆时针方向为正。

② 主平面、主应力

- 主平面方向 $\tan 2\alpha_\sigma = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$

b. 主应力

$$\left. \begin{matrix} \sigma' \\ \sigma'' \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

注意： σ' 和 σ'' 分别是三个主应力中的两个，且 $\sigma' > \sigma''$ 。对于二向应力状态，有一个主应力必定等于零。主应力为零的面称为零应力面。

③ 最大切应力及其作用面

- 作用面方向 $\tan 2\alpha_\tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$

- $|\tau_{\max}| = \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2}$

注意：上式所确定的最大切应力是指垂直于零应力面的各个斜面上切应力中的最大值，确切地讲，应称之为“平面最大切应力”，至于说通过一点所有方向斜截面上的切应力中之最大者，当由三向应力状态分析所确定。

(2) 二向应力状态分析的图解法——应力圆

应力圆与单元体的对应关系如表 7-1 所示。

表 7-1

单元体	应力圆
单元体某平面上的应力	应力圆某定点坐标
单元体两平面的夹角 α	应力圆两对应点的中心角 2α
单元体的最大切应力值	应力圆半径
单元体的主应力	应力圆与 σ 轴交点的坐标

3. 平面应变状态分析

$$\begin{cases} \epsilon_\alpha = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\alpha - \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\alpha \\ \frac{\gamma_\alpha}{2} = \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \sin 2\alpha + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\alpha \end{cases}$$

$$\left. \begin{matrix} \epsilon_{\max} \\ \epsilon_{\min} \end{matrix} \right\} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2} \right)^2}$$

$$\tan 2\alpha_0 = - \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y}$$

4. 三向应力状态的概念

(1) 主应力

在任意应力情况下,必存在三个互相垂直的主应力(假设均不等于零), $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ 。

(2) 最大切应力

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

(3) 最大正应力

$$\sigma_{\max} = \sigma_1$$

最大切应力的作用面与 σ_2 作用面垂直,与 σ_1 、 σ_3 作用面分别成 45° 角。

5. 各向同性材料的应力-应变关系

(1) 三向应力状态下的广义胡克定律

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)] \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \end{cases}$$

(2) 用主应力表示的广义胡克定律

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E}[\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)] \\ \varepsilon_3 = \frac{1}{E}[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] \end{cases}$$

(3) 三个弹性常数 E 、 G 、 μ 之间的关系

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

6. 弹性应变能

(1) 轴向拉(压)杆的弹性应变能

① 弹性应变能 $V_\epsilon = \frac{1}{2}F\Delta L = \frac{F^2 l}{2EA}$

② 弹性应变能密度 $v_\epsilon = \frac{V_\epsilon}{V} = \frac{1}{2}\sigma\epsilon$

(2) 三向应力状态下的应变能密度

① 应变能密度

$$v = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]$$

② 体积改变能密度

$$v_v = \frac{1 - 2\mu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

③ 畸变能密度

$$v_d = \frac{1 + \mu}{6E}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

7. 强度理论

(1) 材料破坏的两种类型

① 脆性断裂——材料在无明显变形情况下突然断裂。

② 塑性流动——材料因塑性流动而丧失正常工作能力。

(2) 强度理论

从宏观角度,对材料某一破坏形式所作的破坏原因的假设,而不论材料处于何种应力状态。

(3) 四个常用的强度理论

① 最大拉应力理论(第一强度理论)

a. 假设——材料的脆性断裂主要取决于最大拉应力。

b. 强度条件

$$\sigma_1 \leq [\sigma]$$

c. 验证——主要适用于脆性材料受拉情况。

② 最大伸长线应变理论(第二强度理论)

a. 假设——材料的脆性断裂主要取决于最大伸长线应变。

b. 强度条件

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]$$

c. 验证——主要适用于脆性材料在单向和双向以压缩为主的情况。

③ 最大切应力理论(第三强度理论)

a. 假设——材料的塑性流动主要取决于最大切应力。

b. 强度条件

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$$

c. 验证——主要适用于塑性材料在单向和二向受力情况。

④ 畸变能密度理论(第四强度理论)

a. 假设——材料的塑性流动主要取决于畸变能密度。

b. 强度条件

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma]$$

c. 验证——主要适用于塑性材料在单向和双向受力情况。

习题详解

7.1 何谓单向应力状态和二向应力状态？圆轴受扭时，轴表面各点处于何种应力状态？梁受横力弯曲时，梁顶、梁底及其他各点处于何种应力状态？

解 三个主应力中只有一个不为零的，称为单向应力状态。三个主应力中有二个不为零的，称为二向应力状态。圆轴受扭时，轴表面各点处于二向应力状态。梁受横力弯曲时，梁顶和梁底各点处于单向应力状态，其他各点处于二向应力状态。

7.2 构件受力如题7.2图(a)、(b)、(c)、(d)所示。(1)确定危险点的位置。(2)用单元体表示危险点的应力状态。

解 (1) 图(a)：如考虑自重，杆顶端截面上各点均为危险点。图(b)：圆轴的BC段横截面圆周上各点均为危险点。图(c)：圆杆固定端截面竖向直径上下端点1和2点为危险点。图(d)：圆杆外表面上各点均为危险点。

(2) 题7.2图(a)、(b)、(c)、(d)的危险点的应力状态分别用单元体表示在图(a₁)、(b₁)、(c₁)、(c₂)、(d₁)中。

7.3 在题7.3图所示各单元体中，试用解析法和图解法求斜截面ab上的应力。应力的单位为MPa。

解 (a) 如题7.3图(a)所示。

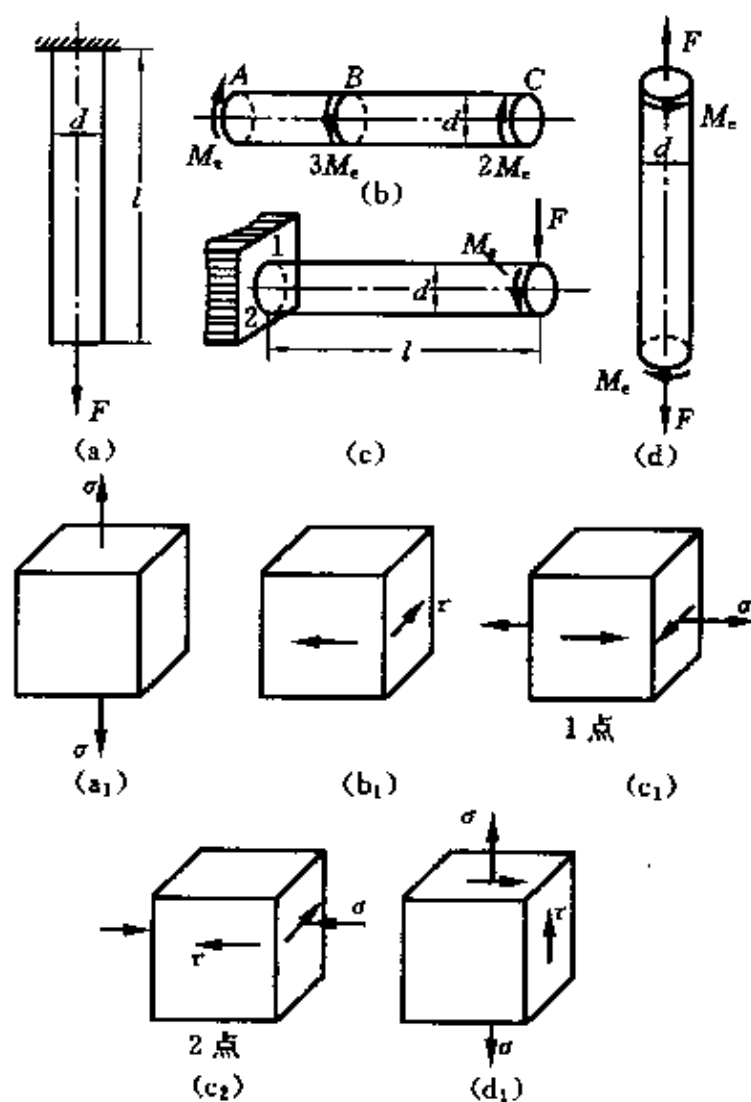
$$\sigma_x = 70 \text{ MPa}, \quad \sigma_y = -70 \text{ MPa}, \quad \tau_{xy} = 0, \quad \alpha = 30^\circ$$

(1) 解析法

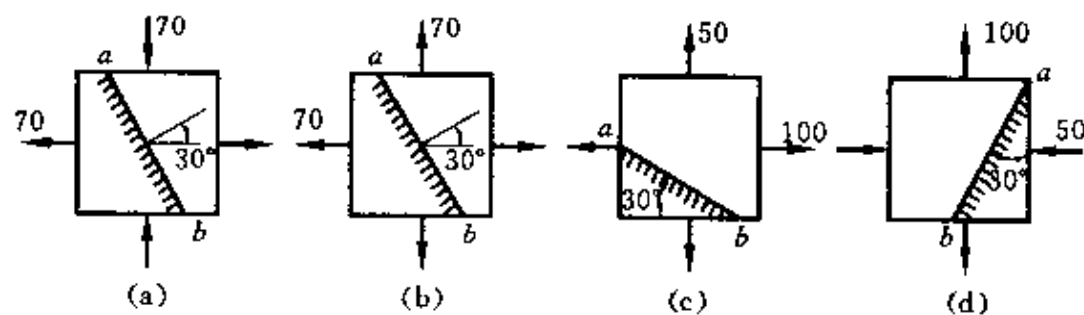
$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ &= \left(\frac{70 - 70}{2} + \frac{70 + 70}{2} \cos 60^\circ - 0 \right) \text{ MPa} = 35 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

$$= \left(\frac{70 + 70 \sin 60^\circ}{2} + 0 \right) \text{ MPa} = 60.6 \text{ MPa}$$



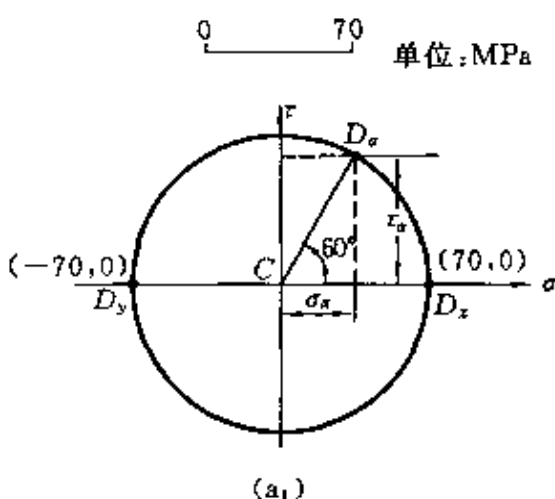
题 7.2 图



题 7.3 图

(2)图解法

作 $O\sigma\tau$ 坐标系, 取比例 $1\text{ cm} = 70\text{ MPa}$, 由 σ_x, τ_{xy} 定 D_x 点, σ_y, τ_{yx} 定 D_y 点, 连 D_x, D_y , 交 τ 轴于 C 点, 以 C 点为圆心, CD_x 为半径作应力圆如题 7.3 图(a₁)所示。由 CD_x 起始, 逆时针旋转 $2\alpha = 60^\circ$, 得 D_α 点。从图中可量得 D_α 点的坐标, 便是 σ_α 和 τ_α 数值。



(b) 如题 7.3 图(b)所示。

续题 7.3 图

$$\sigma_x = 70\text{ MPa}, \quad \sigma_y = 70\text{ MPa}, \quad \tau_{xy} = 0, \quad \alpha = 30^\circ$$

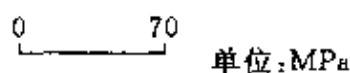
(1)解析法

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ &= \left(\frac{70 + 70}{2} + \frac{70 - 70}{2} \cos 60^\circ - 0 \right) \text{ MPa} = 70\text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha = \left(\frac{70 - 70}{2} \sin 60^\circ + 0 \right) \text{ MPa} = 0$$

(2)图解法

作应力圆如题 7.3 图(b₁)所示。从图中可量得 D_α 点的坐标, 此坐标便是 σ_α 和 τ_α 数值。由题 7.3 图(b₁)可知应力圆蜕化为点 C 。



(c) 如题 7.3 图(c)所示。

$$\sigma_x = 100\text{ MPa}, \quad \sigma_y = 50\text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = 0, \quad \alpha = 60^\circ$$

(1)解析法

续题 7.3 图

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ &= \left(\frac{100 + 50}{2} + \frac{100 - 50}{2} \cos 120^\circ - 0 \right) \text{ MPa} = 62.5\text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\tau_a = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha = \left(\frac{100 - 50}{2} \sin 120^\circ + 0 \right) \text{ MPa} \\ = 21.7 \text{ MPa}$$

(2)图解法

作应力圆如题7.3图(c₁)所示。从图中可量得D_a点的坐标,此坐标便是σ_a和τ_a数值。

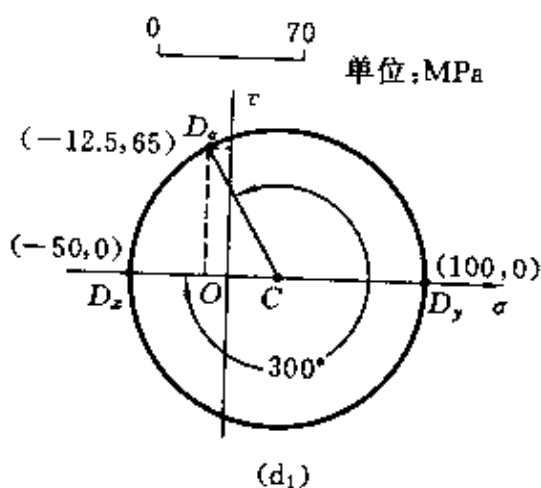
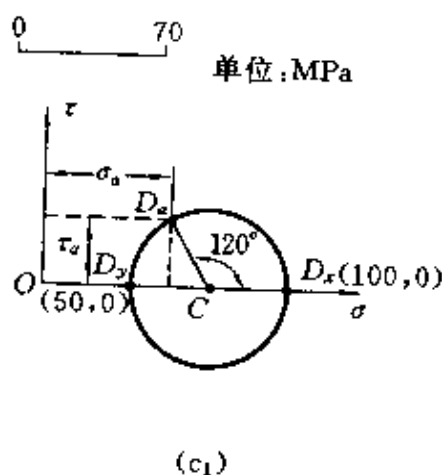
(d) 如题7.3图(d)所示。

$$\sigma_x = -50 \text{ MPa}, \quad \sigma_y = 100 \text{ MPa} \\ \tau_{xy} = 0, \quad \alpha = 150^\circ$$

(1)解析法

$$\sigma_a = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ = \left(\frac{-50 + 100}{2} + \frac{-50 - 100}{2} \cos 300^\circ \right) \text{ MPa} = -12.5 \text{ MPa}$$

$$\tau_a = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha = \left(\frac{-50 - 100}{2} \sin 300^\circ + 0 \right) \text{ MPa} \\ = 65 \text{ MPa}$$

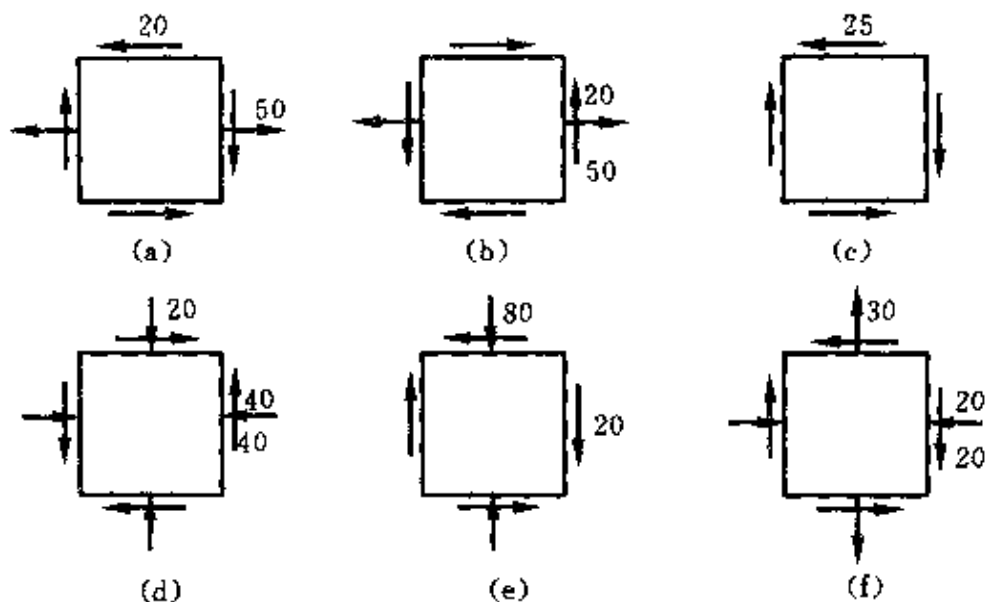


续题7.3图

(2)图解法

作应力圆如题7.3图(d₁)所示。从图中可量得D_a点的坐标,此坐标便是σ_a和τ_a数值。

7.4 已知应力状态如题 7.4 图所示, 图中应力单位皆为 MPa。试用解析法及图解法求: (1) 主应力大小, 主平面位置; (2) 在单元体上绘出主平面位置及主应力方向; (3) 最大切应力。



题 7.4 图

解 (a) 如题 7.4 图(a)所示。

$$\sigma_x = 50 \text{ MPa}, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 20 \text{ MPa}$$

(1) 解析法

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{array} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$= \left[\frac{50 + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{50 - 0}{2} \right)^2 + 20^2} \right] \text{ MPa} = \begin{cases} 57 \text{ MPa} \\ -7 \text{ MPa} \end{cases}$$

按照主应力的记号规定

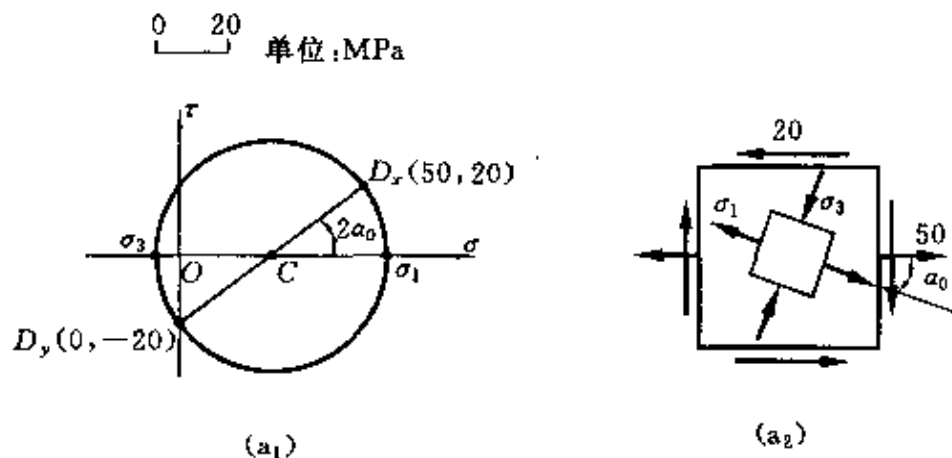
$$\sigma_1 = 57 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -7 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2 \times 20}{50 - 0} = -0.8, \quad \alpha_0 = -19.3^\circ$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{57 - (-7)}{2} \text{ MPa} = 32 \text{ MPa}$$

(2)图解法

作应力圆如题7.4图(a₁)所示。应力圆与σ轴的两个交点对应着两个主应力σ₁、σ₃的数值。由CD_x顺时针旋转2α₀,可确定主平面的方位。应力圆的半径即为最大切应力的数值。



续题7.4图

主应力单元体如题7.4图(a₂)所示。

(b) 如题7.4图(b)所示。

$$\sigma_x = 50 \text{ MPa}, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = -20 \text{ MPa}$$

(1)解析法

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{array} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$= \left[\frac{50 + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{50 - 0}{2} \right)^2 + (-20)^2} \right] \text{ MPa} = \begin{cases} 57 \text{ MPa} \\ -7 \text{ MPa} \end{cases}$$

按照主应力的记号规定

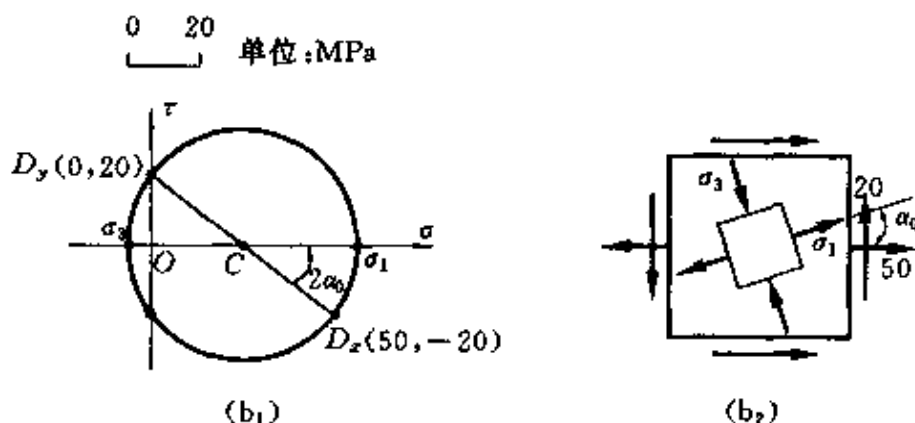
$$\sigma_1 = 57 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -7 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2 \times (-20)}{50 - 0} = 0.8, \quad \alpha_0 = 19.3^\circ$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{57 - (-7)}{2} \text{ MPa} = 32 \text{ MPa}$$

(2)图解法

作应力圆如题7.4图(b₁)所示。应力圆与 σ 轴的两个交点的坐标即是主应力 σ_1 、 σ_3 的数值。由 CD_x 逆时针旋转 $2\alpha_0$ ，可确定主平面的方位。 CD_x 的长度即为最大切应力的数值。主应力单元体如题7.4图(b₂)所示。



续题7.4图

(c) 如题7.4图(c)所示。

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 25 \text{ MPa}$$

(1) 解析法

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{array} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$= \left[\frac{0 + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0 - 0}{2} \right)^2 + 25^2} \right] \text{ MPa} = \begin{cases} 25 \text{ MPa} \\ -25 \text{ MPa} \end{cases}$$

按照主应力的记号规定

$$\sigma_1 = 25 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -25 \text{ MPa}$$

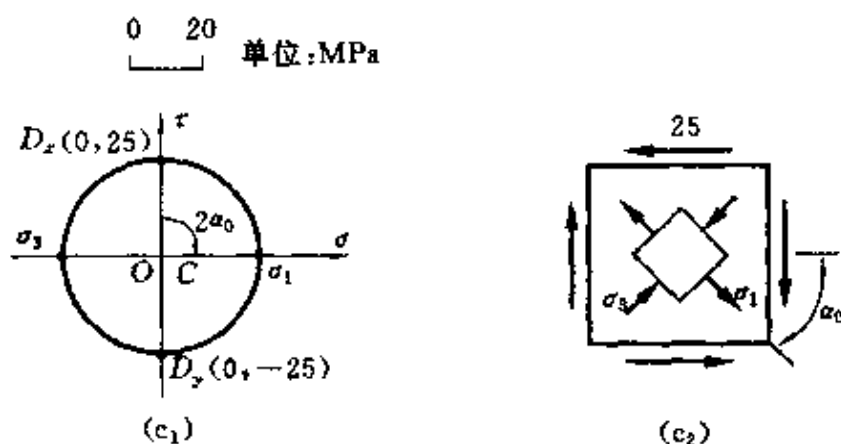
$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2 \times 25}{0 - 0} = -\infty, \quad \alpha_0 = -45^\circ$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{25 - (-25)}{2} \text{ MPa} = 25 \text{ MPa}$$

(2) 图解法

作应力圆如题7.4图(c₁)所示。应力圆与 σ 轴的两个交点的坐标即是主应力 σ_1 、 σ_3 的数值。由 CD_x 顺时针旋转 $2\alpha_0$ ，可确定主平面

的方位。 CD_x 的长度即为最大切应力的数值。主应力单元体如题 7.4 图(c₂)所示。



续题 7.4 图

(d) 如题 7.4 图(d)所示。

$$\sigma_x = -40 \text{ MPa}, \quad \sigma_y = -20 \text{ MPa}, \quad \tau_{xy} = -40 \text{ MPa}$$

(1) 解析法

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{array} \right\} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ &= \left[\frac{-40 - 20}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-40 + 20}{2} \right)^2 + (-40)^2} \right] \text{ MPa} \\ &= \begin{cases} 11.2 \text{ MPa} \\ -71.2 \text{ MPa} \end{cases} \end{aligned}$$

按照主应力的记号规定

$$\sigma_1 = 11.2 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -71.2 \text{ MPa}$$

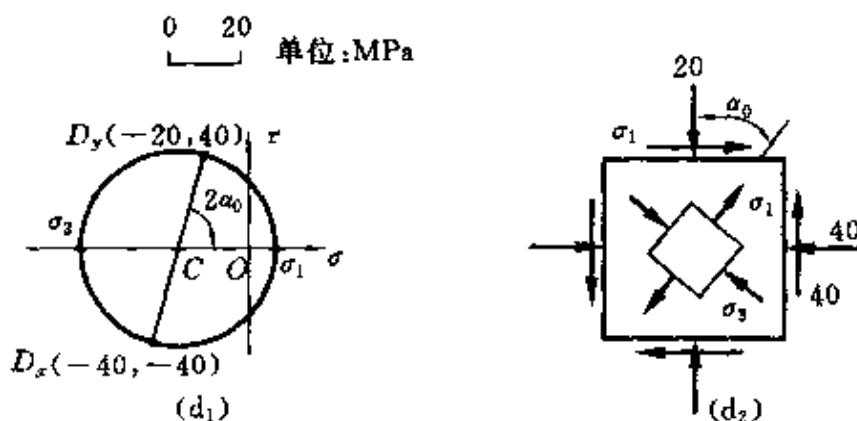
$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2 \times (-40)}{-40 + 20} = -4, \quad \alpha_0 = -38^\circ$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{11.2 - (-71.2)}{2} \text{ MPa} = 41.2 \text{ MPa}$$

(2) 图解法

作应力圆如题 7.4 图(d₁)所示。应力圆与 σ 轴的两个交点的坐

标,即是 σ_1 、 σ_3 的数值。由 CD_y 顺时针旋转 $2\alpha_0$,可确定主平面的方位。 CD_y 的长度即为最大切应力的数值。主应力单元体如题7.4图(d₂)所示。



续题7.4图

(e) 如题7.4图(e)所示。

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = -80 \text{ MPa}, \quad \tau_{xy} = 20 \text{ MPa}$$

(1)解析法

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{array} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$= \left[\frac{0 - 80}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0 + 80}{2} \right)^2 + 20^2} \right] \text{ MPa} = \begin{cases} 4.7 \text{ MPa} \\ -84.7 \text{ MPa} \end{cases}$$

按照主应力的记号规定

$$\sigma_1 = 4.7 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -84.7 \text{ MPa}$$

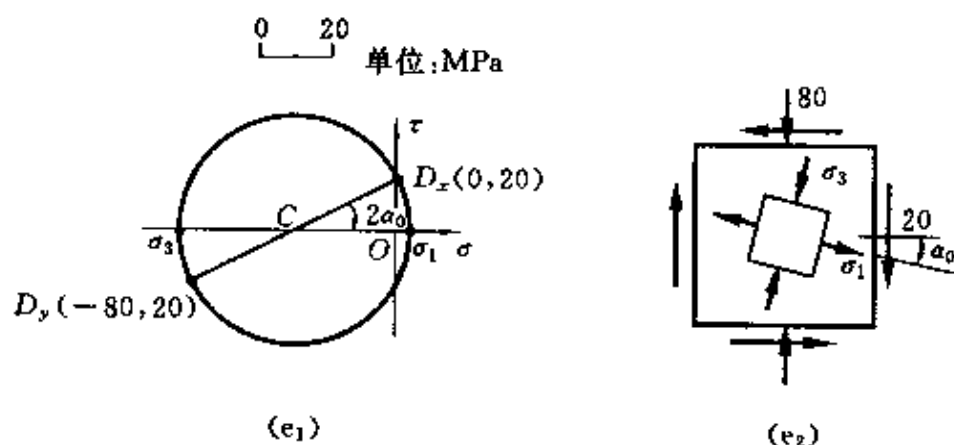
$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2 \times 20}{0 + 80} = -0.5, \quad \alpha_0 = -13.3^\circ$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{4.7 + 84.7}{2} \text{ MPa} = 44.7 \text{ MPa}$$

(2)图解法

作应力圆如题7.4图(e₁)所示。应力圆与 σ 轴的两个交点的坐标即是主应力 σ_1 、 σ_3 的数值。由 CD_x 顺时针旋转 $2\alpha_0$,可确定主平面的方位。 CD_x 的长度即为最大切应力的数值。主应力单元体如题

7.4图(e₂)所示。



续题 7.4 图

(f) 如题 7.4 图(f)所示。

$$\sigma_x = -20 \text{ MPa}, \quad \sigma_y = 30 \text{ MPa}, \quad \tau_{xy} = 20 \text{ MPa}$$

(1) 解析法

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{array} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$= \left[\frac{-20 + 30}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-20 - 30}{2} \right)^2 + 20^2} \right] \text{ MPa}$$

$$= \begin{cases} 37 \text{ MPa} \\ -27 \text{ MPa} \end{cases}$$

按照主应力的记号规定

$$\sigma_1 = 37 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -27 \text{ MPa}$$

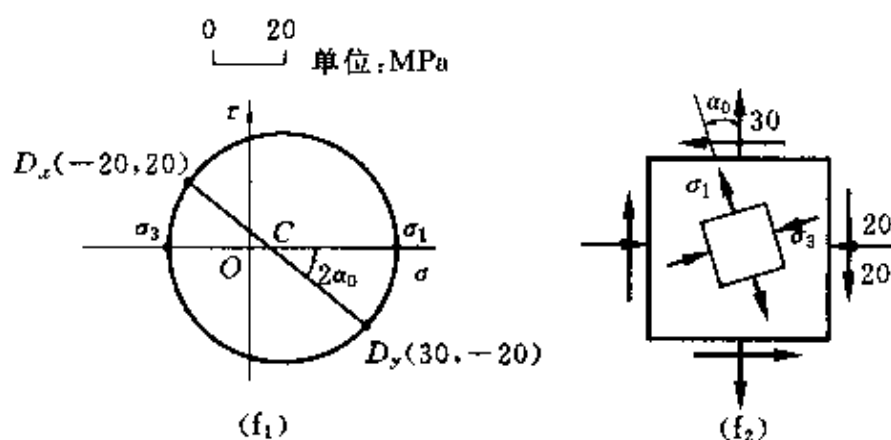
$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2 \times 20}{-20 - 30} = 0.8, \quad \alpha_0 = 19.3^\circ$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{37 + 27}{2} \text{ MPa} = 32 \text{ MPa}$$

(2) 图解法

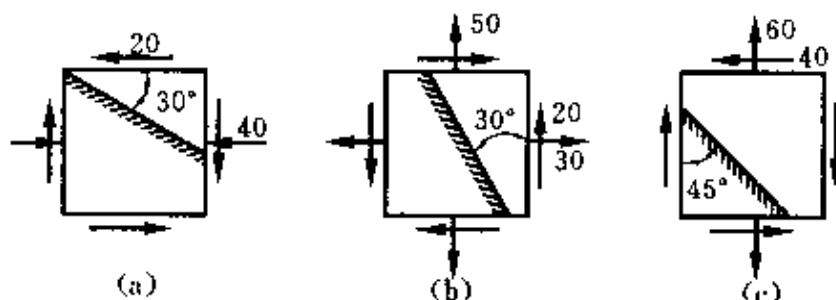
作应力圆如题 7.4 图(f₁)所示。应力圆与 σ 轴的两个交点的坐标即是主应力 σ_1, σ_3 的数值。由 CD_y 逆时针旋转 $2\alpha_0$, 可确定主平面

的方位。 CD_y 的长度即为最大切应力的数值。主应力单元体如题 7.4 图(f_2)所示。



续题 7.4 图

7.5 在题 7.5 图(a)、(b)、(c)所示应力状态中,试用解析法和图解法求出指定斜截面上的应力(应力单位:MPa)。



题 7.5 图

解 (a) 如题 7.5 图(a)所示。

$$\sigma_x = -40 \text{ MPa}, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 20 \text{ MPa}, \quad \alpha = 60^\circ$$

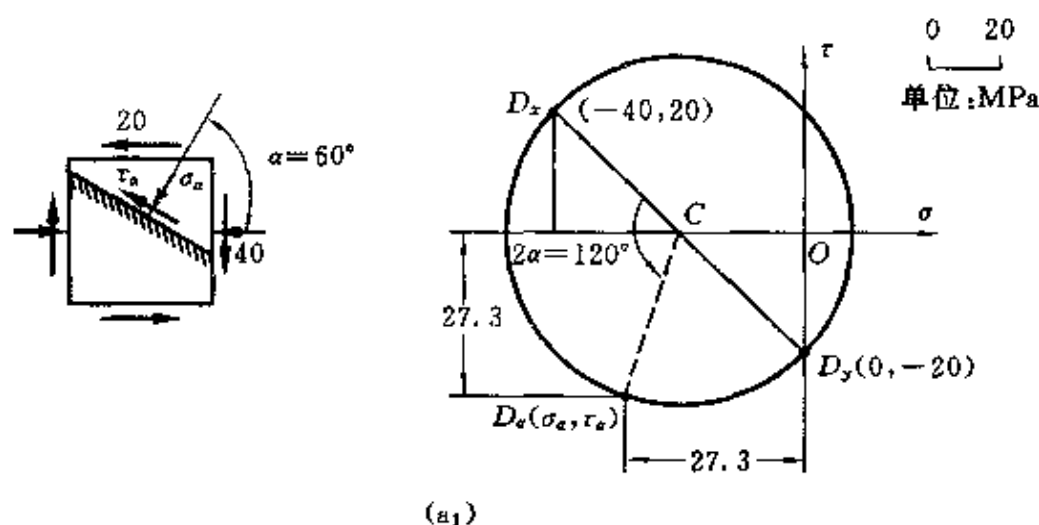
(1) 解析法

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ &= \left(\frac{-40 + 0}{2} + \frac{-40 - 0}{2} \cos 120^\circ - 20 \sin 120^\circ \right) \text{ MPa} \\ &= -27.3 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_a &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \\ &= \left(\frac{-40 - 0}{2} \sin 120^\circ - 20 \cos 120^\circ \right) \text{ MPa} = -27.3 \text{ MPa}\end{aligned}$$

(2) 图解法

作 $O\sigma\tau$ 坐标系, 取比例 $1 \text{ cm} = 10 \text{ MPa}$, 由 σ_x, τ_{xy} 定 D_x 点, 由 σ_y, τ_{yx} 定 D_y 点, 连 D_x, D_y , 交 σ 轴于 C 点, 以 C 点为圆心, CD_x 为半径作应力圆如题 7.5 图 (a₁) 所示。由 CD_x 起始, 逆时针旋转 $2\alpha = 120^\circ$, 得 D_a 点。从图中可量得 D_a 点的坐标, 此坐标便是 σ_a 和 τ_a 数值。



续题 7.5 图

(b) 如题 7.5 图 (b) 所示。

$$\sigma_x = 30 \text{ MPa}, \quad \sigma_y = 50 \text{ MPa}, \quad \tau_{xy} = -20 \text{ MPa}, \quad \alpha = 30^\circ$$

(1) 解析法

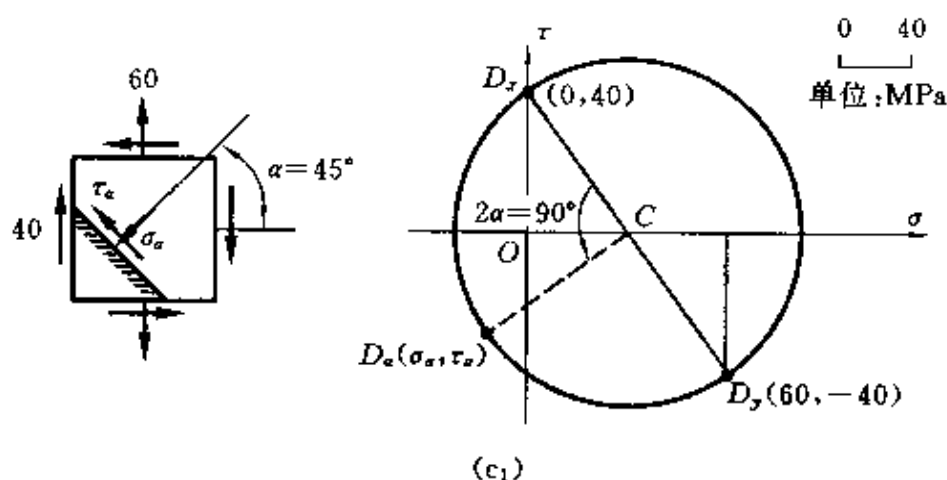
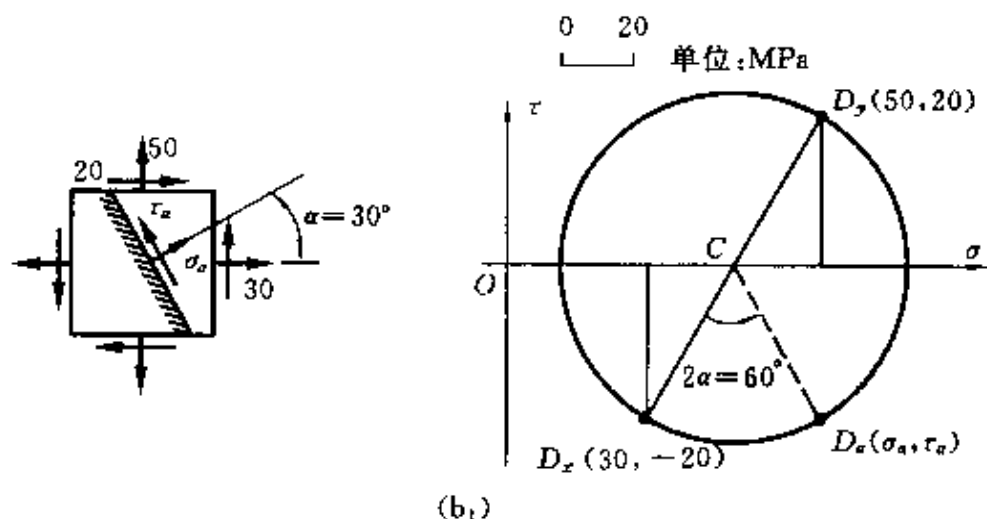
$$\begin{aligned}\sigma_a &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ &= \left[\frac{30 + 50}{2} + \frac{30 - 50}{2} \cos 60^\circ - (-20) \sin 60^\circ \right] \text{ MPa} \\ &= 52.3 \text{ MPa}\end{aligned}$$

$$\tau_a = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

$$= \left[\frac{30 - 50}{2} \sin 60^\circ + (-20) \cos 60^\circ \right] \text{MPa} = -18.7 \text{MPa}$$

(2) 图解法

作应力圆如题 7.5 图 (b₁) 所示。从图中可量得 D_α 点的坐标, 此坐标便是 σ_α 和 τ_α 数值。



续题 7.5 图

(c) 如题 7.5 图 (c) 所示。

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 60 \text{ MPa}, \quad \tau_{xy} = 40 \text{ MPa}, \quad \alpha = 45^\circ$$

(1) 解析法

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

$$= \left(\frac{0+60}{2} + \frac{0-60}{2} \cos 90^\circ - 40 \sin 90^\circ \right) \text{ MPa} = -10 \text{ MPa}$$

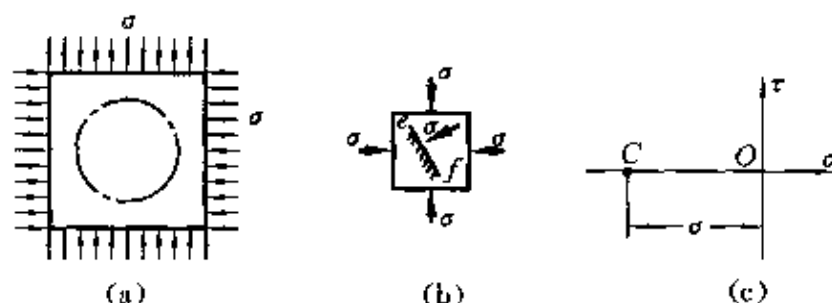
$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

$$= \left(\frac{0-60}{2} \sin 90^\circ + 40 \cos 90^\circ \right) \text{ MPa} = -30 \text{ MPa}$$

(2)图解法

作应力圆如题7.5图(c₁)所示。从图中可量得D_α点的坐标,此坐标便是σ_α和τ_α数值。

7.6 若物体在两个方向上受力相同(题7.6图(a)),试分析这种情况下的应力状态。



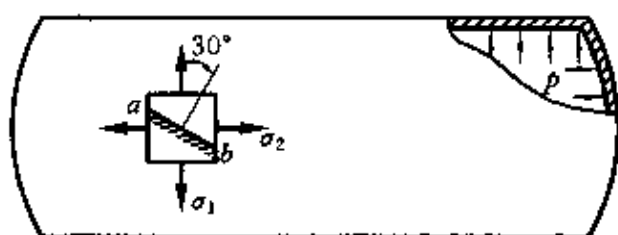
题7.6图

解 在这种情况下,物体内任意一点的应力状态皆如题7.6图(b)所示。代表这一应力状态的应力圆退缩成一点C(题7.6图(c)),半径等于零。单元体任意斜面ef上的正应力都等于σ,切应力都等于零。这样,如从物体中任意地割取一部分,例如从物体中分割出一个圆柱体(题7.6图(a)),则在圆柱体的柱面上的正应力也都是σ。

7.7 如题7.7图所示,锅炉直径D=1 m,壁厚δ=10 mm,内受蒸汽压力p=3 MPa。试求:(1)壁内主应力σ₁、σ₂及最大切应力τ_{max}; (2)斜截面ab上的正应力及切应力。

解 这是一个典型的二向应力状态问题,壁内的环向应力和轴向应力分别是主应力σ₁和σ₂。

(1)壁内主应力及最大切应力



题 7.7 图

$$\sigma_1 = \frac{pD}{2\delta} = \frac{3 \times 1}{2 \times 0.01} \text{ MPa} = 150 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{pD}{4\delta} = \frac{3 \times 1}{4 \times 0.01} \text{ MPa} = 75 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = 0$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{150 - 0}{2} \text{ MPa} = 75 \text{ MPa}$$

(2) 斜截面 ab 上的正应力及切应力

已知 $\alpha = 60^\circ$, $\tau_{xy} = 0$, $\sigma_x = 75 \text{ MPa}$, $\sigma_y = 150 \text{ MPa}$, 则

$$\begin{aligned} \sigma_a &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ &= \left(\frac{75 + 150}{2} + \frac{75 - 150}{2} \cos 120^\circ - 0 \right) \text{ MPa} = 131 \text{ MPa} \end{aligned}$$

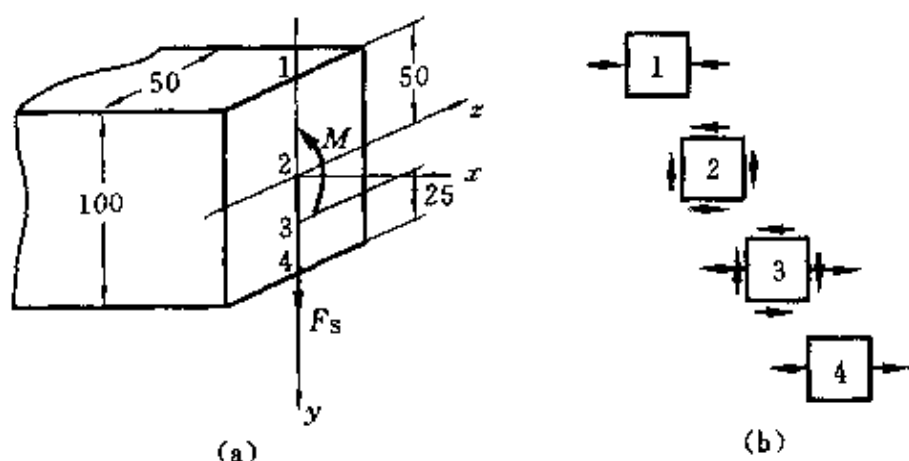
$$\begin{aligned} \tau_a &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \\ &= \left(\frac{75 - 150}{2} \sin 120^\circ + 0 \right) \text{ MPa} = -32.5 \text{ MPa} \end{aligned}$$

7.8 如题 7.8 图(a)所示。已知矩形截面梁某截面上的弯矩及剪力分别为 $M = 10 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $F_s = 120 \text{ kN}$, 试绘出截面上 1、2、3、4 各点应力状态的单元体, 并求其主应力。

解 各点的应力状态的单元体如题 7.8 图(b)所示, 截面的惯性矩

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{0.05 \times 0.1^3}{12} \text{ m}^4 = 4.17 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

1 点的应力分量



题 7.8 图

$$\sigma_x = \frac{My}{I_z} = \frac{M(-h/2)}{I_z} = \left(\frac{10 \times 10^3 \times (-0.05)}{4.17 \times 10^{-6}} \right) \text{ Pa} \\ = -120 \text{ MPa (压)}$$

$$\sigma_y = \tau_{xy} = 0$$

所以 1 点处于单向应力状态。

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -120 \text{ MPa}$$

2 点的应力分量

$$\sigma_x = \sigma_y = 0$$

$$\tau_{xy} = \frac{3}{2} \frac{F_s}{A} = \left(\frac{3}{2} \times \frac{120 \times 10^3}{0.05 \times 0.1} \right) \text{ Pa} = 36 \text{ MPa}$$

2 点是纯剪切应力状态。

$$\sigma_1 = 36 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -36 \text{ MPa}$$

3 点的应力分量

$$\sigma_x = \frac{My}{I_z} = \frac{10 \times 10^3 \times 0.025}{4.17 \times 10^{-6}} \text{ Pa} = 60 \text{ MPa (拉)}$$

$$\sigma_y = 0$$

$$\tau_{xy} = \frac{F_s S_z^*}{b I_z} = \frac{120 \times 10^3 \times 0.05 \times 0.025 \times 0.0375}{0.050 \times 4.17 \times 10^{-6}} \text{ Pa} \\ = 27 \text{ MPa}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{array} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$= \left[\frac{60 + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{60 - 0}{2} \right)^2 + 27^2} \right] \text{MPa} = \begin{cases} 70.4 \text{ MPa} \\ -10.4 \text{ MPa} \end{cases}$$

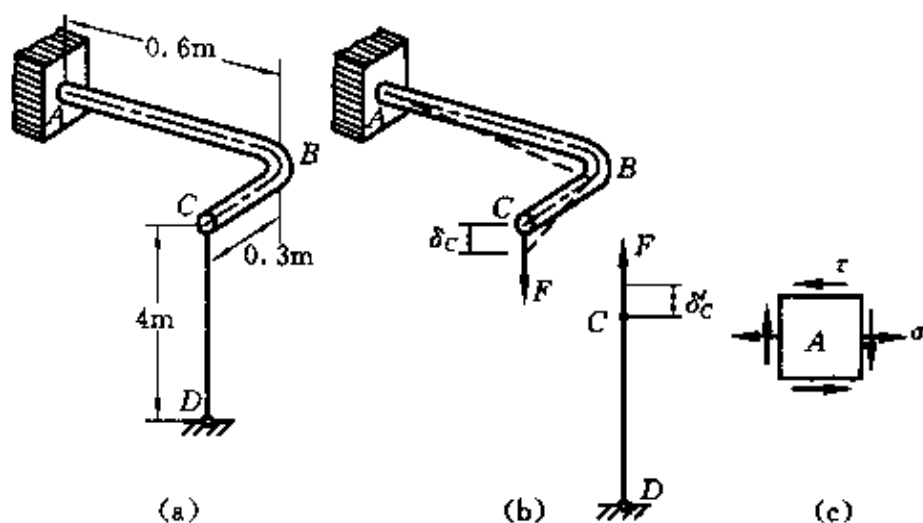
按照主应力的记号规定

$$\sigma_1 = 70.4 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -10.4 \text{ MPa}$$

4 点也是单向应力状态, $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$, σ_x 的大小与 1 点的相同, 是拉应力, 所以 $\sigma_x = 120 \text{ MPa}$ 。因此

$$\sigma_1 = 120 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

7.9 如题 7.9 图(a)所示, 钢制曲拐的横截面直径为 20 mm, C 端与钢丝相连, 钢丝的横截面面积 $A = 6.5 \text{ mm}^2$ 。曲拐和钢丝的弹性模量同为 $E = 200 \text{ GPa}$, $G = 84 \text{ GPa}$ 。若钢丝的温度降低 50°C , 且 $\alpha = 12.5 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$, 试求曲拐截面 A 的顶点的应力状态。



题 7.9 图

解 如题 7.9 图(b)所示。由于温度降低, 钢丝 CD 缩短 Δl_T , 但因不是自由收缩, 它受曲拐 ABC 的约束, 设 C 点处约束力为 F , 在 F 力作用下, 钢丝被拉长 Δl_{CD} 。钢丝 CD 的 C 端总位移为

$$\delta'_C = \Delta l_T - \Delta l_{CD}$$

曲拐 ABC 的 C 端在拉力 F 作用下, 产生垂直位移 δ_C 。 δ_C 是由三部

分变形组成,一是 BC 受的弯曲变形产生的 C 端位移 w_C ,二是 AB 杆弯曲变形产生的 C 端位移 w_B ,三是 AB 杆扭转变形产生的 C 端位移 $\varphi_B \times \overline{BC}$ 。根据变形协调条件

$$\delta'_C = \delta_C = w_C + w_B + \varphi_B \times \overline{BC}$$

所以有 $\Delta l_T - \Delta l_{CD} = w_C + w_B + \varphi_B \times \overline{BC}$

其中

$$\Delta l_T = \alpha \Delta T l_{CD} = (12.5 \times 10^{-6} \times 50 \times 4) \text{ m} = 2.5 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$\Delta l_{CD} = \frac{Fl_{CD}}{EA} = \frac{F \times 4}{200 \times 10^9 \times 6.5 \times 10^{-6}} \text{ m} = 0.003F \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$\delta'_C = (2.5 \times 10^{-3} - 0.003F \times 10^{-3}) \text{ m} \quad (1)$$

$$\delta_C = w_C + w_B + \varphi_B \times \overline{BC} = \frac{F(l_{BC})^3}{3EI} + \frac{Fl_{BC}l_{AB}}{GI_P}l_{BC} + \frac{F(l_{AB})^3}{3EI}$$

$$= \left[\frac{F \times 0.3^3}{3 \times 200 \times 10^9 \times \frac{\pi}{64} \times (20 \times 10^{-3})^4} + \frac{F \times 0.3^2 \times 0.6}{84 \times 10^9 \times \frac{\pi}{32} \times (20 \times 10^{-3})^4} + \frac{F \times 0.6^3}{3 \times 200 \times 10^9 \times \frac{\pi}{64} \times (20 \times 10^{-3})^4} \right] \text{ m}$$

$$= \left(\frac{29.1}{\pi} F \times 10^{-5} \right) \text{ m} \quad (2)$$

由①、②式得 $F = 26.1 \text{ N}$

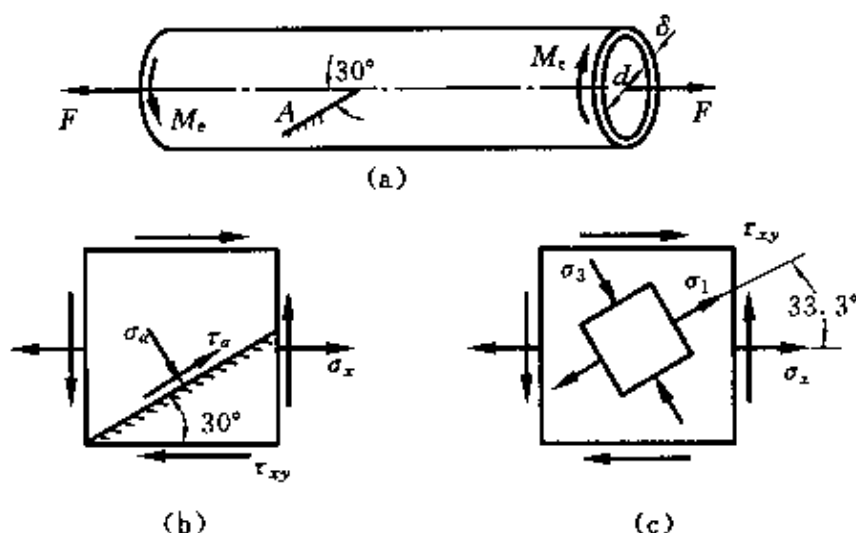
所以 A 截面顶点的应力为

$$\tau = \frac{T_{\max}}{W_p} = \frac{F \times 0.3}{\frac{\pi}{16} d^3} = \frac{26.1 \times 0.3}{\frac{\pi}{16} \times (20 \times 10^{-3})^3} \text{ Pa} = 4.98 \text{ MPa}$$

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{F \times 0.6}{\frac{\pi}{32} d^3} = \frac{26.1 \times 0.6}{\frac{\pi}{32} \times (20 \times 10^{-3})^3} \text{ Pa} = 19.9 \text{ MPa}$$

A 截面顶点的应力状态用单元体表示在题 7.9 图(c)中。

7.10 薄壁圆筒扭转-拉伸试验的示意图如题 7.10 图(a)所示。若 $F=20 \text{ kN}$, $M_e=600 \text{ N} \cdot \text{m}$, 且 $d=50 \text{ mm}$, $\delta=2 \text{ mm}$, 试求: (1) A 点在指定斜截面上的应力; (2) A 点的主应力的方向 (用单元体表示)。



题 7.10 图

解 (1) A 点在指定斜截面上的应力

围绕 A 点取一单元体如题 7.10 图(b)所示, 其中

$$\sigma_x = \frac{F_N}{A} = \frac{F}{\pi(d + \delta)\delta} = \frac{20 \times 10^3}{\pi \times (50 + 2) \times 10^{-3} \times 2 \times 10^{-3}} \text{ Pa} \\ = 61.2 \text{ MPa}$$

因是薄壁圆筒, 所以可用近似公式求切应力

$$\tau_{xy} = \frac{2M_e}{\pi(d + \delta)^2\delta} = \frac{2 \times 600}{\pi \times (50 + 2)^2 \times 10^{-6} \times 2 \times 10^{-3}} \text{ Pa} \\ = 70.6 \text{ MPa}$$

A 点在斜截面的应力(题 7.10 图(b))

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ = \left(\frac{61.2 + 0}{2} + \frac{61.2 - 0}{2} \cos 240^\circ + 70.6 \sin 240^\circ \right) \text{ MPa}$$

$$= -45.8 \text{ MPa}$$

$$\begin{aligned}\tau_{\alpha} &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \\ &= \left(\frac{61.2 - 0}{2} \sin 240^\circ + 70.6 \cos 240^\circ \right) \text{ MPa} = 8.8 \text{ MPa}\end{aligned}$$

(2) A 点的主应力大小及方向

$$\begin{aligned}\left. \begin{array}{l} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{array} \right\} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ &= \left[\frac{61.2 + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{61.2 - 0}{2} \right)^2 + 70.6^2} \right] \text{ MPa} \\ &= \begin{cases} 108 \text{ MPa} \\ -46.3 \text{ MPa} \end{cases}\end{aligned}$$

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2 \times (-70.6)}{61.2 - 0} = 2.31, \quad \alpha_0 = 33.3^\circ$$

按照主应力的记号规定

$$\sigma_1 = 108 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -46.3 \text{ MPa}$$

A 点的主应力大小与方向如题 7.10 图(c)所示。

7.11 题 7.11 图(a)所示简支梁为 36a 工字钢, $F=140 \text{ kN}$, $l=4 \text{ m}$ 。A 点所在截面在集中力 F 的左侧, 且无限接近 F 力作用的截面。试求: (1) A 点在指定斜截面上的应力; (2) A 点的主应力及主平面位置(用单元体表示)。

解 (1) A 点在指定的斜截面上的应力

A 点所在横截面上内力分量:

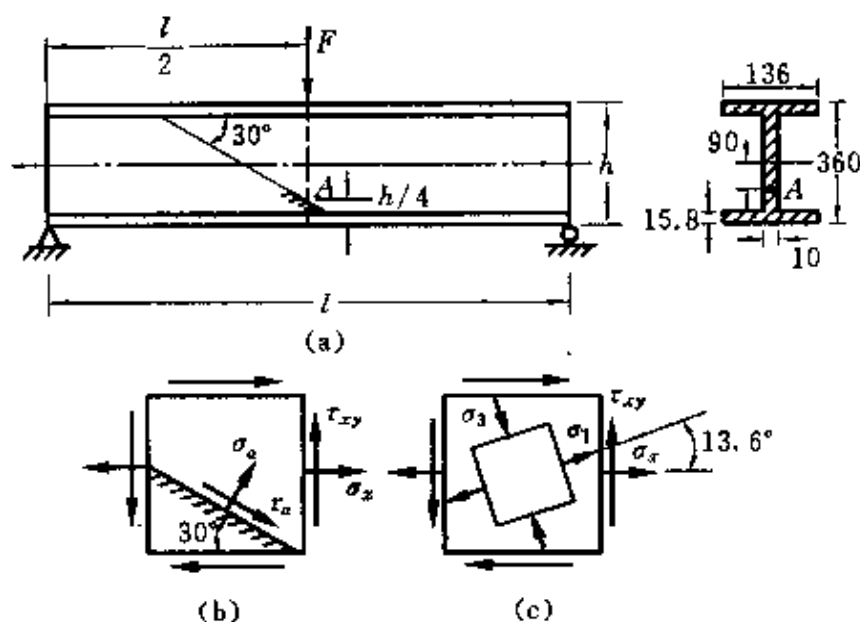
$$M = Fl/4 = (140 \times 4/4) \text{ kN} \cdot \text{m} = 140 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$F_s = F/2 = (140/2) \text{ kN} = 70 \text{ kN}$$

横截面上 A 点的应力分量:

查附录三型钢表, 36a 工字钢的 $h=360 \text{ mm}$, $I_x=15800 \text{ cm}^4$

$$\sigma_x = \frac{My}{I_x} = \frac{140 \times 10^3 \times (360/4) \times 10^{-3}}{1.58 \times 10^{-4}} \text{ Pa} = 79.7 \text{ MPa (拉)}$$



题 7.11 图

$$\tau_{xy} = \frac{F_S S^*}{b I_x}$$

$$\begin{aligned} S^* &= \left[15.8 \times 136 \times \left(180 - \frac{15.8}{2} \right) + 10 \times (90 - 15.8) \right. \\ &\quad \left. \times \left(90 + \frac{90 - 15.8}{2} \right) \right] \times 10^{-9} \text{ m}^3 \\ &= 4.64 \times 10^{-4} \text{ m}^3 \end{aligned}$$

所以 $\tau_{xy} = \frac{70 \times 10^3 \times 4.64 \times 10^{-4}}{10 \times 10^{-3} \times 1.58 \times 10^{-4}} \text{ Pa} = 20.6 \text{ MPa}$

A 点的应力状态如题 7.11 图 (b) 所示。斜截面上 A 点的应力

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ &= \left(\frac{79.7 + 0}{2} + \frac{79.7 - 0}{2} \cos 120^\circ - 20.6 \sin 120^\circ \right) \text{ MPa} \\ &= 2.08 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_\alpha &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \\ &= \left(\frac{79.7 - 0}{2} \sin 120^\circ + 20.6 \cos 120^\circ \right) \text{ MPa} = 24.2 \text{ MPa} \end{aligned}$$

(2) A 点的主应力及主平面位置(题 7.11 图(c))

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{array} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$= \left(\frac{79.7 + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{79.7 - 0}{2} \right)^2 + 20.6^2} \right) \text{ MPa}$$

$$= \begin{cases} 84.7 \text{ MPa} \\ -5 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2 \times (-20.6)}{79.7 - 0} = 0.517, \quad \alpha_0 = 13.7^\circ$$

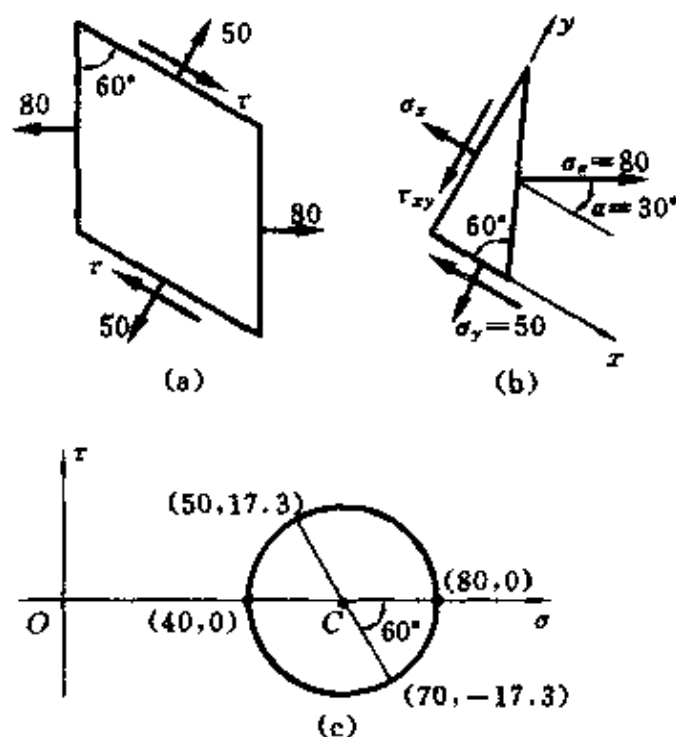
按照主应力的记号规定

$$\sigma_1 = 84.7 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -5 \text{ MPa}$$

A 点的主应力大小与方向如题 7.11 图(c)所示。

7.12 二向应力状态如题 7.12 图(a)所示, 应力单位为 MPa。试求主应力, 并作应力圆。

解 从题 7.12 图(a)中切出一楔形单元体, 如题 7.12 图(b)所



题 7.12 图

示。已知 $\sigma_y = 50 \text{ MPa}$, $\sigma_x = 80 \text{ MPa}$, $\alpha = 30^\circ$, $\tau_x = 0$, 将以上已知参数代入应力转换公式

$$\begin{cases} \sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ \tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \end{cases}$$

得
$$\begin{cases} \frac{\sigma_x + 50}{2} + \frac{\sigma_x - 50}{2} \cos 60^\circ - \tau_{xy} \sin 60^\circ = 80 \\ \frac{\sigma_x - 50}{2} \sin 60^\circ + \tau_{xy} \cos 60^\circ = 0 \end{cases}$$

解上式得 $\sigma_x = 70 \text{ MPa}$, $\tau_{xy} = -17.3 \text{ MPa}$

主应力为

$$\begin{aligned} \left. \begin{matrix} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{matrix} \right\} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ &= \left[\frac{70 + 50}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{70 - 50}{2} \right)^2 + 17.3^2} \right] \text{ MPa} = \begin{cases} 80 \text{ MPa} \\ 40 \text{ MPa} \end{cases} \end{aligned}$$

按照主应力的记号规定

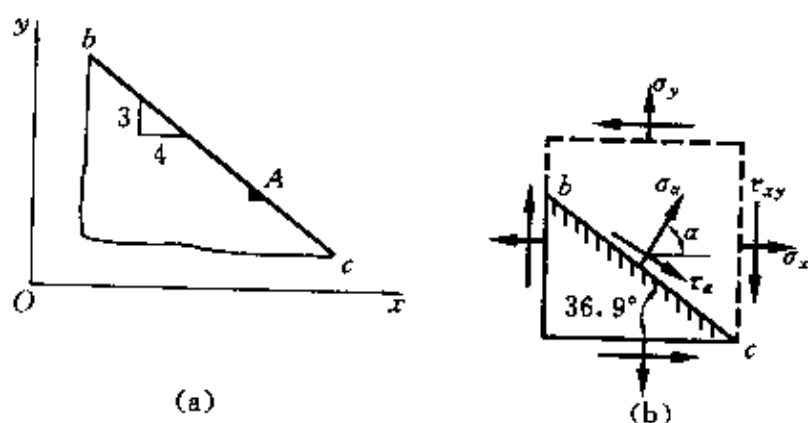
$$\sigma_1 = 80 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 40 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = 0$$

应力圆如题 7.12 图(c)所示。

7.13 如题 7.13 图(a)所示,在处于二向应力状态的物体的边界 bc 上, A 点处的最大切应力为 35 MPa 。试求 A 点的主应力。若在 A 点周围以垂直于 x 轴和 y 轴的平面分割出单元体,试求单元体各面上的应力分量。

解 既然 A 点处于二向应力状态,那么三个主应力中必有一个等于零。而 A 点又在自由表面上,边界面 bc 上的剪应力和正应力均为零,所以 bc 面也是一个主平面,且其上的主应力也为零。于是 A 点只有一个主应力不为零。有两种可能。一是 $\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \sigma_3 < 0$, 二是 $\sigma_2 = \sigma_3 = 0, \sigma_1 > 0$ 。

在第一种情况下,有



题 7.13 图

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{-\sigma_3}{2} = 35 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = -70 \text{ MPa}$$

在第二种情况下,有

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_1}{2} = 35 \text{ MPa}, \quad \sigma_1 = 70 \text{ MPa}$$

若在 A 点周围以垂直于 x 轴和 y 轴的平面分割出单元体(题 7.13 图(b)),斜截面 bc 是自由表面,其上 $\sigma_n = \tau_n = 0$, 所以有

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\tau_n = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

将 $\alpha = 53.1^\circ$, $\tau_{\max} = 35 \text{ MPa}$ 及 $\sigma_n = \tau_n = 0$ 代入上三式,得

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 106.2^\circ - \tau_{xy} \sin 106.2^\circ = 0 \quad (1)$$

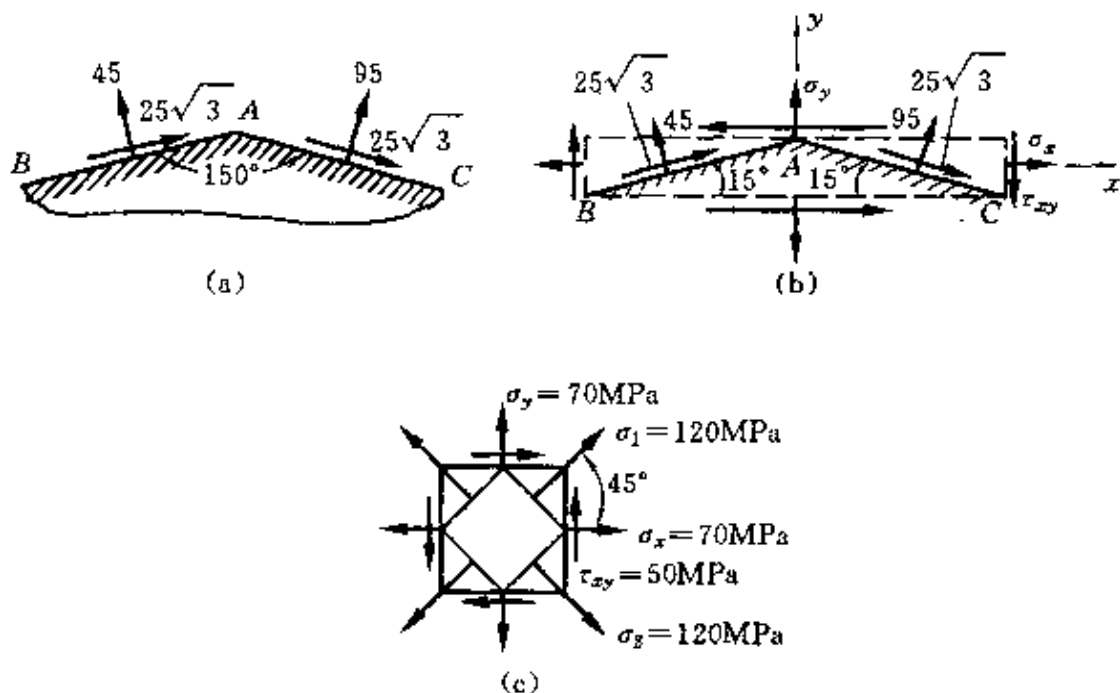
$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 106.2^\circ + \tau_{xy} \cos 106.2^\circ = 0 \quad (2)$$

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 35 \quad (3)$$

联立①、②、③式,可解算出

$\sigma_x = -44.8 \text{ MPa}$, $\sigma_y = -25.2 \text{ MPa}$, $\tau_{xy} = -33.6 \text{ MPa}$
各应力分量为负值,说明应力的真实方向与题 7.13 图(b)中标出的相反。

7.14 在通过一点 A 的两个平面上,应力如题 7.14 图(a)所示,单位为 MPa。试求主应力的数值及主平面的位置,并用单元体的草图表示出来。



题 7.14 图

解 在题 7.14 图(b)中,斜截面 AC 与 x 平面的夹角 $\alpha_1 = 75^\circ$, 其上的应力 $\sigma_{\alpha_1} = 95 \text{ MPa}$, $\tau_{\alpha_1} = 25\sqrt{3} \text{ MPa}$ 。斜截面 AB 与 x 平面的夹角 $\alpha_2 = 105^\circ$, 其上的应力 $\sigma_{\alpha_2} = 45 \text{ MPa}$, $\tau_{\alpha_2} = 25\sqrt{3} \text{ MPa}$ 。将这些数据代入斜截面上应力公式中,对 AB 斜截面有

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 210^\circ - \tau_{xy} \sin 210^\circ = 45 \quad (1)$$

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 210^\circ + \tau_{xy} \cos 210^\circ = 25\sqrt{3} \quad (2)$$

对 AC 斜截面有

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 150^\circ - \tau_{xy} \sin 150^\circ = 95 \quad (3)$$

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 150^\circ + \tau_{xy} \cos 150^\circ = 25 \sqrt{3} \quad (4)$$

将①~④式中任三个联立,即可求解出 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 。譬如联立①、②、④式,得

$$45 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}(-0.866) - 0.5\tau_{xy} \quad (5)$$

$$43.3 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}(-0.5) - 0.866\tau_{xy} \quad (6)$$

$$43.3 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}(0.5) - 0.866\tau_{xy} \quad (7)$$

由⑥+⑦式得 $86.6 = -1.732\tau_{xy}$, $\tau_{xy} = -50 \text{ MPa}$

将 τ_{xy} 值代入⑤、⑥式,可解得

$$\sigma_x = \sigma_y = 70 \text{ MPa}$$

主应力与主平面位置:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{array} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$= \left[\frac{70 + 70}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{70 - 70}{2}\right)^2 + (-50)^2} \right] \text{ MPa} = \begin{cases} 120 \text{ MPa} \\ 20 \text{ MPa} \end{cases}$$

按照主应力的记号规定

$$\sigma_1 = 120 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 20 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = 0$$

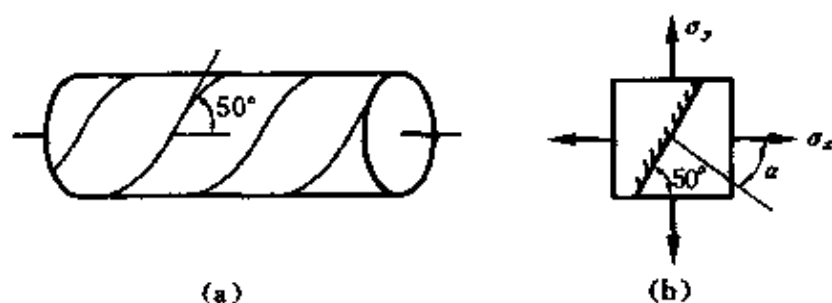
$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2 \times (-50)}{70 - 70} = \infty, \quad \alpha_0 = 45^\circ$$

单元体草图如题 7.14 图(c)所示。

7.15 如题 7.15 图(a)所示,以绕带焊接成的圆管,焊缝为螺旋线。管的内径为 300 mm,壁厚为 1 mm,内压 $p = 0.5 \text{ MPa}$ 。求沿焊缝斜面上的正应力和切应力。

解 在焊缝斜面上一点,取一单元体如题 7.15 图(b)所示,轴向应力 σ_x 和环向应力 σ_y 分别为

$$\sigma_x = \frac{pd}{4t} = \frac{0.5 \times 10^6 \times 300 \times 10^{-3}}{4 \times 1 \times 10^{-3}} \text{ Pa} = 37.5 \text{ MPa}$$



题 7.15 图

$$\sigma_y = \frac{pd}{2t} = 2\sigma_x = 75 \text{ MPa}$$

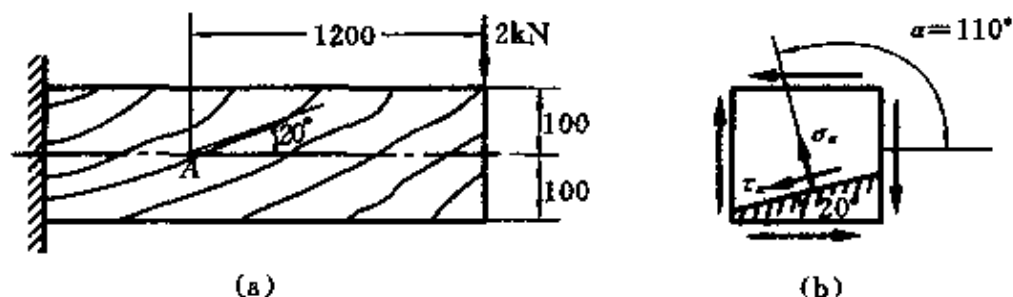
$$\tau_{xy} = 0$$

焊缝斜面上的正应力与切应力

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ &= \left[\frac{37.5 + 75}{2} + \frac{37.5 - 75}{2} \cos(-80^\circ) \right] \text{ MPa} = 53 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_\alpha &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha = \left(\frac{37.5 - 75}{2} \sin(-80^\circ) \right) \text{ MPa} \\ &= 18.5 \text{ MPa} \end{aligned}$$

7.16 如题 7.16 图(a)所示,木质悬臂梁的横截面是高为 200 mm、宽为 60 mm 的矩形。在 A 点木材纤维与水平线的倾角为 20° 。试求通过 A 点沿纤维方向的斜面上的正应力和切应力。



题 7.16 图

解 因 A 点在梁的中性轴上,因此 A 点的正应力

$$\sigma_x = \sigma_y = 0$$

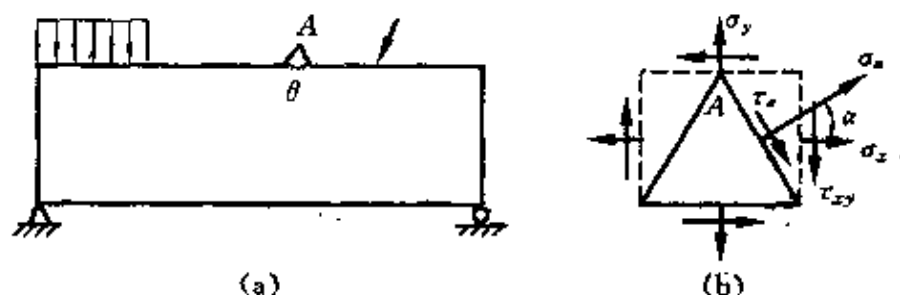
A 点所在横截面上的剪力 $F_s = 2 \text{ kN}$, A 点的切应力

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= \frac{3}{2} \frac{F_s}{bh} = \left(\frac{3}{2} \times \frac{2 \times 10^3}{200 \times 10^{-3} \times 60 \times 10^{-3}} \right) \text{ Pa} \\ &= 0.25 \text{ MPa}\end{aligned}$$

A 点的应力状态被表示在题 7.16 图(b)中。A 点在斜面上的正应力和切应力分别为

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ &= (-0.25 \times \sin 220^\circ) \text{ MPa} = 0.16 \text{ MPa} \\ \tau_\alpha &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \\ &= (0.25 \times \cos 220^\circ) \text{ MPa} = -0.19 \text{ MPa}\end{aligned}$$

7.17 板条如题 7.17 图(a)所示。尖角的侧表面皆为自由表面, $0 < \theta < \pi$ 。试证尖角端点 A 为零应力状态, 即 A 点的主应力皆为零。



题 7.17 图

解 在尖点 A 沿自由边界取三角形单元体如题 7.17 图(b)所示。因楔形面为自由表面, 所以其上的应力分量 $\sigma_\alpha = \tau_\alpha = 0$, 于是有

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha = 0 \\ \tau_\alpha &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha = 0\end{aligned}$$

因 $\sin 2\alpha \neq 0$, $\cos 2\alpha \neq 0$, 所以必有 $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$ 。代表 A 点应力状态的应力圆缩为 σ - τ 坐标的原点。因此 A 点为零应力状态。

7.18 对二向应力状态(题 7.18 图(a)), 题 7.18 表中所列各题分别给出了某些应力分量(单位为 MPa)或斜面的方位, 试求题 7.18 表中空出的未知量, 并画单元体的草图, 标明主应力和主平面的位置。

题 7.18 表

题号	σ_x	σ_y	τ_{xy}	斜面的方位和应力			主应力及主平面位置				τ_{\max}
				α	σ_α	τ_α	σ_1	σ_2	σ_3	σ_1 的方向	
7.18(a)	100		0	15°	80						
7.18(b)			-40	30°	-20	20					
7.18(c)	80						120				70
7.18(d)	32		60						-80		

解 (a) 已知 $\sigma_x = 100 \text{ MPa}$, $\tau_{xy} = 0$, $\alpha = 15^\circ$, $\sigma_\alpha = 80 \text{ MPa}$

$$\begin{aligned} \text{由 } \sigma_\alpha &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ &= \left(\frac{100 + \sigma_y}{2} + \frac{100 - \sigma_y}{2} \cos 30^\circ \right) \text{ MPa} = 80 \text{ MPa} \end{aligned}$$

解得 $\sigma_y = -198.5 \text{ MPa}$

$$\begin{aligned} \tau_\alpha &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha = \left(\frac{100 + 198.5}{2} \sin 30^\circ + 0 \right) \text{ MPa} \\ &= 74.6 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{array} \right\} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ &= \left[\frac{100 + (-198.5)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{100 + 198.5}{2} \right)^2 + 0} \right] \text{ MPa} \\ &= \begin{cases} 100 \text{ MPa} \\ -198.5 \text{ MPa} \end{cases} \end{aligned}$$

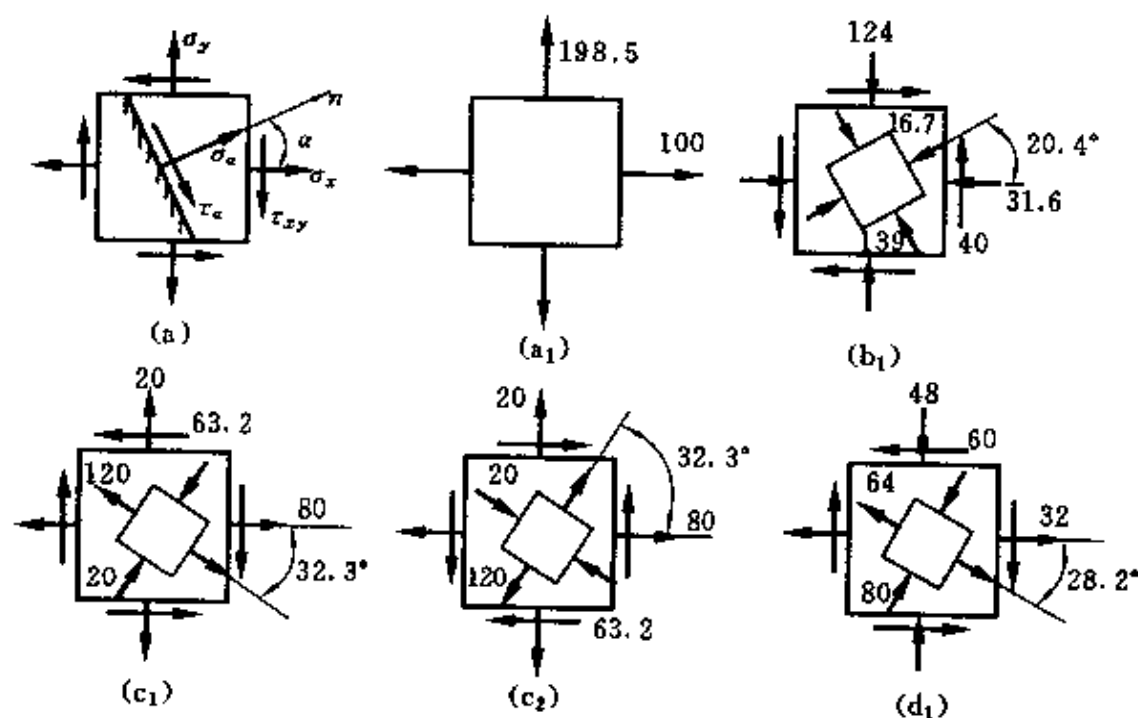
按照主应力的记号规定

$$\sigma_1 = 100 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -198.5 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = 0, \quad \alpha_0 = 0$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{100 + 198.5}{2} \text{ MPa} = 149 \text{ MPa}$$

单元体草图如题 7.18 图(a₁)所示。



题 7.18 图

(b) 已知 $\tau_{xy} = -40 \text{ MPa}$, $\tau_\alpha = 20 \text{ MPa}$, $\alpha = 30^\circ$, $\sigma_\alpha = -20 \text{ MPa}$

$$\text{由 } \sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha = -20 \text{ MPa} \quad ①$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha = 20 \text{ MPa} \quad ②$$

将 $\alpha = 30^\circ$ 代入①、②式中, 可解得

$$\sigma_x = -31.6 \text{ MPa}, \quad \sigma_y = -124 \text{ MPa}$$

主应力和主方向为

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{array} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$= \left[\frac{-31.6 - 124}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-31.6 + 124}{2} \right)^2 + (-40)^2} \right] \text{MPa}$$

$$= \begin{cases} -16.7 \text{ MPa} \\ -139 \text{ MPa} \end{cases}$$

按照主应力的记号规定

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = -16.7 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = -139 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2 \times (-40)}{-31.6 + 124} = 0.866, \quad \alpha_0 = 20.4^\circ$$

最大切应力 $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \left(\frac{0 + 139}{2} \right) \text{MPa} = 69.5 \text{ MPa}$

单元体草图如题 7.18 图(b₁)所示。

(c) 已知 $\sigma_1 = 120 \text{ MPa}, \sigma_x = 80 \text{ MPa}, \tau_{\max} = 70 \text{ MPa}$

由 $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{120 - \sigma_3}{2} = 70 \text{ MPa}$

解得 $\sigma_3 = -20 \text{ MPa}$

因 $\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sigma_1 = 120$ ①

$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sigma_3 = -20$ ②

由①+②式得 $\sigma_x + \sigma_y = 100$

所以 $\sigma_y = (100 - 80) \text{ MPa} = 20 \text{ MPa}$

因 $\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} = 70 \text{ MPa}$

所以 $\left(\frac{80 - 20}{2} \right)^2 - \tau_{xy}^2 = 4900$

$$\tau_{xy} = \pm 63.2 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2 \times (\pm 63.2)}{80 - 20} = \mp 2.11$$

$$\alpha_0 = \mp 32.3^\circ$$

单元体草图如题 7.18 图(c₁)、(c₂)所示。

(d) 已知 $\sigma_x = 32 \text{ MPa}$, $\tau_{xy} = 60 \text{ MPa}$, $\sigma_3 = -80 \text{ MPa}$

$$\text{由 } \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sigma_3$$

$$\left[\frac{32 + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{32 - \sigma_y}{2}\right)^2 + 60^2} \right] = -80$$

解得 $\sigma_y = -48 \text{ MPa}$

$$\text{由 } \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sigma_1$$

$$\text{解得 } \sigma_1 = \left[\frac{32 - 48}{2} + \sqrt{\left(\frac{32 + 48}{2}\right)^2 + 60^2} \right] \text{ MPa} = 64 \text{ MPa}$$

$$\text{最大切应力 } \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{64 + 80}{2} \text{ MPa} = 72 \text{ MPa}$$

按照主应力的记号规定

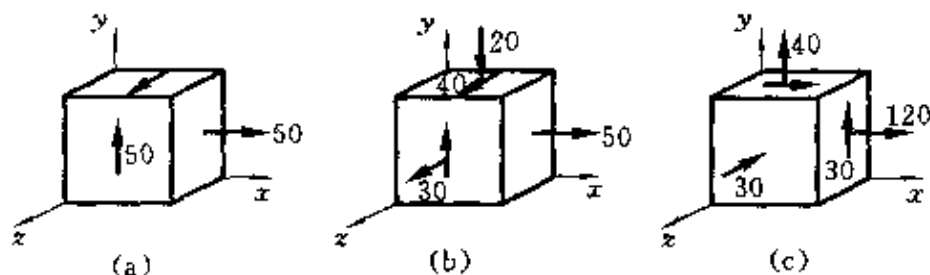
$$\sigma_1 = 64 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -80 \text{ MPa}$$

主方向

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2 \times 60}{32 + 48} = -1.5, \quad \alpha_0 = -28.2^\circ$$

单元体草图如题 7.18 图(d₁)所示。

7.19 试求题 7.19 图所示的各应力状态的主应力及最大切应力(应力单位为 MPa)。



题 7.19 图

解 (a) 如题 7.19 图(a)所示。

$$\sigma_y = 0, \quad \sigma_x = 0, \quad \tau_{xy} = 50 \text{ MPa}$$

$\sigma_x = 50 \text{ MPa}$ 是主应力

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{array} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$= [0 \pm \sqrt{0 + 50^2}] \text{ MPa} = \begin{cases} 50 \text{ MPa} \\ -50 \text{ MPa} \end{cases}$$

按照主应力的记号规定

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 50 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = -50 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{50 + 50}{2} \text{ MPa} = 50 \text{ MPa}$$

(b) 如题 7.19 图(b)所示。

$$\sigma_x = 30 \text{ MPa}, \quad \sigma_y = -20 \text{ MPa}, \quad \tau_{xy} = 40 \text{ MPa}$$

$\sigma_x = 50 \text{ MPa}$ 是主应力

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{array} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$= \left[\frac{30 + (-20)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{30 + 20}{2} \right)^2 + 40^2} \right] \text{ MPa}$$

$$= \begin{cases} 52.2 \text{ MPa} \\ -42.2 \text{ MPa} \end{cases}$$

按照主应力的记号规定

$$\sigma_1 = 52.2 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 50 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = -42.2 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{52.2 + 42.2}{2} \text{ MPa} = 47.2 \text{ MPa}$$

(c) 如题 7.19 图(c)所示。

$$\sigma_x = 120 \text{ MPa}, \quad \sigma_y = 40 \text{ MPa}, \quad \tau_{xy} = -30 \text{ MPa}$$

$\sigma_x = -30 \text{ MPa}$ 是主应力

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{array} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$= \left[\frac{120 + 40}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{120 - 40}{2} \right)^2 + (-30)^2} \right] \text{ MPa}$$

$$= \begin{cases} 130 \text{ MPa} \\ 30 \text{ MPa} \end{cases}$$

按照主应力的记号规定

$$\sigma_1 = 130 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 30 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = -30 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{130 + 30}{2} \text{ MPa} = 80 \text{ MPa}$$

7.20 已知: (a) $\epsilon_x = -0.00012, \epsilon_y = 0.00112, \gamma_{xy} = 0.00020$;

(b) $\epsilon_x = 0.00080, \epsilon_y = -0.00020, \gamma_{xy} = -0.00080$ 。

试求主应变及其方向。

解 (a)

$$\left. \begin{array}{l} \epsilon_{\max} \\ \epsilon_{\min} \end{array} \right\} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$= \left[\frac{-120 + 1120}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-120 - 1120}{2}\right)^2 + \left(\frac{200}{2}\right)^2} \right] \times 10^{-6}$$

$$= \begin{cases} 1130 \mu \\ -128 \mu \end{cases}$$

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} = -\frac{200\mu}{(-120 - 1120)\mu} = 0.161$$

$$\alpha_0 = 4.58^\circ, \quad \text{或 } 94.58^\circ$$

按主应变记号规定 $\epsilon_1 = 1130 \mu, \quad \epsilon_2 = 0, \quad \epsilon_3 = -128 \mu$

(b)

$$\left. \begin{array}{l} \epsilon_{\max} \\ \epsilon_{\min} \end{array} \right\} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$= \left[\frac{800 - 200}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{800 + 200}{2}\right)^2 + \left(\frac{-800}{2}\right)^2} \right] \times 10^{-6}$$

$$= \begin{cases} 940 \mu \\ -340 \mu \end{cases}$$

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} = -\frac{-800\mu}{(800 + 200)\mu} = 0.8$$

$$\alpha_0 = 19.3^\circ, \quad \text{或 } 109.3^\circ$$

按主应变记号规定 $\epsilon_1 = 940 \mu$, $\epsilon_2 = 0$, $\epsilon_3 = -340 \mu$

7.21 在直角应变花的情况下, 试证明主应变的数值及方向可用以下公式计算:

$$\left. \begin{matrix} \epsilon_{\max} \\ \epsilon_{\min} \end{matrix} \right\} = \frac{\epsilon_{0^\circ} + \epsilon_{90^\circ}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\epsilon_{0^\circ} - \epsilon_{45^\circ})^2 + (\epsilon_{45^\circ} - \epsilon_{90^\circ})^2}$$

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{2\epsilon_{45^\circ} - \epsilon_{0^\circ} - \epsilon_{90^\circ}}{\epsilon_{0^\circ} - \epsilon_{90^\circ}}$$

解 任一方向上的应变为

$$\epsilon_\alpha = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\alpha - \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\alpha$$

依次将 $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 45^\circ$ 和 $\alpha = 90^\circ$ 代入上式, 得

$$\begin{cases} \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} = \epsilon_{0^\circ} & \text{①} \\ \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \frac{\gamma_{xy}}{2} = \epsilon_{45^\circ} & \text{②} \\ \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} = \epsilon_{90^\circ} & \text{③} \end{cases}$$

把①、②、③式视为关于未知数为 $\frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2}$ 、 $\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}$ 、 $\frac{\gamma_{xy}}{2}$ 的三元一次方程组, 联立求解, 可得

$$\frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} = \frac{\epsilon_{0^\circ} + \epsilon_{90^\circ}}{2}, \quad \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} = \frac{\epsilon_{0^\circ} - \epsilon_{90^\circ}}{2}, \quad \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{\epsilon_{0^\circ} + \epsilon_{90^\circ} - 2\epsilon_{45^\circ}}{2} \quad \text{④}$$

把以上关系代入主应变及主应变方向公式

$$\left. \begin{matrix} \epsilon_{\max} \\ \epsilon_{\min} \end{matrix} \right\} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \quad \text{⑤}$$

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} \quad \text{⑥}$$

$$\text{得 } \left. \begin{matrix} \epsilon_{\max} \\ \epsilon_{\min} \end{matrix} \right\} = \frac{\epsilon_{0^\circ} + \epsilon_{90^\circ}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_{0^\circ} - \epsilon_{90^\circ}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\epsilon_{0^\circ} + \epsilon_{90^\circ} - 2\epsilon_{45^\circ}}{2}\right)^2} \quad \text{⑦}$$

⑦式根号内部分可简化为

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\epsilon_{0^\circ} - \epsilon_{90^\circ}}{2} \right)^2 + \left(\frac{\epsilon_{0^\circ} + \epsilon_{90^\circ} - 2\epsilon_{45^\circ}}{2} \right)^2 \\ &= \left(\frac{\epsilon_{0^\circ} - \epsilon_{90^\circ}}{2} \right)^2 + \left(\frac{\epsilon_{0^\circ} + \epsilon_{90^\circ}}{2} \right)^2 + \epsilon_{45^\circ}^2 - (\epsilon_{0^\circ} + \epsilon_{90^\circ})\epsilon_{45^\circ} \\ &= \frac{1}{2} [(\epsilon_{0^\circ} - \epsilon_{45^\circ})^2 + (\epsilon_{45^\circ} - \epsilon_{90^\circ})^2] \end{aligned}$$

代入⑦式得

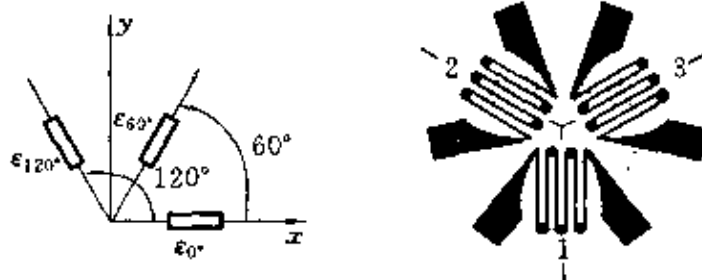
$$\left. \begin{array}{l} \epsilon_{\max} \\ \epsilon_{\min} \end{array} \right\} = \frac{\epsilon_{0^\circ} + \epsilon_{90^\circ}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\epsilon_{0^\circ} - \epsilon_{45^\circ})^2 + (\epsilon_{45^\circ} - \epsilon_{90^\circ})^2}$$

将④式代入主应变方向公式⑥中得

$$\tan 2\alpha_0 = - \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} = \frac{2\epsilon_{45^\circ} - \epsilon_{0^\circ} - \epsilon_{90^\circ}}{\epsilon_{0^\circ} - \epsilon_{90^\circ}}$$

证毕。

7.22 等角应变花如题7.22图所示。三个应变片的角度的分别为： $\alpha_1 = 0^\circ$, $\alpha_2 = 60^\circ$, $\alpha_3 = 120^\circ$ 。求证主应变的数值及方向可用以下公式计算：



题7.22图

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} \epsilon_{\max} \\ \epsilon_{\min} \end{array} \right\} &= \frac{\epsilon_{0^\circ} + \epsilon_{60^\circ} + \epsilon_{120^\circ}}{3} \\ &\pm \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\epsilon_{0^\circ} - \epsilon_{60^\circ})^2 + (\epsilon_{60^\circ} - \epsilon_{120^\circ})^2 + (\epsilon_{120^\circ} - \epsilon_{0^\circ})^2} \\ \tan 2\alpha_0 &= \frac{\sqrt{3}(\epsilon_{60^\circ} - \epsilon_{120^\circ})}{2\epsilon_{0^\circ} - \epsilon_{60^\circ} - \epsilon_{120^\circ}} \end{aligned}$$

解 任一方向上的应变为

$$\epsilon_\alpha = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\alpha - \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\alpha$$

依次将 $\alpha=0^\circ$, $\alpha=60^\circ$ 和 $\alpha=120^\circ$ 代入上式, 得

$$\begin{cases} \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 0^\circ - \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 0^\circ = \epsilon_{0^\circ} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 120^\circ - \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 120^\circ = \epsilon_{60^\circ} \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 240^\circ - \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 240^\circ = \epsilon_{120^\circ} \end{cases} \quad (3)$$

把①、②、③式视为关于未知数为 $\frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2}$ 、 $\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}$ 、 $\frac{\gamma_{xy}}{2}$ 的三元一次方程组, 联立求解, 可得

$$\begin{cases} \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} = \frac{\epsilon_{0^\circ} + \epsilon_{60^\circ} + \epsilon_{120^\circ}}{3} \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} = \frac{2\epsilon_{0^\circ} - \epsilon_{60^\circ} - \epsilon_{120^\circ}}{3} \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{\epsilon_{120^\circ} - \epsilon_{60^\circ}}{\sqrt{3}} \end{cases} \quad (6)$$

把④、⑤、⑥式代入下式中

$$\left. \begin{matrix} \epsilon_{\max} \\ \epsilon_{\min} \end{matrix} \right\} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2} \right)^2} \quad (7)$$

$$\tan 2\alpha_0 = - \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} \quad (8)$$

得

$$\left. \begin{matrix} \epsilon_{\max} \\ \epsilon_{\min} \end{matrix} \right\} = \frac{\epsilon_{0^\circ} + \epsilon_{60^\circ} + \epsilon_{120^\circ}}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{2\epsilon_{0^\circ} - \epsilon_{60^\circ} - \epsilon_{120^\circ}}{3} \right)^2 + \left(\frac{\epsilon_{120^\circ} - \epsilon_{60^\circ}}{\sqrt{3}} \right)^2} \quad (9)$$

⑨式根号内部分可化简为

$$\left(\frac{2\epsilon_{0^\circ} - \epsilon_{60^\circ} - \epsilon_{120^\circ}}{3} \right)^2 + \left(\frac{\epsilon_{120^\circ} - \epsilon_{60^\circ}}{\sqrt{3}} \right)^2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{9} [(2\varepsilon_{0^\circ} - \varepsilon_{60^\circ} - \varepsilon_{120^\circ})^2 + 3(\varepsilon_{120^\circ} - \varepsilon_{60^\circ})^2] \\
&= \frac{1}{9} [(4\varepsilon_{0^\circ}^2 + 4\varepsilon_{60^\circ}^2 + 4\varepsilon_{120^\circ}^2 - 4\varepsilon_{0^\circ}\varepsilon_{60^\circ}) - 4\varepsilon_{60^\circ}\varepsilon_{120^\circ} - 4\varepsilon_{120^\circ}\varepsilon_{0^\circ}] \\
&= \frac{2}{9} [(\varepsilon_{0^\circ} - \varepsilon_{60^\circ})^2 + (\varepsilon_{60^\circ} - \varepsilon_{120^\circ})^2 + (\varepsilon_{120^\circ} - \varepsilon_{0^\circ})^2]
\end{aligned}$$

代回⑨式得

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_{\max} \\ \varepsilon_{\min} \end{array} \right\} = \frac{\varepsilon_{0^\circ} + \varepsilon_{60^\circ} + \varepsilon_{120^\circ}}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{0^\circ} - \varepsilon_{60^\circ})^2 + (\varepsilon_{60^\circ} - \varepsilon_{120^\circ})^2 + (\varepsilon_{120^\circ} - \varepsilon_{0^\circ})^2}$$

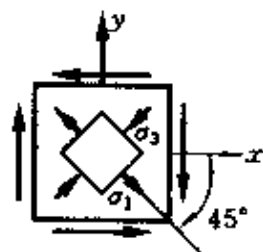
将⑤、⑥式代入⑧式得

$$\begin{aligned}
\tan 2\alpha_0 &= -\frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = -\frac{(\varepsilon_{120^\circ} - \varepsilon_{60^\circ})/\sqrt{3}}{(2\varepsilon_{0^\circ} - \varepsilon_{60^\circ} - \varepsilon_{120^\circ})/3} \\
&= \frac{\sqrt{3}(\varepsilon_{60^\circ} - \varepsilon_{120^\circ})}{2\varepsilon_{0^\circ} - \varepsilon_{60^\circ} - \varepsilon_{120^\circ}}
\end{aligned}$$

所以得证。

7.23 用广义胡克定律,证明弹性常数 E 、 G 、 μ 间的关系。

解 纯剪切状态的单元体如题 7.23 图所示。主应力 σ_1 和 σ_3 分别在 $\alpha_0 = -45^\circ$ 和 $\alpha_0 = -135^\circ$ 的主平面上,且 $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau$, $\sigma_2 = 0$ 。将 σ_1 、 σ_2 和 σ_3 代入由主应力表达的广义胡克定律表达式中,得出 σ_1 方向的主应变为



题 7.23 图

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu\sigma_3] = \frac{\tau}{E} (1 + \mu) \quad ①$$

纯剪切应力状态下

$$\begin{aligned}
\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau_{xy} &= 0 \\
\gamma_{xy} &= \tau/G \quad ②
\end{aligned}$$

将②式代入任意方向上的正应变公式

$$\epsilon_x = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\alpha - \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\alpha$$

得 σ_1 方向的主应变为 $\epsilon_1 = \frac{\tau}{2G}$ ③

由①、③两式可得 $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$

7.24 若已测得等角应变花三个方向的应变分别为 $\epsilon_{0^\circ} = 0.00040$, $\epsilon_{60^\circ} = 0.00040$, $\epsilon_{120^\circ} = -0.00060$, 试求主应变及其方向。若材料为碳钢, $E = 200 \text{ GPa}$, $\mu = 0.25$, 试求主应力及其方向。

解 将已测得的应变值代入由题 7.22 推导出的公式, 得

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} \epsilon_{\max} \\ \epsilon_{\min} \end{array} \right\} &= \frac{\epsilon_{0^\circ} + \epsilon_{60^\circ} + \epsilon_{120^\circ}}{3} \\ &\quad \pm \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\epsilon_{0^\circ} - \epsilon_{60^\circ})^2 + (\epsilon_{60^\circ} - \epsilon_{120^\circ})^2 + (\epsilon_{120^\circ} - \epsilon_{0^\circ})^2} \\ &= \left[\frac{400 + 400 - 600}{3} \right. \\ &\quad \left. \pm \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(400 - 400)^2 + (400 + 600)^2 + (-600 - 400)^2} \right] \times 10^{-6} \\ &= \begin{cases} 733 \times 10^{-6} \\ -600 \times 10^{-6} \end{cases} \end{aligned}$$

按主应变的记号规定 $\epsilon_1 = 733 \times 10^{-6}$, $\epsilon_2 = 0$, $\epsilon_3 = -600 \times 10^{-6}$

$$\begin{aligned} \tan 2\alpha_0 &= \frac{\sqrt{3}(\epsilon_{60^\circ} - \epsilon_{120^\circ})}{2\epsilon_{0^\circ} - \epsilon_{60^\circ} - \epsilon_{120^\circ}} \\ &= \frac{\sqrt{3} \times (400 + 600) \times 10^{-6}}{(2 \times 400 - 400 + 600) \times 10^{-6}} = \sqrt{3} \\ \alpha_0 &= 30^\circ \quad \text{或} \quad \alpha_0 = 120^\circ \end{aligned}$$

将 ϵ_1 、 ϵ_2 及 $\sigma_2 = 0$ 代入主应力表达的广义胡克定律公式中得

$$\begin{cases} \epsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu\sigma_3] \\ \epsilon_3 = \frac{1}{E}[\sigma_3 - \mu\sigma_1] \end{cases}$$

$$\begin{cases} E \times (733 \times 10^{-6}) = \sigma_1 - 0.25 \sigma_3 \\ E \times (-600 \times 10^{-6}) = \sigma_3 - 0.25 \sigma_1 \end{cases}$$

解上两式得

$$\sigma_1 = 124 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -88.9 \text{ MPa}$$

主应力方向与主应变方向一致, $\alpha_0 = 30^\circ$ 或 $\alpha_0 = 120^\circ$ 。

7.25 如题 7.25 图所示, 列车通过钢桥时, 在钢桥横梁的 A 点用变形仪量得 $\epsilon_x = 0.0004$, $\epsilon_y = -0.00012$ 。试求 A 点在 $x-x$ 及 $y-y$ 方向的正应力。设 $E = 200 \text{ GPa}$, $\mu = 0.3$ 。并问这样能否求出 A 点主应力?

解 根据广义胡克定律

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \left(\frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} \right)$$

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \mu \left(\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_z}{E} \right)$$



题 7.25 图

因 $\sigma_z = 0$, 所以将测得的 ϵ_x 、 ϵ_y 值代入上二式, 得

$$0.0004 = \frac{\sigma_x}{E} - 0.3 \times \frac{\sigma_y}{E} \quad (1)$$

$$-0.00012 = \frac{\sigma_y}{E} - 0.3 \times \frac{\sigma_x}{E} \quad (2)$$

联立①、②式, 求得

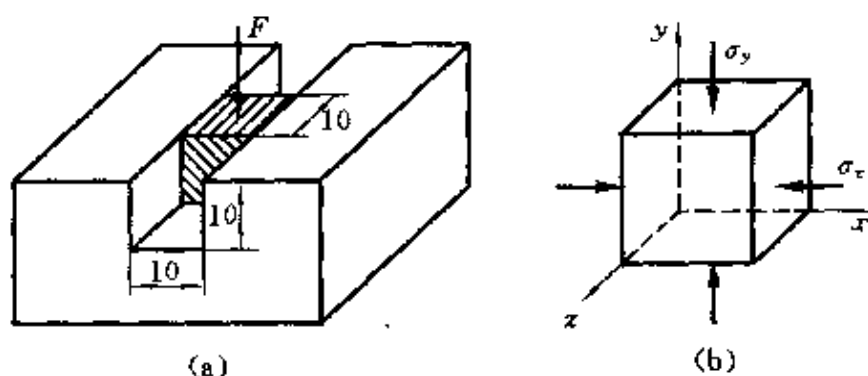
$$\sigma_x = 80 \text{ MPa}, \quad \sigma_y = 0$$

因 τ_{xy} 未知, 故不能求出主应力。

7.26 如题 7.26 图(a)所示, 在一体积较大的钢块上开一个贯穿的槽, 其宽度和深度都是 10 mm。在槽内紧密无隙地嵌入一铝质立方块, 它的尺寸是 10 mm × 10 mm × 10 mm。当铝块受到压力 $F = 6 \text{ kN}$ 的作用时, 假设钢块不变形。铝的弹性模量 $E = 70 \text{ GPa}$, $\mu = 0.33$ 。试求铝块的三个主应力及相应的变形。

解 假想将铝块移出, 如题 7.26 图(b)所示。

$$\sigma_y = -\frac{F}{A} = -\frac{6 \times 10^3}{(10 \times 10) \times 10^{-6}} \text{ Pa} = -60 \text{ MPa}$$



题 7.26 图

因 z 面为自由边界, 所以

$$\sigma_z = 0$$

又因 x 面受刚性约束, 所以 $\epsilon_x = 0$, 应用广义胡克定律

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] = 0$$

得 $\sigma_x = \mu\sigma_y = -(0.33 \times 60) \text{ MPa} = -19.8 \text{ MPa}$

按照主应力的记号规定(题 7.26 图(b))

$$\sigma_1 = \sigma_z = 0, \quad \sigma_2 = \sigma_x = -19.8 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = \sigma_y = -60 \text{ MPa}$$

将已求得的三个主应力数值代入主应变公式中得

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ &= \frac{1}{70 \times 10^9} [0 - 0.33 \times (-19.8 - 60) \times 10^6] \\ &= 3.76 \times 10^{-4} \\ \epsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)] \\ &= \frac{1}{70 \times 10^9} [-19.8 - 0.33 \times (0 - 60)] \times 10^6 = 0 \\ \epsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] \\ &= \frac{1}{70 \times 10^9} [-60 - 0.33 \times (0 - 19.8)] \times 10^6 \end{aligned}$$

$$= -7.64 \times 10^{-4}$$

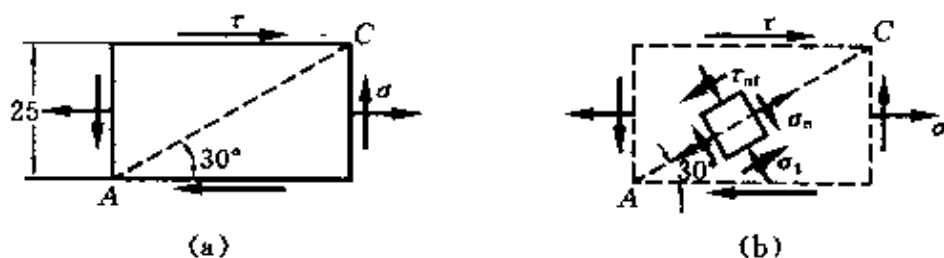
相应的变形

$$\Delta l_1 = \varepsilon_1 l_1 = (3.76 \times 10^{-4} \times 10) \text{ mm} = 3.76 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

$$\Delta l_2 = \varepsilon_2 l_2 = 0$$

$$\Delta l_3 = \varepsilon_3 l_3 = (-7.64 \times 10^{-4} \times 10) \text{ mm} = -7.64 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

7.27 从钢构件内某一点的周围取出一单元体,如题7.27图(a)所示。根据理论计算已求得 $\sigma = 30 \text{ MPa}$, $\tau = 15 \text{ MPa}$ 。材料的 $E = 200 \text{ GPa}$, $\mu = 0.30$ 。试求对角线 AC 的长度改变 Δl 。



题 7.27 图

解 欲求对角线 AC 的长度改变 Δl , 必须先知道 AC 方向上的应变, 沿 AC 方向取单元体, 如题 7.27 图 (b) 所示。该单元体上除正应力外, 还有切应力, 但它对线应变不产生影响。

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2} \cos(2 \times 30^\circ) - (-\tau) \sin(2 \times 30^\circ) \\ &= \left(\frac{30}{2} + \frac{30}{2} \cos 60^\circ + 15 \sin 60^\circ \right) \text{ MPa} = 35.5 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_t &= \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2} \cos(2 \times 120^\circ) - (-\tau) \sin(2 \times 120^\circ) \\ &= \left(\frac{30}{2} + \frac{30}{2} \cos 240^\circ + 15 \sin 240^\circ \right) \text{ MPa} = -5.49 \text{ MPa} \end{aligned}$$

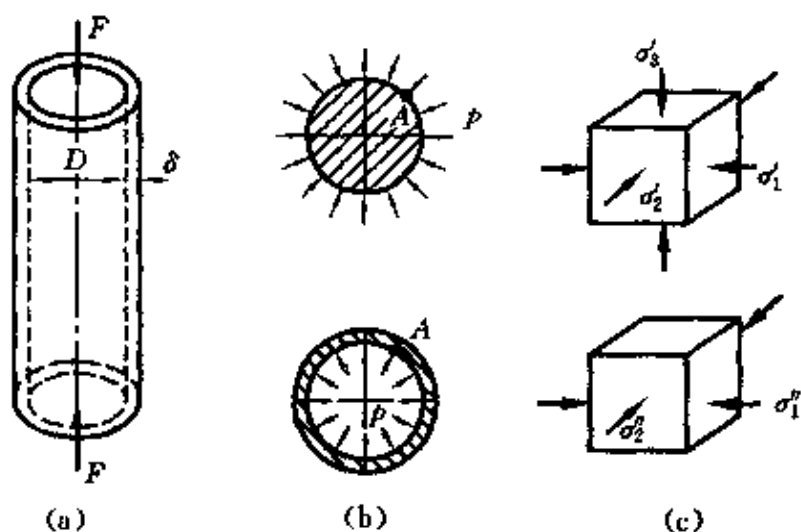
对角线 AC 方向的应变

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= \frac{1}{E} (\sigma_n - \mu \sigma_t) = \frac{1}{200 \times 10^9} (35.5 + 0.33 \times 5.49) \times 10^6 \\ &= 187 \times 10^{-6} \end{aligned}$$

所以对角线 AC 的伸长量

$$\Delta l = l_{AC} \epsilon_n = \left(\frac{25 \times 10^{-3}}{\sin 30^\circ} \times 187 \times 10^{-8} \right) \text{ m} = 9.35 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

7.28 如题 7.28 图(a)所示, 直径 $D=40 \text{ mm}$ 的铝圆柱, 放在厚度为 $\delta=2 \text{ mm}$ 的钢套筒内, 且设两者之间无间隙。作用于圆柱上的轴向压力为 $F=40 \text{ kN}$ 。若铝的弹性模量及泊松比分别是 $E_1=70 \text{ GPa}$, $\mu_1=0.35$; 钢的弹性模量是 $E=210 \text{ GPa}$, 试求筒内的周向应力。



题 7.28 图

解 铝圆柱和钢套筒受力图如题 7.28 图(b)所示。用柱和筒任意接触点 A 的单元体所表示的应力状态如题 7.28 图(c)所示。

铝圆柱的轴向应力

$$\sigma'_3 = \frac{F}{A} = \frac{4F}{\pi d^2} = \frac{4 \times 40 \times 10^3}{\pi \times (40 \times 10^{-3})^2} \text{ Pa} = 31.8 \text{ MPa} \quad (\text{压})$$

铝圆柱的周向应力和径向应力

$$\sigma'_1 = \sigma'_2 = -p$$

钢套筒的受力和薄壁圆筒受内压作用相似, 所以其周向应力

$$\sigma''_2 = \frac{pD}{2\delta} = \frac{p \times 40 \times 10^{-3}}{2 \times 2 \times 10^{-3}} = 10p$$

径向应力和轴向应力分别为

$$\sigma_2'' \approx 0, \quad \sigma_3'' = 0$$

因铝圆柱和钢套筒互相紧压,无间隙,因此三者相接触的任意点A处的周向应变相等

$$\epsilon_d' = \epsilon_d''$$

由广义胡克定律
$$\epsilon_d' = \frac{1}{E_1} [\sigma_1' - \mu_1(\sigma_2' + \sigma_3')]$$

$$\epsilon_d'' = \frac{1}{E_2} [\sigma_1'' - \mu_2(\sigma_2'' + \sigma_3'')]$$

得
$$\frac{1}{E_1} [\sigma_1' - \mu_1(\sigma_2' + \sigma_3')] = \frac{\sigma_1''}{E_2}$$

$$\frac{1}{70 \times 10^9} [-p - 0.35 \times (-p - 31.8)] = \frac{10p}{210 \times 10^9}$$

解上式得
$$p = 2.8 \text{ MPa}$$

所以钢套筒的周向应力

$$\sigma_1'' = 10p = (10 \times 2.8) \text{ MPa} = 28 \text{ MPa}$$

7.29 在二向应力状态下,设已知最大切应变 $\gamma_{\max} = 5 \times 10^{-4}$,并已知两个相互垂直方向的正应力之和为27.5 MPa。材料的弹性常数是 $E = 200 \text{ MPa}$, $\mu = 0.25$ 。试计算主应力的大小。

解 由剪切胡克定律有

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= G\gamma_{\max} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{\max} = \left[\frac{200 \times 10^9}{2(1+0.25)} \times 5 \times 10^{-4} \right] \text{ Pa} \\ &= 40 \text{ MPa} \end{aligned}$$

由主应力表达式
$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_3 \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

可得
$$\sigma_1 + \sigma_3 = \sigma_x + \sigma_y$$

所以有
$$\sigma_1 + \sigma_3 = \sigma_x + \sigma_y = 27.5 \text{ MPa} \quad (1)$$

因
$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 40 \text{ MPa} \quad (2)$$

解①、②式并按照主应力记号规定,得

$$\sigma_1 = 53.8 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -26.2 \text{ MPa}$$

7.30 在题7.19中的各应力状态下,求单位体应变 θ 、应变能密度 v_e 和畸变能密度 v_d 。设 $E=200\text{ GPa}$, $\mu=0.30$ 。

解 (a) 如题7.19图(a)所示。

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (1)$$

$$v_e = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] \quad (2)$$

$$v_d = \frac{1+\mu}{6E}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (3)$$

将 $\sigma_1 = \sigma_2 = 50\text{ MPa}$, $\sigma_3 = -50\text{ MPa}$, $E = 200\text{ GPa}$, $\mu = 0.30$ 代入①、②、③式,得

$$\theta = \frac{1-2 \times 0.3}{200 \times 10^9}(50 + 50 - 50) \times 10^6 = 0.1 \times 10^{-3}$$

$$\begin{aligned} v_e &= \frac{1}{2 \times 200 \times 10^9}[50^2 + 50^2 + (-50)^2 - 2 \times 0.3 \\ &\quad \times (50 \times 50 + 50 \times 50 - 50 \times 50)] \times 10^{12}\text{ J/m}^3 \\ &= 22.5 \times 10^3\text{ J/m}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_d &= \frac{1+0.3}{6 \times 200 \times 10^9}[(50 - 50)^2 + (50 + 50)^2 \\ &\quad + (-50 - 50)^2] \times 10^{12}\text{ J/m}^3 \\ &= 21.7 \times 10^3\text{ J/m}^3 \end{aligned}$$

(b) 如题7.19图(b)所示。

将 $\sigma_1 = 52.2\text{ MPa}$, $\sigma_2 = 50\text{ MPa}$, $\sigma_3 = -42.2\text{ MPa}$, $E = 200\text{ GPa}$, $\mu = 0.30$ 代入①、②、③式,得

$$\theta = \frac{1-2 \times 0.3}{200 \times 10^9}(52.2 + 50 - 42.2) \times 10^6 = 0.12 \times 10^{-3}$$

$$\begin{aligned} v_e &= \frac{1}{2 \times 200 \times 10^9}[52.2^2 + 50^2 + (-42.2)^2 - 2 \times 0.3 \\ &\quad \times (52.2 \times 50 + 50 \times 42.2 - 42.2 \times 52.2)] \times 10^{12}\text{ J/m}^3 \\ &= 20.1 \times 10^3\text{ J/m}^3 \end{aligned}$$

$$v_d = \frac{1+0.3}{6 \times 200 \times 10^9} [(52.2-50)^2 + (50+42.2)^2 + (-42.2-52.2)^2] \times 10^{12} \text{ J/m}^3$$

$$= 18.9 \times 10^3 \text{ J/m}^3$$

(c) 如题 7.19 图(c)所示。

将 $\sigma_1 = 130 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = 30 \text{ MPa}$, $\sigma_3 = -30 \text{ MPa}$, $E = 200 \text{ GPa}$, $\mu = 0.30$ 代入①、②、③式, 得

$$\theta = \frac{1-2 \times 0.3}{200 \times 10^9} (130 + 30 - 30) \times 10^6 = 0.26 \times 10^{-3}$$

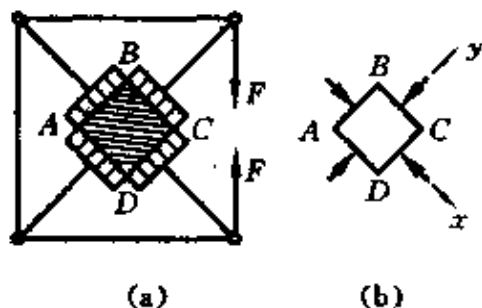
$$v_e = \frac{1}{2 \times 200 \times 10^9} [130^2 + 30^2 + (-30)^2 - 2 \times 0.3 \times (130 \times 30 - 30 \times 30 - 30 \times 130)] \times 10^{12} \text{ J/m}^3$$

$$= 48.1 \times 10^3 \text{ J/m}^3$$

$$v_d = \frac{1+0.3}{6 \times 200 \times 10^9} [(130-30)^2 + (30+30)^2 + (-30-130)^2] \times 10^{12} \text{ J/m}^3$$

$$= 42.5 \times 10^3 \text{ J/m}^3$$

7.31 如题 7.31 图(a)所示, 方块 ABCD 尺寸是 $70 \text{ mm} \times 70 \text{ mm}$, 通过专用的压力机在其四个面上作用均匀分布的压力。若 $F = 50 \text{ kN}$, $E = 200 \text{ GPa}$, $\mu = 0.30$, 试求方块的体应变 θ 。



题 7.31 图

解 根据静力学平衡条件, 方块四个面受到的压力为 $\sqrt{2}F$, 所以各面上的应力

$$\sigma_x = \sigma_y = \sqrt{2} \frac{F}{A} = \frac{\sqrt{2} \times 50 \times 10^3}{(70 \times 70) \times 10^{-6}} \text{ Pa} = 14.4 \text{ MPa (压)}$$

因方块四个面都无切应力, 所以四个面都是主平面, 主应力为

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = -14.4 \text{ MPa}$$

体应变

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1-2 \times 0.3}{200 \times 10^9}(-14.4 \times 2) \times 10^6 \\ = -57.6 \times 10^{-6}$$

7.32 试证明弹性模量 E 、切变模量 G 和体积弹性模量 K 之间的关系是 $E = \frac{9KG}{3K+G}$ 。

解 $K = \frac{E}{3(1-2\mu)}, G = \frac{E}{2(1+\mu)}$

由上二式可得 $\mu = \frac{3K-E}{6K}, \mu = \frac{E-2G}{2G}$

所以 $\frac{E-2G}{2G} = \frac{3K-E}{6K}, E = \frac{9KG}{3K+G}$

7.33 对题 7.4 中的各应力状态, 写出四个常用强度理论及莫尔强度理论的相当应力。设 $\mu=0.25, [\sigma_t]/[\sigma_c]=1/4$ 。

解 (a) $\sigma_1=57 \text{ MPa}, \sigma_2=0, \sigma_3=-7 \text{ MPa}$

$$\sigma_{r1} = \sigma_1 = 57 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{r2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = [57 - 0.25 \times (0 - 7)] \text{ MPa} \\ = 58.8 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = (57 + 7) \text{ MPa} = 64 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}(57^2 + 7^2 + 64^2)} \text{ MPa} = 60.8 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{rM} = \sigma_1 - \frac{[\sigma_t]}{[\sigma_c]}\sigma_3 = (57 + 0.25 \times 7) \text{ MPa} = 58.8 \text{ MPa}$$

(b) $\sigma_1=57 \text{ MPa}, \sigma_2=0, \sigma_3=-7 \text{ MPa}$

因主应力完全与题 7.33(a) 相同, 故解答也相同。

(c) $\sigma_1=25 \text{ MPa}, \sigma_2=0, \sigma_3=-25 \text{ MPa}$

$$\sigma_{r1} = \sigma_1 = 25 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{r2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = (25 + 25 \times 0.25) \text{ MPa} = 31.3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = (25 + 25) \text{ MPa} = 50 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}(25^2 + 25^2 + 50^2)} \text{ MPa} = 43.3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{rM} = \sigma_1 - \frac{[\sigma_t]}{[\sigma_c]} \sigma_3 = (25 + 0.25 \times 25) \text{ MPa} = 31.3 \text{ MPa}$$

$$(d) \quad \sigma_1 = 11.2 \text{ MPa}, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -71.2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{r1} = \sigma_1 = 11.2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{r2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = (11.2 + 71.2 \times 0.25) \text{ MPa} = 29 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = (11.2 + 71.2) \text{ MPa} = 82.4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}(11.2^2 + 71.2^2 + 82.4^2)} \text{ MPa} = 77.4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{rM} = \sigma_1 - \frac{[\sigma_t]}{[\sigma_c]} \sigma_3 = (11.2 + 0.25 \times 71.2) \text{ MPa} = 29 \text{ MPa}$$

$$(e) \quad \sigma_1 = 4.7 \text{ MPa}, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -84.7 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{r1} = \sigma_1 = 4.7 \text{ MPa}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r2} &= \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = (4.7 + 84.7 \times 0.25) \text{ MPa} \\ &= 25.9 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = (4.7 + 84.7) \text{ MPa} = 89.4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}(4.7^2 + 84.7^2 + 89.4^2)} \text{ MPa} = 87.1 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{rM} = \sigma_1 - \frac{[\sigma_t]}{[\sigma_c]} \sigma_3 = (4.7 + 0.25 \times 84.7) \text{ MPa} = 25.9 \text{ MPa}$$

$$(f) \quad \sigma_1 = 37 \text{ MPa}, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -27 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{r1} = \sigma_1 = 37 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{r2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = (37 + 27 \times 0.25) \text{ MPa} = 43.8 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = (37 + 27) \text{ MPa} = 64 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}(27^2 + 37^2 + 64^2)} \text{ MPa} = 55.7 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{IM}} = \sigma_1 - \frac{[\sigma_t]}{[\sigma_c]} \sigma_3 = (37 + 0.25 \times 27) \text{ MPa} = 43.8 \text{ MPa}$$

7.34 对题 7.19 中的各应力状态, 写出四个常用强度理论的相当应力。设 $\mu=0.30$ 。如材料为中碳钢, 指出该用哪一理论。

解 (a) $\sigma_1 = \sigma_2 = 50 \text{ MPa}$, $\sigma_3 = -50 \text{ MPa}$

$$\sigma_{r1} = \sigma_1 = 50 \text{ MPa}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r2} &= \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = [50 - 0.30 \times (50 - 50)] \text{ MPa} \\ &= 50 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = (50 + 50) \text{ MPa} = 100 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}(100^2 + 100^2)} \text{ MPa} = 100 \text{ MPa}$$

(b) $\sigma_1 = 52.2 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = 50 \text{ MPa}$, $\sigma_3 = -42.2 \text{ MPa}$

$$\sigma_{r1} = 52.2 \text{ MPa}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r2} &= \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = [52.2 - 0.3 \times (50 - 42.2)] \text{ MPa} \\ &= 49.9 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = (52.2 + 42.2) \text{ MPa} = 94.4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}(2.2^2 + 92.2^2 + 94.4^2)} \text{ MPa} = 93.3 \text{ MPa}$$

$$(c) \quad \sigma_1 = 130 \text{ MPa}, \sigma_2 = 30 \text{ MPa}, \sigma_3 = -30 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{r1} = \sigma_1 = 130 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{r2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = [130 - 0.30 \times (30 - 30)] \text{ MPa} \\ = 130 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = (130 + 30) \text{ MPa} = 160 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \\ = \sqrt{\frac{1}{2}(100^2 + 60^2 + 160^2)} \text{ MPa} = 140 \text{ MPa}$$

若材料为中碳钢,可用第三或第四或莫尔强度理论。

7.35 车轮与钢轨接触点处的主应力为 -800 MPa 、 -900 MPa 、 -1100 MPa 。若 $[\sigma] = 300 \text{ MPa}$,试对接触点作强度校核。

$$\text{解} \quad \sigma_1 = -800 \text{ MPa}, \sigma_2 = -900 \text{ MPa}, \sigma_3 = -1100 \text{ MPa}$$

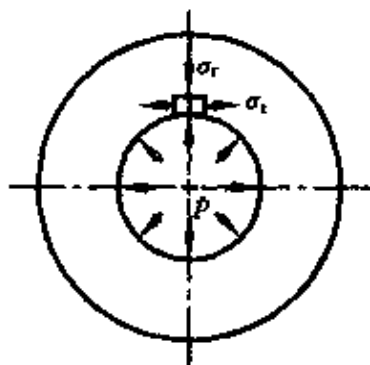
$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = (-800 + 1100) \text{ MPa} = 300 \text{ MPa} \\ = [\sigma] = 300 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \\ = \sqrt{\frac{1}{2}[(-800 + 900)^2 + (-900 + 1100)^2 + (-1100 + 800)^2]} \text{ MPa} \\ = 264 \text{ MPa} \leq [\sigma] = 300 \text{ MPa}$$

用两种强度理论校核,相当应力等于或小于许用应力,所以安全。

7.36 炮筒横截面如题 7.36 图所示。在危险点处, $\sigma_t = 550 \text{ MPa}$, $\sigma_r = -350 \text{ MPa}$, 第三个主应力垂直于图面是拉应力,且其大小为 420 MPa 。试按第三和第四强度理论,计算其相当应力。

$$\text{解} \quad \sigma_1 = \sigma_t = 550 \text{ MPa}, \sigma_2 = \sigma_z = 420 \text{ MPa}, \sigma_3 = \sigma_r = -350 \text{ MPa}$$

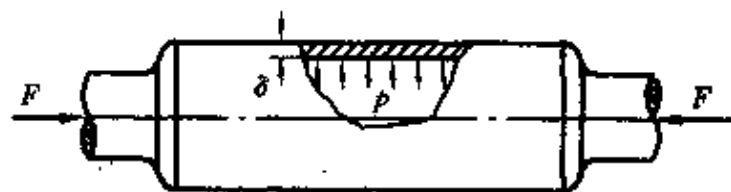


题 7.36 图

$$\sigma_{13} = \sigma_1 - \sigma_3 = (550 + 350) \text{ MPa} = 900 \text{ MPa}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{r4} &= \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}[(550 - 420)^2 + (420 + 350)^2 + (-350 - 550)^2]} \text{ MPa} \\ &= 842 \text{ MPa}\end{aligned}$$

7.37 铸铁薄管如题7.37图所示。管的外径为200 mm,壁厚 $\delta=15$ mm,内压 $p=4$ MPa, $F=200$ kN。铸铁的抗拉及抗压许用应力分别为 $[\sigma_t]=30$ MPa, $[\sigma_c]=120$ MPa, $\mu=0.25$ 。试用第二强度理论及莫尔强度理论校核薄管的强度。



题7.37图

解 周向应力

$$\sigma' = \frac{pd}{2\delta} = \frac{4 \times 10^6 \times (200 - 2 \times 15) \times 10^{-3}}{2 \times 15 \times 10^{-3}} \text{ Pa} = 22.7 \text{ MPa}$$

轴向应力

$$\begin{aligned}\sigma'' &= -\frac{F}{A} + \frac{pd}{4\delta} \\ &= \left[-\frac{200 \times 10^3}{\pi(200 - 15) \times 10^{-3} \times 15 \times 10^{-3}} + \frac{4 \times 10^6 \times (200 - 2 \times 15) \times 10^{-3}}{4 \times 15 \times 10^{-3}} \right] \text{ Pa} \\ &= -11.6 \text{ MPa}\end{aligned}$$

径向应力

$$\sigma''' = -p = -4 \text{ MPa}$$

按照主应力的记号规定

$$\sigma_1 = 22.7 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = -4 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = -11.6 \text{ MPa}$$

按第二强度理论校核

$$\begin{aligned}\sigma_{r2} &= \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = [22.7 + 0.25 \times (11.6 + 4)] \text{ MPa} \\ &= 26.6 \text{ MPa} < [\sigma_t]\end{aligned}$$

按莫尔强度理论校核

$$\begin{aligned}\sigma_{rM} &= \sigma_1 - \frac{[\sigma_t]}{[\sigma_c]} \sigma_3 = (22.7 + 0.25 \times 11.6) \text{ MPa} \\ &= 25.6 \text{ MPa} < [\sigma_t]\end{aligned}$$

按两种强度理论校核, 都满足强度要求。

7.38 钢制圆筒形薄壁容器, 直径为 800 mm, 壁厚 $\delta = 4 \text{ mm}$, $[\sigma] = 120 \text{ MPa}$ 。试用强度理论确定可能承受的内压力 p 。

解 周向应力 $\sigma' = \frac{pd}{2\delta}$

轴向应力 $\sigma'' = \frac{pd}{4\delta}$

径向应力 $\sigma''' \approx 0$

按照主应力记号规定

$$\sigma_1 = \sigma' = \frac{pd}{2\delta} = \frac{800}{2 \times 4} p = 100p$$

$$\sigma_2 = \sigma'' = \frac{pd}{4\delta} = \frac{800}{4 \times 4} p = 50p$$

$$\sigma_3 = \sigma''' \approx 0$$

根据第三强度理论

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma], \quad \frac{pd}{2\delta} - 0 \leq [\sigma]$$

$$p \leq \frac{2\delta[\sigma]}{d} = \frac{2 \times 4 \times 10^{-3} \times 120}{800 \times 10^{-3}} \text{ MPa} = 1.20 \text{ MPa}$$

根据第四强度理论

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma]$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(100p - 50p)^2 + (50p)^2 + (-100p)^2]} \leq 120 \text{ MPa}$$

$$p \leq 1.39 \text{ MPa}$$

第八章 组合变形

知识要点

1. 组合变形的概念

(1) 组合变形

构件同时发生两种或两种以上基本变形。

(2) 组合变形下强度计算的方法

① 计算步骤:

a. 将外力简化成符合各基本变形的内力作用条件下的静力等效力系。

b. 由各基本变形的内力图及应力变化规律确定构件危险点的位置。

c. 计算各基本变形下危险点的应力,并将同类应力进行叠加。

d. 由危险点的应力状态,建立强度条件。

② 限制条件——构件材料应服从胡克定律,且变形很小,同时构件应为细长杆,且所求应力远离外力作用点。

2. 斜弯曲:二相互垂直平面内平面弯曲的组合

(1) 应力计算

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y}z \pm \frac{M_z}{I_z}y$$

(2) 强度条件

$$\sigma_{\max} = \left| \frac{M_{y\max}}{W_y} + \frac{M_{z\max}}{W_z} \right| \leq [\sigma]$$

或

$$\sigma_{\max} = \left| \frac{M_{y\max}}{I_y}z_1 + \frac{M_{z\max}}{I_z}y_1 \right| \leq [\sigma]$$

注意:

① 危险截面上 M_y 和 M_z 不一定同时达到最大值。

② 危险点为距中性轴最远的点。若截面有棱角,则危险点必在棱角处;若截面无棱角,则危险点为截面周边与平行于中性轴之直线的切点。

③ 中性轴一般地不垂直于外力作用线(或中性轴不平行于合成的弯矩矢量)

$$\tan\theta = \frac{I_z}{I_y} \tan\varphi$$

④ 若 $[\sigma_t] \neq [\sigma_c]$, 则拉压强度均应满足。

3. 轴向拉(压)与弯曲组合、偏心拉压

(1) 应力计算

$$\sigma_x = \pm \frac{F_N}{A} \pm \frac{M_y}{I_y} z \pm \frac{M_z}{I_z} y$$

(2) 强度条件

危险点为单向应力状态,

$$\sigma_{\max} = \pm \frac{F_N}{A} \pm \frac{M_{y\max}}{W_y} \pm \frac{M_{z\max}}{W_z} \leq [\sigma]$$

或
$$\sigma_{\max} = \pm \frac{F_N}{A} \pm \frac{M_{y\max}}{I_y} z_1 \pm \frac{M_{z\max}}{I_z} y_1 \leq [\sigma]$$

4. 扭转与弯曲组合(只考虑圆形截面杆)

(1) 应力计算

$$\sigma_M = \frac{M}{W}, \quad \tau_T = \frac{T}{W_t}$$

因只考虑圆截面杆的扭转与弯曲的组合,圆截面任一直径都是形心主惯性轴,故可先求其合成弯矩

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$$

然后再计算弯曲正应力。否则,弯曲正应力应按斜弯曲计算。

(2) 强度条件

危险点在圆截面边缘上。

第三强度理论

$$\sqrt{\sigma_M^2 + 4\tau_T^2} \leq [\sigma]$$

对圆截面

$$\frac{1}{W} \sqrt{M^2 + T^2} \leq [\sigma]$$

第四强度理论

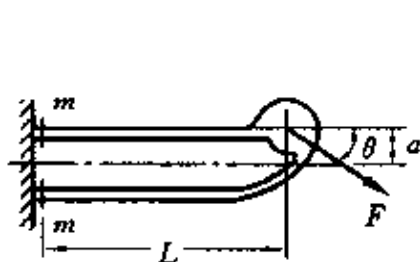
$$\sqrt{\sigma_M^2 + 3\tau_T^2} \leq [\sigma]$$

对圆截面

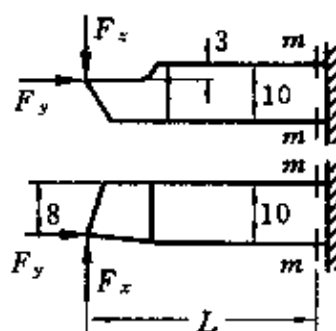
$$\frac{1}{W} \sqrt{M^2 + 0.75T^2} \leq [\sigma]$$

习题详解

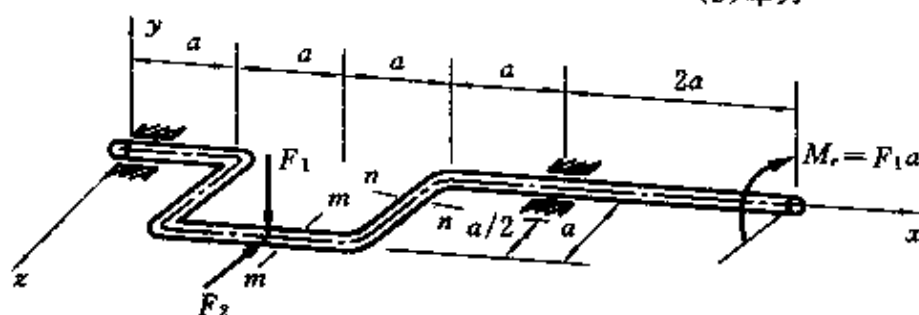
8.1 试求题 8.1 图(a)、(b)、(c)所示各构件在指定截面上的内力分量。



(a) 机械构件



(b) 车刀



(c) 曲柄轴

题 8.1 图

解 (a) 如题 8.1 图(a)所示。

$$F_N = F \cos \theta, \quad F_S = F \sin \theta, \quad M = F a \cos \theta + F l \sin \theta$$

(b) 如题 8.1 图(b)所示。

$$F_N = F_y, \quad F_{sx} = F_x, \quad F_{sy} = F_z$$

$$M_x = 2F_y - F_z L, \quad M_z = F_x L - 3F_y, \quad T = 2F_x - 3F_z$$

(c) 如题 8.1 图(c)所示。

$$m-m \text{ 截面} \quad F_{sy} = \frac{F_1}{2}, \quad F_{sx} = \frac{F_2}{2}$$

$$M_x = F_1 a, \quad M_y = F_2 a, \quad T = \frac{F_1 a}{2}$$

$$n-n \text{ 截面} \quad F_N = \frac{F_2}{2}, \quad F_{sy} = \frac{F_1}{2}, \quad M_x = \frac{3}{4} F_1 a$$

$$M_y = \frac{F_2}{2} a, \quad T = -\frac{F_1}{2} a$$

8.2 人字架及承受的载荷如题 8.2 图(a)所示。试求截面 $m-m$ 上的最大正应力和 A 点的正应力。

解 截面形心位置

$$y_c = 0$$

$$z_c = \frac{0.1 \times 0.2 \times 0.2 + 0.2 \times 0.1 \times 0.05}{0.1 \times 0.2 + 0.2 \times 0.1} \text{ m} = 0.125 \text{ m}$$

截面形心主惯性矩

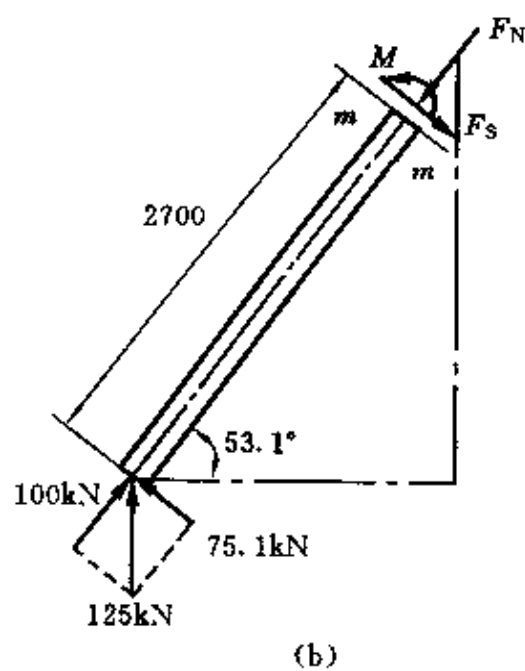
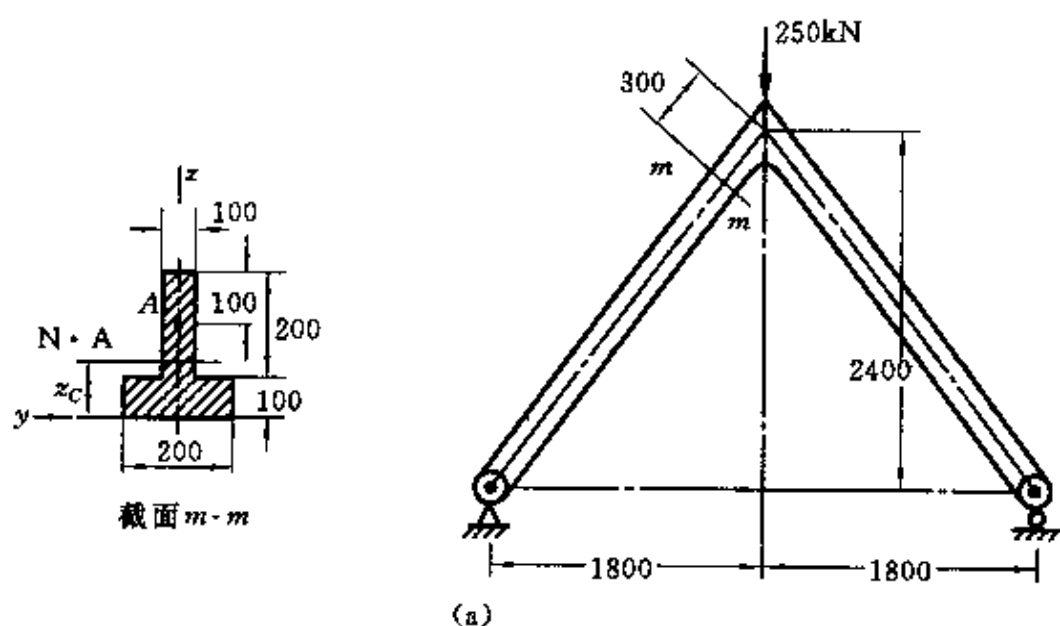
$$I_{N-A} = \left[\frac{1}{12} \times 0.1 \times 0.2^3 + 0.02 \times (0.2 - 0.125)^2 \right. \\ \left. + \frac{0.2 \times 0.1^3}{12} + 0.02 \times (0.125 - 0.05)^2 \right] \text{ m}^4 \\ = 308 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

沿 $m-m$ 截面将人字架截分为两部分,取左半部分为研究对象,其受力图如题 8.2 图(b)所示,根据平衡条件, $m-m$ 截面上的内力分量

$$F_N = 100 \text{ kN}, \quad F_s = 75.1 \text{ kN}, \quad M = 203 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$m-m$ 截面上的最大正应力

$$\sigma_{\max}^+ = \frac{M}{I_{N-A}} z_c - \frac{F_N}{A} \\ = \left(\frac{203 \times 10^3}{308 \times 10^{-6}} \times 0.125 - \frac{100 \times 10^3}{0.04} \right) \text{ Pa} = 79.9 \text{ MPa}$$



题 8.2 图

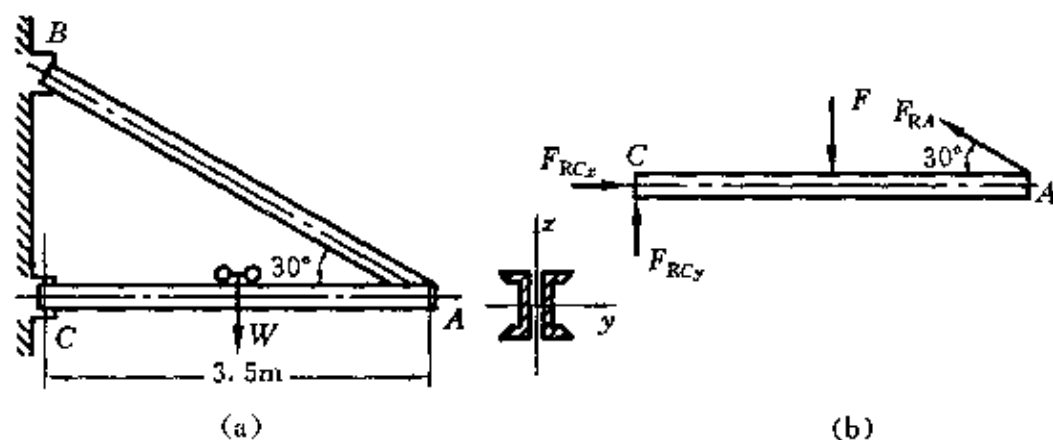
$$\begin{aligned}
 \sigma_{\max} &= \frac{M}{I_{N.A}} (0.3 - z_C) + \frac{F_N}{A} \\
 &= \left[\frac{203 \times 10^3}{308 \times 10^{-6}} (0.3 - 0.125) + \frac{100 \times 10^3}{0.04} \right] \text{Pa} \\
 &= 118 \text{ MPa}
 \end{aligned}$$

A 点的正应力

$$\begin{aligned}\sigma_A &= \frac{M}{I_{N-A}}(0.2 - 0.125) + \frac{F_N}{A} \\ &= \left(\frac{203 \times 10^3}{308 \times 10^{-6}} \times 0.075 + \frac{10^5}{0.04} \right) \text{ Pa} = 51.9 \text{ MPa (压)}\end{aligned}$$

题解未考虑由于剪力 Q 引起的弯曲剪应力。

8.3 题 8.3 图(a)所示起重架的最大起吊重量(包括行走小车等)为 $W=40 \text{ kN}$, 横梁 AC 由两根 No. 18 槽钢组成, 材料为 Q235 钢, 许用应力 $[\sigma]=120 \text{ MPa}$ 。试校核横梁的强度。



题 8.3 图

解 梁 AC 受压弯组合作用。当载荷 W 移至 AC 中点处时梁内弯矩最大, 所以 AC 中点处横截面为危险截面。危险点在梁横截面的顶边上。

查附录三型钢表, No. 18 槽钢的

$$A = 29.30 \text{ cm}^2, \quad I_y = 1370 \text{ cm}^4, \quad W_y = 152 \text{ cm}^3$$

根据静力学平衡条件, AC 梁的约束反力为

$$F_{RA} = W, \quad F_{RCx} = F_A \cos 30^\circ = F \cos 30^\circ$$

危险截面上的内力分量为

$$F_N = F_{RCx} = W \cos 30^\circ = (40 \times \cos 30^\circ) \text{ kN} = 34.6 \text{ kN}$$

$$M = F_{RCy} \times \frac{3.5}{2} = F_{RA}(\sin 30^\circ) \times \frac{3.5}{2}$$

$$= \left[W(\sin 30^\circ) \times \frac{3.5}{2} \right] \text{ kN} \cdot \text{m} = 35 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

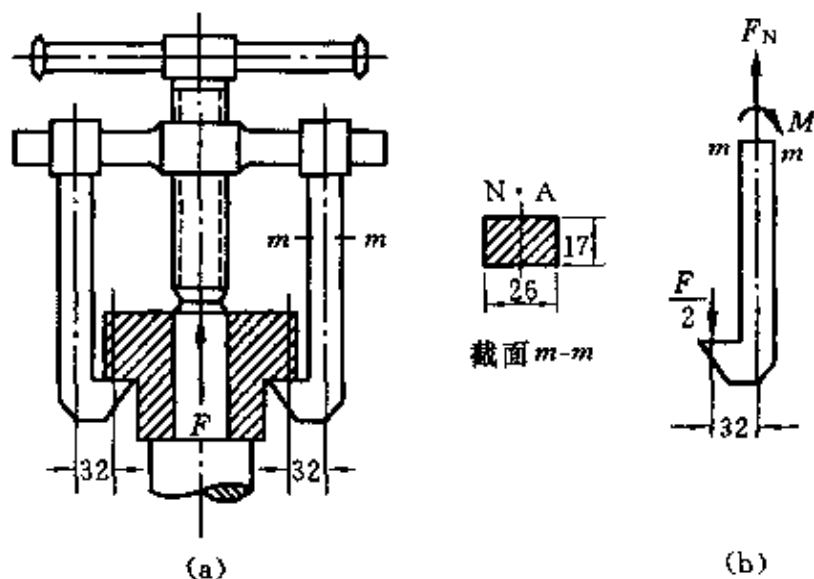
危险点的最大应力

$$\sigma_{\max} = \frac{F_N}{A} + \frac{M_y}{W_y} = \left(\frac{34.6 \times 10^3}{2 \times 29.3 \times 10^{-4}} + \frac{35 \times 10^3}{2 \times 152 \times 10^{-6}} \right) \text{ Pa}$$

$$= 121 \text{ MPa (压)}$$

最大应力恰好等于许用应力,故可安全工作。

8.4 拆卸工具的爪如题8.4图(a)所示,由45钢制成,其许用应力 $[\sigma]=180 \text{ MPa}$ 。试按爪的强度,确定工具的最大顶压力 F_{\max} 。



题 8.4 图

解 这是一个拉弯组合变形问题, $m-m$ 截面上的内力分量如题 8.4 图(b)所示。

$$F_N = \frac{F}{2}, \quad M = \left(\frac{F}{2} \times 0.032 \right) \text{ N} \cdot \text{m} = (0.016F) \text{ N} \cdot \text{m}$$

危险点的应力

$$\sigma_{\max} = \frac{F_N}{A} + \frac{M}{W_{N \cdot A}}$$

$$= \frac{F/2}{0.026 \times 0.017} + \frac{0.016F}{\frac{1}{6} \times 0.017 \times 0.026^2} = 9485F$$

依据强度条件

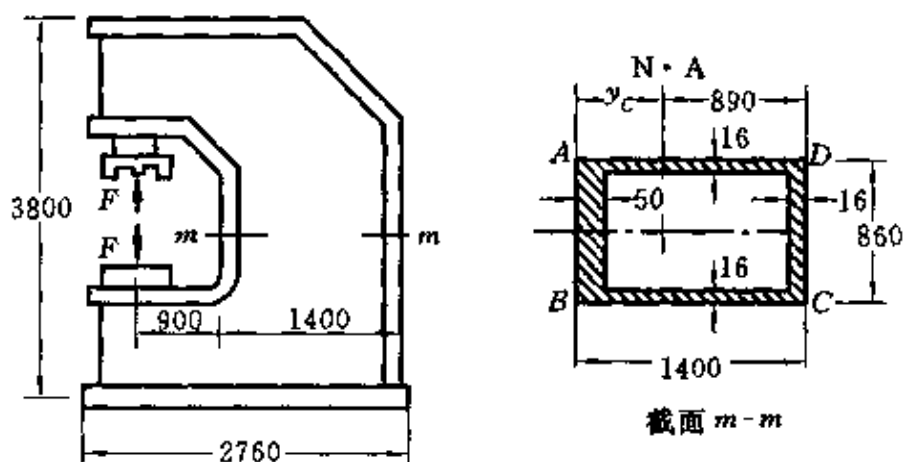
$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]$$

有 $9485F \leq 180 \times 10^6$, $F \leq 18.8 \text{ kN}$

工具的最大顶压力

$$F_{\max} = 18.8 \text{ kN}$$

8.5 单臂液压机机架及其立柱的横截面尺寸如题8.5图所示。 $F=1600 \text{ kN}$, 材料的许用应力 $[\sigma]=160 \text{ MPa}$ 。试校核机架立柱的强度(关于立柱横截面几何性质的计算, 可参看文献1附录1例1.3)。



题8.5图

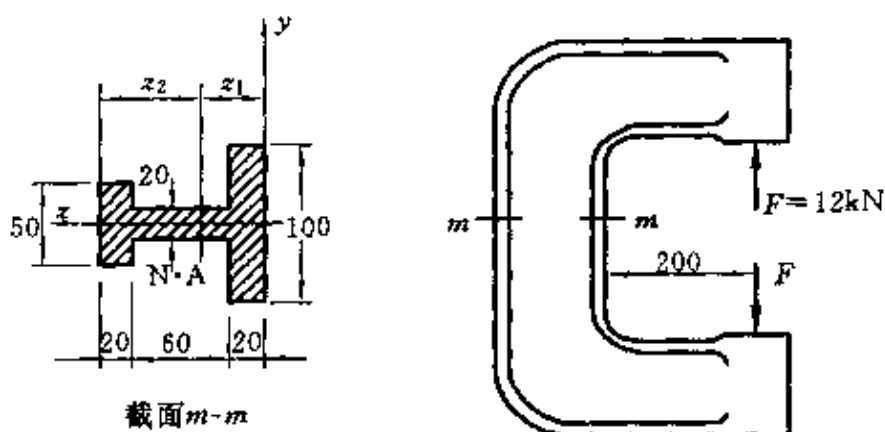
解 因为 $I_{N \cdot A}=0.029 \text{ m}^4$, 最大应力产生在横截面 $m-m$ 的 AB 边上, 为拉应力

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{F}{A} + \frac{F(y_c + 900)y_c}{I_{N \cdot A}} \\ &= \left\{ \frac{1600 \times 10^3}{[1400 \times 860 - (1400 - 50 - 16)(860 - 32)] \times 10^{-6}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1.6 \times 10^6 \times [(1400 - 890 + 900) \times (1400 - 890)] \times 10^{-6}}{0.029} \right\} \text{ Pa} \\ &= 55.8 \text{ MPa (拉)} < [\sigma] = 160 \text{ MPa} \end{aligned}$$

最大应力小于许用应力, 故安全。

8.6 材料为灰铸铁HT15-33的压力机框架如题8.6图所示。许用拉应力为 $[\sigma_t]=30 \text{ MPa}$, 许用压应力为 $[\sigma_c]=80 \text{ MPa}$ 。试校

核该框架立柱的强度。



题 8.6 图

解 $m-m$ 截面面积

$$A = (100 \times 20 + 50 \times 20 + 60 \times 20) \text{ mm}^2 = 4200 \text{ mm}^2$$

中性轴(N·A)位置

$$z_1 = \left(\frac{20 \times 100 \times 10 + 60 \times 20 \times 50 + 20 \times 50 \times 90}{4200} \right) \text{ mm}$$

$$= 40.5 \text{ mm}$$

$$z_2 = (100 - 40.5) \text{ mm} = 59.5 \text{ mm}$$

$m-m$ 截面上的内力

$$F_N = F = 12 \text{ kN}$$

$$M_{N \cdot A} = [12 \times 10^3 \times (200 + 40.5) \times 10^{-3}] \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$= 2.89 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$m-m$ 截面对中性轴(N·A)的惯性矩

$$I_{N \cdot A} = \left[\left(\frac{100 \times 20^3}{12} + 20 \times 100 \times 30.5^2 \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{20 \times 60^3}{12} + 20 \times 60 \times 9.5^2 \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{50 \times 20^3}{12} + 20 \times 50 \times 49.5^2 \right) \right] \text{ mm}^4$$

$$= 4.88 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

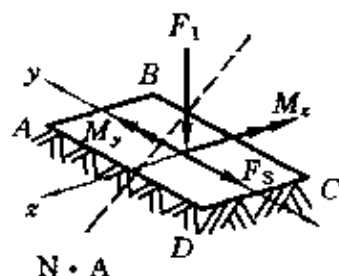
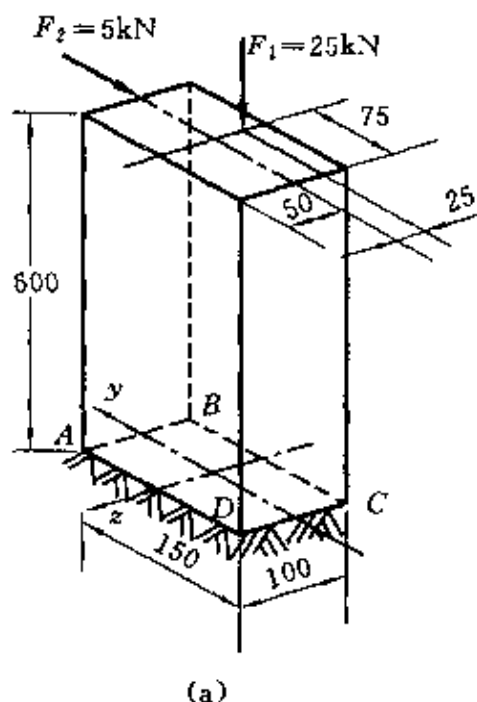
$m-m$ 截面上的最大应力

$$\begin{aligned}\sigma_{\max}^+ &= \frac{M_{N \cdot A}}{I_{N \cdot A}} z_1 + \frac{F_N}{A} \\ &= \left(\frac{2.89 \times 10^3 \times 40.5 \times 10^{-3}}{4.88 \times 10^{-6}} + \frac{12 \times 10^3}{4.2 \times 10^{-3}} \right) \text{ Pa} \\ &= 26.8 \text{ MPa} < [\sigma_t] = 30 \text{ MPa}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\max}^- &= \frac{M_{N \cdot A}}{I_{N \cdot A}} z_2 - \frac{F_N}{A} \\ &= \left(\frac{2.89 \times 10^3 \times 59.5 \times 10^{-3}}{4.88 \times 10^{-6}} - \frac{12 \times 10^3}{4.2 \times 10^{-3}} \right) \text{ Pa} \\ &= 32.3 \text{ MPa} < [\sigma_c] = 80 \text{ MPa}\end{aligned}$$

最大正应力小于许用应力, 故安全。

8.7 题 8.7 图(a)所示短柱受载荷 F_1 和 F_2 的作用, 试求固定端截面上角点 A 、 B 、 C 及 D 的正应力, 并确定其中性轴的位置。



题 8.7 图

解 这是一个偏心压缩问题, 截面 $ABCD$ 上的内力分量如题 8.7 图(b)所示。

$$F_N = F_1 = 25 \text{ kN}$$

$$M_y = F_1 \times 0.025 = (25 \times 10^3 \times 0.025) \text{ N} \cdot \text{m} = 625 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_z = F_2 \times 0.6 = (5 \times 10^3 \times 0.6) \text{ N} \cdot \text{m} = 3000 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$F_{Sy} = F_2 = 5 \text{ kN}$$

A、B、C、D 各点的正应力分别为

$$\begin{aligned}\sigma_A &= -\frac{F_N}{A} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} \\ &= \left(-\frac{25 \times 10^3}{0.15 \times 0.1} + \frac{6 \times 625}{0.15 \times 0.1^2} + \frac{6 \times 3000}{0.1 \times 0.15^2} \right) \text{ Pa} \\ &= 8.83 \text{ MPa}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_B &= -\frac{F_N}{A} - \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} \\ &= \left(-\frac{25 \times 10^3}{0.15 \times 0.1} - \frac{6 \times 625}{0.15 \times 0.1^2} + \frac{6 \times 3000}{0.1 \times 0.15^2} \right) \text{ Pa} \\ &= 3.83 \text{ MPa}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_C &= -\frac{F_N}{A} - \frac{M_y}{W_y} - \frac{M_z}{W_z} \\ &= \left(-\frac{25 \times 10^3}{0.15 \times 0.1} - \frac{6 \times 625}{0.15 \times 0.1^2} - \frac{6 \times 3000}{0.1 \times 0.15^2} \right) \text{ Pa} \\ &= -12.2 \text{ MPa}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_D &= -\frac{F_N}{A} + \frac{M_y}{W_y} - \frac{M_z}{W_z} \\ &= \left(-\frac{25 \times 10^3}{0.15 \times 0.1} + \frac{6 \times 625}{0.15 \times 0.1^2} - \frac{6 \times 3000}{0.1 \times 0.15^2} \right) \text{ Pa} \\ &= -7.17 \text{ MPa}\end{aligned}$$

设 y_0, z_0 为中性轴上任意一点的坐标, 则在该轴上的任一点的应力均为零, 即

$$\begin{aligned}\sigma(y_0, z_0) &= -\frac{F_N}{A} + \frac{M_y z_0}{I_y} + \frac{M_z y_0}{I_z} = 0 \\ -\frac{25 \times 10^3}{0.1 \times 0.15} + \frac{625 \times 12}{0.15 \times 0.1^3} z_0 + \frac{3000 \times 12}{0.1 \times 0.15^3} y_0 &= 0\end{aligned}$$

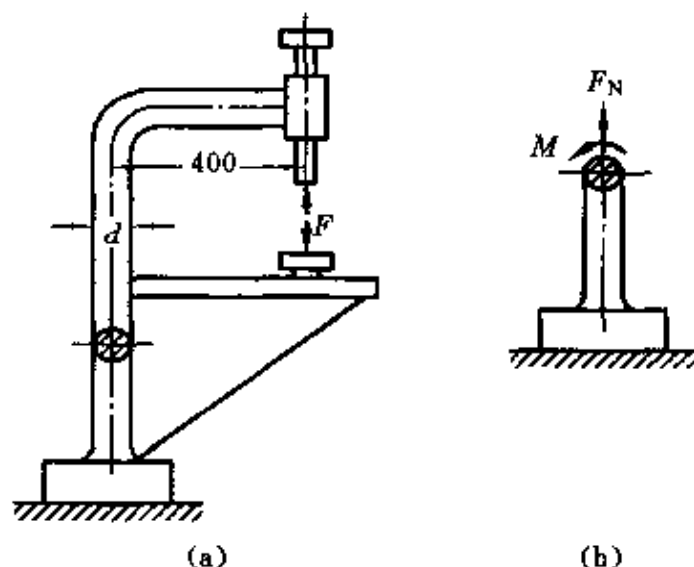
由上式得中性轴方程 $29.9z_0 + 63.9y_0 - 1 = 0$

若令 $z_0 = 0$, 得 $a_y = \frac{1}{63.9} \text{ m} = 15.6 \text{ mm}$

令 $y_0 = 0$, 得 $a_z = \frac{1}{29.9} \text{ m} = 33.4 \text{ mm}$

a_y, a_z 分别是中性轴与 y, z 轴的截距, 如题 8.7 图 (b) 所示。

8.8 题 8.8 图 (a) 所示钻床的立柱由铸铁制成, $F = 15 \text{ kN}$, 许用拉应力 $[\sigma_t] = 35 \text{ MPa}$ 。试确定立柱所需直径 d 。



题 8.8 图

解 立柱横截面上的内力分量如题 8.8 图 (b) 所示,

$$F_N = F = 15 \text{ kN}, \quad M = 0.4F = 6 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

这是一个拉弯组合变形问题, 横截面上的最大应力

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{F_N}{A} + \frac{M}{W} = \frac{4F_N}{\pi d^2} + \frac{32M}{\pi d^3} \\ &= \frac{4 \times 15 \times 10^3}{\pi d^2} + \frac{32 \times 6 \times 10^3}{\pi d^3} \end{aligned}$$

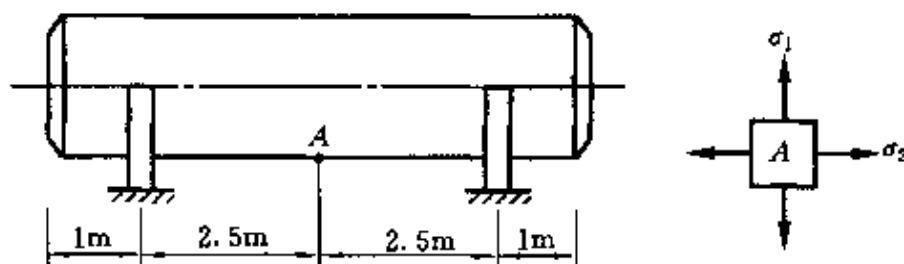
根据强度条件 $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$, 有

$$\left(\frac{4 \times 15 \times 10^3}{\pi d^2} + \frac{32 \times 6 \times 10^3}{\pi d^3} \right) \text{ Pa} \leq 35 \times 10^6 \text{ Pa}$$

由上式可求得立柱的直径

$$d \geq 122 \text{ mm}$$

8.9 水平放置的圆筒形容器如题 8.9 图所示。容器内径 1.5 m, 厚度 $\delta = 4 \text{ mm}$, 内储均匀内压力为 $p = 0.2 \text{ MPa}$ 的气体。容器每米重 18 kN。试求中央截面上 A 点的应力。



题 8.9 图

解 圆筒形薄壳容器, 可近似地作为在横向载荷 $q = 18 \text{ kN/m}$ 作用下受弯曲变形的梁。另外, 容器在内压作用下又有拉伸变形, 故为弯曲与拉伸的组合。在容器跨度中点横截面上, 由内压 p 引起的轴向均匀拉应力为

$$\sigma' = \frac{pD}{4\delta} = \left(\frac{0.2 \times 1.5}{4 \times 4 \times 10^{-3}} \right) \text{ Pa} = 18.8 \text{ MPa}$$

跨度中点横截面上的弯矩

$$\begin{aligned} M &= \left(\frac{1}{2} \times 18 \times 7 \times 2.5 - \frac{1}{2} \times 18 \times 3.5^2 \right) \text{ kN} \cdot \text{m} \\ &= 47.3 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

容器横截面为一薄圆环, 对水平直径的惯性矩(第十五章题 15.5)为

$$\begin{aligned} I_x &= \pi r^3 \delta = \left[\pi \left(\frac{1.5}{2} + \frac{1}{2} \times 4 \times 10^{-3} \right)^3 \times 4 \times 10^{-3} \right] \text{ m}^4 \\ &= 5.34 \times 10^{-3} \text{ m}^4 \end{aligned}$$

上式中, r 为圆环的平均半径。跨度中点截面上 A 点的弯曲正应力为

$$\sigma'' = \frac{My}{I_x} = \frac{47.3 \times 10^3 (1.5/2 + 4 \times 10^{-3})}{5.34 \times 10^{-3}} \text{ Pa} = 6.68 \text{ MPa}$$

叠加得 A 点的轴向拉应力 $\sigma_2 = \sigma' + \sigma'' = 25.5 \text{ MPa}$

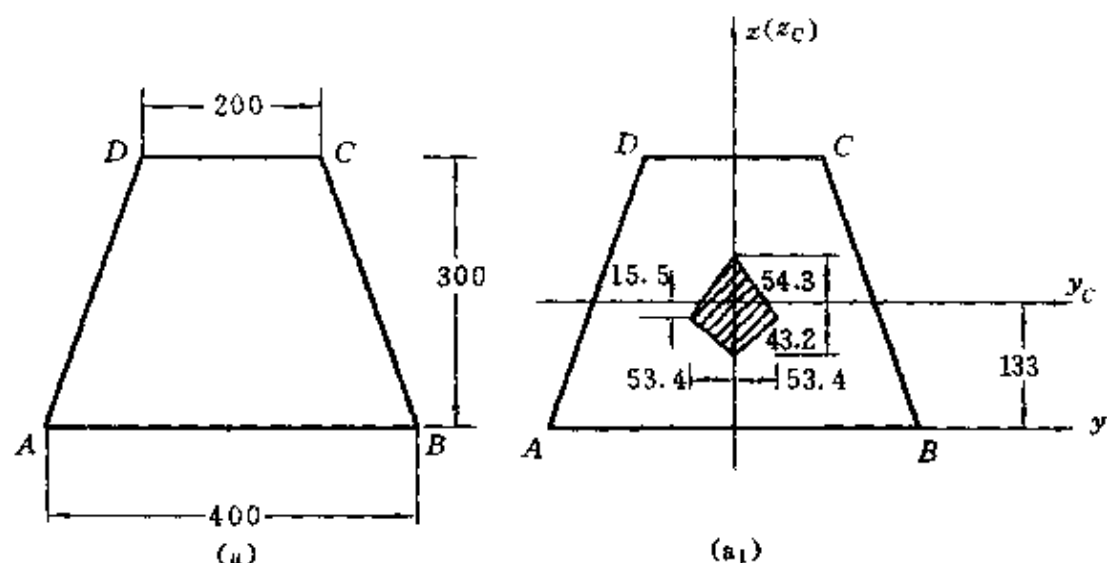
在通过 A 点的纵向截面上, 还有因内压 p 引起的环向拉应力

$$\sigma_1 = \frac{pD}{2\delta} = 37.5 \text{ MPa}$$

A 点的应力状态已表示于题 8.9 图中。

8.10 短柱的截面形状如题 8.10 图(a)、(b)所示, 试确定截面核心。

解 (a) 如题 8.10 图(a)所示。



题 8.10 图

梯形面积

$$A = \left[\frac{1}{2} \times (0.2 + 0.4) \times 0.3 \right] \text{ m}^2 = 0.09 \text{ m}^2$$

形心位置(见附录一)

$$z_c = \frac{h(2b + B)}{3(b + B)} = \frac{0.3 \times (2 \times 0.2 + 0.4)}{3 \times (0.2 + 0.4)} \text{ m} = 0.133 \text{ m}$$

对形心轴的惯性矩(见附录一)

$$\begin{aligned} I_{y_c} &= \frac{(b^2 + 4Bb + B^2)h^3}{36(b + B)} \\ &= \left[\frac{(0.2^2 + 4 \times 0.4 \times 0.2 + 0.4^2) \times 0.3^3}{36 \times (0.2 + 0.4)} \right] \text{ m}^4 \\ &= 6.5 \times 10^{-4} \text{ m}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{z_c} &= \left\{ \frac{1}{12} \times 0.3 \times 0.2^3 + 2 \times \left[\frac{1}{36} \times 0.3 \times 0.1^3 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \times 0.1 \times 0.3 \times \left(\frac{0.1}{3} + 0.1 \right)^2 \right] \right\} \text{ m}^4 \\
 &= 7.5 \times 10^{-4} \text{ m}^4
 \end{aligned}$$

应用 $I = i^2 A$ 的关系确定对形心轴的回转半径

$$i_{y_c}^2 = \frac{I_{y_c}}{A} = \frac{6.5 \times 10^{-4}}{0.09} \text{ m}^2 = 7.22 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$i_{z_c}^2 = \frac{I_{z_c}}{A} = \frac{7.5 \times 10^{-4}}{0.09} \text{ m}^2 = 8.33 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

利用公式 $y_{CF} = -\frac{i_{z_c}^2}{a_{y_c}}, \quad z_{CF} = -\frac{i_{y_c}^2}{a_{z_c}}$

确定力作用点的坐标:

当中性轴与 AB 边重合时, 中性轴在 y_c, z_c 坐标轴上的截距分别是

$$a_{z_c} = -0.133 \text{ m}, \quad a_{y_c} = \infty$$

所以力的作用点坐标是

$$y_{CF} = -\frac{i_{z_c}^2}{\infty} = 0, \quad z_{CF} = \frac{7.22 \times 10^{-3}}{0.133} \text{ m} = 0.0543 \text{ m}$$

当中性轴与 CD 边重合时, 中性轴在 y_c, z_c 坐标轴上的截距分别是

$$a_{z_c} = 0.167 \text{ m}, \quad a_{y_c} = \infty$$

所以力的作用点坐标是

$$y_{CF} = -\frac{i_{z_c}^2}{\infty} = 0, \quad z_{CF} = -\frac{7.22 \times 10^{-3}}{0.167} \text{ m} = -0.0432 \text{ m}$$

当中性轴与 AD 边重合时, 中性轴在 y_c, z_c 坐标轴上的截距分别是

$$a_{y_c} = -0.156 \text{ m}, \quad a_{z_c} = 0.467 \text{ m}$$

所以力的作用点坐标是

$$y_{CF} = \frac{8.33 \times 10^{-3}}{0.156} \text{ m} = 0.0534 \text{ m}$$

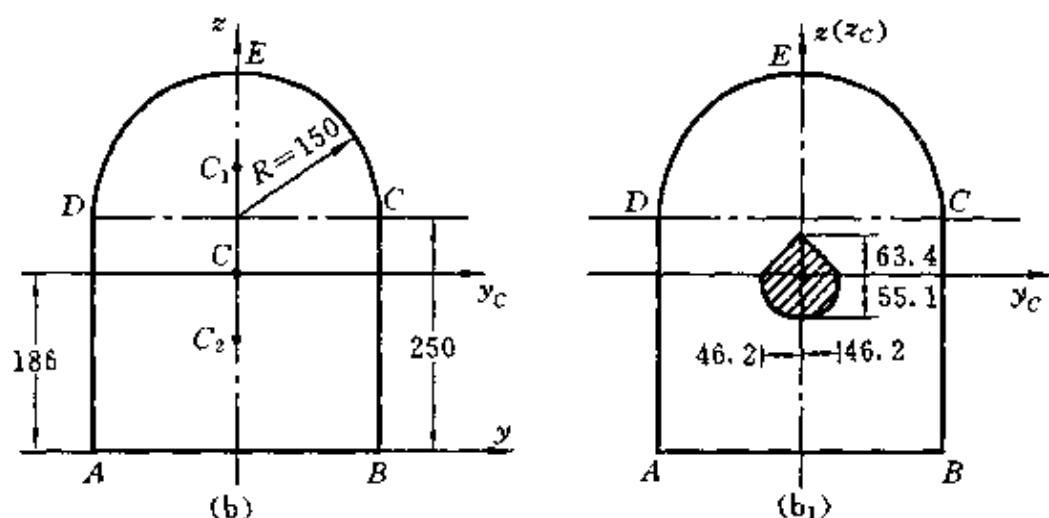
$$z_{CF} = \left(-\frac{7.22 \times 10^{-3}}{0.467} \right) \text{ m} = -0.0155 \text{ m}$$

当中性轴与 BC 边重合时, 情况和与 AD 边重合相同, 只是力作用点坐标在数值上相等, y_{CF} 符号相反, 即

$$y_{CF} = -0.0534 \text{ m}, \quad z_{CF} = -0.0155 \text{ m}$$

截面核心如题 8.10 图(a₁)所示。

(b) 如题 8.10 图(b)所示。



续题 8.10 图

半圆面积 $A_1 = \frac{\pi R^2}{2} = \left(\frac{\pi \times 0.15^2}{2} \right) \text{ m}^2 = 0.0353 \text{ m}^2$

形心 C_1 的位置

$$z_1 = \frac{4R}{3\pi} = \left(\frac{4 \times 0.15}{3\pi} \right) \text{ m} = 0.0637 \text{ m} \quad (C_1 \text{ 至 } CD \text{ 边的距离})$$

半圆面积对形心轴的惯性矩(查附录一)

$$I_{y_{1c}} = 0.1098R^4 = (0.1098 \times 0.15^4) \text{ m}^4 = 5.56 \times 10^{-5} \text{ m}^4$$

$$I_{z_{1c}} = \frac{\pi R^4}{8} = \frac{\pi}{8} (0.15)^4 \text{ m}^4 = 19.9 \times 10^{-5} \text{ m}^4$$

矩形面积 $A_2 = (0.3 \times 0.25) \text{ m}^2 = 0.075 \text{ m}^2$

形心 C_2 的位置

$$z_2 = \frac{0.25}{2} \text{ m} = 0.125 \text{ m} \quad (C_2 \text{ 至 } AB \text{ 边的距离})$$

矩形面积对形心轴的惯性矩

$$I_{y_{zc}} = \left\{ \frac{1}{12} \times 0.3 \times 0.25^3 \right\} \text{ m}^4 = 39.1 \times 10^{-5} \text{ m}^4$$

$$I_{z_{zc}} = \left\{ \frac{1}{12} \times 0.25 \times 0.3^3 \right\} \text{ m}^4 = 56.3 \times 10^{-5} \text{ m}^4$$

图形面积的形心

$$\begin{aligned} z_c &= \frac{A_1(z_1 + 0.25) + A_2 z_2}{A_1 + A_2} \\ &= \frac{0.0353 \times (0.0637 + 0.25) + 0.075 \times 0.125}{0.0353 + 0.075} \text{ m} \\ &= 0.186 \text{ m} \end{aligned}$$

图形面积对形心轴的惯性矩

$$\begin{aligned} I_{z_c} &= I_{z_{zc}} + I_{z_{zc}} \\ &= (19.9 \times 10^{-5} + 56.3 \times 10^{-5}) \text{ m}^4 = 76.2 \times 10^{-5} \text{ m}^4 \\ I_{y_c} &= I_{y_{zc}} + A_1(z_1 + 0.25 - z_c)^2 + I_{y_{zc}} + A_2(z_c - z_2)^2 \\ &= [5.56 \times 10^{-5} + 0.0353 \times (0.0637 + 0.25 - 0.186)^2 \\ &\quad + 39.1 \times 10^{-5} + 0.075 \times (0.186 - 0.125)^2] \text{ m}^4 \\ &= (63.2 \times 10^{-5} + 67 \times 10^{-5}) \text{ m}^4 = 130 \times 10^{-5} \text{ m}^4 \end{aligned}$$

应用 $I = i^2 A$ 的关系确定图形面积对形心轴的回转半径

$$i_{y_c}^2 = \frac{I_{y_c}}{A} = \frac{130 \times 10^{-5}}{A_1 + A_2} = \frac{130 \times 10^{-5}}{0.110} \text{ m}^2 = 1.18 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

$$i_{z_c}^2 = \frac{I_{z_c}}{A} = \frac{76.2 \times 10^{-5}}{0.110} \text{ m}^2 = 6.93 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

利用公式 $y_F = -\frac{i_x^2}{a_y}, \quad z_F = -\frac{i_y^2}{a_x}$

确定力作用点的坐标:

当中性轴与 AB 边重合时, 中性轴在 y_c, z_c 坐标轴上的截距分别是

$$a_{z_c} = -0.186 \text{ m}, \quad a_{y_c} = \infty$$

所以力的作用点坐标是

$$y_{CF} = -\frac{i_{zC}^2}{\infty} = 0, \quad z_{CF} = \frac{1.18 \times 10^{-2}}{0.186} \text{ m} = 0.0634 \text{ m}$$

当中性轴与半圆周的 E 点相切时, 中性轴在 y_C, z_C 坐标轴上的截距分别是

$$a_{z_C} = (0.15 + 0.25 - 0.186) \text{ m} = 0.214 \text{ m}, \quad a_{y_C} = \infty$$

所以力的作用点坐标是

$$y_{CF} = -\frac{i_x^2}{\infty} = 0, \quad z_{CF} = -\frac{1.18 \times 10^{-2}}{0.214} \text{ m} = -0.0551 \text{ m}$$

当中性轴与 AD 边重合时, 中性轴在 y_C, z_C 坐标轴上的截距分别是

$$a_y = -0.15 \text{ m}, \quad a_z = \infty$$

所以力的作用点坐标是

$$y_F = \frac{6.93 \times 10^{-3}}{0.15} \text{ m} = 0.0462 \text{ m}, \quad z_F = -\frac{i_y^2}{\infty} = 0$$

当中性轴与 BC 边重合时, 情况和与 AD 边重合相同, 只是力作用点坐标在数值上相等, 符号相反, 即

$$y_F = -0.0462 \text{ m}, \quad z_F = 0$$

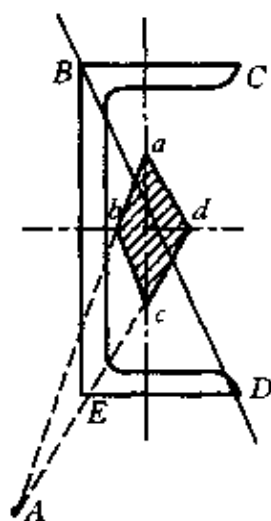
截面核心如题 8.10 图(b₁)所示。

8.11 如题 8.11 图所示, 槽形截面的截面核心为 $abcd$, 若有垂直于截面的偏心压力 F 作用于 A 点, 试指出这时中性轴的位置。

解 对于偏心受压(拉)的杆, 其中性轴方程为

$$1 + \frac{y_0}{i_z^2} y_F + \frac{z_0}{i_y^2} z_F = 0$$

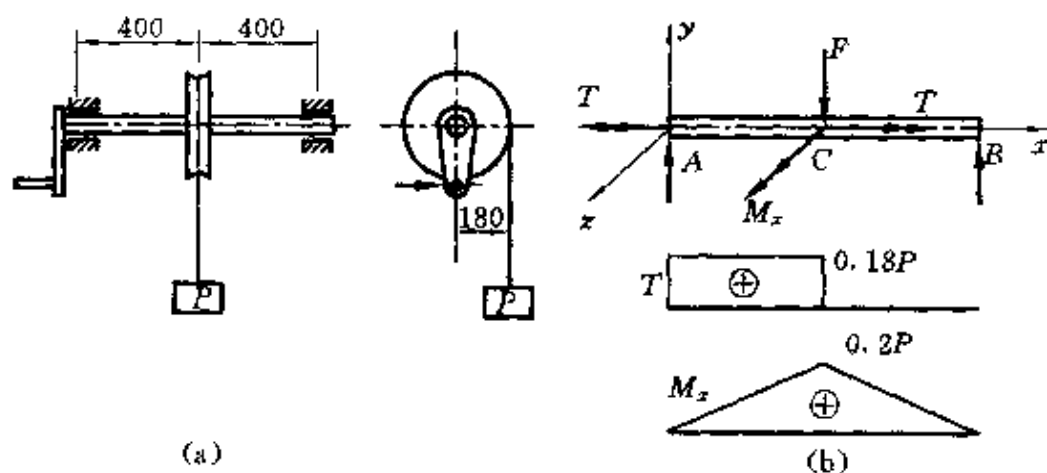
式中, y_F, z_F 为力作用点的坐标。当 y_F, z_F 为已知时, 上式为 y_0, z_0 的一次式, 即中性轴为一直线。反之, 若 y_0, z_0 已知(即某一零应力点固定不变), 则上式为 y_F, z_F 的一次式, 即力的作用点沿直线移动, 中性轴绕某一点转动。本题中已知四边形 $abcd$ 为



题 8.11 图

截面核心,可见力作用在 d 点时,中性轴为 \overline{EB} ,力作用在 c 点时,中性轴为 \overline{BC} ,交点在 B 。力的作用点沿 \overline{dc} 移动时,中性轴必定绕 B 点转动。同样,作用点沿 \overline{ab} 移动时,中性轴必绕 D 点转动, A 点为 \overline{dc} 和 \overline{ab} 两直线的交点。故当力的作用点在 A 时,中性轴必定为通过 B 、 D 两点的直线,即 \overline{BD} 。

8.12 手摇绞车如题 8.12 图(a)所示,轴的直径 $d=30\text{ mm}$,材料为Q235 钢, $[\sigma]=80\text{ MPa}$ 。试按第三强度理论,求绞车的最大起吊重量 P 。



题 8.12 图

解 圆轴受力图、扭矩图、弯矩图如题 8.12 图(b)所示。这是一个弯扭组合变形问题,由内力图可以判定, C 处为危险截面。其上的弯矩和扭矩分别为

$$M_C = \frac{Pl}{4} = 0.2P \text{ (N} \cdot \text{m)}, \quad T_C = 0.18P \text{ (N} \cdot \text{m)}$$

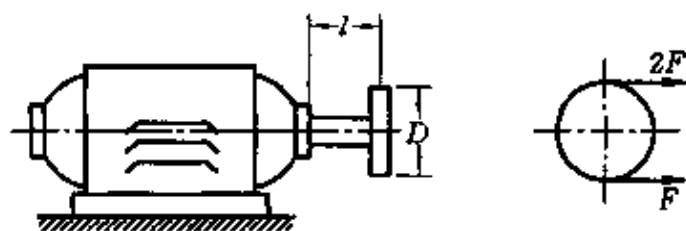
按第三强度理论
$$\frac{\sqrt{T^2 + M_x^2}}{W} \leq [\sigma]$$

将 M_C 、 T_C 值代入上式得

$$P \leq \left[\frac{80 \times 10^6 \left(\frac{\pi}{32} \times 0.03^3 \right)}{\sqrt{0.18^2 + 0.2^2}} \right] \text{ N} = 788 \text{ N}$$

绞车最大起吊重量为 $P=788\text{ N}$ 。

8.13 如题 8.13 图所示,电动机的功率为 9 kW ,转速为 715 r/min ,带轮直径 $D=250\text{ mm}$,主轴外伸部分长度 $l=120\text{ mm}$,主轴直径 $d=40\text{ mm}$ 。若 $[\sigma]=60\text{ MPa}$,试用第三强度理论校核轴的强度。



题 8.13 图

解 这是一个弯扭组合变形问题。显然危险截面在主轴根部。该处的内力分量分别为

$$\text{扭矩 } T = 9549 \frac{P}{n} = \left(9549 \times \frac{9}{715} \right) \text{ N} \cdot \text{m} = 120 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\text{根据平衡条件} \quad 2F \times \frac{D}{2} - F \times \frac{D}{2} = T$$

$$\text{得} \quad F = \frac{2T}{D} = \frac{2 \times 120}{0.25} \text{ N} = 960 \text{ N}$$

$$\text{弯矩} \quad M = 3Fl = (3 \times 960 \times 0.12) \text{ N} \cdot \text{m} = 346 \text{ N} \cdot \text{m}$$

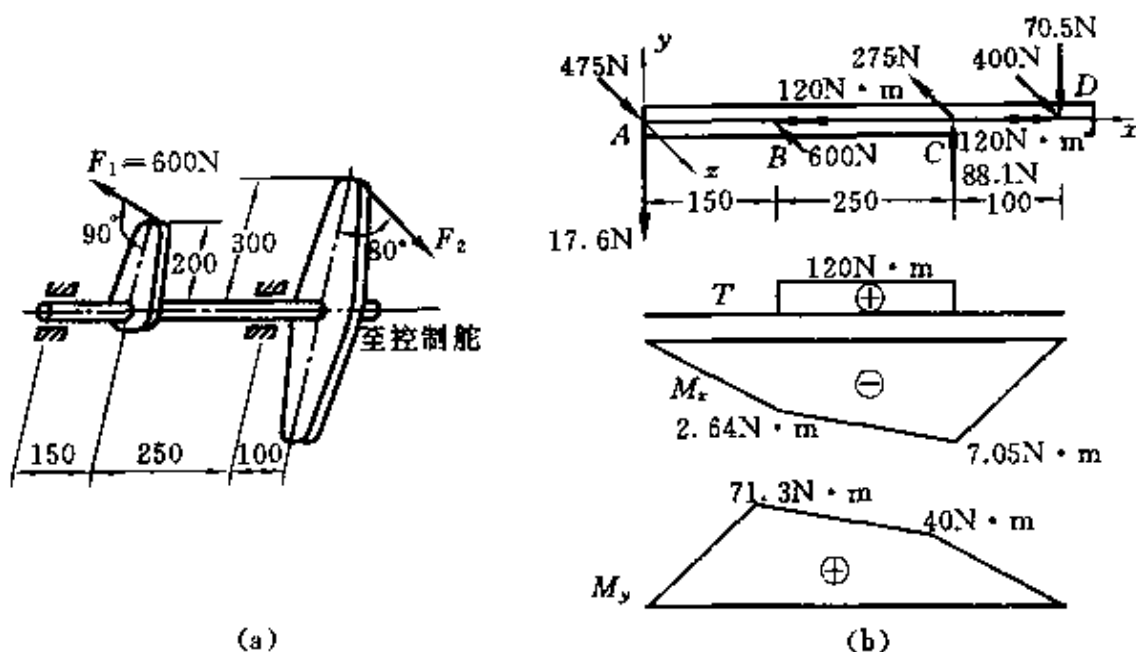
应用第三强度理论

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{W} = \frac{\sqrt{120^2 + 346^2}}{\frac{\pi}{32} \times (40 \times 10^{-3})^3} \text{ Pa} \\ &= 58.3 \text{ MPa} < [\sigma] = 60 \text{ MPa} \end{aligned}$$

最大工作应力小于许用应力,满足强度要求,故安全。

8.14 题 8.14 图(a)为操纵装置水平杆,截面为空心圆形,内径 $d=24\text{ mm}$,外径 $D=30\text{ mm}$ 。材料为 Q235 钢, $[\sigma]=100\text{ MPa}$ 。控制片受力 $F_1=600\text{ N}$ 。试用第三强度理论校核杆的强度。

解 这是一个弯扭组合变形问题。空心水平圆杆的受力图如



题 8.14 图

题 8.14 图(b)所示。利用平衡条件可以求出杆上的反力,并作内力图(题 8.14 图(b))。从内力图可以判定危险截面在 B 处,其上的扭矩和弯矩为

$$T = 0.2F_1 = (0.2 \times 600) \text{ N} \cdot \text{m} = 120 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{2.64^2 + 71.3^2} \text{ N} \cdot \text{m} = 71.3 \text{ N} \cdot \text{m}$$

应用第三强度理论

$$\begin{aligned} \sigma_{r3} &= \frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{W} = \frac{\sqrt{71.3^2 + 120^2}}{\frac{\pi}{32}(0.03)^3 \times \left[1 - \left(\frac{24}{30}\right)^4\right]} \text{ Pa} \\ &= 89.2 \text{ MPa} < [\sigma] = 100 \text{ MPa} \end{aligned}$$

最大工作应力小于许用应力,满足强度要求,可以安全工作。

8.15 某型水轮机主轴的示意图如题 8.15 图所示。水轮机组的输出功率为 $P = 37500 \text{ kW}$, 转速 $n = 150 \text{ r/min}$ 。已知轴向推力 $F_z = 4800 \text{ kN}$, 转轮重 $W_1 = 390 \text{ kN}$; 主轴的内径 $d = 340 \text{ mm}$, 外径 $D = 750 \text{ mm}$, 自重 $W = 285 \text{ kN}$ 。主轴材料为 45 钢, 其许用应力 $[\sigma] = 80 \text{ MPa}$ 。试按第四强度理论校核主轴的强度。

解 这是一个拉扭组合变形问题,危险截面在主轴根部。该处的内力分量为

$$\begin{aligned} F_N &= F_z + W_1 + W \\ &= (4800 + 390 + 285) \text{ kN} = 5475 \text{ kN} \\ T &= 9549 \frac{P}{n} = \left(9549 \times \frac{37500}{150} \right) \text{ N} \cdot \text{m} \\ &= 2.4 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

危险点的应力分量

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{T}{W} = \frac{16 \times 2.4 \times 10^3}{\pi \times 0.75^3 \times [1 - (340/750)^4]} \text{ Pa} \\ &= 30.3 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\sigma = \frac{F_N}{A} = \frac{5475 \times 10^3 \times 4}{\pi(0.75^2 - 0.34^2)} \text{ Pa} = 15.6 \text{ MPa}$$

按第四强度理论

$$\begin{aligned} \sigma_{r4} &= \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{15.6^2 + 3 \times 30.3^2} \text{ MPa} \\ &= 54.8 \text{ MPa} < [\sigma] = 80 \text{ MPa} \end{aligned}$$

危险点处的应力小于许用应力,故安全。

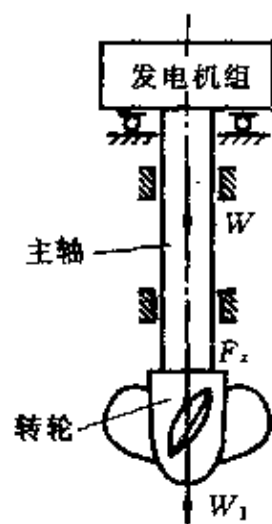
8.16 题8.16图(a)为某精密磨床砂轮轴的示意图。已知电动机功率 $P=3 \text{ kW}$, 转子转速 $n=1400 \text{ r/min}$, 转子重量 $W_1=101 \text{ N}$ 。砂轮直径 $D=250 \text{ mm}$, 砂轮重量 $W_2=275 \text{ N}$ 。磨削力 F_y : $F_z=3:1$, 砂轮轴直径 $d=50 \text{ mm}$, 材料为轴承钢, $[\sigma]=60 \text{ MPa}$ 。(1)试用单元体表示出危险点的应力状态,并求出主应力和最大剪应力。(2)试用第三强度理论校核轴的强度。

解 这是一个弯扭组合变形问题,砂轮轴的受力图和内力图如题8.16图(b)所示。

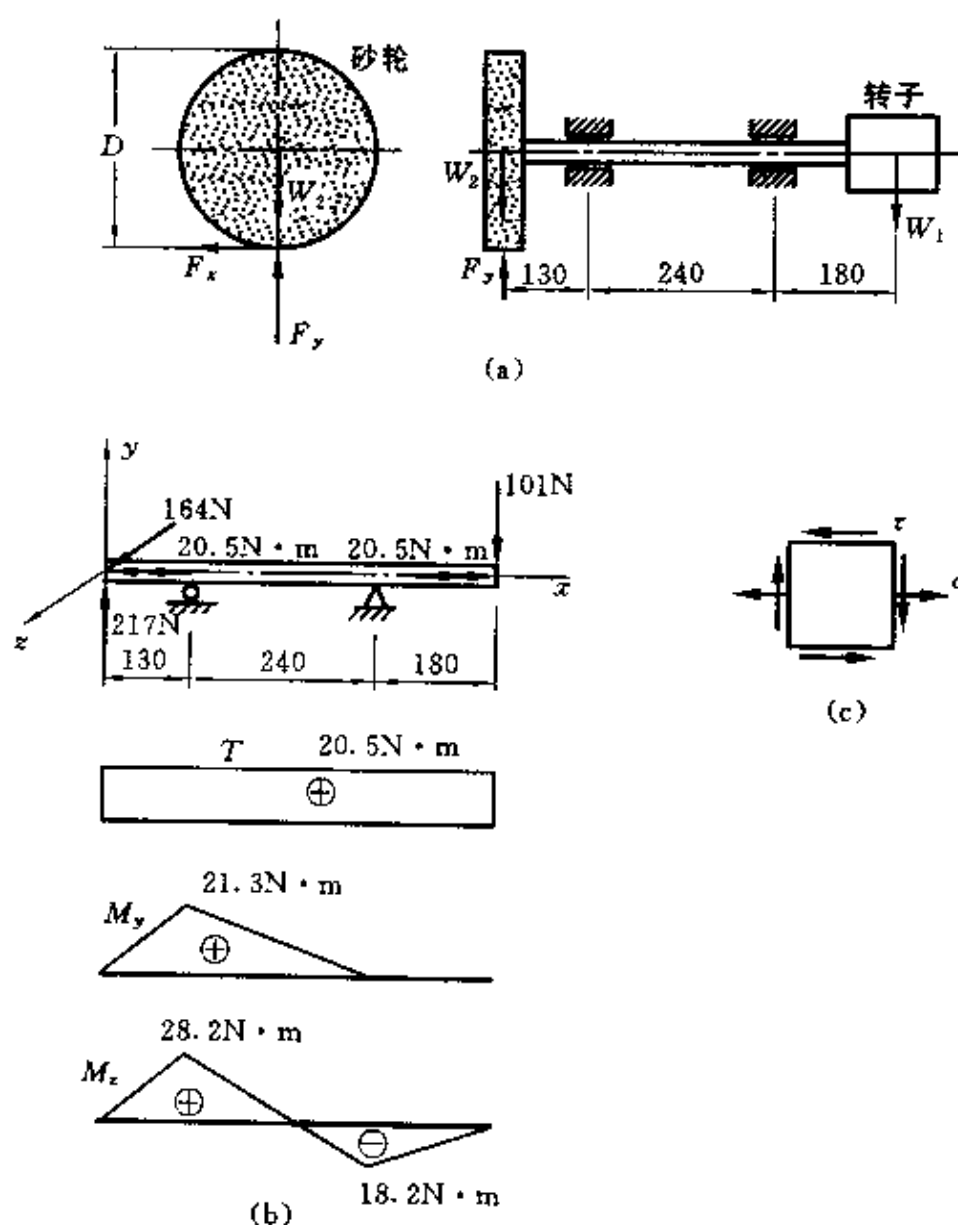
砂轮轴承受的扭矩

$$T = 9549 \frac{P}{n} = \left(9549 \times \frac{3}{1400} \right) \text{ N} \cdot \text{m} = 20.5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

磨削力



题8.15图



题 8.16 图

$$F_z = \frac{T}{D/2} = \frac{20.5}{0.25/2} = 164 \text{ N}, \quad F_y = 3F_z = 492 \text{ N}$$

由内力图题 8.16 图 (b) 可以判定危险截面在左支座处。该截面的扭矩为

$$T = 20.5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

总弯矩为

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{21.3^2 + 28.2^2} \text{ N} \cdot \text{m} = 35.3 \text{ N} \cdot \text{m}$$

危险点的应力分量

$$\tau = \frac{T}{W_P} = \frac{16 \times 20.5}{\pi \times 0.05^3} \text{ Pa} = 0.835 \text{ MPa}$$

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{32 \times 35.3}{\pi \times 0.05^3} \text{ Pa} = 2.88 \text{ MPa}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{array} \right\} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$= \left[\frac{2.88}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2.88}{2}\right)^2 + 0.835^2} \right] \text{ MPa} = \begin{cases} 3.10 \text{ MPa} \\ -0.22 \text{ MPa} \end{cases}$$

按照主应力的记号规定

$$\sigma_1 = 3.10 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -0.22 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{3.10 + 0.22}{2} \text{ MPa} = 1.66 \text{ MPa}$$

应用第三强度理论

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = 3.32 \text{ MPa} < [\sigma] = 60 \text{ MPa}$$

危险点的应力状态用单元体表示在题 8.16 图(c)中。危险点的应力远小于许用应力,所以安全。

8.17 题 8.17 图(a)所示皮带轮传动轴,传递功率 $P=7 \text{ kW}$, 转速 $n=200 \text{ r/min}$ 。皮带轮重量 $W=1.8 \text{ kN}$ 。左端齿轮上啮合力 F_n 与齿轮节圆切线的夹角(压力角)为 20° 。轴的材料为 Q255 钢,其许用应力 $[\sigma]=80 \text{ MPa}$ 。试分别在忽略和考虑皮带轮重量的两种情况下,按第三强度理论估算轴的直径。

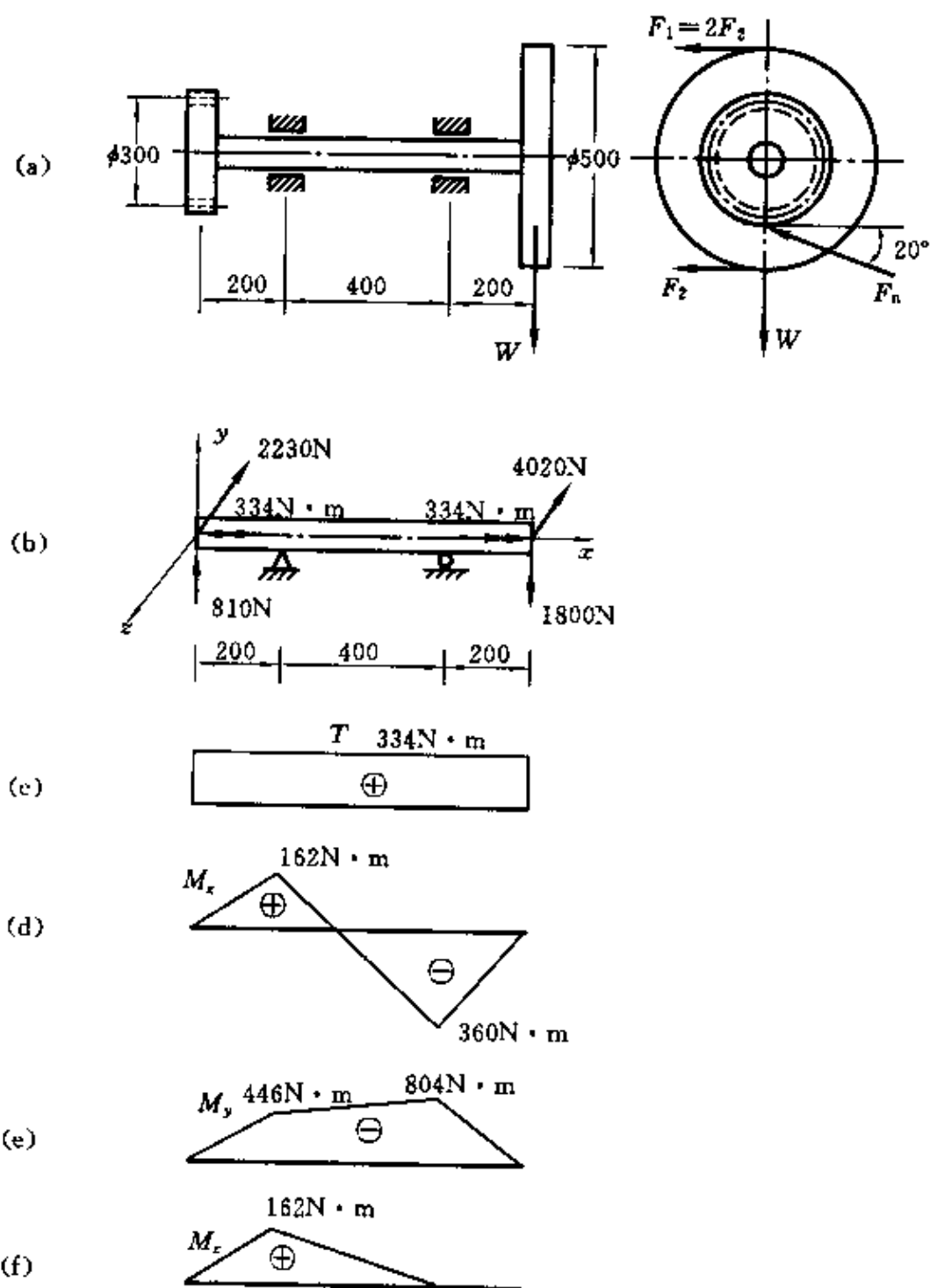
解 这是个弯扭组合变形问题,传动轴承受的扭矩

$$T = 9549 \frac{P}{n} = \left(9549 \times \frac{7}{200} \right) \text{ N} \cdot \text{m} = 334 \text{ N} \cdot \text{m}$$

根据平衡条件确定皮带张力 F_1 和 F_2 及 F_n :

$$\text{因} \quad F_2 \times 0.25 = 334$$

$$\text{所以} \quad F_2 \approx 1340 \text{ N}, \quad F_1 = 2680 \text{ N}$$



题 8.17 图

$$\text{因} \quad F_n \cos 20^\circ \times 0.15 = 334$$

$$\text{所以} \quad F_n = 2370 \text{ N}$$

传动轴的受力图如题 8.17 图(b)所示。考虑皮带轮重量 W 时的内力图如题 8.17 图(c)、(d)、(e)所示。不考虑皮带轮重量 W 时,内力图只有 M_x 发生变化,如题 8.17 图(f)所示,其它内力图不变。根据内力图可以判定,无论是否考虑皮带轮自重,危险截面均在右支座处。危险截面上的内力分量是

$$\text{扭矩} \quad T = 334 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\begin{aligned} \text{总弯矩} \quad M &= \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{804^2 + 360^2} \text{ N} \cdot \text{m} \\ &= 881 \text{ N} \cdot \text{m} \quad (\text{考虑皮带轮重量}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{804^2 + 0} \text{ N} \cdot \text{m} \\ &= 804 \text{ N} \cdot \text{m} \quad (\text{不考虑皮带轮重量}) \end{aligned}$$

按第三强度理论估算轴的直径

$$\frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{W} \leq [\sigma]$$

$$\frac{32 \times \sqrt{881^2 + 334^2}}{\pi d^3} \leq 80 \times 10^6$$

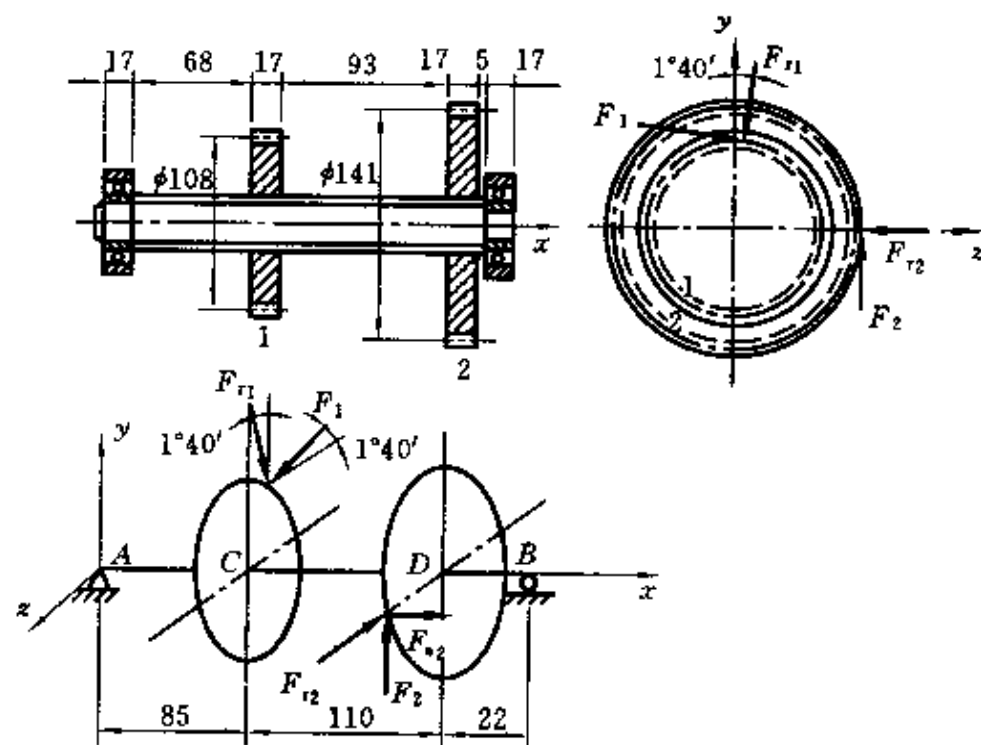
$$d \geq 49 \text{ mm} \quad (\text{考虑皮带轮重量})$$

$$\frac{32 \times \sqrt{804^2 + 334^2}}{\pi d^3} \leq 80 \times 10^6$$

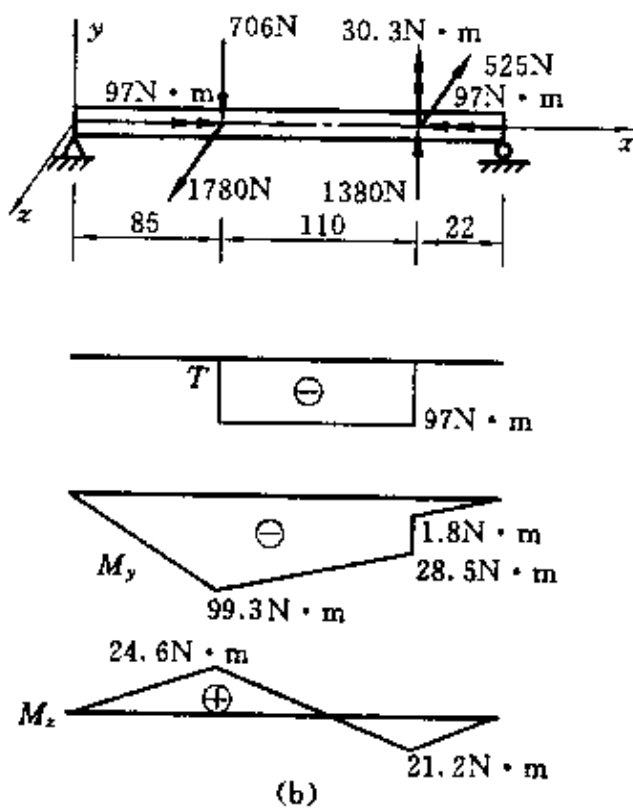
$$d \geq 48 \text{ mm} \quad (\text{不考虑皮带轮重量})$$

8.18 如题 8.18 图(a)所示,某滚齿机变速箱第 I 轴为直径 $d = 36 \text{ mm}$ 的花键轴。传递功率 $P = 3.2 \text{ kW}$, 转速 $n = 315 \text{ r/min}$ 。轴上齿轮 1 为直齿圆柱齿轮,节圆直径 $d_1 = 108 \text{ mm}$ 。传动力分解为周向力 F_1 和径向力 F_{r1} , 且 $F_{r1} = F_1 \tan 20^\circ$ 。齿轮 2 为螺旋角 $\beta = 17^\circ 20'$ 的斜齿轮,节圆直径 $d_2 = 141 \text{ mm}$ 。传动力分解为周向力 F_2 、径向力 F_{r2} 和轴向力 F_{a2} , 且

$$F_{r2} = \frac{F_2 \tan 20^\circ}{\cos 17^\circ 20'}, \quad F_{a2} = F_2 \tan 17^\circ 20'$$



(a)



(b)

题 8.18 图

轴材料为 45 钢,调质, $[\sigma]=85 \text{ MPa}$ 。试校核轴的强度。

解 这是个弯扭组合变形问题,轴承受的扭矩、传动力的径向力和周向力分别是

$$T = 9549 \frac{P}{n} = \left(9549 \times \frac{3.2}{315} \right) \text{ N} \cdot \text{m} = 97 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$F_1 = \frac{T}{d_1/2} = \left(\frac{97 \times 2}{0.108} \right) \text{ N} = 1796 \text{ N}$$

$$F_{r1} = F_1 \tan 20^\circ = (1796 \times \tan 20^\circ) \text{ N} = 654 \text{ N}$$

$$F_2 = \frac{T}{d_2/2} = \frac{2 \times 97}{0.141} \text{ N} = 1376 \text{ N}$$

$$F_{r2} = F_2 \frac{\tan 20^\circ}{\cos 17.3^\circ} \text{ N} = 525 \text{ N}$$

$$F_{a2} = F_2 \tan 17.3^\circ \text{ N} = 429 \text{ N}$$

轴的受力和内力图如题 8.18 图(b)所示,根据内力图可判定危险截面在 C 处,该截面上的内力分量

$$T = 97 \text{ N} \cdot \text{m}, \quad M_y = 101 \text{ N} \cdot \text{m}, \quad M_z = 24.6 \text{ N} \cdot \text{m}$$

合成弯矩

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{101^2 + 24.6^2} \text{ N} \cdot \text{m} = 104 \text{ N} \cdot \text{m}$$

应用第三强度理论

$$\frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{W} = \left[\frac{32 \times \sqrt{104^2 + 97^2}}{\pi \times (0.036)^3} \right] \text{ Pa}$$

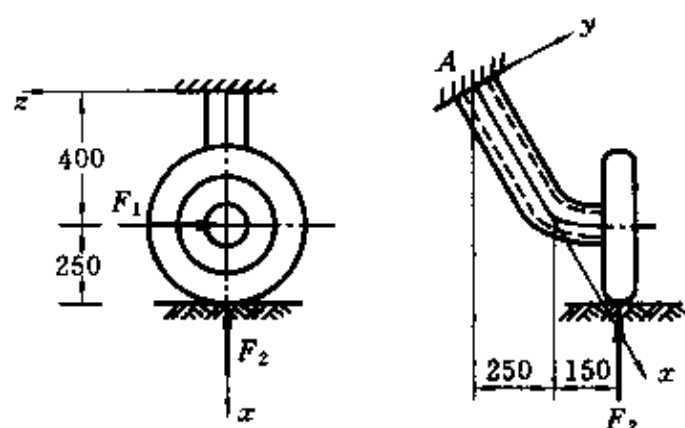
$$= 31 \text{ MPa} < [\sigma] = 85 \text{ MPa}$$

最大工作应力小于许用应力,所以轴满足强度要求,安全。

8.19 如题 8.19 图所示,飞机起落架的折轴为管状截面,内径 $d=70 \text{ mm}$,外径 $D=80 \text{ mm}$ 。材料的许用应力 $[\sigma]=100 \text{ MPa}$,试按第三强度理论校核折轴的强度。若 $F_1=1 \text{ kN}$, $F_2=4 \text{ kN}$ 。

解 这是个弯扭组合问题。显而易见的是危险截面在折轴根部,该截面上的内力分量是

$$F_N = F_2 \frac{0.4}{\sqrt{0.4^2 + 0.25^2}} = \left(4 \times \frac{0.4}{\sqrt{0.4^2 + 0.25^2}} \right) \text{ kN} = 3.39 \text{ kN}$$



题 8.19 图

$$T = F_1 \times 0.15 \times \frac{0.4}{\sqrt{0.4^2 + 0.25^2}}$$

$$= \left(10^3 \times 0.15 \times \frac{0.4}{\sqrt{0.4^2 + 0.25^2}} \right) \text{ N} \cdot \text{m} = 127 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_y = F_1 \times 0.15 \times \frac{0.25}{\sqrt{0.4^2 + 0.25^2}} + F_1 \sqrt{0.4^2 + 0.25^2}$$

$$= \left(1 \times 10^3 \times 0.15 \times \frac{0.25}{\sqrt{0.4^2 + 0.25^2}} \right.$$

$$\left. + 1 \times 10^3 \times \sqrt{0.4^2 + 0.25^2} \right) \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$= 551 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_z = F_2 \times 0.4 = (4 \times 10^3 \times 0.4) \text{ N} \cdot \text{m} = 1600 \text{ N} \cdot \text{m}$$

合成力矩

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{551^2 + 1600^2} \text{ N} \cdot \text{m} = 1690 \text{ N} \cdot \text{m}$$

危险点的应力分量

$$\sigma = \frac{F_N}{A} + \frac{M}{W}$$

$$= \left\{ \frac{3390}{\frac{\pi}{4} (0.08^2 - 0.07^2)} + \frac{1690}{\frac{\pi}{32} \times 0.08^3 \times \left[1 - \left(\frac{7}{8} \right)^4 \right]} \right\} \text{ Pa}$$

$$= 84.1 \text{ MPa}$$

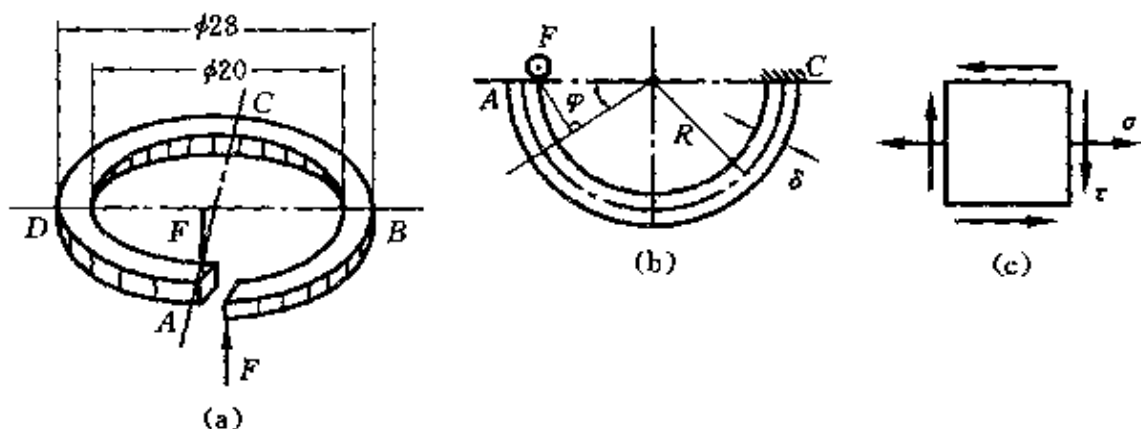
$$\tau = \frac{T}{W_P} = \left\{ \frac{127}{\frac{\pi}{16} \times 0.08^3 \times \left[1 - \left(\frac{7}{8} \right)^4 \right]} \right\} \text{ Pa} = 3.05 \text{ MPa}$$

应用第三强度理论

$$\begin{aligned} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} &= \sqrt{84.1^2 + 4 \times 3.05^2} \text{ MPa} \\ &= 84.3 \text{ MPa} < [\sigma] = 100 \text{ MPa} \end{aligned}$$

危险点的应力小于许用应力,故安全。

8.20 如题 8.20 图(a)所示,截面为正方形 $4 \text{ mm} \times 4 \text{ mm}$ 的弹簧垫圈,若两个 F 力可视为作用在同一直线上,垫圈材料的许用应力 $[\sigma] = 600 \text{ MPa}$,试按第三强度理论求许可载荷 F 。



题 8.20 图

解 这是个关于 AC 平面的反对称问题,可以假设 C 截面固定,只对 ABC 半圆环求解(题 8.20 图(b))。

弹簧垫圈受力后,产生弯扭组合变形。而且还是个方形截面杆的扭转问题。对任意截面,其弯矩为

$$M = FR \sin \varphi \quad (1)$$

其扭矩为 $T = FR(1 - \cos \varphi) \quad (2)$

该截面上危险点的应力状态如题 8.20 图(c)所示。其应力分量

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{6M}{\delta^3} \quad (3)$$

$$\tau = \frac{T}{0.208\delta^3} = \frac{4.81T}{\delta^3} \quad (4)$$

第三强度理论的相当应力

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (5)$$

将①、②、③、④式代入⑤式中并简化,得

$$\sigma_{r3} = \frac{FR}{\delta^3} \sqrt{36\sin^2\varphi + 92.5(1 - \cos\varphi)^2} \quad (6)$$

σ_{r3} 是 φ 的函数,上式两边对 φ 求导有

$$\frac{d\sigma_{r3}}{d\varphi} = \frac{FR}{2\delta^3} \times \frac{\sin\varphi(185 - 113\cos\varphi)}{\sqrt{36\sin^2\varphi + 92.5(1 - \cos\varphi)^2}}$$

当 $0 \leq \varphi \leq \pi$ 时, $d\sigma_{r3}/d\varphi > 0$,所以 σ_{r3} 是 φ 的增函数,因此危险点将出现在 $\varphi = \pi$ 处,即C截面。用 $\varphi = \pi$ 代入⑥式,求出

$$\sigma_{r3} = 19.2 \frac{FR}{\delta^3} \leq [\sigma]$$

解上式可得许用载荷

$$[F] = \frac{[\sigma]\delta^3}{19.2R} = \frac{600 \times 10^6 \times (4 \times 10^{-3})^3}{19.2 \times 12 \times 10^{-3}} \text{ N} = 167 \text{ N}$$

8.21 铸铁曲柄如题8.21图(a)所示。已知材料的许用应力 $[\sigma] = 120 \text{ MPa}$, $F = 30 \text{ kN}$ 。试用第四强度理论校核曲柄 $m-m$ 截面的强度。

解 这是个弯扭组合变形问题。

(1) C点的强度

$m-m$ 截面上的内力分量

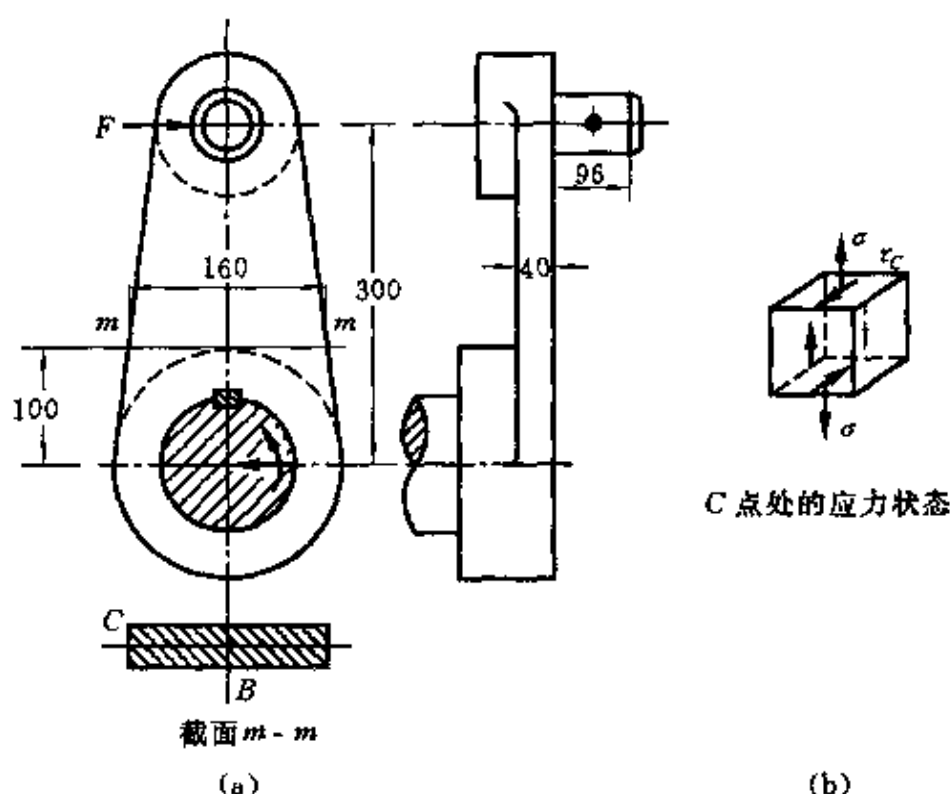
弯矩

$$M_y = 0.2F = (0.2 \times 30) \text{ kN} \cdot \text{m} = 6 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

扭矩

$$\begin{aligned} T &= (0.048 + 0.02)F = [(0.048 + 0.02) \times 30] \text{ kN} \cdot \text{m} \\ &= 2.04 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

C点的应力分量(题8.21图(b))



题 8.21 图

弯曲正应力
$$\sigma_C = \frac{M_y z}{I_y} = \frac{6 \times 10^3 \times 0.08}{\frac{1}{12} \times 0.04 \times 0.16^3} \text{ Pa} = 35.2 \text{ MPa}$$

扭转切应力
$$\tau_C = \nu \tau_{\max} = \nu \frac{T}{\alpha h b^2}$$

因 $h/b = 160/40 = 4$, 查附录五可得

$$\alpha = 0.283, \quad \nu = 0.754$$

所以
$$\tau_C = \left(0.754 \times \frac{2.04 \times 10^3}{0.283 \times 0.16 \times 0.04^2} \right) \text{ Pa} = 21.2 \text{ MPa}$$

弯曲切应力
$$\tau_Q = 0$$

应用第四强度理论

$$\begin{aligned} \sigma_{r4} &= \sqrt{\sigma_C^2 + 3\tau_C^2} = \sqrt{35.2^2 + 3 \times 21.2^2} \text{ MPa} \\ &= 50.9 \text{ MPa} < [\sigma] = 120 \text{ MPa} \end{aligned}$$

(2) B 点的强度

因 B 点在中性轴上, 所以 B 点弯曲正应力 $\sigma_B = 0$, 应力分量只

有扭转切应力

$$\tau_B = \frac{T}{\alpha h b^2} = \frac{2.04 \times 10^3}{0.283 \times 0.16 \times 0.04^2} \text{ Pa} = 28.2 \text{ MPa}$$

弯曲切应力

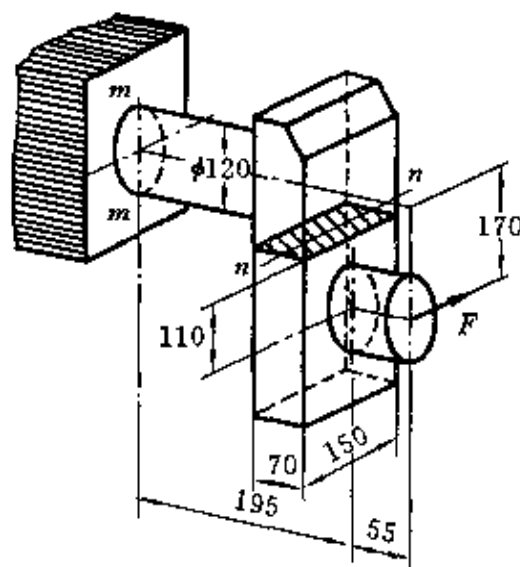
$$\tau_Q = \frac{3}{2} \times \frac{F_S}{A} = \left(\frac{3}{2} \times \frac{30 \times 10^3}{0.16 \times 0.04} \right) \text{ Pa} = 7.03 \text{ MPa}$$

应用第四强度理论

$$\begin{aligned} \sigma_{r4} &= \sqrt{\sigma_B^2 + 3(\tau_B + \tau_Q)^2} = \sqrt{3 \times (28.2 + 7.03)^2} \text{ MPa} \\ &= 61 \text{ MPa} < [\sigma] = 120 \text{ MPa} \end{aligned}$$

m - m 截面两个最大应力都小于许用应力,所以安全。

8.22 曲拐如题8.22图所示。若 $F=50 \text{ kN}$, $[\sigma]=90 \text{ MPa}$, 试按第三强度理论校核截面 m - m 和 n - n 的强度。



题8.22图

解 (1) 校核 m - m 截面

截面上的内力分量

$$\begin{aligned} M &= F(0.195 + 0.055) = [50 \times (0.195 + 0.055)] \text{ kN} \cdot \text{m} \\ &= 12.5 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

$$T = F \times 0.17 = (50 \times 0.17) \text{ kN} \cdot \text{m} = 8.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

应用第三强度理论

$$\frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{W} = \left[\frac{\sqrt{(12.5 \times 10^3)^2 + (8.5 \times 10^3)^2}}{(\pi/32) \times (0.12)^3} \right] \text{Pa} \\ = 89.1 \text{ MPa} < [\sigma] = 90 \text{ MPa}$$

(2) 校核 $n-n$ 截面

截面上的内力分量

$$M = F \times 0.11 = (50 \times 0.11) \text{ kN} \cdot \text{m} = 5.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$T = F(0.055 + 0.07/2) = [50 \times (0.055 + 0.07/2)] \text{ kN} \cdot \text{m} \\ = 4.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

长边中点的应力分量:

长边中点 B 在中性轴上, 所以 B 点的正应力

$$\sigma = 0$$

因是矩形截面杆扭转, 所以由 $h/b = 150/70 = 2.14$, 查附录五可得

$$\alpha = 0.25, \quad \nu = 0.79$$

最大切应力发生在长边中点 B 处

$$\tau_{\max} = \frac{T}{\alpha h b^2} = \left(\frac{4500}{0.25 \times 0.15 \times 0.07^2} \right) \text{Pa} = 24.5 \text{ MPa}$$

因长边中点 B 处的 $\sigma = 0$, 所以 B 点处于纯剪切状态, 故有

$$\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau = 24.5 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 0$$

应用第三强度理论

$$\sigma_1 - \sigma_3 = [24.5 - (-24.5)] \text{ MPa} = 49 \text{ MPa} < [\sigma] \\ = 90 \text{ MPa}$$

短边中点 C 的应力分量:

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{6 \times 5500}{0.07 \times (0.15)^2} \text{Pa} = 21 \text{ MPa}$$

$$\tau' = \nu \tau_{\max} = (0.79 \times 24.5) \text{ MPa} = 19.4 \text{ MPa}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{array} \right\} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2} \right)^2 + \tau'^2} = \left[\frac{21}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{21}{2} \right)^2 + 19.4^2} \right] \text{MPa}$$

$$= \begin{cases} 32.6 \text{ MPa} \\ -11.6 \text{ MPa} \end{cases}$$

按照主应力的记号规定

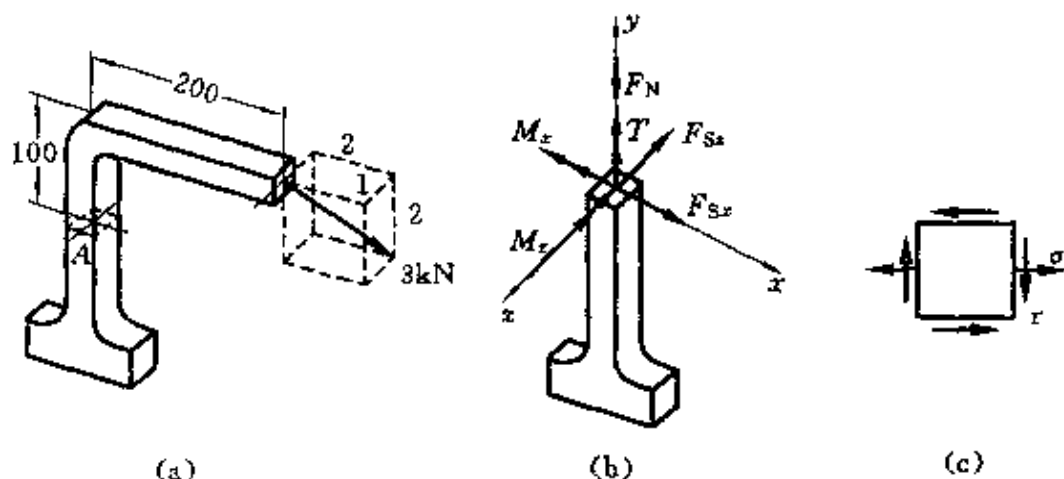
$$\sigma_1 = 32.6 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -11.6 \text{ MPa}$$

应用第三强度理论

$$\sigma_1 - \sigma_3 = (32.6 + 11.6) \text{ MPa} = 54.2 \text{ MPa} < [\sigma] = 90 \text{ MPa}$$

危险点的应力小于许用应力, 所以安全。

8.23 如题 8.23 图(a)所示, 折轴杆的横截面为边长 12 mm 的正方形。用单元体表示 A 点的应力状态, 确定其主应力。



题 8.23 图

解 3 kN 力的三个方向余弦

$$\cos \alpha = 2/3, \quad \cos \beta = 2/3, \quad \cos \gamma = 1/3$$

3 kN 力的三个正交分量

$$F_x = (3 \cos \alpha) \text{ kN} = 2 \text{ kN}$$

$$F_y = (3 \cos \beta) \text{ kN} = 2 \text{ kN}$$

$$F_z = (3 \cos \gamma) \text{ kN} = 1 \text{ kN}$$

A 点所在横截面上的内力(题 8.23 图(b))

$$F_{Sx} = F_x = 2 \text{ kN}, \quad F_{Sx} = F_z = 1 \text{ kN}, \quad F_N = F_y = 2 \text{ kN}$$

$$M_x = 0.1 F_x = 0.1 \text{ kN} \cdot \text{m}, \quad T = 0.2 F_x = 0.2 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_z = 0.2 F_y + 0.1 F_x = (0.2 \times 2 + 0.1 \times 2) \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$= 0.6 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

A 点的应力状态

$$\sigma = -\frac{F_N}{A} + \frac{M_x}{W} = \left(-\frac{2 \times 10^3}{0.012^2} + \frac{6 \times 0.1 \times 10^3}{0.012^3} \right) \text{ Pa}$$

$$= 333 \text{ MPa}$$

$$\tau = \frac{T}{\alpha h b^2} + \frac{3}{2} \times \frac{F_{Sx}}{A} = \left(\frac{0.2 \times 10^3}{0.208 \times 0.012^3} + \frac{3}{2} \times \frac{2 \times 10^3}{0.012^2} \right) \text{ Pa}$$

$$= 577 \text{ MPa}$$

弯矩 M_x 产生的正应力及 Q_x 产生的剪应力在 A 点均为零。

主应力

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{array} \right\} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2} \right)^2 + \tau^2}$$

$$= \left[\frac{333}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{333}{2} \right)^2 + 577^2} \right] \text{ MPa} = \begin{cases} 767 \text{ MPa} \\ -434 \text{ MPa} \end{cases}$$

按照主应力的记号规定

$$\sigma_1 = 767 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -434 \text{ MPa}$$

A 点的应力状态被表示在题 8.23 图(c)中。

8.24 如题 8.24 图(a)所示,端截面密封的曲管的外径为 100 mm,壁厚 $\delta = 5 \text{ mm}$,内压 $p = 8 \text{ MPa}$ 。集中力 $F = 3 \text{ kN}$ 。A、B 两点在管的外表面上,一为截面垂直直径的端点,一为水平直径的端点。试确定两点的应力状态。

解 A、B 点所在截面受力图如题 8.24 图(b)所示。内力分量

$$F_{Sy} = F = 3 \text{ kN}$$

$$T = 1 \times F = (1 \times 3) \text{ kN} \cdot \text{m} = 3 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

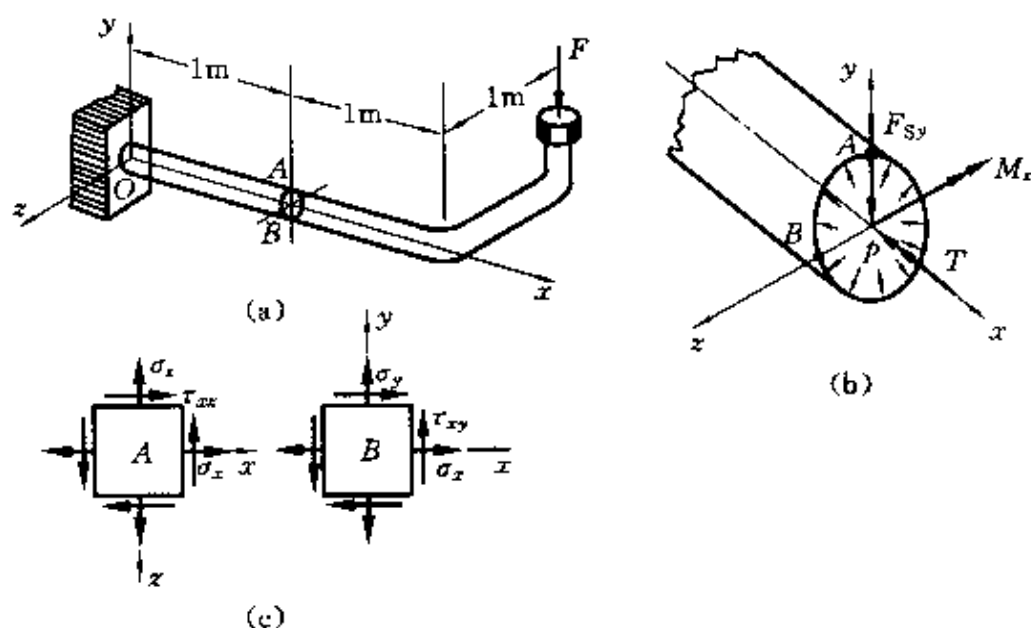
$$M_x = 1 \times F = (1 \times 3) \text{ kN} \cdot \text{m} = 3 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

(1) A 点的应力状态

$$\sigma_r = \frac{pD}{4\delta} + \frac{M_x}{W}$$

$$= \left[\frac{8 \times 10^6 \times (0.1 - 0.01)}{4 \times 0.005} + \frac{32 \times 3 \times 10^3}{\pi \times 0.1^3 \times (1 - 0.9^4)} \right] \text{ Pa}$$

$$= (36 + 88.9) \text{ MPa} = 125 \text{ MPa}$$



题 8.24 图

$$\tau_{xz} = \frac{T}{2\pi R^2 \delta} = \left[\frac{3 \times 10^3}{2\pi \times ((0.1 - 0.005)/2)^2 \times 0.005} \right] \text{Pa} \\ = 42.3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_x = \frac{pD}{2\delta} = \frac{8 \times 10^6 (0.1 - 0.01)}{2 \times 0.005} \text{Pa} = 72 \text{ MPa}$$

(2) B 点的应力分量

$$\sigma_x = \frac{pD}{4\delta} = \frac{8 \times 10^6 \times (0.1 - 0.01)}{4 \times 0.005} \text{Pa} = 36 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = \frac{T}{2\pi R^2 \delta} - 2 \times \frac{F_{sy}}{A} \\ = \left[\frac{3 \times 10^3}{2\pi \times ((0.1 - 0.005)/2)^2 \times 0.005} \right. \\ \left. - \frac{2 \times 3 \times 10^3}{\pi (0.1 - 0.005) \times 0.005} \right] \text{Pa} \\ = 38.3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = \frac{pD}{2\delta} = \frac{8 \times 10^6 (0.1 - 0.01)}{2 \times 0.005} \text{Pa} = 72 \text{ MPa}$$

A、B 两点的应力状态用单元体表示在题 8.24 图(c)中。

第九章 压杆稳定

知识要点

1. 弹性平衡稳定性的概念

(1) 刚体平衡的稳定性

若对于离开平衡位置的微小位移,将出现使系统回到原有平衡位置的恢复力,则称系统原有的平衡状态是稳定的。

(2) 弹性平衡的稳定性

若对于原有的平衡状态有微小的位移,将出现弹性恢复力或力矩,使系统恢复原有的平衡状态,则称系统的原有平衡状态是稳定的。

(3) 压杆的临界载荷

使压杆由原有的直线平衡状态转变为曲线平衡状态的载荷值,即由稳定平衡转变为不稳定平衡时载荷的临界值。

(4) 弹性平衡稳定性的特征

① 平衡的稳定性取决于载荷值

$F < F_{cr}$ 时, 稳定平衡

$F \geq F_{cr}$ 时, 不稳定平衡

② 研究稳定性,需对变形后的结构形状应用平衡条件,不像以前的应力、变形计算中那样,对变形前的结构形状应用平衡条件。

2. 细长压杆临界载荷的欧拉公式

(1) 欧拉公式

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu L)^2} \quad \text{或} \quad \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

(2) 欧拉公式的适用范围

只适用于压杆处于弹性变形范围。压杆的柔度 λ 应满足

$$\lambda \geq \lambda_1 = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}}, \quad \lambda = \frac{\mu L}{i}$$

3. 三类压杆的临界载荷

(1) 大柔度杆($\lambda \geq \lambda_1$)

屈曲破坏,其临界载荷由欧拉公式确定

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu L)^2} \quad \text{或} \quad F_{cr} = A\sigma_{cr}$$

(2) 中柔度杆($\lambda_1 > \lambda \geq \lambda_2$)

屈曲与强度联合破坏,其临界载荷由经验公式确定

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda \quad \text{或} \quad F_{cr} = A\sigma_{cr}$$

$$\lambda_2 = \frac{a - \sigma_s}{b}$$

(3) 小柔度杆($\lambda < \lambda_2$)

强度破坏,实质上不存在稳定问题,其临界载荷为

$$F_{cr} = A\sigma_{cr} = A\sigma_s \quad (\text{脆性材料 } F_{cr} = A\sigma_b)$$

4. 压杆稳定校核

(1) 稳定校核的安全因数法

稳定条件为

$$n = \frac{F_{cr}}{F} \geq n_{st}$$

式中 n 为压杆实际具有的工作安全因数, n_{st} 为规定的稳定安全因数。

(2) 稳定校核的折减因数法

稳定条件为

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi[\sigma]$$

式中 $[\sigma]$ 为材料的强度许用应力, φ 为考虑稳定时的折减因数。

习题详解

9.1 某型柴油机的挺杆长度 $l=25.7\text{ cm}$, 圆形横截面的直径 $d=8\text{ mm}$, 钢材的 $E=210\text{ GPa}$, $\sigma_p=240\text{ MPa}$ 。挺杆所受最大压力 $F=1.76\text{ kN}$ 。规定的稳定安全因数 $n_{st}=2\sim 5$ 。试校核挺杆的稳定性。

解 挺杆可以看成两端铰支杆, 所以 $\mu=1$, 由欧拉公式确定临界载荷, 即

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^3 \times 210 \times 10^9 \times 0.008^4}{(1 \times 0.257^2) \times 64} \text{ N} = 6.31 \text{ kN}$$

工作安全因数为

$$n = \frac{F_{cr}}{F} = \frac{6.31}{1.76} = 3.59 > n_{st} = 2$$

挺杆的临界应力

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} = \frac{6.31 \times 10^3}{\pi \times 0.008^2 / 4} \text{ Pa} = 126 \text{ MPa} < \sigma_p = 240 \text{ MPa}$$

满足欧拉公式的适用条件, 故上述计算有效, 挺杆是安全的。

9.2 若文献1例9.1中柴油机挺杆所用钢材的 $\sigma_p=280\text{ MPa}$, 试验证在文献1例9.1中使用欧拉公式是正确的。

解 由文献1例9.1算出的挺杆的临界压力

$$F_{cr} = 7400 \text{ N}$$

挺杆的横截面面积 $A = \frac{\pi}{4} (0.012^2 - 0.01^2) \text{ m}^2$

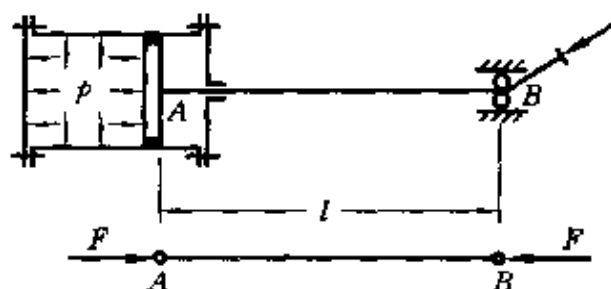
临界应力

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} = \frac{7400 \times 4}{\pi (0.012^2 - 0.01^2)} \text{ Pa} = 214 \text{ MPa} < \sigma_p = 280 \text{ MPa}$$

满足欧拉公式的适用条件。

9.3 题9.3图所示的蒸汽机的活塞杆AB, 所受的压力 $F=$

120 kN, $l=180$ cm, 横截面为圆形, 直径 $d=7.5$ cm。材料为 Q255 钢, $E=210$ GPa, $\sigma_p=240$ MPa。规定 $n_{st}=8$, 试校核活塞的稳定性。



题 9.3 图

解 活塞杆的回转半径

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{\pi d^4}{64} \times \frac{4}{\pi d^4}} = \frac{d}{4}$$

对于两端铰支杆, $\mu=1$, 所以杆的柔度

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1 \times 1.8}{0.075/4} = 96$$

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \times 210 \times 10^9}{240 \times 10^6}} = 92.9$$

因 $\lambda > \lambda_1$, 故可用欧拉公式计算活塞杆的临界载荷, 即

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \times 210 \times 10^9 \times \frac{\pi}{64} \times 0.075^4}{(1 \times 1.8)^2} \text{ N} = 994 \text{ kN}$$

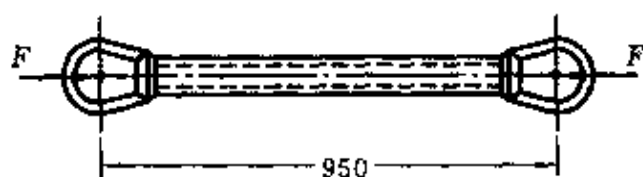
工作安全因数

$$n = F_{cr}/F = 994/120 = 8.28 > n_{st} = 8$$

工作安全因数大于规定的安全因数, 故安全。

9.4 题 9.4 图所示的为某型飞机起落架中承受轴向压力的斜撑杆。杆为空心圆管, 外径 $D=52$ mm, 内径 $d=44$ mm, $l=950$ mm。材料为 30 CrMnSiNi2A, $\sigma_b=1600$ MPa, $\sigma_p=1200$ MPa, $E=210$ GPa。试求斜撑杆的临界压力 F_{cr} 和临界应力 σ_{cr} 。

$$\text{解 } \lambda_1 = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \times 210 \times 10^9}{1200 \times 10^6}} = 41.6$$



题 9.4 图

支承视为两端铰支,故 $\mu=1$

回转半径为

$$i = \sqrt{D^2 + d^2}/4 = \sqrt{52^2 + 44^2}/4 \text{ mm} = 0.017 \text{ m}$$

斜撑杆的柔度

$$\lambda = \mu l/i = 1 \times 0.95/0.017 = 55.9$$

因 $\lambda > \lambda_1$, 为大柔度杆, 故可用欧拉公式计算临界载荷, 临界压力 F_{cr} 和临界应力 σ_{cr} 分别为

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \times 210 \times 10^9 \times \frac{\pi}{64} (0.052^4 - 0.044^4)}{(1 \times 0.95)^2} \text{ N} = 402 \text{ kN}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} = \frac{402 \times 10^3}{\pi (0.052^2 - 0.044^2)/4} \text{ Pa} = 666 \text{ MPa}$$

9.5 三根圆截面压杆, 直径均为 $d=160 \text{ mm}$, 材料为 Q235 钢, $a=304 \text{ MPa}$, $b=1.12 \text{ MPa}$, $E=200 \text{ GPa}$, $\sigma_s=240 \text{ MPa}$, $\sigma_p=200 \text{ MPa}$ 。两端均为铰支, 长度分别为 l_1 、 l_2 和 l_3 , 且 $l_1=2l_2=4l_3=5 \text{ m}$ 。试求各杆的临界压力 F_{cr} 。

$$\text{解 } \lambda_1 = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \times 200 \times 10^9}{200 \times 10^6}} = 99.3$$

$$\lambda_2 = \frac{a - \sigma_s}{b} = \frac{304 - 240}{1.12} = 57.1$$

回转半径和截面积分别为

$$i = \frac{d}{4} = \frac{0.16}{4} \text{ m} = 0.04 \text{ m}, \quad A = \frac{\pi \times 0.16^2}{4} \text{ m}^2 = 0.02 \text{ m}^2$$

因两端铰支, 所以取 $\mu=1$

1 杆的柔度

$$\lambda_{l_1} = \mu l_1 / i = 1 \times 5 / 0.04 = 125 > \lambda_1$$

所以 1 杆为大柔度杆, 可用欧拉公式计算临界载荷, 即

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l_1)^2} = \frac{\pi^2 \times 200 \times 10^9 \times 0.16^4}{(1 \times 5^2) \times 64} \text{ N} = 2540 \text{ kN}$$

2 杆的柔度

$$\lambda_{l_2} = \mu l_2 / i = 1 \times 2.5 / 0.04 = 62.5 > \lambda_2 = 57.1$$

因 $\lambda_2 < \lambda_{l_2} < \lambda_1$, 是中柔度杆, 应当用经验公式计算临界载荷, 即

$$\begin{aligned} F_{cr} &= (a - b\lambda_2)A \\ &= [(304 - 1.12 \times 62.5) \times 10^6 \times 0.02] \text{ N} = 4680 \text{ kN} \end{aligned}$$

3 杆的柔度

$$\lambda_{l_3} = \frac{\mu l_3}{i} = \frac{1 \times (5/4)}{0.04} = 31.25$$

因 $\lambda_{l_3} < \lambda_2$, 不是屈曲问题, 应当由强度条件计算临界载荷, 即

$$F_{cr} = \sigma_s A = (240 \times 10^6 \times 0.02) \text{ N} = 4800 \text{ kN}$$

9.6 设题 9.6 图所示千斤顶的最大承载压力为 $F=150 \text{ kN}$, 螺杆内径 $d=52 \text{ mm}$, $l=50 \text{ cm}$ 。材料为 Q235 钢, $E=200 \text{ GPa}$, $\sigma_s=235 \text{ MPa}$, $a=304 \text{ MPa}$, $b=1.12 \text{ MPa}$ 。稳定安全因数规定为 $n_{st}=3$ 。试校核其稳定性。

解 螺杆的回转半径

$$i = \frac{d}{4} = \frac{52}{4} \text{ mm} = 0.013 \text{ m}$$

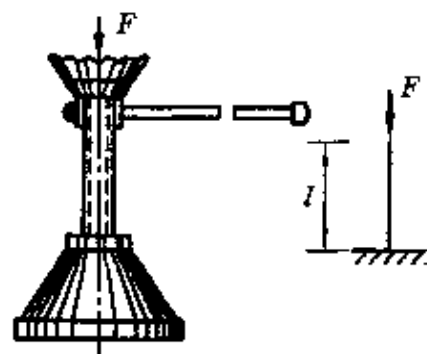
因螺杆上端自由, 下端固定, 故取

$$\mu = 2$$

$$\text{螺杆的柔度} \quad \lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{2 \times 0.5}{0.013} = 76.9$$

由材料性质决定的两个参数

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \times 200 \times 10^9}{200 \times 10^6}} = 99.3$$



题 9.6 图

$$\lambda_2 = \frac{a - \sigma_s}{b} = \frac{304 - 235}{1.12} = 61.6$$

因 $\lambda_2 < \lambda < \lambda_1$, 所以应当用经验公式计算临界载荷, 即

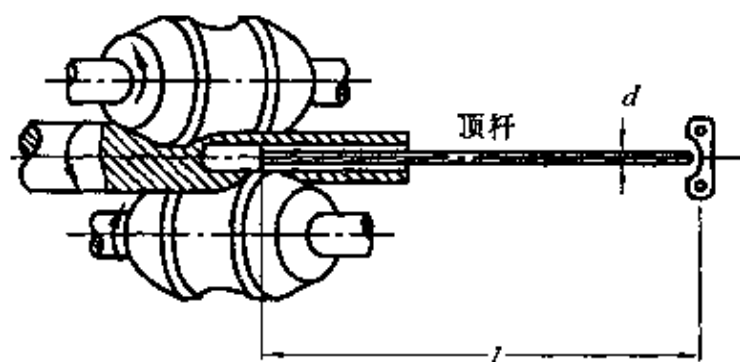
$$\begin{aligned} F_{cr} &= (a - b\lambda)A \\ &= [(304 - 1.12 \times 76.9) \times 10^6 \times (\pi \times 0.052^2)/4] \text{ N} \\ &= 463 \text{ kN} \end{aligned}$$

千斤顶的工作安全因数为

$$n = F_{cr}/F = 463/150 = 3.09 > n_{st} = 3$$

工作安全因数大于规定的稳定安全因数, 可以安全工作。

9.7 无缝钢管厂的穿孔顶杆如题 9.7 图所示。杆端承受压力。杆长 $l = 4.5 \text{ m}$, 横截面直径 $d = 15 \text{ cm}$ 。材料为低合金钢, $\sigma_p = 200 \text{ MPa}$, $E = 210 \text{ GPa}$ 。两端可简化为铰支座, 规定的稳定安全因数为 $n_{st} = 3.3$ 。试求顶杆的许可载荷。



题 9.7 图

$$\text{解 } \lambda_1 = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \times 210 \times 10^9}{200 \times 10^6}} = 102$$

$$\text{顶杆的柔度 } \lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{\mu l}{d/4} = \frac{1 \times 4.5}{0.15/4} = 120$$

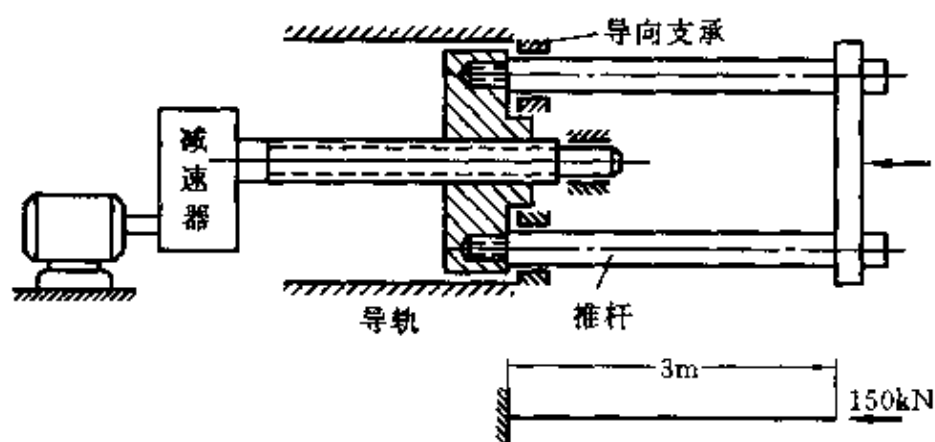
因 $\lambda > \lambda_1$, 属于大柔度杆, 故可用欧拉公式计算临界载荷, 即

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \times 210 \times 10^9 \times (\pi \times 0.15^4)/64}{1 \times 4.5^2} \text{ N} = 2540 \text{ kN}$$

顶杆的许可载荷

$$[F] = F_{cr}/n_{st} = (2540/3.3) \text{ kN} = 770 \text{ kN}$$

9.8 某轧钢车间使用的螺旋推钢机的示意图如题 9.8 图所示。推杆由丝杆通过螺母来带动。已知推杆横截面的直径 $d = 13 \text{ cm}$ ，材料为 Q255 钢， $E = 210 \text{ GPa}$ ， $\sigma_p = 240 \text{ MPa}$ 。当推杆全部推出时，前端可能有微小的侧移，故简化为一端固定、一端自由的压杆。这时推杆的伸出长度为最大值， $l_{\max} = 3 \text{ m}$ 。取稳定安全因数 $n_{st} = 4$ 。试校核压杆的稳定性。



题 9.8 图

解 一端固定、另一端自由的压杆的长度系数 $\mu = 2$ 。推杆的柔度

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{\mu l}{d/4} = \frac{2 \times 3}{0.13/4} = 185$$

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} = \sqrt{\frac{\pi^2 (210 \times 10^9)}{240 \times 10^6}} = 92.9$$

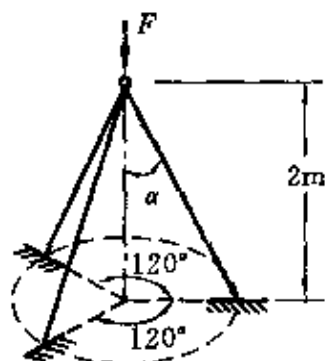
因 $\lambda > \lambda_1$ ，属于大柔度杆，故用欧拉公式计算临界载荷，即

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \times 210 \times 10^9 \times (\pi \times 0.13^4)/64}{(2 \times 3)^2} \text{ N} = 807 \text{ kN}$$

推杆的工作安全因数 $n = 807/150 = 5.38 > n_{st} = 4$

因推杆的工作安全因数大于规定的稳定安全因数，所以可以安全工作。

9.9 由三根钢管构成的支架如题9.9图所示。钢管的外径为30 mm。内径为22 mm,长度 $l=2.5$ m, $E=210$ GPa, $\sigma_p=200$ MPa。在支架的顶点三杆铰接。若取稳定安全因数 $n_{st}=3$,试求许可载荷 F 。



题9.9图

解 结构的许可载荷是由三根杆的临界载荷确定的,三根杆的轴力与 F 力的关系虽是一个静不定问题,但由于结构对称,载荷也对称,所以三根杆的轴力相等,不必求解一次静不定问题。

结构产生屈曲破坏,一定是当三根杆都达到临界载荷时才发生,仅仅是一根或两根达到了临界载荷,结构仍有承载能力。因此,结构的临界载荷等于三杆的临界载荷之和。

杆的柔度

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{4\mu l}{\sqrt{D^2 + d^2}} = \frac{4 \times 1 \times 2.5}{\sqrt{0.03^2 + 0.022^2}} = 269$$

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \times 210 \times 10^9}{200 \times 10^6}} = 102$$

因 $\lambda > \lambda_1$,属于大柔度杆,所以可用欧拉公式求临界载荷。杆的临界载荷为

$$\begin{aligned} F_{Ncr} &= \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \times 210 \times 10^9 \times \pi \times (0.03^4 - 0.022^4)}{(1 \times 2.5)^2 \times 64} \text{ N} \\ &= 9.37 \text{ kN} \end{aligned}$$

支架的临界载荷

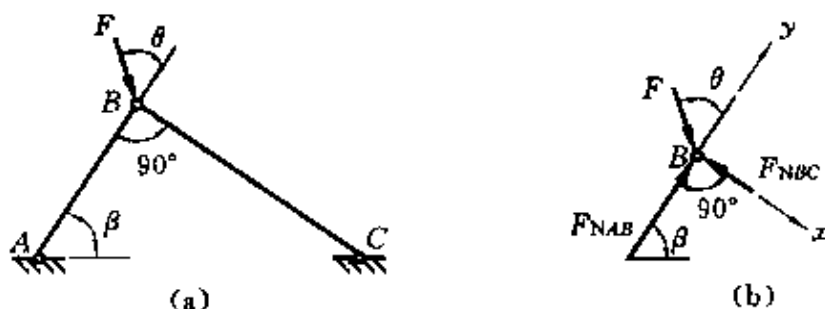
$$F_{cr} = 3F_{Ncr} \cos \alpha = 3 \times 9.37 \times 2/2.5 \text{ kN} = 22.5 \text{ kN}$$

支架的许可载荷为

$$[F] = F_{cr}/n_{st} = 22.5/3 \text{ kN} = 7.5 \text{ kN}$$

9.10 在题9.10图(a)所示铰接杆系ABC中,AB和BC皆为细长压杆,且截面相同,材料一样。若因在ABC平面内失稳而破

坏,并规定 $0 < \theta < \pi/2$, 试确定 F 为最大值时的 θ 角。



题 9.10 图

解 由平衡条件有(题 9.10 图(b))

$$\sum F_y = 0, \quad F_{NAB} = F \cos \theta$$

$$\sum F_x = 0, \quad F_{NBC} = F \sin \theta$$

使 F 为最大值的条件是杆 AB 、 BC 的内力同时达到各自的临界载荷值。设 AC 间的距离为 l , AB 、 BC 杆的临界载荷分别为

$$F_{NAB} = \frac{\pi^2 EI}{l_{AB}^2} = \frac{\pi^2 EI}{(l \cos \beta)^2} = F \cos \theta$$

$$F_{NBC} = \frac{\pi^2 EI}{l_{BC}^2} = \frac{\pi^2 EI}{(l \sin \beta)^2} = F \sin \theta$$

由以上二式得 $\tan \theta = \cot^2 \beta$

解得 $\theta = \arctan(\cot^2 \beta)$

9.11 万能铣床工作台升降丝杆的内径为 22 mm, 螺距 $s = 5$ mm。工作台升至最高位置时, $l = 500$ mm。丝杆钢材的 $E = 210$ GPa, $\sigma_s = 300$ MPa, $\sigma_p = 260$ MPa, $a = 461$ MPa, $b = 2.568$ MPa。若伞齿轮的传动比为 1/2, 即手轮旋转一周丝杆旋转半周, 且手轮半径为 10 cm, 手轮上作用的最大圆周力为 200 N, 试求丝杆的工作安全因数。

解 手轮旋转一周, 工作台上升的距离是

$$\delta = \frac{1}{2} s = \left(\frac{1}{2} \times 0.005 \right) \text{ m} = 2.5 \text{ mm}$$

丝杆上升 δ 时, 压力 F 所作的功应等于手轮旋转一周切向力所作

的功

$$F\delta = F_t \times 2\pi R$$

丝杆承受的轴力压力

$$\begin{aligned} F &= \frac{F_t \times 2\pi R}{\delta} \\ &= \frac{200 \times 2\pi \times 0.1}{2.5 \times 10^{-3}} \text{ N} \\ &= 50.3 \text{ kN} \end{aligned}$$

由丝杆材料性质决定的参数

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \times 210 \times 10^9}{260 \times 10^6}} \\ &= 89.3 \end{aligned}$$

$$\lambda_2 = \frac{a - \sigma_s}{b} = \frac{461 - 300}{2.568} = 62.7$$

因丝杆上端铰支, 下端固定, 故取 $\mu = 0.7$, 所以丝杆的柔度

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{0.7 \times 0.5}{0.022/4} = 63.6$$

因 $\lambda_2 < \lambda < \lambda_1$, 所以应当用经验公式计算丝杆的临界载荷

$$\begin{aligned} F_{cr} &= (a - b\lambda)A \\ &= (461 - 2.568 \times 63.6) \times 10^6 \times (\pi \times 0.022^2)/4 \text{ N} \\ &= 113 \text{ kN} \end{aligned}$$

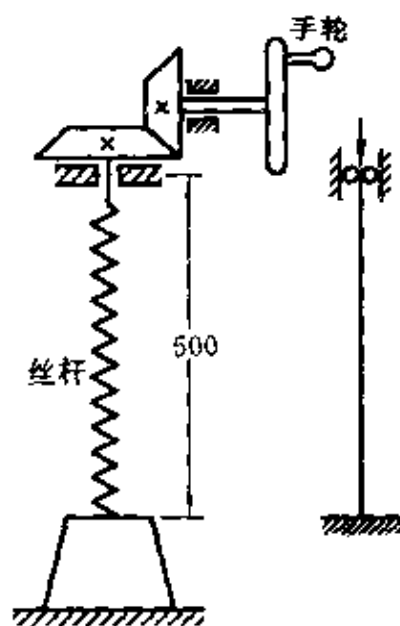
丝杆的工作安全因数

$$n = \frac{F_{cr}}{F} = \frac{113}{50.3} = 2.25$$

9.12 某快锻水压机工作台油缸柱塞如题9.12图所示。已知油压 $p = 32 \text{ MPa}$, 柱塞直径 $d = 120 \text{ mm}$, 伸入油缸的最大行程 $l = 1600 \text{ mm}$, 材料为45钢, $\sigma_p = 280 \text{ MPa}$, $E = 210 \text{ GPa}$ 。试求柱塞的工作安全因数。

解 柱塞受到的压力

$$F = pA = 32 \times 10^6 \times (\pi \times 0.12^2)/4 \text{ N} = 362 \text{ kN}$$



题 9.11 图



题 9.12 图

由材料的力学性质决定的

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \times 210 \times 10^9}{280 \times 10^6}} = 86$$

柱塞可以简化为一端固定,另一端自由的压杆,所以取长度系数 $\mu = 2$ 。柱塞的柔度

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{2 \times 1.6}{0.12/4} = 107$$

因 $\lambda > \lambda_1$, 故可用欧拉公式计算临界载荷, 即

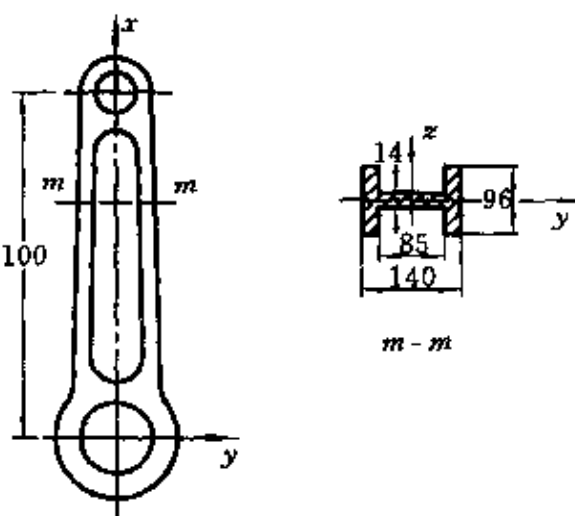
$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \times 210 \times 10^9 \times \pi \times 0.12^4}{64 \times (2 \times 1.6)^2} \text{ N} = 2060 \text{ kN}$$

柱塞的工作安全因数

$$n = F_{cr}/F = 2060/362 = 5.69$$

9.13 蒸汽机车的连杆如

题 9.13 图所示, 截面为工字形, 材料为 Q235 钢。连杆所受最大轴向压力为 465 kN。连杆在摆动平面 (xy 平面) 内发生弯曲时, 两端可认为铰支; 而在与摆动平面垂直的 xz 平面内发生弯曲时, 两端可认为是固定支座。试确定工作安全因数。已知 Q235 钢材料的 $E = 200$ GPa, $\sigma_p = 200$ MPa, $a =$



题 9.13 图

304 MPa, $b=1.12$ MPa, $\sigma_s=240$ MPa。

解 连杆横截面的几何特性:

$$A = [14 \times 9.6 - (9.6 - 1.4) \times 8.5] \text{ cm}^2 = 64.7 \text{ cm}^2$$

$$I_y = [8.5 \times 1.4^3/12 + (14 - 8.5) \times 9.6^3/12] \text{ cm}^4 = 407 \text{ cm}^4$$

$$I_z = [9.6 \times 14^3/12 - (9.6 - 1.4) \times 8.5^3/12] \text{ cm}^4 = 1780 \text{ cm}^4$$

$$i_y = \sqrt{I_y/A} = \sqrt{407/64.7} \text{ cm} = 2.51 \text{ cm}$$

$$i_z = \sqrt{I_z/A} = \sqrt{1780/64.7} \text{ cm} = 5.24 \text{ cm}$$

Q235 钢的

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \times 200 \times 10^9}{200 \times 10^6}} = 99.3$$

$$\lambda_2 = \frac{a - \sigma_s}{b} = \frac{304 - 240}{1.12} = 57.1$$

在 xy 平面内弯曲时连杆的柔度

$$\lambda_z = \mu l / i_z = 1 \times 3.1 / 0.0524 = 59.2 < \lambda_1$$

在 xz 平面内弯曲时连杆的柔度

$$\lambda_y = \mu l / i_y = 0.5 \times 3.1 / 0.0251 = 61.8 < \lambda_1$$

因 $\lambda_1 > \lambda_y > \lambda_z$, $\lambda_1 > \lambda_x > \lambda_2$

所以计算在两个方向上产生弯曲时的临界载荷,都要用经验公式,并且只须计算在柔度较大的方向上产生弯曲时的临界载荷。(因它比在柔度较小的方向上产生弯曲时的临界应力小),即

$$\begin{aligned} F_{cr} &= (a - b\lambda_y)A \\ &= [(304 - 1.12 \times 61.8) \times 10^6 \times 64.7 \times 10^{-4}] \text{ N} \\ &= 1520 \text{ kN} \end{aligned}$$

工作安全因数

$$n = F_{cr}/F = 1520/465 = 3.27$$

9.14 一木柱两端铰支,其横截面为 $120 \text{ mm} \times 200 \text{ mm}$ 的矩形,长度为 4 m 。木材的 $E=10 \text{ GPa}$, $\sigma_p=20 \text{ MPa}$ 。试求木柱的临界应力。计算临界应力的公式有:(a) 欧拉公式;(b) 直线公式 $\sigma_{cr} =$

28.7-0.19 λ 。

解 由木材的力学性能可确定

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \times 10 \times 10^9}{20 \times 10^6}} = 70.2$$

在两个方向都可能失稳,因两端铰支,所以长度系数 $\mu=1$ 。

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{120 \times 200^3/12}{120 \times 200}} \text{ mm} = 0.0577 \text{ m}$$

$$\lambda_y = \frac{\mu l}{i_y} = \frac{1 \times 4}{0.0577} = 69.3 < \lambda_1 = 70.2$$

因 λ_y 小于 λ_p ,所以用直线公式计算临界应力,即

$$\sigma_{cr} = (28.7 - 0.19 \times 69.3) \text{ MPa} = 15.5 \text{ MPa}$$

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{200 \times 120^3/12}{120 \times 200}} \text{ mm} = 0.0346 \text{ m}$$

$$\lambda_z = \mu l / i_z = 1 \times 4 / 0.0346 = 116 > \lambda_1$$

因 λ_z 大于 λ_1 ,所以用欧拉公式计算临界应力,即

$$\sigma_{cr} = \pi^2 E / \lambda^2 = \pi^2 \times 10 \times 10^9 / 116^2 \text{ Pa} = 7.33 \text{ MPa}$$

所以临界应力

$$\sigma_{cr} = 7.33 \text{ MPa}$$

9.15 某厂自制的简易起重机如题9.15(a)图所示,其压杆BD为20号槽钢,材料为Q235钢。材料的 $E=200 \text{ GPa}$, $\sigma_p=200 \text{ MPa}$, $a=304 \text{ MPa}$, $b=1.12 \text{ MPa}$, $\sigma_s=240 \text{ MPa}$ 。起重机的最大起重量是 $W=40 \text{ kN}$ 。若规定的稳定安全因数为 $n_{st}=5$,试校核BD杆的稳定性。

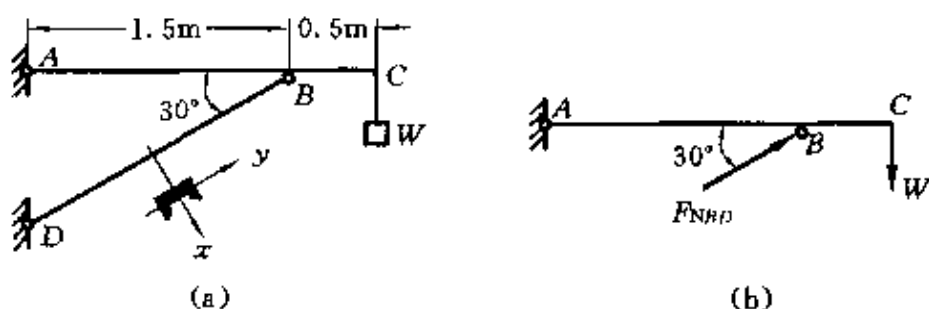
解 应用平衡条件(题9.15图(b))

$$\sum M_A = 0, \quad F_{NBD} = \frac{2W}{1.5 \sin 30^\circ} = \frac{2 \times 40 \times 10^3}{1.5 \times 0.5} \text{ N} = 107 \text{ kN}$$

查附录三型钢表得

$$A = 32.837 \text{ cm}^2, \quad I_y = 144 \text{ cm}^4, \quad i_y = 2.09 \text{ cm}$$

$$I_z = 1910 \text{ cm}^4, \quad i_z = 7.64 \text{ cm}$$



题 9.15 图

由题 9.5 已计算出 Q235 钢的

$$\lambda_1 = 99.3, \quad \lambda_2 = 57.1$$

压杆 BD 的柔度(设 BD 杆绕 y 轴弯曲失稳)

$$\lambda_y = \frac{\mu l}{i_y} = \frac{1 \times 1.5 / \cos 30^\circ}{0.0209} = 82.9 < \lambda_1$$

因 λ_y 均小于 λ_1 大于 λ_2 , 所以应当用经验公式计算临界载荷, 即

$$\begin{aligned} F_{cr} &= A\sigma_{cr} = A(a - b\lambda_y) \\ &= [32.84 \times 10^{-4} \times (304 - 1.12 \times 82.9) \times 10^6] \text{N} \\ &= 693 \text{ kN} \end{aligned}$$

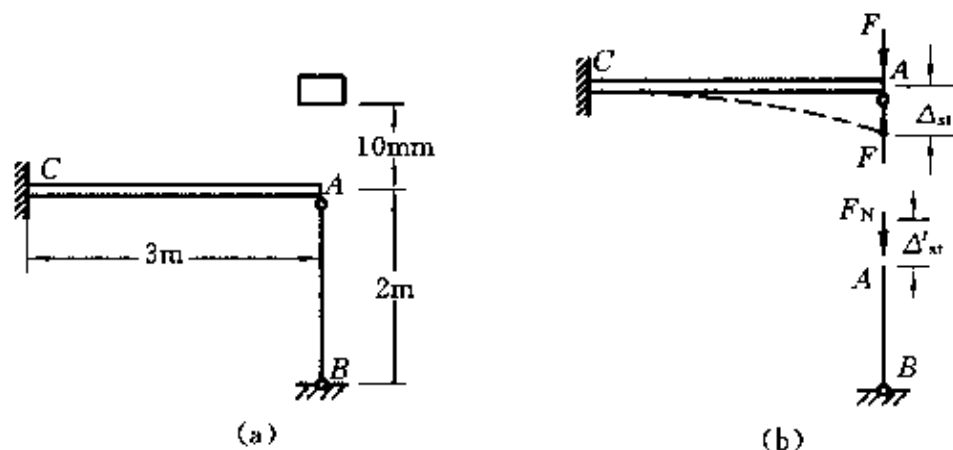
压杆的工作安全因数

$$n = 693/107 = 6.48 > n_{st} = 5$$

BD 压杆的工作安全因数大于规定的稳定安全因数, 故可以安全工作。

9.16 如题 9.16 图(a)所示, 10 号工字梁的 C 端固定, A 端铰支于空心钢管 AB 上。钢管的内径和外径分别为 30 mm 和 40 mm, B 端亦为铰支。梁及钢管同为 Q235 钢, $E=200 \text{ GPa}$ 。当重为 300 N 的重物落于梁的 A 端时, 试校核 AB 杆的稳定性。规定稳定安全因数 $n_{st}=2.5$ 。

解 这是个包含一次超静定、冲击载荷和屈曲三类问题的综合题, 应当利用变形协调条件求解静不定问题, 算出 A 点的挠度, 然后计算 A 处受到的冲击载荷, 最后确定 AB 杆的临界应力, 再进



题 9.16 图

行稳定性校核。

查附录三型钢表得 No. 10 工字钢的

$$I = 245 \text{ cm}^4, \quad A_1 = 14.3 \text{ cm}^2$$

钢管的截面积

$$A_2 = \frac{\pi}{4} \times (0.04^2 - 0.03^2) \text{ m}^2 = 5.5 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

在静载 $F = 300 \text{ N}$ 作用下, AC 梁和 AB 杆的 A 端位移相等(题 9.16 图(b)), 即 $\Delta_{st} = \Delta'_{st}$, 所以

$$\frac{(F - F_N)l_{AC}^3}{3EI} = \frac{F_N l_{AB}}{EA_2}$$

由上式得

$$\begin{aligned} F_N &= \frac{A_2 F l_{AC}^3}{3I l_{AB} + A_2 l_{AC}^3} \\ &= \left(\frac{5.5 \times 10^{-4} \times 300 \times 3^3}{3 \times 245 \times 10^{-8} \times 2 + 5.5 \times 10^{-4} \times 3^3} \right) \text{ N} = 300 \text{ N} \\ \Delta_{st} = \Delta'_{st} &= \frac{F_N l_{AB}}{EA_2} = \frac{300 \times 2}{200 \times 10^9 \times 5.5 \times 10^{-4}} \text{ m} \\ &= 5.45 \times 10^{-6} \text{ m} \end{aligned}$$

作用于 A 处的动载荷

$$F_d = K_d F = \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{st}}} \right) \times 300$$

$$= \left[\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 0.01}{5.45 \times 10^{-6}}} \right) \times 300 \right] \text{ N} = 18500 \text{ N}$$

AB 杆的回转半径

$$\begin{aligned} i &= \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{\pi(D^4 - d^4)/64}{\pi(D^2 - d^2)/4}} = \frac{\sqrt{D^2 + d^2}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{0.04^2 + 0.03^2}}{4} \text{ m} = 0.0125 \text{ m} \end{aligned}$$

AB 杆的柔度

$$\lambda = \mu l / i = 1 \times 2 / 0.0125 = 160 > \lambda_1 = 99.4$$

AB 杆属大柔度杆, 应用欧拉公式求临界载荷, 即

$$\begin{aligned} F_{cr} &= \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} \\ &= \frac{\pi^2 \times 210 \times 10^9 \times \pi(0.04^4 - 0.03^4)/64}{(1 \times 2)^2} \text{ N} = 44500 \text{ N} \end{aligned}$$

$$n = \frac{F_{cr}}{F} = \frac{44500}{18500} = 2.41 < n_{st} = 2.5$$

工作安全因数小于规定的稳定安全因数, 所以不安全。

9.17 两端固定的管道长为 2 m, 内径 $d=30$ mm, 外径 $D=40$ mm。材料为 Q235 钢, $E=210$ GPa, 线膨胀系数 $\alpha_t=125 \times 10^{-7}/^\circ\text{C}$ 。若安装管道时的温度为 10°C , 试求不引起管道失稳的最高温度。

解 Q235 钢的由材料力学性能决定的两个参数在题 9.13 中已求出, 即

$$\lambda_1 = 99.2, \quad \lambda_2 = 57.1$$

可视管道为两端固定, 所以长度系数 $\mu=0.5$, 管道的柔度

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{4\mu l}{\sqrt{D^2 + d^2}} = \frac{4 \times 0.5 \times 2}{\sqrt{0.04^2 + 0.03^2}} = 80$$

因 $\lambda_2 < \lambda < \lambda_1$, 所以应当用直线公式计算临界应力, 并且应满足 $\sigma_T \leq \sigma_{cr}$, 即 $\alpha E \Delta T \leq (a - b\lambda)$, 故

$$\Delta T = \frac{a - b\lambda}{\alpha E} = \frac{(304 - 1.12 \times 80) \times 10^6}{125 \times 10^{-7} \times 210 \times 10^9} ^\circ\text{C} = 81.7 ^\circ\text{C}$$

不引起管道失稳的最高温度为

$$T = 10\text{ }^{\circ}\text{C} + 81.7\text{ }^{\circ}\text{C} = 91.7\text{ }^{\circ}\text{C}$$

9.18 如题 9.18 图所示,试由压杆挠曲线的微分方程式,导出一端固定、另一端自由的压杆的欧拉公式。

解 压杆微弯曲时的挠度方程为

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} = M(x) = F(\delta - y)$$

令 $\frac{F}{EI} = k^2$, 上式变为

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + k^2 w = k^2 \delta$$

上式为二阶常系数微分方程,其通解为

$$w = A \sin kx + B \cos kx + \delta \quad (1)$$

$$w' = Ak \cos kx - Bk \sin kx \quad (2)$$

边界条件 $x=0$ 时 $w=0, \frac{dw}{dx}=0$

将边界条件代入①、②式解得

$$A = 0, \quad B = -\delta$$

将 A, B 值代入①式得

$$w = \delta(1 - \cos kx) \quad (3)$$

将 $x=l$ 时 $y=\delta$ 代入③式得

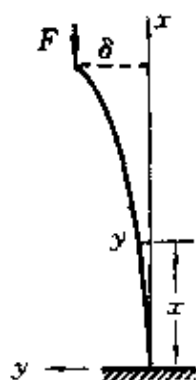
$$\cos kl = 0$$

即 $kl = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$

$$k^2 = \frac{F}{EI} = \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{(2l)^2}$$

$$F = \frac{(2n+1)^2 \pi^2 EI}{(2l)^2}$$

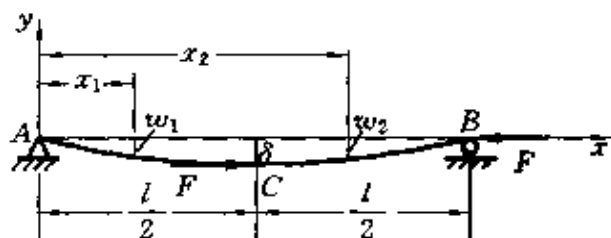
使杆保持微弯曲状态的最小压力才是临界压力,所以取 $n=0$, 临界压力为



题 9.18 图

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$$

9.19 在两端铰支压杆的中点及右端作用压力 F (题 9.19 图), 试求 F 的临界值。



题 9.19 图

解 设压力 F 作用截面的挠度为 δ 。两端铰支座的垂直反力皆为 $F\delta/l$, 但方向相反。分 AC 和 CB 两段列出弯矩方程, 并进行积分。

在 AC 段内, 弯矩及挠曲线的微分方程分别是

$$M = -\frac{F\delta}{l}x_1, \quad \frac{d^2w_1}{dx_1^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{F\delta}{EI l}x_1 = -k^2 \frac{\delta}{l}x_1$$

式中, δ 是负的, 但弯矩 M 为正, 故 M 表达式的右边有一负号。此外, 式中仍然引用了记号 $k^2 = F/(EI)$ 。积分上式, 得

$$w_1 = -\frac{k^2\delta}{6l}x_1^3 + Cx_1 + D$$

利用边界条件

$$x_1 = 0 \text{ 时, } w_1 = 0; \quad x_1 = l/2 \text{ 时, } w_1 = \delta$$

求得积分常数 C 和 D 。于是有

$$w_1 = -\frac{k^2\delta}{6l}x_1^3 + \frac{2\delta}{l}\left(1 + \frac{k^2l^2}{48}\right)x_1 \quad (1)$$

在 CB 段内, 弯矩及挠曲线的微分方程分别是

$$M = -Fw_2 + \frac{F\delta}{l}(l - x_2), \quad \frac{d^2w_2}{dx_2^2} + k^2w_2 = \frac{k^2\delta}{l}(l - x_2)$$

方程式的通解为

$$w_2 = A\sin kx_2 + B\cos kx_2 + \frac{\delta}{l}(l - x_2)$$

利用边界条件

$$x_2 = l \text{ 时, } w_2 = 0; \quad x_2 = l/2 \text{ 时, } w_2 = \delta$$

求出积分常数 A 和 B 。于是有

$$w_2 = \frac{\delta}{2\left(\sin \frac{kl}{2} - \tan kl \cos \frac{kl}{2}\right)} \times (\sin kx_2 - \tan kl \cos kx_2) + \frac{\delta}{l}(l - x_2) \quad (2)$$

根据连续性条件

$$x_1 = x_2 = l/2 \text{ 时, } \frac{dw_1}{dx_1} = \frac{dw_2}{dx_2}$$

又可求得

$$\frac{kl}{2} \left(\cos \frac{kl}{2} + \tan kl \sin \frac{kl}{2} \right) = \left(3 - \frac{k^2 l^2}{12} \right) \left(\sin \frac{kl}{2} - \tan kl \cos \frac{kl}{2} \right)$$

进一步简化上式,得

$$\tan \frac{kl}{2} = \frac{3(kl/2)}{(kl/2)^2 - 9} \quad (3)$$

这是一个超越方程。求解时仿照文献1例9.3使用的方法,分别作

曲线 $w = \tan \frac{kl}{2}$ 和 $w = \frac{3(kl/2)}{(kl/2)^2 - 9}$, 两条曲线的第一个交点 $kl/2 = 2.16$ 就是满足方程式③的最小根。与其相应的临界压力

$$F_{cr} = k^2 EI = \left(\frac{2 \times 2.16}{l} \right)^2 EI = \frac{18.7 EI}{l^2}$$

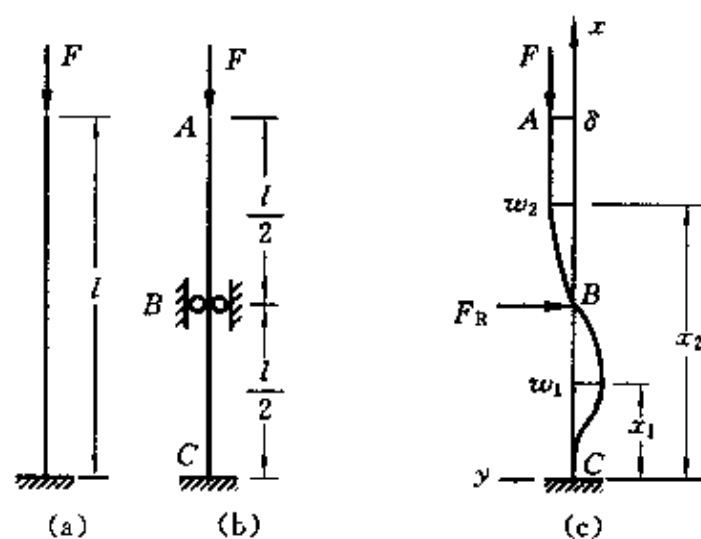
9.20 压杆的一端固定,另一端自由(题9.20图(a))。为提高其稳定性,在中点增加铰支座,如题9.20图(b)所示。试求加强后压杆的欧拉公式,并与加强前的压杆比较。

解 (1) 分段建立挠曲线方程

受压杆微弯平衡下的挠曲线如题9.20图(c)所示。

AB 段弯矩方程为

$$M(x_2) = F(\delta - w_2)$$



题 9.20 图

$$w'' = \frac{M(x_2)}{EI} = \frac{F(\delta - w_2)}{EI} \quad (1)$$

令 $k^2 = \frac{F}{EI}$, ①式可化为 $w_2'' + k^2 w_2 = k^2 \delta$

其通解为 $w_2 = A \sin kx_2 + B \cos kx_2 + \delta$

$$w_2' = Ak \cos kx_2 - Bk \sin kx_2$$

BC 段弯矩方程为

$$M(x_1) = F(\delta - w_1) - F_R(l/2 - x_1)$$

$$w_1'' = \frac{M(x_1)}{EI} = \frac{F(\delta - w_1) - F_R(l/2 - x_1)}{EI} \quad (2)$$

令 $k^2 = \frac{F}{EI}$, ②式可化为

$$w_1'' + k^2 w_1 = k^2 \delta + k^2 \frac{F_R}{F} \left(x_1 - \frac{l}{2} \right)$$

其通解为

$$w_1 = C \sin kx_1 + D \cos kx_1 + \delta + \frac{F_R}{F} \left(x_1 - \frac{l}{2} \right)$$

$$w_1' = Ck \cos kx_1 - Dk \sin kx_1 + \frac{F_R}{F}$$

(2) 代入边界条件确定常数 A、B、C、D

当 $x_1=0$ 时, 有 $w_1=w'_1=0$

解得
$$C = -\frac{F_R}{kF}, \quad D = \frac{F_R l}{2F} - \delta$$

所以有

$$w_1 = -\frac{F_R}{kF} \sin kx_1 + \left(\frac{F_R l}{2F} - \delta \right) \cos kx_1 + \delta + \frac{F_R}{F} \left(x_1 - \frac{l}{2} \right)$$

$$w'_1 = -\frac{F_R}{kF} k \cos kx_1 - \left(\frac{F_R l}{2F} - \delta \right) k \sin kx_1 + \frac{F_R}{F}$$

当 $x_1=x_2=l/2$ 时, $w_1=w_2$ 。令 $kl/2=\theta$, 则

$$-\frac{F_R}{kF} \sin \theta + \left(\frac{F_R l}{2F} - \delta \right) \cos \theta + \delta = A \sin \theta + B \cos \theta + \delta \quad (3)$$

当 $x_2=l/2$ 时, $w_2=0$, 则

$$A \sin \theta + B \cos \theta + \delta = 0 \quad (4)$$

将④式代入③式得

$$-\frac{F_R}{kF} \sin \theta + \left(\frac{F_R l}{2F} - \delta \right) \cos \theta + \delta = 0 \quad (5)$$

当 $x_1=x_2=\frac{l}{2}$ 时, $w'_1=w'_2$, 则

$$-\frac{F_R}{F} \cos \theta - \left(\frac{F_R l}{2F} - \delta \right) k \sin \theta + \frac{F_R}{F} = A k \cos \theta - B k \sin \theta \quad (6)$$

当 $x_2=l$ 时, $w_2=\delta$, 则

$$A \sin 2\theta + B \cos 2\theta + \delta = \delta \quad (7)$$

将③、④、⑤、⑥、⑦式整理得

$$\begin{cases} A \sin \theta + B \cos \theta + \delta = 0 & (8) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta(1 - \cos \theta) - \frac{F_R}{F} \left(\frac{1}{k} \sin \theta - \frac{l}{2} \cos \theta \right) = 0 & (9) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A k \cos \theta - B k \sin \theta - \delta k \sin \theta + \frac{F_R}{F} (\cos \theta + \theta \sin \theta - 1) = 0 & (10) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A \sin 2\theta + B \cos 2\theta = 0 & (11) \end{cases}$$

⑧、⑨、⑩、⑪式是关于 A, B, δ, F 的齐次线性方程组。同时 A, B, δ, F 不能皆为零。故其系数行列式的值应为零, 即

$$\begin{vmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \cos\theta & -\frac{1}{F}\left(\frac{1}{k}\sin\theta - \frac{l}{2}\cos\theta\right) \\ k\cos\theta & -k\sin\theta & -k\sin\theta & \frac{1}{F}(\cos\theta + \theta\sin\theta - 1) \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

将行列式化简得

$$(2 - 3\cos\theta)\sin\theta + \theta\cos 2\theta = 0 \quad (12)$$

对⑫式用作图法解得 $2\theta = kl = 2.502$

所以
$$k^2 = \frac{F}{EI} = \left(\frac{2.502}{l}\right)^2 = \frac{6.26}{l^2}$$

加强后压杆的欧拉公式为

$$(F_{cr})_b = \frac{6.26EI}{l^2} = \frac{\pi^2 EI}{1.58l^2} = \frac{\pi^2 EI}{(1.26l)^2}$$

加强前压杆的欧拉公式为

$$(F_{cr})_a = \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2}$$

两者之比
$$\frac{(F_{cr})_b}{(F_{cr})_a} = \frac{2^2}{(1.26)^2} = 2.52$$

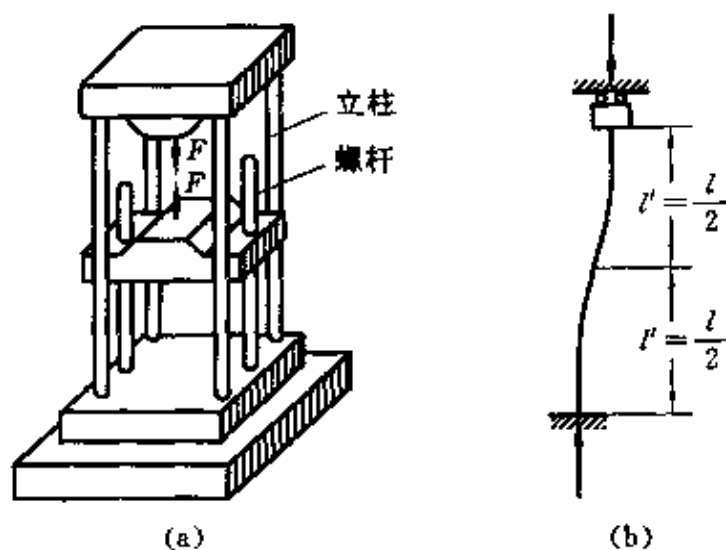
加强后的压杆的临界载荷是加强前的 2.52 倍。

9.21 题 9.21 图(a)所示为万能机的示意图,四根立柱的长度为 $l=3\text{ m}$,钢材的 $\sigma_p=200\text{ MPa}$, $E=210\text{ GPa}$ 。立柱丧失稳定后的变形曲线如题 9.21 图(b)所示。若 F 的最大值为 1000 kN ,规定的稳定安全因数为 $n_{st}=4$,试按稳定条件设计立柱的直径。

解 此题为结合工程实际的屈曲问题。它的力学模型如题 9.21 图(b)所示,两段均可视为长为 $l'=\frac{l}{2}$ 的一端固定,另一端自由的压杆,相当长度为

$$\mu l_1 = 2l_1 = 2 \times l/2 = 1 \times l$$

因此对题 9.21(b)所示的全长为 l 的立柱而言,其长度系数 $\mu=1$,



题 9.21 图

(其实,这种情况下的 μ 值可直接查表得到。*)材料的

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \times 210 \times 10^9}{200 \times 10^6}} = 102$$

先假设满足欧拉公式的适用条件,一根立柱的临界载荷为

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \times 210 \times 10^9 \times \pi d^4}{(1 \times 3)^2 \times 64} = 1.13 \times 10^{10} d^4$$

设每根立柱的轴力为 F_N ,根据给定的稳定性条件应有

$$n = F_{cr}/F_N \geq n_{st}$$

$$F_{cr} \geq n_{st} F_N = n_{st} \times F_{max}/4 = 4 \times 1000/4 \text{ kN} = 1000 \text{ kN}$$

所以

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{1000 \times 10^3}{1.13 \times 10^{10}}} \text{ m} = 97 \text{ mm}$$

立柱的柔度为 $\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1 \times 3}{0.097/4} = 124 > \lambda_1 = 102$

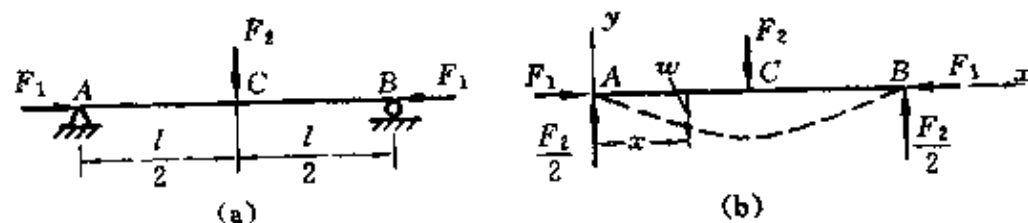
所以用欧拉公式的计算有效,取立柱的直径

$$d = 97 \text{ mm}$$

9.22 求题 9.22 图(a)所示纵横弯曲问题的最大挠度及弯

* R. W. Fitzgerald, Mechanics of Materials, 2nd edition, 1982. p273
N. Willems, Strength of Materials, 1981. p239

矩。设杆件的抗弯刚度 EI 为已知。



题 9.22 图

解 设弯曲变形发生于杆件的一个主惯性平面内, 因梁的支承和载荷都对称, 故只考虑 AC 段(题 9.22 图(b)), 挠曲线的微分方程为

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} = M(x) = \frac{F_2}{2}x - F_1 y \quad \left(0 \leq x \leq \frac{l}{2}\right) \quad (1)$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{1}{EI} \left(\frac{F_2}{2}x - F_1 y \right)$$

令 $k^2 = \frac{F_1}{EI}$, ①式变为

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + k^2 w = k^2 \frac{F_2}{2F_1} x$$

其通解为 $w = A \cos kx + B \sin kx + \frac{F_2}{2F_1} x$

$$w' = -A k \sin kx + B k \cos kx + \frac{F_2}{2F_1}$$

利用边界条件确定积分常数:

当 $x=0$ 时, $w=0$, 得 $A=0$

当 $x=\frac{l}{2}$ 时, $w'=0$, 得 $B = -\frac{F_2}{2F_1} \times \frac{1}{k \cos \frac{kl}{2}}$

利用 $\sin kl = 2 \sin \frac{kl}{2} \cos \frac{kl}{2}$

得 $B = -\frac{F_2 \sin kl / 2}{F_1 k \sin kl}$

故挠曲线方程为

$$w = -\frac{F_2 \sin kl/2}{F_1 k \sin kl} \sin kx + \frac{F_2}{2F_1} x \quad (2)$$

对 x 取导数有

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{F_2 \sin kl/2}{F_1 \sin kl} \cos kx + \frac{F_2}{2F_1} \quad (3)$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M}{EI} = \frac{k F_2 \sin kl/2}{F_1 \sin kl} \sin kx \quad (4)$$

最大挠度产生在 $x=l/2$ 处, 将 $x=l/2$ 代入②式, 得

$$\delta = -\frac{F_2}{2F_1 k} \tan \frac{kl}{2} + \frac{F_2 l}{4F_1}$$

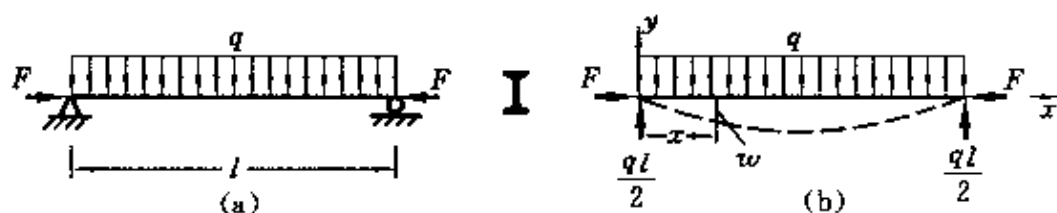
将 $x=l/2$ 代入④式, 得最大弯矩

$$M_{\max} = \frac{E I F_2 k}{2F_1} \tan \frac{kl}{2}$$

将 $k^2 = \frac{F_1}{EI}$ 代入上式, 得

$$M_{\max} = \frac{F_2}{2k} \tan \frac{kl}{2}$$

9.23 求题 9.23 图(a)所示的在均布横向载荷作用下, 纵横弯曲问题的最大挠度及弯矩。若 $q=20 \text{ kN/m}$, $F=200 \text{ kN}$, $l=3 \text{ m}$, 杆件为 20a 工字钢, 试计算杆件的最大正应力及最大挠度。



题 9.23 图

解 根据题 9.23 图(b), 列弯矩方程为

$$M(x) = \frac{ql}{2}x - \frac{q}{2}x^2 - Fw \quad (1)$$

挠曲线方程为

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M}{EI} = \frac{q}{2EI}lx - \frac{q}{2EI}x^2 - \frac{F}{EI}w \quad (2)$$

令 $k^2 = \frac{F}{EI}$, 并代入②式得

$$w'' + k^2w = \left(\frac{ql}{2F}x - \frac{q}{2F}x^2 \right) k^2$$

其通解为 $w = A \sin kx + B \cos kx - \frac{q}{2F}x^2 + \frac{ql}{2F}x + \frac{q}{Fk^2}$

$$w' = Ak \cos kx - Bk \sin kx - \frac{q}{F}x + \frac{ql}{2F}$$

由边界条件确定积分常数:

$$\text{当 } x=0 \text{ 时, } w=0, \text{ 得 } B = -\frac{q}{Fk^2}$$

$$\text{当 } x=l/2 \text{ 时, } w'=0, \text{ 得 } A = -\frac{q}{Fk^2} \tan \frac{kl}{2}$$

于是得挠曲线方程

$$w = \frac{q}{Fk^2} \left[1 - \cos kx - \tan \frac{kl}{2} \sin kx \right] + \frac{q}{2F} (lx - x^2) \quad (3)$$

将③式代入弯矩方程①式中, 得

$$M(x) = -\frac{q}{k^2} \left[1 - \cos kx - \tan \frac{kl}{2} \sin kx \right] \quad (4)$$

最大挠度产生在 $x=l/2$ 处, 将 $x=l/2$ 代入③式得

$$w_{\max} = \frac{q}{Fk^2} \left(1 - \frac{1}{\cos(kl/2)} \right) + \frac{ql^2}{8F}$$

最大弯矩产生在 $x=\frac{l}{2}$ 处, 将 $x=\frac{l}{2}$ 代入④式, 得

$$M_{\max} = -\frac{q}{k^2} \left(1 - \frac{1}{\cos(kl/2)} \right)$$

查附录三型钢表得 20a 工字钢

$$I = 2370 \text{ cm}^4, \quad W = 237 \text{ cm}^3, \quad A = 35.5 \text{ cm}^2$$

所以

$$k^2 = \frac{F}{EI} = \frac{200 \times 10^3}{210 \times 10^9 \times 2370 \times 10^{-8}} = 0.0402 \text{ m}^{-2}$$

$$k = 0.2005 \text{ m}^{-1}$$

最大挠度

$$\begin{aligned} w_{\max} &= \frac{q}{Fk^2} \left(1 - \frac{1}{\cos(kl/2)} \right) + \frac{ql^2}{8F} \\ &= \left[\frac{20 \times 10^3}{200 \times 10^3 \times 0.0402} \left(1 - \frac{1}{\cos \frac{0.2005 \times 3}{2}} \right) + \frac{20 \times 10^3 \times 3^2}{8 \times 200 \times 10^3} \right] \text{ m} \\ &= -4.5 \text{ mm} \end{aligned}$$

w_{\max} 为负值,说明挠度发生在 x 轴以下。

最大弯矩

$$\begin{aligned} M_{\max} &= -\frac{q}{k^2} \left(1 - \frac{1}{\cos kl/2} \right) \\ &= -\frac{20 \times 10^3}{0.0402} \left(1 - \frac{1}{\cos \frac{0.2005 \times 3}{2}} \right) \text{ N} \cdot \text{m} = 23.4 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

梁内最大应力

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{F}{A} + \frac{M_{\max}}{W} = \left(\frac{200 \times 10^3}{35.5 \times 10^{-4}} + \frac{23.4 \times 10^3}{237 \times 10^{-6}} \right) \text{ Pa} \\ &= 155 \text{ MPa} \end{aligned}$$

9.24 载荷有一偏心距 e 的压杆的计算简图如题 9.24 图所示。试求最大应力。

解 根据计算简图有

$$M(x) = -F(w + e)$$

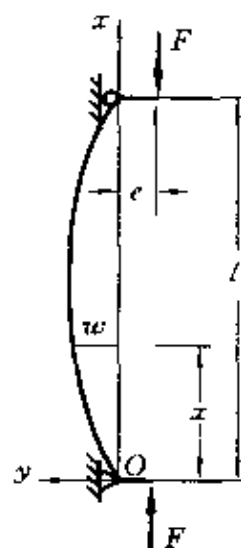
$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} = -\frac{Fw}{EI} - \frac{Fe}{EI}$$

令 $k^2 = \frac{F}{EI}$, 以上方程式可以写成

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + k^2 w = -k^2 e$$

方程的通解为

$$w = A \sin kx + B \cos kx - e$$



题 9.24 图

利用边界条件确定积分常数后,可得挠曲线方程为

$$w = e \left(\tan \frac{kl}{2} \sin kx + \cos kx - 1 \right)$$

最大挠度发生在跨度中点。当 $x=l/2$ 时,最大挠度为

$$\delta = e(\sec(kl/2) - 1) \quad (1)$$

在跨度中间截面上,若边缘各点到中性轴的最远距离为 c ,则最大应力为

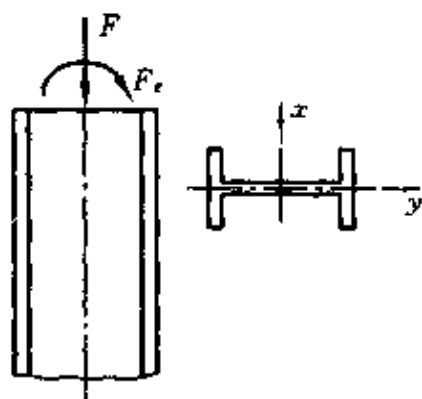
$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} + \frac{F(\delta + e)c}{I} = \frac{F}{A} + \frac{F(\delta + e)c}{Ai^2} \quad (2)$$

将①式代入②式得

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{ec}{i^2} \sec \frac{l}{2} \sqrt{\frac{F}{EI}} \right) = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{ec}{i^2} \sec \frac{l}{i} \sqrt{\frac{F}{4EA}} \right)$$

以上公式称为正割公式。

9.25 偏心受压杆件如题 9.25 图所示,设 $F=100 \text{ kN}$, $Fe=5 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 。压杆两端铰支, $l=2 \text{ m}$ 。材料为 Q235 钢, $E=210 \text{ GPa}$, $\sigma_s=235 \text{ MPa}$, $\sigma_b=304 \text{ MPa}$, $b=1.12 \text{ MPa}$, $\sigma_p=200 \text{ MPa}$,取安全因数 $n_{st}=2.5$ 。试按上题导出的正割公式,用试凑法选择所使用的工字梁。



题 9.25 图

解 将上题推导出的正割公式改写为

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} + \frac{Fec}{I} \sec \left(\frac{l}{2} \sqrt{\frac{F}{EI}} \right)$$

由于公式中未知数太多,特别是三角函数中含有未知数,故在用试凑法时仅把 A 当作未知数来求解。

初选 No. 32a 工字钢,查附录三型钢表得

$$A_1 = 67.1 \text{ cm}^2, \quad I_x = 11100 \text{ cm}^4, \quad W_x = 692 \text{ cm}^3$$

由已知参数计算得

$$\sqrt{I_x} = 105 \times 10^{-4} \text{ m}^2, \quad \frac{l}{2} \sqrt{\frac{F}{EI}} = 6.9 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

由强度条件有

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{F}{A_2} + \frac{Fec}{I} \sec\left(\frac{l}{2} \sqrt{\frac{F}{EI}}\right) = \frac{F}{A_2} + \frac{Fe}{W_x} \sec\left(\frac{l}{2} \sqrt{\frac{F}{EI_x}}\right) \\ &= \frac{100 \times 10^3}{A_2} + \frac{5 \times 10^3}{692 \times 10^{-6}} \sec\left(\frac{6.9 \times 10^{-4}}{105 \times 10^{-4}}\right) \leq \frac{235 \times 10^6}{2.5} \end{aligned}$$

解上式得 $A_2 \geq 11.5 \text{ cm}^2$, 取 $A_2 = 11.5 \text{ cm}^2$, 则

$$A_3 = \frac{A_1 + A_2}{2} = \frac{67.2 + 11.5}{2} = 39.4 \text{ cm}^2$$

依据 A_3 查附录三型钢表应选取 No. 20b 工字钢, 有

$$I_x = 2500 \text{ cm}^4, \quad \sqrt{I_x} = 50 \times 10^{-4} \text{ m}^2, \quad W_x = 250 \text{ cm}^3$$

由强度条件有

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{F}{A_4} + \frac{Fec}{I} \sec\left(\frac{l}{2} \sqrt{\frac{F}{EI}}\right) = \frac{F}{A_4} + \frac{Fe}{W_x} \sec\left(\frac{l}{2} \sqrt{\frac{F}{EI_x}}\right) \\ &= \frac{100 \times 10^3}{A_4} + \frac{5 \times 10^3}{250 \times 10^{-6}} \sec\left(\frac{6.9 \times 10^{-4}}{50 \times 10^{-4}}\right) \leq \frac{235 \times 10^6}{2.5} \end{aligned}$$

解上式得 $A_4 \geq 13.5 \text{ cm}^2$, 取 $A_4 = 13.5 \text{ cm}^2$, 则

$$A_5 = \frac{A_3 + A_4}{2} = \frac{39.4 + 13.5}{2} = 26.5 \text{ cm}^2$$

依据 A_5 查附录三型钢表, 选取 No. 16 工字钢。

$$I_x = 1130 \text{ cm}^4, \quad \sqrt{I_x} = 33.6 \times 10^{-4} \text{ m}^2, \quad W_x = 141 \text{ cm}^3$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{F}{A_6} + \frac{Fe}{W_x} \sec\left(\frac{l}{2} \sqrt{\frac{F}{EI_x}}\right) \\ &= \frac{10^5}{A_6} + \frac{5 \times 10^3}{141 \times 10^{-6}} \sec\left(\frac{6.9 \times 10^{-4}}{33.6 \times 10^{-4}}\right) \leq \frac{235 \times 10^6}{2.5} \end{aligned}$$

解上式得 $A_6 \geq 17.3 \text{ cm}^2$, 取 $A_6 = 17.3 \text{ cm}^2$, 则

$$A_7 = \frac{A_5 + A_6}{2} = \frac{26.5 + 17.3}{2} \text{ cm}^2 = 21.9 \text{ cm}^2$$

依据 A_7 查附录三型钢表应选取 No. 14 工字钢, 有

$$I_x = 712 \text{ cm}^4, \quad \sqrt{I_x} = 26.7 \times 10^{-4} \text{ cm}^2, \quad W_x = 102 \text{ cm}^3$$

由强度条件有

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{F}{A_8} + \frac{Fec}{I} \sec\left(\frac{l}{2} \sqrt{\frac{F}{EI}}\right) = \frac{F}{A_8} + \frac{Fe}{W} \sec\left(\frac{l}{2} \sqrt{\frac{F}{EI}}\right) \\ &= \frac{100 \times 10^3}{A_8} + \frac{5 \times 10^3}{102 \times 10^{-6}} \sec\left(\frac{6.9 \times 10^{-4}}{26.7 \times 10^{-4}}\right) \leq \frac{235 \times 10^6}{2.5} \end{aligned}$$

解上式得 $A_8 \geq 23.1 \text{ cm}^2$, 取 $A_8 = 23.1 \text{ cm}^2$, 则

$$A_9 = \frac{A_7 + A_8}{2} = \frac{21.9 + 23.1}{2} = 22.5 \text{ cm}^2$$

依据 A_9 查附录三型钢表仍应选取 No. 14 工字钢, 由上式知 $A_{10} \geq 23.1 \text{ cm}^2$, 取 $A_{10} = 23.1 \text{ cm}^2$, 则

$$A_{11} = \frac{A_9 + A_{10}}{2} = \frac{22.5 + 23.1}{2} = 22.8 \text{ cm}^2$$

由此可知, No. 14 工字钢最合适。

最大应力

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{F}{A} + \frac{Fec}{I} \sec\left(\frac{l}{2} \sqrt{\frac{F}{EI}}\right) = \frac{F}{A} + \frac{Fe}{W} \sec\left(\frac{l}{2} \sqrt{\frac{F}{EI}}\right) \\ &= \left[\frac{100 \times 10^3}{21.5 \times 10^{-4}} + \frac{5 \times 10^3}{102 \times 10^{-6}} \sec\left(\frac{6.9 \times 10^{-4}}{26.7 \times 10^{-4}}\right) \right] \text{ Pa} \\ &= 97.2 \text{ MPa} \end{aligned}$$

压杆的柔度 $\lambda = \frac{\mu l}{i_x} = \frac{1 \times 2}{5.76 \times 10^{-2}} = 34.7$

Q235 钢的 $\lambda_1 = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \times 210 \times 10^9}{200 \times 10^6}} = 102$

$$\lambda_2 = \frac{a - \sigma_s}{b} = \frac{304 - 235}{1.12} = 62$$

因压杆的柔度既小于 λ_1 , 也小于 λ_2 , 所以不是屈曲问题, 是受压杆的强度问题, 压杆的临界应力为

$$\sigma_{cr} = \sigma_s / n_{st} = 235 / 2.5 \text{ MPa} = 94 \text{ MPa}$$

最大工作应力比临界应力大,但略超载为

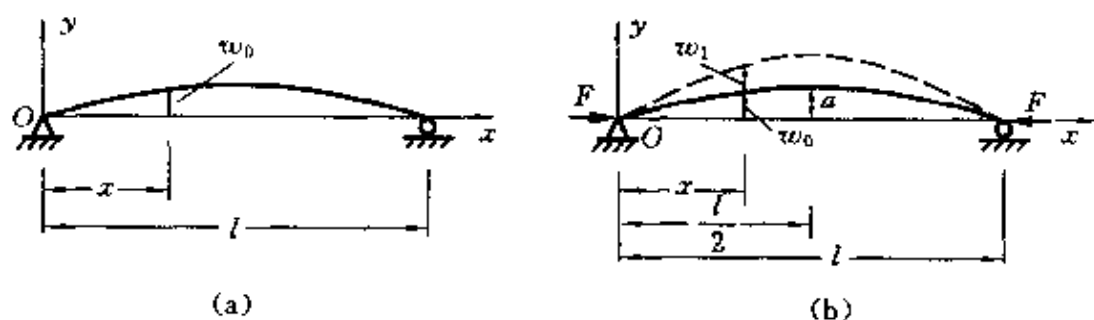
$$\frac{\sigma_{\max} - \sigma_{cr}}{\sigma_{cr}} = \frac{97.2 - 94}{94} = 3.4\%$$

因工程实际中,允许超载在5%以内,所以采用No. 14 工字钢。

9.26 设题9.26图(a)所示压杆轴线的初弯曲可用半波正弦曲线来表示,即 $w_0 = a \sin \frac{\pi x}{l}$,在压力 F 的作用下,试证压杆挠曲线方程为

$$w = w_0 + w_1 = \frac{1}{1 - \alpha} a \sin \frac{\pi x}{l}$$

式中
$$\alpha = \frac{F}{F_{cr}} = \frac{Fl^2}{\pi^2 EI}$$



题9.26图

解 跨度中点初始挠度最大值为 a ,杆因压力 F 的作用而产生的挠度为 w_1 ,则挠曲线任意点的纵坐标为(题9.26图(b))

$$w = w_0 + w_1$$

任意横截面上的弯矩为 $M(x) = -F(w_0 + w_1)$

挠度 w_1 的微分方程为

$$\frac{d^2 w_1}{dx^2} = -\frac{F}{EI}(w_0 + w_1) \quad (1)$$

令 $k^2 = \frac{F}{EI}$ 方程①简化为

$$\frac{d^2 w_1}{dx^2} + k^2 w_1 = -k^2 a \sin \frac{\pi x}{l}$$

此微分方程的通解为

$$w_1 = A \sin kx + B \cos kx + \frac{a}{\pi^2/(k^2 l^2) - 1} \sin \frac{\pi x}{l} \quad (2)$$

由边界条件确定积分常数:

$$\text{当 } x=0 \text{ 时, } w_1=0, \text{ 得 } B=0$$

$$\text{当 } x=l \text{ 时, } w_1=0, \text{ 得 } A=0$$

$$\text{并令 } \alpha = \frac{k^2 l^2}{\pi^2} = \frac{Fl^2}{EI\pi^2} = \frac{F}{F_{cr}}$$

$$\text{将 } A, B, \alpha \text{ 代入 (2) 式, 得 } w_1 = \frac{\alpha}{1-\alpha} a \sin \frac{\pi x}{l}$$

则在压力 F 的作用下, 压杆挠曲线方程为

$$w = w_0 + w_1 = \frac{1}{1-\alpha} a \sin \frac{\pi x}{l}$$

9.27 利用文献1中 § 7.4 导出的差分公式

$$\left(\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{h^2} \right)$$

可以把文献1中 § 9.2 中的微分方程改写成

$$w_{i+1} + (k^2 h^2 - 2)w_i + w_{i-1} = 0$$

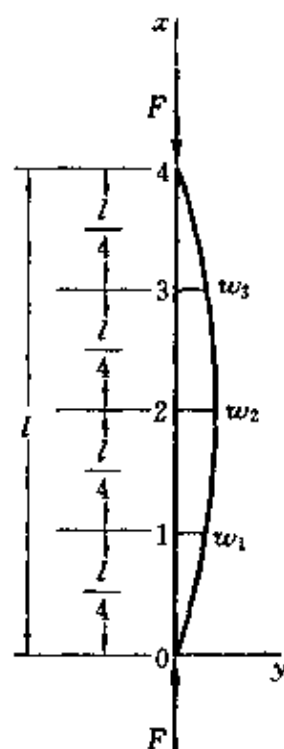
试利用以上的差分方程, 求两端铰支压杆的临界压力, 并与精确解比较。

解 压杆失稳后, 挠曲线微分方程为

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + k^2 w = 0$$

式中, $k^2 = \frac{F}{EI}$ 。利用差分公式改写挠曲线微分方程为

$$w_{i+1} + (k^2 h^2 - 2)w_i + w_{i-1} = 0 \quad (1)$$



题 9.27 图

将压杆分成四个相等的间隔, 沿轴线有 0、1、2、3、4 等五个节点, 如

题 9.27 图所示。根据边界条件有

$$w_0 = w_4 = 0$$

由对称性知

$$w_1 = w_3$$

所以节点位移中只有 w_1, w_2 未知。在①式中分别令 $i=1$ 和 $i=2$, 得

$$\begin{cases} w_2 + (h^2 k^2 - 2)w_1 = 0 \\ (h^2 k^2 - 2)w_2 + 2w_1 = 0 \end{cases}$$

这是关于 w_1 和 w_2 的齐次方程组。 w_1, w_2 必须有非零解, 才是失稳情况。方程组有非零解的条件是

$$\begin{vmatrix} 1 & (h^2 k^2 - 2) \\ (h^2 k^2 - 2) & 2 \end{vmatrix} = 0$$

即

$$(h^2 k^2 - 2)^2 - 2 = 0$$

解上式得

$$h^2 k^2 = 2 \pm \sqrt{2}$$

为使 $k^2 h^2$ 为最小值, 上式右边取负号, 以 $h=l/4$ 代入后得

$$k^2 = \frac{9.37}{l^2} = \frac{F}{EI}$$

所以临界压力为 $F_{cr} = \frac{9.37EI}{l^2}$

所得结果小于欧拉临界压力 $\frac{\pi^2 EI}{l^2}$, 误差约为 5%。如将间隔分得更细, 精度将更高。

第十章 动 载 荷

知识要点

1. 动载荷问题

构件处在加速度运动状态,或载荷以一定的速度作用到构件上,或构件本身突然改变运动状态,均属动载荷问题。

2. 两类动载荷问题

- ① 构件处在加速度运动状态或突然改变运动速度。
- ② 构件本身不运动,受到的载荷具有一定的速度,即冲击问题。

3. 解决动载荷问题的两种方法

(1) 动静法——应用达朗伯尔原理

将构件视为一个质点系,应用达朗伯尔原理,在作加速度运动的构件上施加以惯性力,则作用在构件上的原力系与惯性力系组成平衡力系,把一个动力学问题在形式上作为静力学问题处理,因此在计算构件的应力和变形时要考虑惯性力的影响。

(2) 用能量法解冲击问题

① 冲击问题计算的假设

- a. 冲击物体为刚体,即不考虑冲击物的变形,冲击物与被冲击物体的接触是无弹性的(忽略弹性回跳的影响)。
- b. 冲击应力瞬时传遍被冲击物体。
- c. 被冲击物体的弹性模量 E 与静载时相同。
- d. 冲击过程只有动能与势能的转换,忽略其他的能量损耗。

② 冲击问题的计算——利用机械能守恒原理,系统(包括冲击物和被冲击物体)在冲击前瞬时的总机械能(包括动能和势能)等于系统在冲击后瞬时的总机械能。

4. 作等加速度运动的构件内的动应力

(1) 等线加速度问题

动应力 $\sigma_d = K_d \sigma_{st}$

式中 σ_{st} 为静应力, K_d 为动荷因数

$$K_d = 1 + \frac{a}{g}$$

(2) 等角加速度问题

圆轴内最大扭转切应力

$$\tau_{\max} = \frac{I_0 \epsilon}{W_t}$$

式中 I_0 和 ϵ 分别为圆轴上飞轮对轴的转动惯量和旋转角加速度。

5. 等角速度旋转构件的动应力

(1) 薄圆环作等角速度旋转

圆环横截面上的拉应力

$$\sigma_d = \frac{\omega^2 D^2 \rho}{4} = \rho v^2$$

式中 ρ 和 v 分别为圆环的密度和环上任一点的线速度。

(2) 等直杆绕定轴作等角速度旋转

杆横截面上最大拉应力

$$\sigma_{\max} = \frac{\omega^2 L^2 \rho}{2} = \frac{1}{2} v^2 \rho$$

式中 ρ 和 v 分别是杆的密度和杆端的线速度, L 是杆长度。

6. 构件受冲击载荷时的动应力

(1) 水平冲击

冲击载荷引起的动应力

$$\sigma_d = K_d \sigma_{st}$$

式中 σ_{st} 为静应力, K_d 为动荷因数

$$K_d = \sqrt{\frac{v^2}{g \Delta_{st}}}$$

式中 v 是冲击物的速度, Δ_{st} 为静载荷作用时的变形。

(2) 自由落体冲击

冲击载荷引起的动应力

$$\sigma_d = K_d \sigma_{st}$$

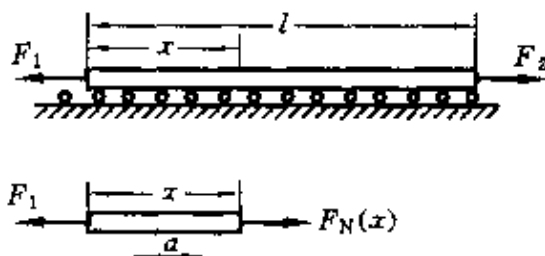
式中 σ_{st} 为静应力, K_d 为动荷因数

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{st}}}$$

式中 h 是自由落体至被冲击物表面的高度。

习题详解

10.1 题10.1图所示的均质等截面杆, 长为 l , 重为 W , 横截面积为 A , 水平放置在一排光滑的滚子上。杆的两端受轴向力 F_1 和 F_2 作用, 且 $F_2 > F_1$ 。试求杆内正应力沿杆件长度分布的情况(设滚动摩擦可以忽略不计)。



题 10.1 图

解 杆的加速度
$$a = \frac{F}{m} = \frac{(F_2 - F_1)g}{W}$$

应用截面法, 由左段的平衡条件可得任一截面的轴力

$$F_N(x) = F_1 + \frac{W}{gl}xa = F_1 + \frac{(F_2 - F_1)}{l}x$$

任一截面上的正应力沿轴线方向呈线性分布

$$\sigma_d(x) = \frac{F_N(x)}{A} = \frac{1}{A} \left(F_1 + \frac{F_2 - F_1}{l}x \right)$$

10.2 题10.2图(a)所示的长为 l 、横截面面积为 A 的杆以加速度 a 向上提升。若材料单位体积的质量为 ρ ,试求杆内的最大应力。

解 应用截面法,由下段的平衡条件可得任一截面的轴力(题10.2图(b))

$$F_{Nd} - \rho g Ax - \rho A x a = 0$$

解上式得

$$F_{Nd} = \rho g Ax(1 + a/g)$$

任一截面上的应力

$$\sigma_A = \frac{F_{Nd}}{A} = \rho g x(1 + a/g)$$

当 $x=l$ 时,杆内应力最大

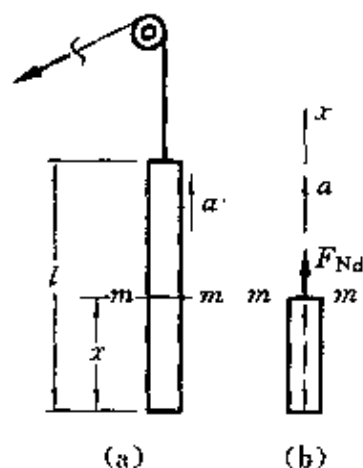
$$\sigma_{dmax} = \rho g l(1 + a/g)$$

10.3 桥式起重机上悬挂一重量 $P=50\text{ kN}$ 的重物,以匀速 $v=1\text{ m/s}$ 向前移(在题10.3图中,移动的方向垂直于纸面)。当起重机突然停止时,重物像单摆一样向前摆动。若梁为No.14工字钢,吊索横截面面积 $A=5\times 10^{-4}\text{ m}^2$,问此时吊索内及梁内的最大应力增加多少? 设吊索的自重以及由重物摆动引起的斜弯曲影响都忽略不计。

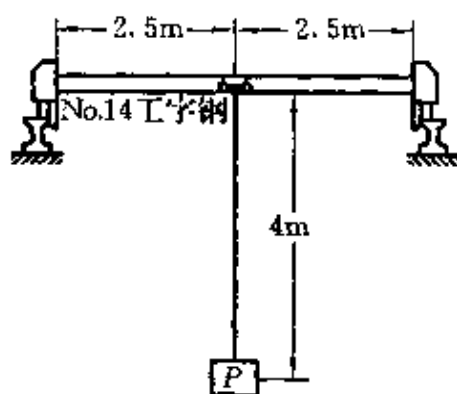
解 吊索内的张力

$$F = P + ma = P + \frac{P}{g} \frac{v^2}{R} = P \left(1 + \frac{v^2}{gR} \right)$$

吊索内的最大应力增加值为



题10.2图



题10.3图

$$\Delta\sigma = \frac{F}{A} - \frac{P}{A} = \frac{P}{g} \times \frac{v^2}{RA} = \frac{50 \times 10^3 \times 1^2}{9.8 \times 4 \times 5 \times 10^{-4}} \text{ Pa}$$

$$= 2.55 \text{ MPa}$$

查附录三型钢表, No. 14 工字钢的 $W = 102 \text{ cm}^3$, 起重机大梁因吊重摆动, 载荷增加了

$$\Delta P = \frac{Pv^2}{gR}$$

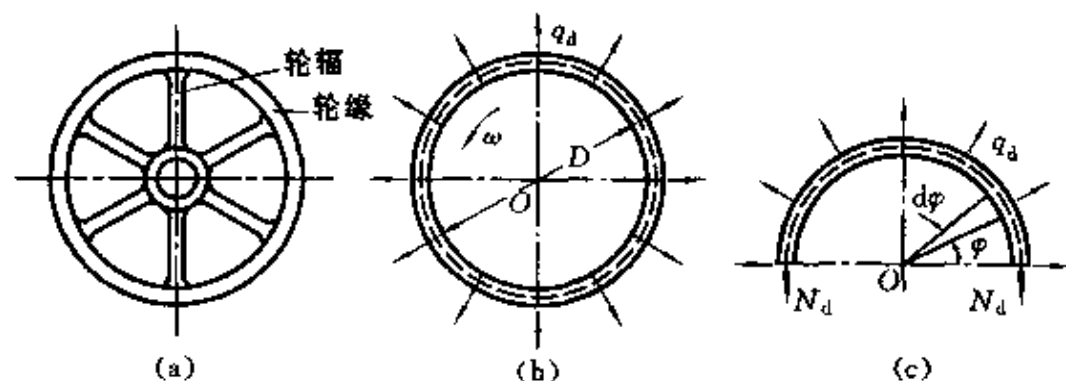
最大弯矩增加了 $\Delta M_{\max} = \frac{\Delta P}{2} \times 2.5$

所以梁内最大应力增加了

$$\Delta\sigma = \frac{\Delta M_{\max}}{W} = \frac{\Delta P \times 2.5}{2 \times 102 \times 10^{-6}} = \frac{Pv^2 \times 2.5}{2 \times gR \times 102 \times 10^{-6}}$$

$$= \frac{50 \times 10^3 \times 1^2 \times 2.5}{2 \times 9.8 \times 4 \times 102 \times 10^{-6}} \text{ Pa} = 15.6 \text{ MPa}$$

10.4 如题 10.4 图 (a) 所示, 飞轮的最大圆周速度 $v = 25 \text{ m/s}$, 材料的单位体积的质量是 $7.41 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, 若不计轮辐的影响, 试求轮缘内的最大正应力。



题 10.4 图

解 若不计轮辐的影响, 飞轮可视为均质的薄圆环。设其截面积为 A , 密度为 ρ , 平均直径为 D , 以匀角速度 ω 旋转, 因为是薄圆环, 所以可近似地认为环内各点的向心加速度相同, 等于 $D\omega^2/2$, 于是沿轴线均匀分布的惯性离心力集度

$$q_d = A\rho a_n = \frac{1}{2}A\rho D\omega^2$$

如题10.4图(b)所示。为了求环的内力,设想把环用过直径的平面截开,研究其一半的平衡,如题10.4图(c)所示,根据平衡条件,有

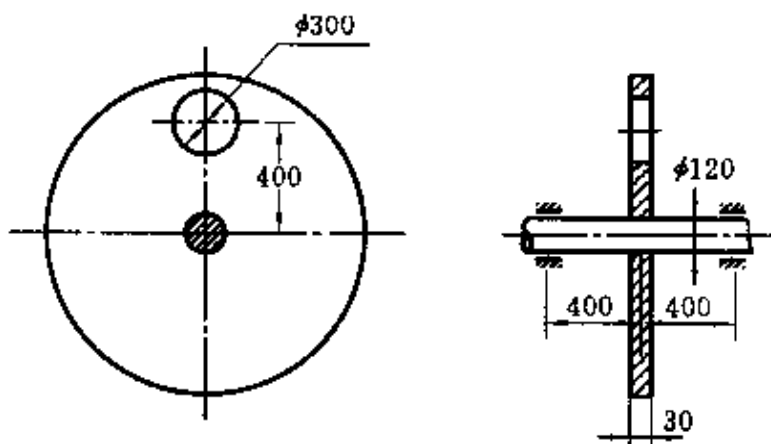
$$\sum F_y = 0, \quad 2F_{Nd} = \int_0^\pi q_d \sin\varphi \times \frac{D}{2} d\varphi = q_d D$$

$$F_{Nd} = \frac{q_d D}{2} = \frac{1}{4}A\rho D^2\omega^2 = A\rho v^2$$

轮缘横截面的正应力

$$\sigma_d = \frac{F_{Nd}}{A} = \frac{1}{A}A\rho v^2 = \rho v^2 = 7.41 \times 10^3 \times 25^2 \text{ Pa} = 4.63 \text{ MPa}$$

10.5 题10.5图所示的轴上装一钢质圆盘,盘上有一圆孔。若轴与盘以匀角速度 $\omega=40 \text{ rad/s}$ 旋转,试求轴内由这一圆孔引起的最大正应力。已知圆盘材料的密度 $\rho=7.81 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 。



题10.5图

解 若圆盘无孔,其惯性力对轴不产生应力。当开有小圆孔时,旋转产生的惯性离心力对轴不对称,相当于在圆孔对称的位置多了一部分材料,由这部分材料产生的惯性离心力为

$$F = ma = (\pi r^2 t \rho) \omega^2 b$$

式中, r 为圆孔半径, b 为圆孔中心与圆盘中心之间的距离, ρ 为圆盘密度。

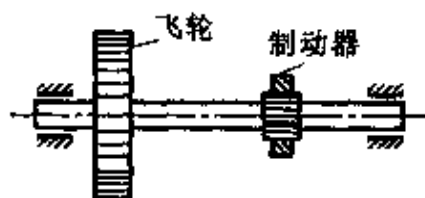
轴受力后的弯矩最大值为

$$M_{\text{dmax}} = \frac{F}{2} \times 0.4$$

轴内最大弯曲正应力

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{dmax}} &= \frac{M_{\text{dmax}}}{W} = \frac{\frac{F}{2} \times 0.4}{\frac{\pi}{32} d^3} = \frac{16 \times 0.4 \times r^2 t \rho \omega^2 b}{d^3} \\ &= \frac{16 \times 0.4 \times 0.15^2 \times 0.03 \times 7.81 \times 10^3 \times 40^2 \times 0.4}{0.12^3} \text{ Pa} \\ &= 12.5 \text{ MPa}\end{aligned}$$

10.6 如题10.6图所示,在直径为100 mm的轴上装有转动惯量 $I = 0.5 \text{ kN} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2$ 的飞轮,轴的转速为300 r/min。制动器开始作用后,在20转内将飞轮刹停。试求轴内最大切应力。设在制动器作用前,轴已与驱动装置脱开,且轴承内的摩擦力可以不计。



题10.6图

解 刹车前轴的角速度

$$\omega_1 = \frac{n(2\pi)}{60} = \frac{300 \times 2\pi}{60} \text{ rad/s} = 31.4 \text{ rad/s}$$

制动器开始作用后在20转内将飞轮刹停,也就是说飞轮从角速度 $\omega_1 = 31.4 \text{ rad/s}$ 变为 $\omega_2 = 0$ 。假设这一过程作等减速运动,所以是以 $\frac{300}{2} \text{ r/min} = 150 \text{ r/min}$ 的减速度将轮制止的。于是制动时间为

$$t = \left(\frac{20}{150} \right) \times 60 \text{ s} = 8 \text{ s}$$

制动过程中的角加速度为

$$\epsilon = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t} = \left(\frac{0 - 31.4}{8} \right) \text{ s}^{-2} = -3.93 \text{ s}^{-2}$$

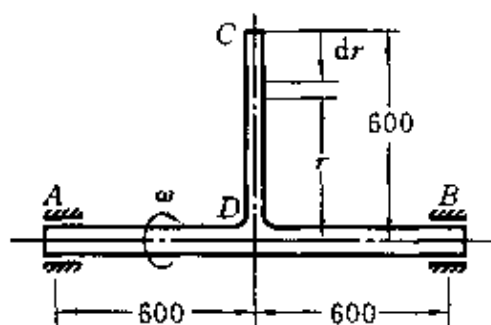
轴内因惯性产生的扭矩

$$T_d = -I\epsilon = (0.5 \times 3.93) \text{ kN} \cdot \text{m} = 1.96 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

轴内最大切应力

$$\tau_{\max} = \frac{T_d}{W_t} = \frac{1.96 \times 10^3}{\pi 0.1^3 / 16} \text{ Pa} = 9.98 \text{ MPa}$$

10.7 题 10.7 图所示钢轴 AB 的直径为 80 mm, 轴上有一直径为 80 mm 的钢质圆杆 CD, CD 垂直于 AB。若 AB 以匀角速度 $\omega = 40 \text{ rad/s}$ 转动。材料的许用应力 $[\sigma] = 70 \text{ MPa}$, 密度 $\rho = 7.8 \text{ g/cm}^3$ 。试校核 AB 轴及 CD 杆的强度。



题 10.7 图

解 轴 AB 以匀角速度转动时, 杆 CD 的惯性力集度为

$$\begin{aligned} q(r) &= ma = \rho A(r\omega^2) \\ &= \left(7.8 \times 10^3 \times \frac{\pi}{4} \times 0.08^2 \right) (r \times 40^2) \text{ N/m} \\ &= 62.7r \text{ kN/m} \end{aligned}$$

惯性力沿杆轴线成线性分布。

CD 杆作用于 AB 杆的惯性力

$$F_{Nd} = \int_{CD} q(r) dr = \left(\int_{0.04}^{0.6} 62.7r dr \right) \text{ kN} = 11.2 \text{ kN}$$

AB 杆的最大弯矩产生在 D 截面, 即

$$M_{\max} = \frac{F_{Nd}l}{4} = \frac{11.2 \times 10^3 \times 1.2}{4} \text{ N} \cdot \text{m} = 3.36 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

AB 杆的最大弯曲正应力

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{M_{\max}}{W} = \frac{3.36 \times 10^3 \times 32}{\pi \times 0.08^3} \text{ Pa} \\ &= 66.9 \text{ MPa} < [\sigma] = 70 \text{ MPa} \end{aligned}$$

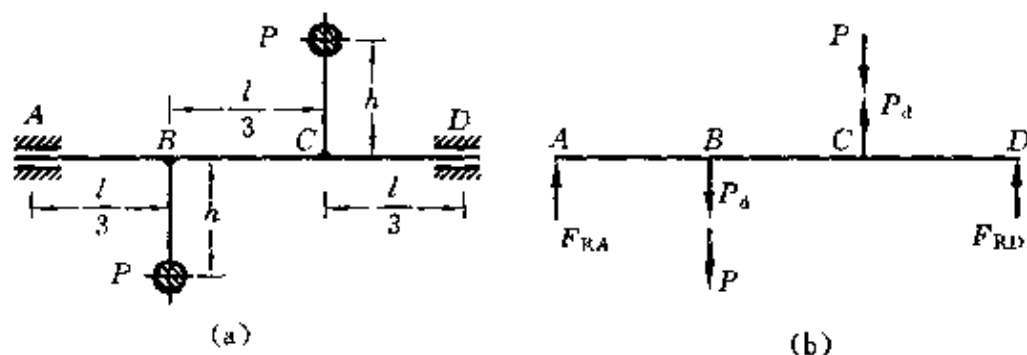
CD 杆内最大正应力

$$\sigma_{CD} = \frac{\omega^2 L^2 \rho}{2} = \frac{40^2 \times 600^2 \times 10^{-6} \times 7.8 \times 10^3}{2} \text{ Pa}$$

$$= 2.25 \text{ MPa} < [\sigma] = 70 \text{ MPa}$$

以上计算没考虑二杆自重的影响。

10.8 AD 轴以匀角速度 ω 转动。在轴的纵向对称面内,于轴线的两侧有两个重为 P 的偏心载荷,如题10.8图(a)所示。试求轴内最大弯矩。



题10.8图

解 轴 AD 作匀角速度转动时,小球的惯性力为

$$F_d = \frac{P}{g} h \omega^2$$

考虑小球的最不利的位置,此时小球的惯性力与小球自重应叠加,轴 AB 的计算简图如题10.8图(b)所示。

由平衡条件可得 A 、 D 端的约束反力为

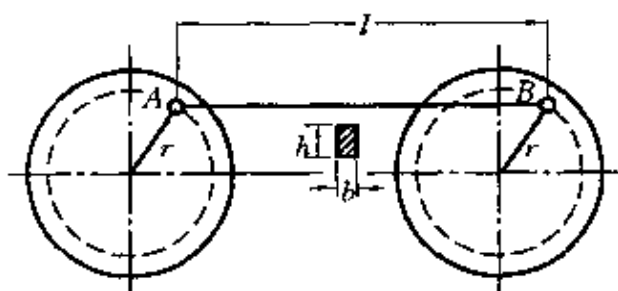
$$F_{RA} = P \left(1 + \frac{h \omega^2}{3g} \right), \quad F_{RD} = P \left(1 - \frac{h \omega^2}{3g} \right)$$

最大弯矩在 B 截面,即

$$M_{\max} = \frac{Pl}{3} \left(1 + \frac{h \omega^2}{3g} \right)$$

10.9 题10.9图所示机车车轮以 $n=300 \text{ r/min}$ 的转速旋转。平行杆 AB 的横截面为矩形, $h=5.6 \text{ cm}$, $b=2.8 \text{ cm}$, 长度 $l=2 \text{ m}$, $r=25 \text{ cm}$, 材料的密度为 $\rho=7.8 \text{ g/cm}^3$ 。试确定平行杆最危险的位置和杆内最大正应力。

解 不难判定,平行杆在最低位置时,惯性力与平行杆轴线垂



题 10.9 图

直,且与重力的方向一致,故平行杆在最低位置时是最危险位置。此时,平行杆可看成一受均布载荷的杆。由自重产生的均布载荷集度

$$q_1 = A\rho g$$

由惯性力产生的均布载荷集度 $q_2 = \frac{q_1}{g}\omega^2 r$

平行杆总的均布载荷集度为 $q = q_1 + q_2 = A\rho g(1 + \omega^2 r/g)$

式中的角速度 $\omega = 2\pi n/60 = \frac{2\pi \times 300}{60} = 31.4 \text{ rad/s}$

平行杆可视为受均布载荷 q 作用的简支梁,最大弯矩在跨度中点,即

$$M_{\max} = \frac{1}{8}ql^2 = \frac{1}{8}bh\rho g\left(1 + \frac{\omega^2 r}{g}\right)l^2$$

最大弯曲正应力

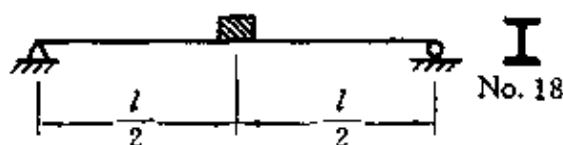
$$\begin{aligned}\sigma_{\max} &= \frac{M_{\max}}{W} = \frac{1}{8}bh\rho g\left(1 + \frac{\omega^2 r}{g}\right)l^2 \times \frac{6}{bh^2} = \frac{3}{4h}l^2\rho g\left(1 + \frac{\omega^2 r}{g}\right) \\ &= \frac{3 \times 2^2 \times 7.8 \times 9.8 \times 10^3}{4 \times 0.056} \left(1 + \frac{31.4^2 \times 0.25}{9.8}\right) \text{ Pa} \\ &= 107 \text{ MPa}\end{aligned}$$

10.10 题 10.10 图所示简支梁为 18 号工字钢, $l=6 \text{ m}$, $E=200 \text{ GPa}$ 。梁上安放着重量为 2 kN 的重物,且作振幅 $B=12 \text{ mm}$ 的振动。试求梁的最大正应力。设梁的质量可以忽略不计。

解 查附录三型钢表,得 18 号工字钢的

$$I = 1660 \text{ cm}^4, \quad W = 185 \text{ cm}^3$$

静载作用下梁的最大正应力



题 10.10 图

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{Pl/4}{W} = \frac{2 \times 10^3 \times 6}{4 \times 185 \times 10^{-6}} \text{ Pa} = 16.2 \text{ MPa}$$

静载作用下梁跨度中点的挠度

$$\Delta_{st} = \frac{Pl^3}{48EI} = \frac{2 \times 10^3 \times 6^3}{48 \times 200 \times 10^9 \times 1660 \times 10^{-8}} \text{ m} = 2.71 \text{ mm}$$

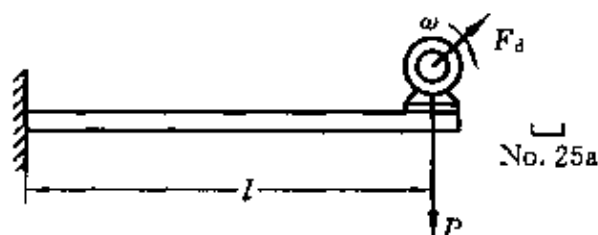
动荷因数

$$K_d = 1 + B/\Delta_{st} = 1 + 12/2.71 = 5.43$$

最大动应力

$$\sigma_{d\max} = K_d \sigma_{\max} = (5.43 \times 16.2) \text{ MPa} = 88 \text{ MPa}$$

10.11 如题 10.11 图所示,电机的重量为 $P=1 \text{ kN}$,转速为 $n=900 \text{ r/min}$,装在悬臂梁的端部。梁为 No. 25a 槽钢,弹性模量 $E=200 \text{ GPa}$ 。由于电机转子不平衡引起的离心力 $F_d=200 \text{ N}$ 。设阻尼系数 $\delta=0$,且梁的质量可以不计。试求:(1) 梁跨度 l 为多大时,将发生共振。(2) 欲使梁的固有频率 ω_0 为干扰频率 ω 的 1.3 倍, l 应为多大?(3) 计算此时受迫振动的振幅 B 及梁内最大正应力。



题 10.11 图

解 (1) 求发生共振时梁的跨度

$$\text{干扰频率} \quad \omega = \frac{900 \times 2\pi}{60} = 30\pi \text{ s}^{-1}$$

固有频率

$$\omega_0 = \sqrt{g/\Delta_{st}}$$

式中, Δ_{st} 为梁在静载作用下, 自由端的挠度, 查附录二表可得

$$\Delta_{st} = \frac{Pl^3}{3EI} \quad (1)$$

共振时

$$\omega_0 = \omega = 30\pi \text{ s}^{-1}$$

$$\Delta_{st} = g/\omega_0^2 = g/\omega^2 \quad (2)$$

解①、②式得

$$l = \sqrt[3]{\frac{3gEI}{P\omega^2}} \quad (3)$$

查附录三型钢表有

$$I = 1.75 \times 10^{-6} \text{ m}^4, \quad W = 30.6 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \quad (4)$$

将④式代入③式, 得

$$l = \sqrt[3]{\frac{3 \times 9.8 \times 200 \times 10^9 \times 1.75 \times 10^{-6}}{1000 \times (30\pi)^2}} \text{ m} = 1.05 \text{ m}$$

跨度 $l = 1.05 \text{ m}$ 时, 梁将发生共振。

(2) 欲使梁的固有频率 ω_0 为干扰频率 ω 的 1.3 倍, 求梁应具有

的跨度

因 $\omega_0 = 1.3\omega$, 所以

$$\Delta_{st} = \frac{g}{(1.3\omega)^2} = \frac{9.8}{(1.3 \times 30\pi)^2} \text{ m} = 6.53 \times 10^{-4} \text{ m}$$

将上式代入①式, 得

$$\begin{aligned} l &= \sqrt[3]{\frac{3EI\Delta_{st}}{P}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{3 \times 200 \times 10^9 \times 1.75 \times 10^{-6} \times 6.53 \times 10^{-4}}{1000}} \text{ m} \\ &= 0.882 \text{ m} \end{aligned}$$

梁的跨度 $l = 0.882 \text{ m}$ 时, 梁的固有频率为干扰频率的 3 倍。

(3) 求强迫振动的振幅 B 及梁内最大正应力

振幅为

$$B = \beta \Delta_{Fd}$$

式中 $\beta = \frac{1}{1 - (\omega/\omega_0)^2} = \frac{1}{1 - 30\pi/(1.3 \times 30\pi)^2} = 2.45$

$$\Delta_{Fd} = \frac{F_d \Delta_{st}}{P} = \frac{F_d l^3}{3EI} = \frac{200 \times 0.882^3}{3 \times 200 \times 10^9 \times 1.75 \times 10^{-6}} \text{ m}$$

$$= 1.31 \times 10^{-4} \text{ m}$$

所以 $B = (2.45 \times 1.31 \times 10^{-4}) \text{ m} = 3.21 \times 10^{-4} \text{ m}$

动荷因数为

$$K_d = 1 + \frac{B}{\Delta_{st}} = 1 + \frac{3.21 \times 10^{-4}}{0.653 \times 10^{-3}} = 1.49$$

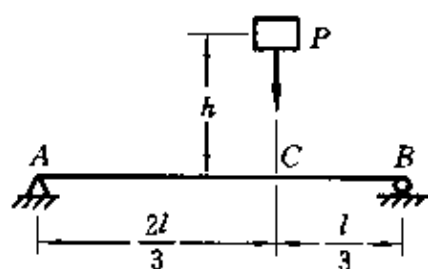
梁内最大静应力

$$\sigma_{stmax} = \frac{M_{max}}{W} = \frac{Pl}{W} = \frac{1000 \times 0.882}{30.6 \times 10^{-6}} \text{ Pa} = 28.8 \text{ MPa}$$

梁内最大动应力

$$\sigma_{dmax} = K_d \sigma_{stmax} = (1.49 \times 28.8) \text{ MPa} = 42.9 \text{ MPa}$$

10.12 如题10.12图所示,重量为 P 的重物自高度 h 下落冲击于梁上的 C 点。设梁的 E 、 I 及抗弯截面系数 W 皆为已知量。试求梁内最大正应力及梁的跨度中点的挠度。



题10.12图

解 静载时梁内最大静应力

$$\sigma_{stmax} = \frac{M_{max}}{W} = \frac{\frac{P}{3} \times \frac{2}{3}l}{W} = \frac{2Pl}{9W}$$

受冲击处(C 点)的静挠度(查附录二)

$$\Delta_{st} = \frac{Fbx}{6EI} (l^2 - b^2 - x^2)$$

本题 $x = \frac{2}{3}l, b = \frac{l}{3}$, 所以

$$\Delta_{st} = \frac{4Pl^3}{243EI}$$

$$\text{动荷因数} \quad K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{243EIh}{2Pl^3}}$$

梁内最大正应力

$$\sigma_{dmax} = K_d \sigma_{stmax} = \left(1 + \sqrt{1 + \frac{243EIh}{2Pl^3}} \right) \frac{2Pl}{9W}$$

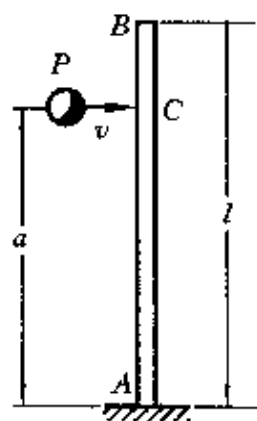
静载时梁跨度中点的挠度(查附录二)

$$w_{st} = \frac{Fb}{48EI}(3l^2 - 4b^2) = \frac{23Pl^3}{1296EI}$$

受冲击载荷时,梁跨度中点的挠度

$$w_d = K_d w_{st} = \frac{23Pl^3}{1296EI} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{243EIh}{2Pl^3}} \right)$$

10.13 如题 10.13 图所示, AB 杆下端固定, 长度为 l , 在 C 点受到沿水平运动的物体的冲击。物体的重量为 P , 当其与杆件接触时速度为 v 。设杆件的 E 、 I 及 W 皆为已知量。试求 AB 杆的最大应力。



题 10.13 图

解 静载时梁内最大静应力及 C 点位移为

$$\sigma_{stmax} = \frac{Pa}{W}, \quad \Delta_{st} = \frac{Pa^3}{3EI}$$

$$\text{动荷因数} \quad K_d = \sqrt{\frac{v^2}{g\Delta_{st}}} = \frac{v}{a} \sqrt{\frac{3EI}{gaP}}$$

AB 杆内最大应力

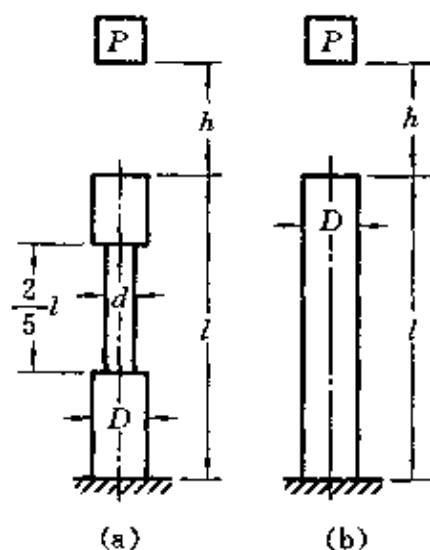
$$\sigma_{dmax} = K_d \sigma_{stmax} = \frac{v}{W} \sqrt{\frac{3EIP}{ga}}$$

10.14 材料相同、长度相等的变截面杆和等截面杆如题 10.14 图(a)、(b)所示。若两杆的最大横截面面积相同, 问哪一根杆件承受冲击的能力强? 设变截面杆直径为 d 的部分长为 $2l/5$ 。为了便于比较, 假设 h 较大, 可以近似地把动荷因数取为

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{st}}} \approx \sqrt{\frac{2h}{\Delta_{st}}}$$

解 静载时,题10.14图(a)杆上端面的位移和杆内最大应力为

$$\begin{aligned}\Delta_{st} &= \sum \frac{F_N l}{EA} = \frac{\frac{3}{5}lP}{E \frac{\pi}{4} D^2} + \frac{\frac{2}{5}lP}{E \frac{\pi}{4} d^2} \\ &= \frac{4Pl}{5E\pi} \left(\frac{3}{D^2} + \frac{2}{d^2} \right) \\ \sigma_{stmax} &= \frac{P}{A_{min}} = \frac{4P}{\pi d^2}\end{aligned}$$



题10.14图

杆受冲击时的动荷因数

$$K_d = \sqrt{\frac{2h}{\Delta_{st}}} = \sqrt{\frac{2h}{\frac{4Pl}{5E\pi} \left(\frac{3}{D^2} + \frac{2}{d^2} \right)}} = \sqrt{\frac{10E\pi h D^2 d^2}{4Pl(3d^2 + 2D^2)}}$$

杆受冲击时图(a)杆内的最大应力

$$\sigma_{d(a)} = K_d \sigma_{stmax} = \sqrt{\frac{8hPE}{\pi l d^2 \left[\frac{3}{5} \frac{d^2}{D^2} + \frac{2}{5} \right]}} \quad (1)$$

动载时图(b)杆内最大动应力:

将 $d=D$ 代入①式得

$$\sigma_{d(b)} = \sqrt{\frac{8hPE}{\pi l D^2}}$$

显然, $\sigma_{d(a)} < \sigma_{d(b)}$, 所以变截面杆承受冲击能力强。

10.15 受压圆柱形密圈螺旋弹簧簧丝的直径 $d=6\text{ mm}$, 弹簧的平均直径 $D=12\text{ cm}$, 有效圈数 $n=18$, $G=80\text{ GPa}$ 。若使弹簧压缩 2.5 cm , 试求所需施加的静载荷。又若以这一载荷自 10 cm 的高度落于弹簧上, 则弹簧的最大应力及变形各为多少?

解 弹簧压缩 2.5 cm , 需施加的静载荷为

$$F = \lambda C$$

式中弹簧刚度为

$$C = \frac{Gd^4}{64R^3n} = \frac{80 \times 10^9 \times 0.006^4}{64 \times 0.06^3 \times 18} \text{ N/m} = 417 \text{ N/m}$$

所以 $F = \lambda C = (0.025 \times 417) \text{ N} = 10.4 \text{ N}$

静载时的最大应力 $\tau_{\max} = k \frac{8FD}{\pi d^3}$

式中 $k = \frac{4c-1}{4c-4} + \frac{0.615}{c}$

将 $c = D/d = 20$ 代入上式, 得 $k = 1.07$, 所以

$$\tau_{\text{stmax}} = k \frac{8FD}{\pi d^3} = 1.07 \times \frac{8 \times 10.4 \times 0.12}{\pi 0.006^3} \text{ Pa} = 15.7 \text{ MPa}$$

动荷因数 $K_d = 1 + \sqrt{1 + 2h/\Delta_{\text{st}}} = 1 + \sqrt{1 + 20/2.5} = 4$

受冲击时弹簧的变形

$$\lambda_d = K_d \lambda = (4 \times 25) \text{ mm} = 100 \text{ mm}$$

受冲击时弹簧内最大应力

$$\tau_{\text{dmax}} = K_d \tau_{\text{stmax}} = (4 \times 15.7) \text{ MPa} = 62.8 \text{ MPa}$$

10.16 直径 $d = 30 \text{ cm}$ 、长 $l = 6 \text{ m}$ 的圆木桩, 下端固定, 上端受重 $P = 2 \text{ kN}$ 的重锤作用。木材的 $E_1 = 10 \text{ GPa}$ 。求下列三种情况下, 木桩内的最大正应力。

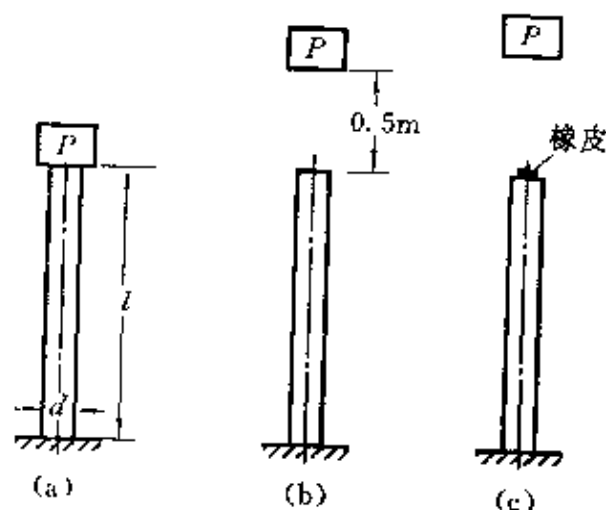
- (1) 重锤以静载荷的方式作用于木桩上(题 10.16 图(a));
- (2) 重锤从离桩顶 0.5 m 的高度自由落下(题 10.16 图(b));
- (3) 在桩顶放置直径为 15 cm 、厚为 40 mm 的橡皮垫, 橡皮的弹性模量 $E_2 = 8 \text{ MPa}$ 。重锤也是从离橡皮垫顶面 0.5 m 的高度自由落下(题 10.16 图(c))。

解 (1) 当重锤以静载荷的方式作用在木桩上时

最大静应力

$$\sigma_{\text{stmax}} = \frac{F_N}{A_1} = \frac{P}{\pi d^2/4} = \frac{4 \times 2000}{\pi \times 0.3^2} \text{ Pa} = 0.0283 \text{ MPa}$$

静变形



题 10.16 图

$$\Delta_{st1} = \frac{Pl}{E_1 A_1} = \left(\frac{2000 \times 6 \times 4}{10^{10} \times \pi \times 0.3^2} \right) \text{ m} = 1.7 \times 10^{-5} \text{ m}$$

(2) 当重锤自由落下时

动荷因数

$$K_{d1} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{st1}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 0.5}{1.7 \times 10^{-5}}} = 243$$

动应力

$$\sigma_{dmax} = K_d \sigma_{stmax} = (243 \times 0.0283) \text{ MPa} = 6.88 \text{ MPa}$$

(3) 当有橡皮垫时

动荷因数仍用情况(2)时的公式,但式中的 Δ_{st} 是橡皮垫和木桩静变形之和,即

$$\Delta_{st} = \Delta_{st1} + \Delta_{st2}$$

$$\Delta_{st1} = 1.7 \times 10^{-5} \text{ m (在解(1)时已求出)}$$

$$\Delta_{st2} = \frac{Pl_2}{E_2 A_2} = \frac{2000 \times 0.04 \times 4}{8 \times 10^6 \times \pi \times 0.15^2} \text{ m} = 5.7 \times 10^{-4} \text{ m}$$

所以 $\Delta_{st} = (1.7 \times 10^{-5} + 5.7 \times 10^{-4}) \text{ m} \approx 5.87 \times 10^{-4} \text{ m}$

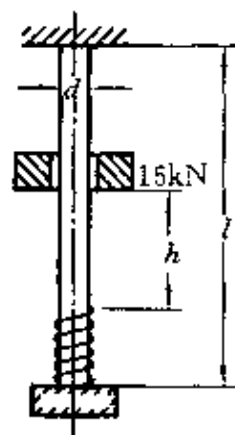
动荷因数

$$K_{d2} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 0.5}{5.87 \times 10^{-4}}} = 42.3$$

冲击载荷下最大应力

$$\sigma_{\text{dmax}} = K_{\text{d2}} \sigma_{\text{st}} = (42.3 \times 0.0283) \text{ MPa} = 1.2 \text{ MPa}$$

10.17 题10.17图所示钢杆的下端有一固定圆盘,盘上放置弹簧。弹簧在1 kN的静载荷作用下缩短0.0625 cm。钢杆的直径 $d=4$ cm, $l=4$ m,许用应力 $[\sigma]=120$ MPa, $E=200$ GPa。若有重为15 kN的重物自由落下,求其许可的高度 h 。又若没有弹簧,则许可高度 h 将等于多大?



题10.17图

解 弹簧的静位移

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \left(\frac{0.0625 \times 10^{-2}}{1000} \times 15 \times 10^3 \right) \text{ m} \\ &= 9.38 \text{ mm} \end{aligned}$$

杆的静位移

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \frac{F_N l}{EA} = \frac{15 \times 10^3 \times 4 \times 4}{200 \times 10^9 \times \pi \times 0.04^2} \text{ m} = 0.239 \text{ mm} \\ \Delta_{\text{st}} &= \Delta_1 + \Delta_2 = (9.38 + 0.239) \text{ mm} = 9.62 \text{ mm} \end{aligned}$$

动荷因数
$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{\text{st}}}}$$

杆的静应力
$$\sigma_{\text{st}} = \frac{4F}{\pi d^2}$$

杆的动应力
$$\sigma_d = K_d \sigma_{\text{st}} = \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{\text{st}}}} \right) \frac{4P}{\pi d^2}$$

由强度条件 $\sigma_d \leq [\sigma]$ 得

$$\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{\text{st}}}} \right) \frac{4P}{\pi d^2} \leq [\sigma]$$

解上式得

$$h \leq \frac{\Delta_{\text{st}}}{2} \left[\left(\frac{\pi d^2 [\sigma]}{4P} - 1 \right)^2 - 1 \right]$$

$$= \frac{9.62 \times 10^{-3}}{2} \left[\left(\frac{\pi \times 0.04^2 \times 120 \times 10^6}{4 \times 15 \times 10^3} - 1 \right)^2 - 1 \right] \text{ m}$$

$$= 389 \text{ mm}$$

所以有弹簧时允许高度为 389 mm。

无弹簧时, 静位移

$$\Delta = \frac{Pl}{EA} = \frac{15 \times 10^3 \times 4 \times 4}{200 \times 10^9 \times \pi \times 0.04^2} \text{ m} = 2.39 \times 10^{-4} \text{ m}$$

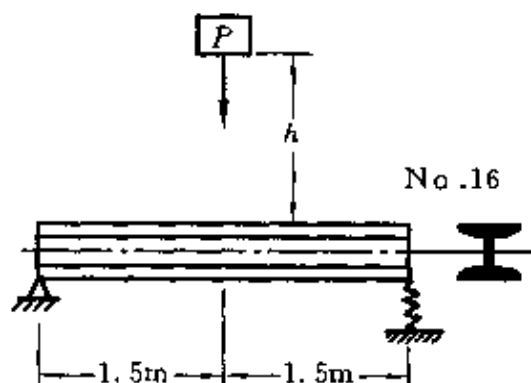
同理可求得

$$h \leq \frac{\Delta}{2} \left[\left(\frac{\pi d^2 [\sigma]}{4P} - 1 \right)^2 - 1 \right] = \frac{389 \times 10^{-3}}{\Delta_{st}} \times \Delta$$

$$= \left(\frac{389 \times 10^{-3}}{9.62 \times 10^{-3}} \times 2.39 \times 10^{-4} \right) \text{ m} = 9.67 \text{ mm}$$

所以无弹簧时允许高度为 9.67 mm。

10.18 题10.18图所示16号工字钢左端铰支, 右端置于螺旋弹簧上。弹簧共有10圈, 其平均直径 $D=10$ cm。簧丝的直径 $d=20$ mm。梁的许用应力 $[\sigma]=160$ MPa, 弹性模量 $E=200$ GPa; 弹簧的许用切应力 $[\tau]=200$ MPa, 切变模量 $G=80$ GPa。今有重量 $P=2$ kN 的重物从梁的跨度中点上方自由落下, 试求其许可高度 h 。



题10.18图

解 查附录三型钢表 No. 16 工字钢, 有

$$I_x = 1130 \text{ cm}^4, \quad W_x = 141 \text{ cm}^3$$

简支梁跨度中点受集中力作用时的挠度(查附录二)

$$\Delta_1 = \frac{Pl^3}{48EI} = \frac{2000 \times 3^3}{48 \times 200 \times 10^9 \times 1130 \times 10^{-8}} \text{ m} \\ = 4.98 \times 10^{-4} \text{ m}$$

弹簧受力为 $P/2$, 其压缩量为

$$\Delta_2 = \frac{64PR^3n}{2Gd^4} = \frac{64 \times 2000 \times 0.05^3 \times 10}{2 \times 80 \times 10^9 \times 0.02^4} \text{ m} = 6.25 \times 10^{-3} \text{ m}$$

梁跨度中点总的静位移

$$\Delta_{st} = \Delta_1 + \Delta_2/2 = [4.98 \times 10^{-4} + (6.25 \times 10^{-3})/2] \text{ m} \\ = 3.62 \times 10^{-3} \text{ m}$$

动荷因数

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{3.62 \times 10^{-3}}} \\ = 1 + \sqrt{1 + 552h}$$

梁的最大静应力

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{Pl/4}{W} = \frac{2000 \times 3}{4 \times 141 \times 10^{-6}} \text{ Pa} = 10.6 \text{ MPa}$$

梁的动应力

$$\sigma_{d\max} = K_d \sigma_{\max} = (1 + \sqrt{1 + 552h}) \times 10.6 \times 10^6$$

根据梁的强度条件 $\sigma_{d\max} \leq [\sigma]$

由 $(1 + \sqrt{1 + 552h}) \times 10.6 \times 10^6 \leq 160 \times 10^6$

确定许可高度为 $h \leq 0.358 \text{ m}$

因为 $c = \frac{D}{d} = \frac{100}{20} = 5$

$$k = \frac{4c-1}{4c-4} + \frac{0.615}{c} = \frac{4 \times 5 - 1}{4 \times 5 - 4} + \frac{0.615}{5} = 1.31$$

所以弹簧丝内的最大剪应力

$$\tau_{\max} = k \frac{8PD}{\pi d^3} = \left(1.31 \times \frac{8 \times 1 \times 10^3 \times 0.1}{\pi \times 0.02^3} \right) \text{ Pa} = 41.7 \text{ MPa}$$

动应力 $\tau_{d\max} = K_d \tau_{\max} = [(1 + \sqrt{1 + 552h}) \times 41.7 \times 10^6] \text{ Pa}$

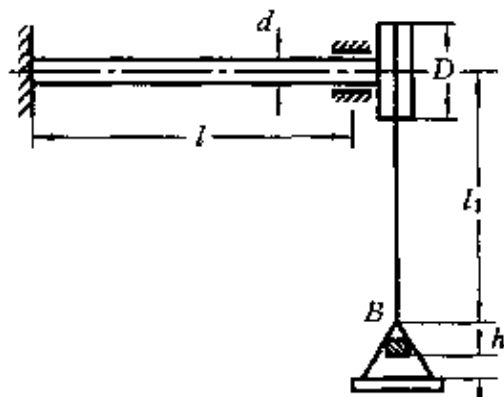
根据弹簧丝的强度条件 $\tau_{\max} \leq [\tau]$

$$\text{由 } (1 + \sqrt{1 + 552h}) \times 41.7 \times 10^6 \leq 200 \times 10^6$$

比较以上由两种强度条件确定的允许高度,取允许高度

$$h \leq 24.3 \text{ mm}$$

10. 19 题 10. 19 图所示圆轴直径 $d=6 \text{ cm}$, $l=2 \text{ m}$, 左端固定, 右端有一直径 $D=40 \text{ cm}$ 的鼓轮。轮上绕以钢绳, 绳的端点 B 悬挂吊盘。绳长 $l_1=10 \text{ m}$, 横截面面积 $A=1.2 \text{ cm}^2$, $E=200 \text{ GPa}$ 。轴的切变模量 $G=80 \text{ GPa}$ 。重量 $P=800 \text{ N}$ 的物块自 $h=20 \text{ cm}$ 处落于吊盘上, 求轴内最大切应力和绳内最大正应力。



题 10. 19 图

解 重物作用点的静位移由两部分组成:

绳的静伸长

$$\Delta_1 = \frac{F_N l_1}{EA} = \frac{800 \times 10}{200 \times 10^9 \times 1.2 \times 10^{-4}} \text{ m} = 3.33 \times 10^{-4} \text{ m}$$

圆轴扭转导致重物作用点的静位移

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \frac{Tl}{GI_p} \times \frac{D}{2} = \frac{(P \times D/2)l}{GI_p} \times \frac{D}{2} = \frac{8PD^2l}{G\pi d^4} \\ &= \frac{8 \times 800 \times 0.4^2 \times 2}{80 \times 10^9 \times \pi \times 0.06^4} \text{ m} = 6.29 \times 10^{-4} \text{ m} \end{aligned}$$

重物作用点总的静位移

$$\begin{aligned} \Delta_{st} &= \Delta_1 + \Delta_2 = (3.33 \times 10^{-4} + 6.29 \times 10^{-4}) \text{ m} \\ &= 9.62 \times 10^{-4} \text{ m} \end{aligned}$$

动荷因数

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 0.2}{9.62 \times 10^{-4}}} = 21.4$$

绳内的动应力(最大正应力)

$$\sigma_d = K_d \sigma_{st} = K_d \frac{F_N}{A} = 21.4 \times \frac{800}{1.2 \times 10^{-4}} \text{ Pa} = 143 \text{ MPa}$$

轴内动应力(最大切应力)

$$\tau_d = K_d \tau_{st} = K_d \frac{T}{W_p} = 21.4 \times \frac{16 \times 800 \times 0.2}{\pi \times 0.06^3} \text{ Pa} = 80.7 \text{ MPa}$$

10.20 题 10.20 图所示钢吊索的下端悬挂一重量为 $P = 25 \text{ kN}$ 的重物,并以速度 $v = 100 \text{ cm/s}$ 下降。当吊索长为 $l = 20 \text{ m}$ 时,滑轮突然被卡住。试求吊索受到的冲击载荷 F_d 。设钢吊索的横截面面积 $A = 4.14 \text{ cm}^2$,弹性模量 $E = 170 \text{ GPa}$,滑轮和吊索的质量可略去不计。

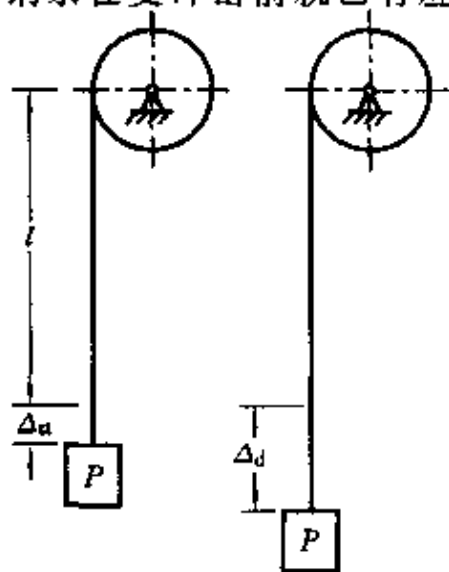
解 文献 1 中的公式(10.6)

$$K_d = \frac{\Delta_d}{\Delta_{st}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2T}{P\Delta_{st}}}$$

不能用于现在的问题,因为导出公式(10.6)时,假设冲击前受冲构件并无应力和变形。在当前的问题中,钢索在受冲击前就已有应力和变形,并储存了应形能。若以 Δ_{st} 表示冲击开始时的变形, Δ_d 表示冲击结束时钢索的总伸长(Δ_d 内包括了 Δ_{st} ,如题 10.20 图所示),冲击开始时整个系统的能量为

$$\frac{1}{2} \frac{P}{g} v^2 + P(\Delta_d - \Delta_{st}) + \frac{1}{2} C \Delta_{st}^2$$

上式中的第一项为冲击物的动能,第二项为冲击物相对它的最低位置的势能,第三项为钢索的应形



题 10.20 图

能。冲击结束时,动能及势能皆已等于零,只剩下钢索的应形能 $\frac{1}{2}C\Delta_d^2$ 。由能量守恒定律,有

$$\frac{1}{2} \frac{P}{g} v^2 + P(\Delta_d - \Delta_{st}) + \frac{1}{2} C \Delta_{st}^2 = \frac{1}{2} C \Delta_d^2$$

以 $C=P/\Delta_{st}$ 代入上式,经简化后得

$$\Delta_d^2 - 2\Delta_{st}\Delta_d + \Delta_{st}^2 \left(1 - \frac{v^2}{g\Delta_{st}} \right) = 0$$

解出
$$\Delta_d = \left(1 + \sqrt{\frac{v^2}{g\Delta_{st}}} \right) \Delta_{st}$$

故动荷因数为

$$K_d = 1 + \sqrt{\frac{v^2}{g\Delta_{st}}} = 1 + \sqrt{\frac{v^2}{g} \frac{EA}{Pl}}$$

把给出的数据代入上式后,求得

$$K_d = 4.79$$

$$F_d = K_d P = 4.79 \times 25 \text{ kN} \approx 120 \text{ kN}$$

10.21 在上题的重物和钢索之间,若加入一个弹簧,则冲击载荷和动应力是增加还是减少?若弹簧常数为4 kN/cm,试求冲击载荷。

解 静载时的位移

$$\begin{aligned} \Delta_{st} &= \Delta_{st1} + \Delta_{st2} = \frac{Pl}{EA} + \frac{P}{C} \\ &= \left(\frac{25 \times 10^3 \times 20}{170 \times 10^9 \times 4.14 \times 10^{-4}} + \frac{25 \times 10^3}{4 \times 10^5} \right) \text{ m} = 0.0696 \text{ m} \end{aligned}$$

动荷因数
$$K_d = 1 + \sqrt{\frac{v^2}{g\Delta_{st}}} = 1 + \sqrt{\frac{1^2}{9.8 \times 0.0696}} = 2.21$$

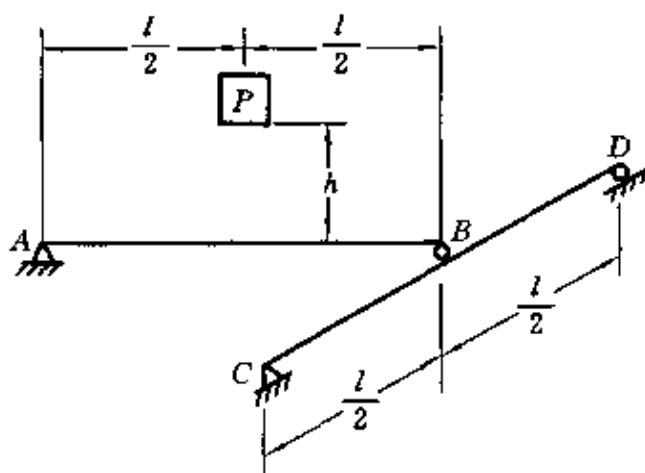
冲击载荷

$$F_d = PK_d = (25 \times 10^3 \times 2.21) \text{ N} = 55.3 \text{ kN}$$

显然,冲击载荷和动应力减少了。

10.22 AB 和 CD 二梁的材料相同,横截面相同。在题10.22

图所示冲击载荷作用下,试求二梁最大应力之比和各自吸收能量之比。



题 10.22 图

解 AB 梁跨度中点的静位移(查附录二)

$$\Delta_{st} = \frac{Pl^3}{48EI} + \frac{1}{2} \times \frac{Pl^3/2}{48EI} = \frac{5Pl^3}{192EI}$$

静载时 AB 梁内的最大正应力

$$\sigma_{st1} = \frac{M_1}{W} = \frac{Pl}{4W}$$

静载时 CD 梁内的最大正应力

$$\sigma_{st2} = \frac{M_2}{W} = \frac{Pl}{8W}$$

动荷因数 $K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{384EIh}{5Pl^3}}$

二梁最大应力之比 $\frac{\sigma_{1d}}{\sigma_{2d}} = \frac{K_d \sigma_{st1}}{K_d \sigma_{st2}} = 2$

AB 梁和 CD 梁受冲击后的应变能分别为

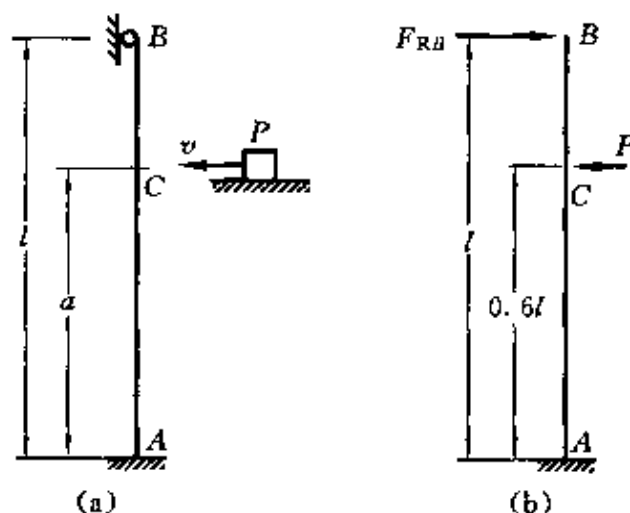
$$V_{e1d} = 2 \int_0^{l/2} \frac{(F_{RA}x)^2 dx}{2EI} = 2 \int_0^{l/2} \frac{(K_d F_{RA}x)^2 dx}{2EI} = \frac{K_d^2 P^2 l^3}{96EI}$$

$$V_{e2d} = 2 \int_0^{l/2} \frac{(F_{RC}x_1)^2 dx_1}{2EI} = 2 \int_0^{l/2} \frac{(K_d F_{RC}x_1)^2 dx_1}{2EI} = \frac{K_d^2 P^2 l^3}{384EI}$$

二梁受冲击后各自吸收能量之比

$$V_{c1d}/V_{c2d} = \frac{K_d^2 P^2 l^3 / (96EI)}{K_d^2 P^2 l^3 / (384EI)} = 4$$

10.23 如题 10.23 图(a)所示,速度为 v 、重为 P 的重物,沿水平方向冲击于梁的截面 C 。试求梁的最大动应力。设已知梁的 E 、 I 和 W ,且 $a=0.6l$ 。



题 10.23 图

解 首先解静载下的一次静不定梁,静定基如题 10.23 图(b)所示,用变形比较法求解支座反力 F_{RB} 。 F_{RB} 单独作用时, B 点的位移为(查附录二)

$$w_{B_1} = \frac{F_{RB} l^3}{3EI}$$

P 单独作用时, B 点的位移为(查附录二)

$$w_{B_2} = - \left(\frac{P(0.6l)^3}{3EI} + \frac{P(0.6l)^2}{2EI} \times 0.4l \right)$$

因 B 截面有支座约束,故其位移为零,所以有

$$w_{B_1} + w_{B_2} = 0$$

$$\frac{F_{RB} l^3}{3EI} = \frac{P(0.6l)^3}{3EI} + \frac{P(0.6l)^2}{2EI} \times 0.4l$$

解上式得 $F_{RB} = 0.432P$

最大静载弯矩产生在C截面(题10.23图(b))

$$M_{\max} = 0.432P \times 0.4l = 0.173Pl$$

$$\sigma_{st\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{0.173Pl}{W}$$

C点的静位移(查附录二)

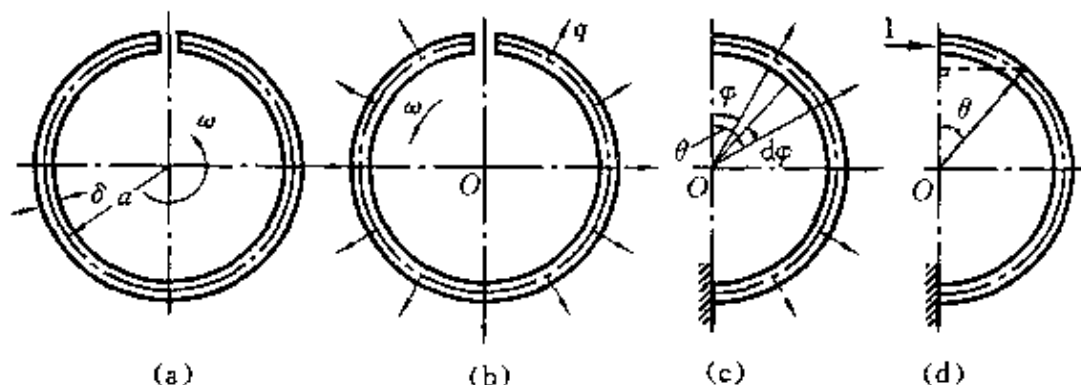
$$\Delta_{st} = \frac{P(0.6l)^3}{3EI} - \frac{0.432P \times 0.6^2l^2}{6EI}(3l - 0.6l) = 0.00979 \frac{Pl^3}{EI}$$

动荷因数
$$K_d = \sqrt{\frac{v^2}{g\Delta_{st}}} = \sqrt{\frac{102EIv^2}{gPl^3}}$$

最大动应力

$$\sigma_{d\max} = K_d \sigma_{st\max} = \frac{0.173Pl}{W} \sqrt{\frac{102EIv^2}{gPl^3}} = \sqrt{\frac{3.05EIv^2P}{gIW^2}}$$

10.24 如题10.24图(a)所示,带有缺口的圆环绕通过圆心且垂直于纸面的轴以角速度 ω 旋转。试求缺口的张开量。设圆环的平均半径 a 远大于厚度 δ ,圆环单位体积的质量为 ρ ,横截面面积为 A ,抗弯刚度为 EI 。



题10.24图

解 因开口圆环结构对称,所以取其对称截面以右的一半作为静定基,如题10.24图(c)所示。因圆环厚度很小,所以可以认为因圆环旋转产生的惯性离心力,在环内各点是相同的,即沿圆环轴线均匀分布,如题10.24图(b)所示。

惯性力集度

$$q = \frac{A\rho}{g}a_n = \frac{A\rho}{g}\omega^2 a$$

载荷作用下,任一截面上的弯矩(题 10.24 图(c))

$$\begin{aligned} M(\theta) &= \int_0^\theta a \sin(\theta - \varphi) (q a d\varphi) = \int_0^\theta q a^2 \sin(\theta - \varphi) d\varphi \\ &= q a^2 (1 - \cos\theta) \end{aligned}$$

单位载荷作用下,任一截面上的弯矩(题 10.24 图(d))

$$\bar{M}(\theta) = a(1 - \cos\theta)$$

应用莫尔积分计算缺口张开量,即缺口处二截面的相对位移(注意: $ds = a d\theta$)

$$\begin{aligned} \Delta &= 2 \int_s \frac{M(\theta) \bar{M}(\theta) ds}{EI} = 2 \int_0^\pi \frac{q a^4}{EI} (1 - \cos\theta)^2 d\theta \\ &= 2 \times \frac{3\pi a^4 q}{2EI} = \frac{3\pi a^5 \rho A \omega^2}{g EI} \end{aligned}$$

第十一章 交 变 应 力

知识要点

1. 交变应力及疲劳破坏的概念

(1) 交变应力

构件内某定点的应力随时间作周期性的变化。

(2) 应力循环

构件内某定点的应力经历一次完整的变化过程,回复到原来的应力值,称为应力循环一次。

(3) 应力循环中的特征值

① 循环应力极值 $\sigma_{\max}, \sigma_{\min}$

② 平均应力 $\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}$

③ 应力幅度 $\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$

④ 循环特征 $r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$

当 $\sigma_{\max} = -\sigma_{\min}$ 时, $r = -1$, 称为对称循环; 当 $\sigma_{\min} = 0$ 时, $r = 0$, 称为脉冲循环; 在一般情况下, $\sigma_{\max} \neq \sigma_{\min} \neq 0$, 称为非对称循环; 在静应力下, $\sigma_{\max} = \sigma_{\min}$, $r = +1$ 。

若在工作过程中, 应力循环的最大和最小应力值保持不变, 称为稳定的交变应力, 否则称为不稳定的交变应力。

(4) 疲劳破坏

金属在交变应力下发生的不同于静应力所造成的破坏称为疲劳破坏。疲劳破坏的特征如下。

① 构件的最大应力在远小于静应力的强度极限时, 就可能发

生破坏。

② 即使是塑性材料,在没有显著的塑性变形下就可能发生突然的断裂破坏。

③ 断口明显地呈现两个区域:光滑区和粗糙区。

2. 持久极限及影响因素

(1) 持久极限

经无限次应力循环而不发生疲劳破坏的最大应力值。持久极限与材料性质、变形型式及循环特征有关。

(2) 材料的持久极限

材料在某种变形型式和循环特征下的持久极限称为材料的持久极限,用 σ_r (或 r_r)表示。材料的持久极限由疲劳试验测定。对称循环的持久极限记为 σ_{-1} 。

(3) 影响构件持久极限的主要因素

① 构件外形的影响——构件外形尺寸的突然变化引起应力集中,使构件持久极限降低,有效应力集中因数

$$K_\sigma = \frac{\text{光滑试件的持久极限}}{\text{有应力集中试件的持久极限}}$$

有效应力集中因数由试验测定。

② 尺寸大小的影响——构件尺寸增大,材料包含缺陷的可能性增多,从而使构件的持久极限降低,尺寸因数

$$\epsilon_\sigma = \frac{\text{光滑大试件的持久极限}}{\text{光滑小试件的持久极限}}$$

③ 表面质量的影响——构件表面加工质量将影响构件的持久极限,表面质量因数

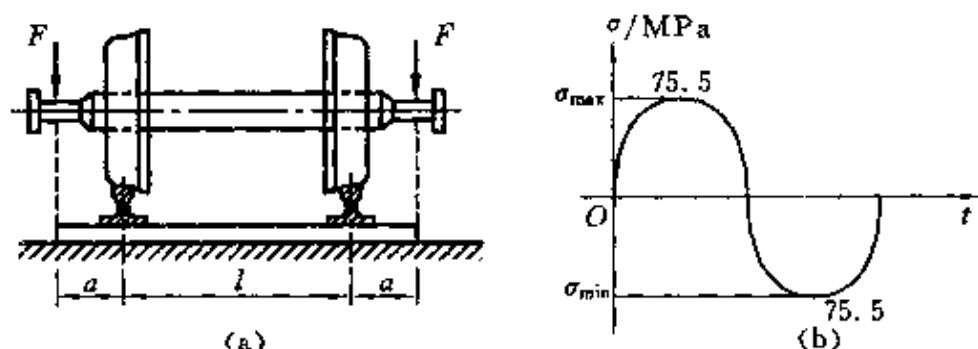
$$\beta = \frac{\text{不同表面质量试件的持久极限}}{\text{表面磨光试件的持久极限}}$$

3. 对称循环下构件的疲劳强度校核

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_\sigma}{\epsilon_\sigma \beta} \sigma_{\max}} \geq n$$

习题详解

11.1 火车轮轴受力情况如题11.1图(a)所示。 $a=500\text{ mm}$, $l=1435\text{ mm}$, 轮轴中段直径 $d=15\text{ cm}$ 。若 $F=50\text{ kN}$, 试求轮轴中段截面边缘上任一点的最大应力 σ_{\max} , 最小应力 σ_{\min} , 循环特征 r , 并作出 $\sigma-t$ 曲线。



题 11.1 图

解 轮轴中段截面上的弯矩为常数, 即

$$M = Fa = (50 \times 10^3 \times 0.5) \text{ N} \cdot \text{m} = 25 \text{ N} \cdot \text{m}$$

最大应力为
$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} = \frac{25 \times 10^3}{\pi \times (0.15)^3 / 32} \text{ Pa} = 75.5 \text{ MPa}$$

最小应力为
$$\sigma_{\min} = -75.5 \text{ MPa}$$

循环特征
$$r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = -1$$

作 $\sigma-t$ 曲线图如题11.1图(b)所示。

11.2 柴油发动机连杆大头螺钉在工作时受到最大拉力 $F_{\max}=58.3\text{ kN}$, 最小拉力 $F_{\min}=55.8\text{ kN}$ 。螺纹处内径 $d=11.5\text{ mm}$ 。试求其平均应力 σ_m 、应力幅值 σ_a 、循环特征 r , 并作出 $\sigma-t$ 曲线。

解 螺钉为轴向拉伸变形。

最大拉应力

$$\sigma_{\max} = \frac{F_{\max}}{\pi d^2/4} = \frac{58.3 \times 10^3}{\pi \times (0.0115)^2/4} \text{ Pa} = 561 \text{ MPa}$$

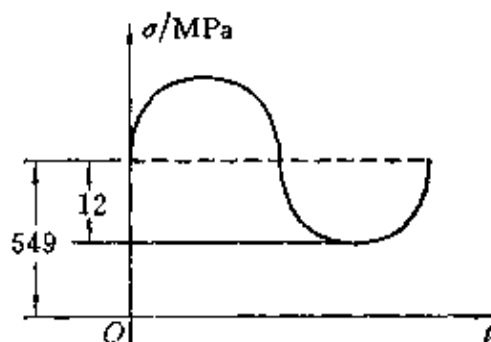
最小拉应力 $\sigma_{\min} = \frac{F_{\min}}{\pi d^2/4} = \frac{55.8 \times 10^3}{\pi \times (0.0115)^2/4} \text{ Pa} = 537 \text{ MPa}$

平均应力 $\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = \frac{561 + 537}{2} \text{ MPa} = 549 \text{ MPa}$

应力幅值 $\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{561 - 537}{2} \text{ MPa} = 12 \text{ MPa}$

循环特征 $r = \sigma_{\min}/\sigma_{\max} = 537/561 = 0.957$

作 σ - t 曲线图如题 11.2 图所示。



题 11.2 图

11.3 某阀门弹簧如题 11.3 图(a)所示。当阀门关闭时,最小工作载荷 $F_{\min} = 200 \text{ N}$;当阀门顶开时,最大工作载荷 $F_{\max} = 500 \text{ N}$,设簧丝的直径 $d = 5 \text{ mm}$,弹簧外径 $D_1 = 36 \text{ mm}$,试求平均切应力 τ_m 、应力幅值 τ_a 、循环特征 r ,并作出 τ - t 曲线。

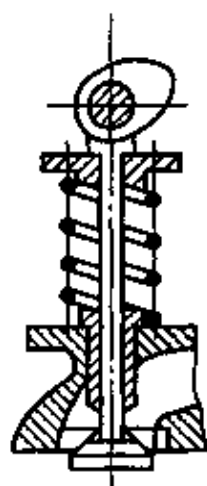
解 弹簧指数 $c = \frac{D}{d} = \frac{D_1 - d}{d} = \frac{36 - 5}{5} = 6.2$

曲度因数 $k = \frac{4c - 1}{4c - 4} + \frac{0.615}{c} = \frac{4 \times 6.2 - 1}{4 \times 6.2 - 4} + \frac{0.615}{6.2} = 1.24$

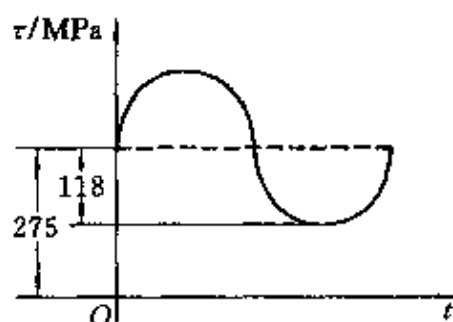
最大切应力

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= k \frac{8F_{\max}(D_1 - d)}{\pi d^3} \\ &= 1.24 \times \frac{8 \times 500 \times (36 - 5) \times 10^{-3}}{\pi \times (0.005)^3} \text{ Pa} = 392 \text{ MPa} \end{aligned}$$

最小切应力



(a)



(b)

题 11.3 图

$$\begin{aligned}\tau_{\min} &= k \frac{8F_{\min}(D_1 - d)}{\pi d^3} \\ &= 1.24 \times \frac{8 \times 200 \times (36 - 5) \times 10^{-3}}{\pi \times (0.005)^3} \text{ Pa} = 157 \text{ MPa}\end{aligned}$$

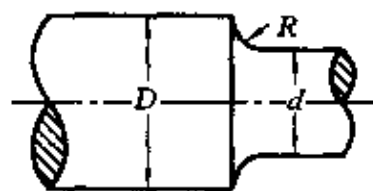
平均切应力 $\tau_m = \frac{\tau_{\max} + \tau_{\min}}{2} = \frac{392 + 157}{2} \text{ MPa} = 275 \text{ MPa}$

应力幅值 $\tau_a = \frac{\tau_{\max} - \tau_{\min}}{2} = \frac{392 - 157}{2} \text{ MPa} = 118 \text{ MPa}$

循环特征 $r = \tau_{\min} / \tau_{\max} = 157 / 392 = 0.4$

作 $\sigma-t$ 曲线图如题 11.3 图(b)所示。

11.4 阶梯轴如题 11.4 图所示。材料为铬镍合金, $\sigma_b = 920 \text{ MPa}$, $\sigma_{-1} = 420 \text{ MPa}$, $\tau_{-1} = 250 \text{ MPa}$ 。轴的尺寸是 $d = 40 \text{ mm}$, $D = 50 \text{ mm}$, $R = 5 \text{ mm}$ 。求弯曲和扭转时的有效应力集中因数和尺寸因数。



题 11.4 图

解 (1) 求弯曲时的有效应力集中因数和尺寸因数

$$D/d = 50/40 = 1.25, \quad R/d = 5/40 = 0.125$$

查附录四图 3 并用直线插入法得有效应力集中因数

$$\sigma_b = 920 \text{ MPa 时, } K_\sigma = 1.55$$

查附录四表1得尺寸因数

$$\text{当 } d = 40 \text{ mm 时, } \epsilon_\sigma = 0.77$$

(2) 求扭转有效应力集中因数和尺寸因数

查附录四图5得

$$\sigma_b = 1000 \text{ MPa 时, } K_\tau = 1.28$$

$$\sigma_b = 900 \text{ MPa 时, } K_\tau = 1.25$$

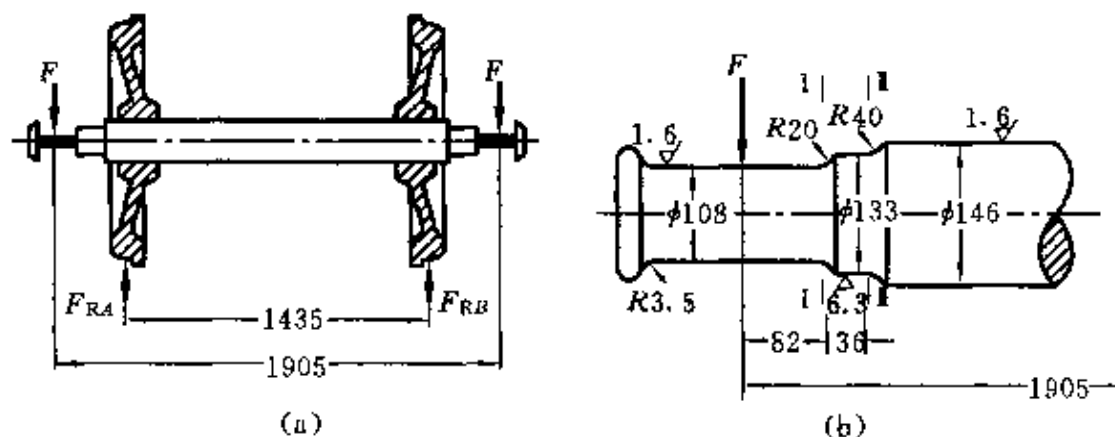
应用直线插入法,求得 $\sigma_b = 920 \text{ MPa}$ 时的 K_τ ,即

$$K_\tau = 1.25 + \frac{1.28 - 1.25}{1000 - 900}(920 - 900) = 1.26$$

尺寸因数由附录四表1查得

$$d = 40 \text{ mm 时, } \epsilon_\tau = 0.81$$

11.5 如题11.5图所示,货车轮轴两端载荷 $F = 110 \text{ kN}$,材料为车轴钢, $\sigma_b = 500 \text{ MPa}$, $\sigma_{-1} = 240 \text{ MPa}$ 。规定安全因数 $n = 1.5$ 。试校核 I-I 和 II-II 截面的强度。



题 11.5 图

解 由平衡条件求得 $F_{RA} = F_{RB} = 110 \text{ kN}$
两截面上任意一点为对称循环。

I-I 截面:

$$\begin{aligned} \text{弯矩 } M_I &= F \times 0.082 = (110 \times 0.082) \text{ kN} \cdot \text{m} \\ &= 9.02 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

最大弯曲正应力 $\sigma_{\max} = \frac{M}{W} = \frac{9.02 \times 10^3}{\pi \times 0.108^3 / 32} \text{ Pa} = 72.9 \text{ MPa}$

由题 11.5 图(b)

$$D/d = 133/108 = 1.23, \quad R/d = 20/108 = 0.185$$

查附录四图 3 得有效应力集中因数 $K_\sigma = 1.35$

查附录四表 1 得尺寸因数 $\epsilon_\sigma = 0.7$

查附录四表 2 并用直线插入法得表面质量因数

$$\beta = 0.95 - \left[\frac{0.95 - 0.90}{800 - 400} \times (500 - 400) \right] = 0.9375$$

其工作安全因数为

$$n_{\sigma 1} = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_\sigma}{\epsilon_\sigma \beta} \sigma_{\max}} = \frac{240}{\frac{1.35}{0.7 \times 0.9375} \times 72.9} = 1.60 > n = 1.5$$

I - I 截面:

弯矩

$$M_2 = F(0.082 + 0.036) = (110 \times 0.118) \text{ kN} \cdot \text{m} = 13 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

最大弯曲正应力

$$\sigma_{\max} = \frac{M_2}{W} = \frac{13 \times 10^3}{\pi \times 0.133^3 / 32} \text{ Pa} = 56.3 \text{ MPa}$$

查附录四图 1, 当

$$D/d = 146/133 = 1.098, \quad R/d = 40/133 = 0.3$$

时, 有效应力集中因数

$$K_\sigma = 1.2$$

查附录四表 1 得尺寸因数 $\epsilon_\sigma = 0.68$

查附录四表 2 并用直线插入法得表面质量因数

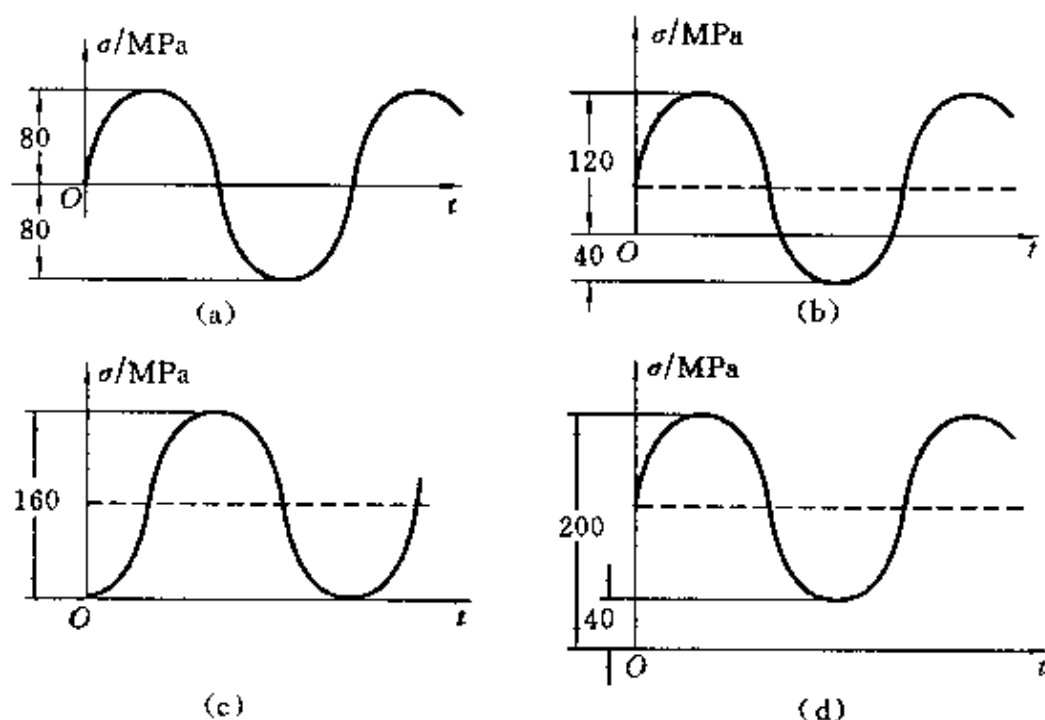
$$\beta = 0.85 - \left[\frac{0.85 - 0.80}{800 - 400} \times (500 - 400) \right] = 0.8375$$

其工作安全因数为

$$n_{\sigma 2} = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_\sigma}{\epsilon_\sigma \beta} \sigma_{\max}} = \frac{240}{\frac{1.2}{0.68 \times 0.8375} \times 56.2} = 2.03 > n = 1.5$$

因为 I - I 和 II - II 截面的工作安全因数均大于规定的安全因数，故安全。

11.6 在 σ_m - σ_a 坐标系中，标出与题 11.6 图 A 所示应力循环对应的点，并求出自原点出发并通过这些点的射线与 σ_m 轴的夹角 α 。



题 11.6 图 A

解 (a) 应力幅值

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{80 - (-80)}{2} \text{ MPa} = 80 \text{ MPa}$$

平均应力 $\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = \frac{80 + (-80)}{2} \text{ MPa} = 0$

循环特征 $r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = \frac{-80}{80} = -1$

$$\tan \alpha = \frac{1 - r}{1 + r} = \frac{1 - (-1)}{1 + (-1)} = \infty, \quad \alpha = 90^\circ$$

(b) 应力幅值

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{120 - (-40)}{2} \text{ MPa} = 80 \text{ MPa}$$

$$\text{平均应力 } \sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = \frac{120 + (-40)}{2} \text{ MPa} = 40 \text{ MPa}$$

$$\text{循环特征 } r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = \frac{-40}{120} = -\frac{1}{3}$$

$$\tan \alpha = \frac{1-r}{1+r} = \frac{1-(-1/3)}{1+(-1/3)} = 2, \quad \alpha = 63.4^\circ$$

(c) 应力幅值

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{160 - 0}{2} \text{ MPa} = 80 \text{ MPa}$$

$$\text{平均应力 } \sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = \frac{160 + 0}{2} \text{ MPa} = 80 \text{ MPa}$$

$$\text{循环特征 } r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = 0$$

$$\tan \alpha = \frac{1-r}{1+r} = \frac{1-0}{1+0} = 1, \quad \alpha = 45^\circ$$

(d) 应力幅值

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{200 - 40}{2} \text{ MPa} = 80 \text{ MPa}$$

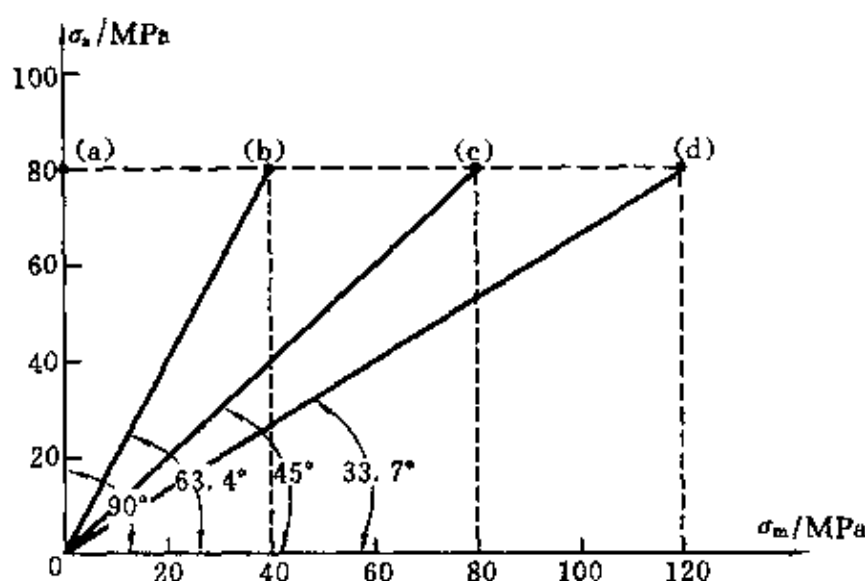
$$\text{平均应力 } \sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = \frac{200 + 40}{2} \text{ MPa} = 120 \text{ MPa}$$

$$\text{循环特征 } r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = \frac{40}{200} = \frac{1}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{1-r}{1+r} = \frac{1-\frac{1}{5}}{1+\frac{1}{5}} = \frac{2}{3}, \quad \alpha = 33.7^\circ$$

在 σ_m - σ_a 坐标系中,与题 11.6 图 A 所示各应力循环对应的点及自原点出发并通过这些点的射线与 σ_m 轴的夹角,均标示在题 11.6 图 B 中。

11.7 简化持久极限曲线时,如不采用折线 ACB,而采用连接 A、B 两点的直线来代替原来的曲线(题 11.7 图(a)),试证明构件的工作安全因数为



题 11.6 图 B

$$n_s = \sigma_{-1} / \left(\frac{K_s}{\epsilon_s \beta} \sigma_a + \psi_s \sigma_m \right)$$

式中

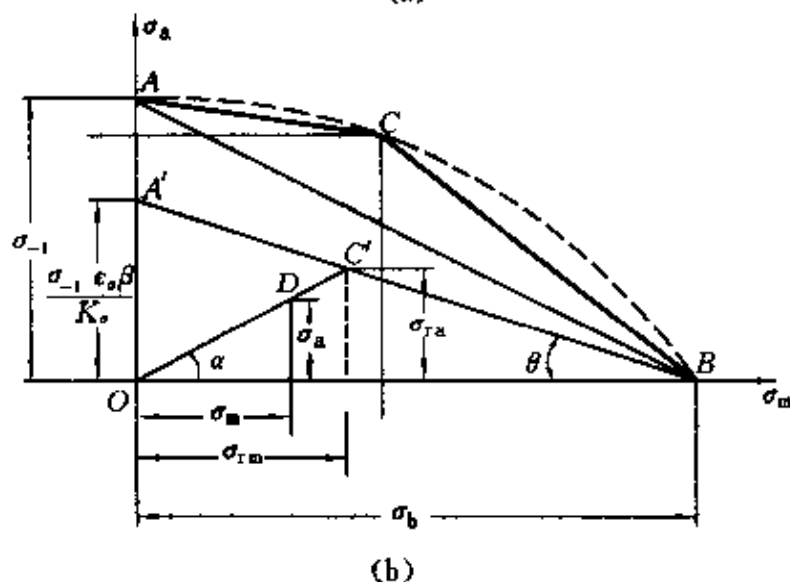
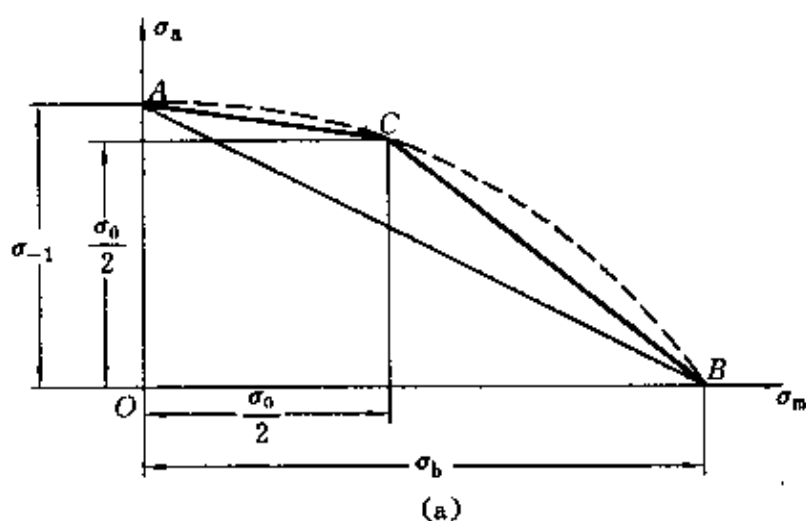
$$\psi_s = \sigma_{-1} / \sigma_b$$

解 在题 11.7 图(a)中,若用 ACB 折线代替 ACB 曲线,则可简化材料的持久极限曲线。如果欲进一步简化,可采用由 σ_{-1} 确定 A 点,由 σ_b 确定 B 点,用 AB 直线作为材料的持久极限简化直线。若用 $A'B$ 直线作为构件的持久极限简化直线,必须考虑影响因数 K_s 、 ϵ_s 、 β 对材料持久极限 σ_{-1} 的影响,所以应由 $\frac{\sigma_{-1} \epsilon_s \beta}{K_s}$ 确定 A' 点,如题 11.7 图(b)所示,设 D 点为构件危险点的交变应力,由坐标系原点 O 作射线 OD ,射线与 σ_m 轴的夹角 α 由 $\tan \alpha = \frac{1-r}{1+r}$ 确定, r 为循环特征。

$$\text{由题 11.7 图(b),有} \quad \frac{\sigma_m}{\sigma_a} = \frac{\sigma_{rm}}{\sigma_{ra}} \quad (1)$$

$$\text{构件的工作安全因数} \quad n_s = \frac{\sigma_r}{\sigma_{\max}} = \frac{\sigma_{ra} + \sigma_{rm}}{\sigma_a + \sigma_m} \quad (2)$$

由①式得



题 11.7 图

$$\frac{\sigma_m + \sigma_a}{\sigma_a} = \frac{\sigma_{ra} + \sigma_{rm}}{\sigma_{ra}} \quad \text{或} \quad \frac{\sigma_{ra}}{\sigma_a} = \frac{\sigma_{ra} + \sigma_{rm}}{\sigma_m + \sigma_a} \quad (3)$$

将③式代入②式中得 $n_s = \sigma_{ra} / \sigma_a$

从题 11.7 图 (b) 的几何关系可知

$$\sigma_{ra} = \frac{\sigma_{-1} \epsilon_s \beta}{K_s} - \sigma_{rm} \tan \theta = \frac{\sigma_{-1} \epsilon_s \beta}{K_s} - \sigma_{rm} \left(\frac{\sigma_{-1} \epsilon_s \beta}{K_s \sigma_b} \right) \quad (4)$$

由①式得 $\sigma_{rm} = \sigma_{ra} \frac{\sigma_m}{\sigma_a} \quad (5)$

将⑤式代入④式得 $\sigma_{ra} = \frac{\sigma_{-1} \epsilon_s \beta}{K_s} - \left(\sigma_{ra} \frac{\sigma_m}{\sigma_a} \right) \left(\frac{\sigma_{-1} \epsilon_s \beta}{K_s \sigma_b} \right)$

由上式得
$$\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_b} \left(\sigma_{ra} \frac{\sigma_m}{\sigma_s} \right) + \sigma_{ra} \frac{K_a}{\epsilon_s \beta} = \sigma_{-1}$$

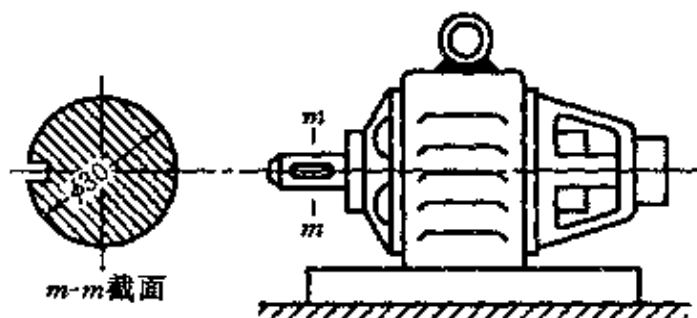
令 $\psi_\sigma = \sigma_{-1} / \sigma_b$, 得
$$\sigma_{ra} = \left[\sigma_{-1} / \left(\frac{K_a}{\epsilon_s \beta} \sigma_s + \psi_\sigma \sigma_m \right) \right] \sigma_s$$

代入构件的工作安全因数表达式得

$$n_\sigma = \sigma_{-1} / \left(\frac{K_a}{\epsilon_s \beta} \sigma_s + \psi_\sigma \sigma_m \right)$$

证明完毕。

11.8 题 11.8 图所示的电动机轴直径 $d=30$ mm, 轴上开有端铣加工的键槽。轴的材料是合金钢, $\sigma_b=750$ MPa, $\tau_b=400$ MPa, $\tau_s=260$ MPa, $\tau_{-1}=190$ MPa。轴在 $n=750$ r/min 的转速下传递的功率 $P=14.7$ kW。该轴时而工作, 时而停止, 但没有反向旋转。轴表面经磨削加工。若规定安全因数 $n=2$, $n_s=1.5$, 试校核轴的强度。



题 11.8 图

解 轴传递的扭矩

$$T = 9549 \frac{P}{n} = \left(9549 \times \frac{14.7}{750} \right) \text{ N} \cdot \text{m} = 187 \text{ N} \cdot \text{m}$$

轴的抗扭截面因数

$$W_t = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{\pi \times 0.03^3}{16} \text{ m}^3 = 5.3 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

轴工作时最大切应力

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_t} = \frac{187}{5.3 \times 10^{-6}} \text{ Pa} = 35.3 \text{ MPa}$$

最小切应力 $\tau_{\min} = 0$

循环特征 $r = \tau_{\min} / \tau_{\max} = 0$

因此是非对称循环。

平均切应力

$$\tau_m = \frac{\tau_{\max} + \tau_{\min}}{2} = \frac{35.3 + 0}{2} \text{ MPa} = 17.6 \text{ MPa}$$

应力幅值 $\tau_s = \frac{\tau_{\max} - \tau_{\min}}{2} = \frac{35.3 - 0}{2} \text{ MPa} = 17.6 \text{ MPa}$

查附录四图5,得有效集中因数 $K_r = 1.8$

查附录四表1,得尺寸因数 $\epsilon_r = 0.89$

查附录四表2,得表面质量因数 $\beta = 1$

查附录四表4,得敏感因数 $\phi_r = 0.1$

工作安全因数

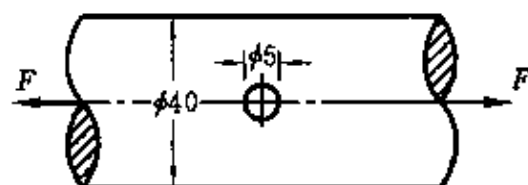
$$\begin{aligned} n_r &= \frac{\tau_{-1}}{\frac{K_r}{\epsilon_r \beta} \tau_s + \phi_r \tau_m} = \frac{190}{\frac{1.8}{0.89 \times 1} \times 17.7 + 0.1 \times 17.7} \\ &= 5.06 > n = 2 \end{aligned}$$

因 $n_r > n$, 满足疲劳强度要求。

$$\text{因 } n'_s = \frac{\tau_s}{\tau_{\max}} = \frac{260}{35.3} = 7.36 > n_s = 1.5$$

也满足屈服强度要求。

11.9 题11.9图所示圆杆表面未经加工,且因径向圆孔而削弱。杆受由0到 F_{\max} 的交变轴向力作用。已知材料为普通碳钢, $\sigma_b = 600 \text{ MPa}$, $\sigma_s = 340 \text{ MPa}$, $\sigma_{-1} = 200$



题11.9图

MPa。取 $\phi_s = 0.1$,规定安全因数 $n = 1.7$, $n_s = 1.5$,试求最大载荷。

解 圆杆的最小截面积为

$$\begin{aligned} A &= \pi D^2 / 4 - Dd = (\pi \times 0.04^2 / 4 - 0.04 \times 0.005) \text{ m}^2 \\ &= 1.06 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \end{aligned}$$

轴工作时的最大应力和最小应力为

$$\sigma_{\max} = F_{\max}/A, \quad \sigma_{\min} = 0$$

循环特征 $r = \sigma_{\min}/\sigma_{\max} = 0$

平均应力 $\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = \frac{F_{\max}}{2A}$ ①

应力幅值 $\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{F_{\max}}{2A}$ ②

根据屈服强度条件 $n_s = \frac{\sigma_s}{\sigma_{\max}} = \frac{\sigma_s A}{F_{\max}} \geq 1.5$ ③

由③式确定满足屈服强度要求的最大载荷

$$F_{\max} \leq \sigma_s A / 1.5 = (340 \times 10^6 \times 1.06 \times 10^{-3} / 1.5) \text{ N} \\ = 240 \text{ kN}$$

查附录四表1, 得尺寸因数 $\epsilon_s = 0.88$

查附录四表2, 得表面质量因数 $\beta = 0.7$

查附录四图6, 得有效应力集中因数 $K_\sigma = 2$

根据疲劳强度条件

$$n_\sigma = \sigma_{-1} / \left(\frac{K_\sigma}{\epsilon_s \beta} \sigma_a + \psi_\sigma \sigma_m \right) \geq 1.7$$
 ④

将①、②式代入④式, 确定满足疲劳强度要求的最大载荷

$$F_{\max} \leq \frac{2\sigma_{-1}A}{1.7 \left(\frac{K_\sigma}{\epsilon_s \beta} + \psi_\sigma \right)} = \frac{2 \times 200 \times 10^6 \times 1.06 \times 10^{-3}}{1.7 \times \left(\frac{2}{0.88 \times 0.7} + 0.1 \right)} \text{ N} \\ = 74.5 \text{ kN}$$

比较按两种强度要求确定的最大载荷, 取 $F_{\max} = 74.5 \text{ kN}$ 。

11.10 某发动机排气阀的密圈圆柱螺旋弹簧, 其平均直径 $D = 60 \text{ mm}$, 圈数 $n = 10$, 簧丝直径 $d = 6 \text{ mm}$ 。弹簧材料的 $\sigma_b = 1300 \text{ MPa}$, $\tau_b = 800 \text{ MPa}$, $\tau_s = 500 \text{ MPa}$, $\tau_{-1} = 300 \text{ MPa}$, $G = 80 \text{ GPa}$ 。弹簧在预压缩量 $\lambda_1 = 40 \text{ mm}$ 和最大压缩量 $\lambda_{\max} = 90 \text{ mm}$ 范围内工作。若取 $\beta = 1$, 试求弹簧的工作安全因数。

解 弹簧所受的最小、最大压力为

$$F_{\min} = \frac{\lambda_1 G d^4}{64 R^3 n} = \frac{0.04 \times 80 \times 10^9 \times 0.006^4}{64 \times 0.03^3 \times 10} \text{ N} = 240 \text{ N}$$

$$F_{\max} = \frac{\lambda_2 G d^4}{64 R^3 n} = \frac{0.09 \times 80 \times 10^9 \times 0.006^4}{64 \times 0.03^3 \times 10} \text{ N} = 540 \text{ N}$$

弹簧指数 $C = D/d = 60/6 = 10$

曲度因数

$$k = \frac{4c-1}{4c-4} + \frac{0.615}{c} = \frac{4 \times 10 - 1}{4 \times 10 - 4} + \frac{0.615}{10} = 1.145$$

簧丝内的最小切应力和最大切应力分别为

$$\tau_{\min} = k \frac{8 F_{\min} D}{\pi d^3} = 1.145 \times \frac{8 \times 240 \times 0.06}{\pi \times 0.006^3} \text{ Pa} = 194 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\max} = k \frac{8 F_{\max} D}{\pi d^3} = 1.145 \times \frac{8 \times 540 \times 0.06}{\pi \times 0.006^3} \text{ Pa} = 437 \text{ MPa}$$

循环特征 $r = \tau_{\min} / \tau_{\max} = 194/437 = 0.444$

平均切应力 $\tau_m = \frac{\tau_{\max} + \tau_{\min}}{2} = \frac{437 + 194}{2} \text{ MPa} = 316 \text{ MPa}$

应力幅值 $\tau_a = \frac{\tau_{\max} - \tau_{\min}}{2} = \frac{437 - 194}{2} \text{ MPa} = 122 \text{ MPa}$

按屈服强度计算工作安全因数

$$n_s = \tau_s / \tau_{\max} = 500/437 = 1.14$$

因簧丝截面无几何不连续现象,所以有效应力集中因数

$$K_r = 1$$

簧丝直径很小,故尺寸因数 $\epsilon_r = 1$

簧丝表面质量因数 $\beta = 1$

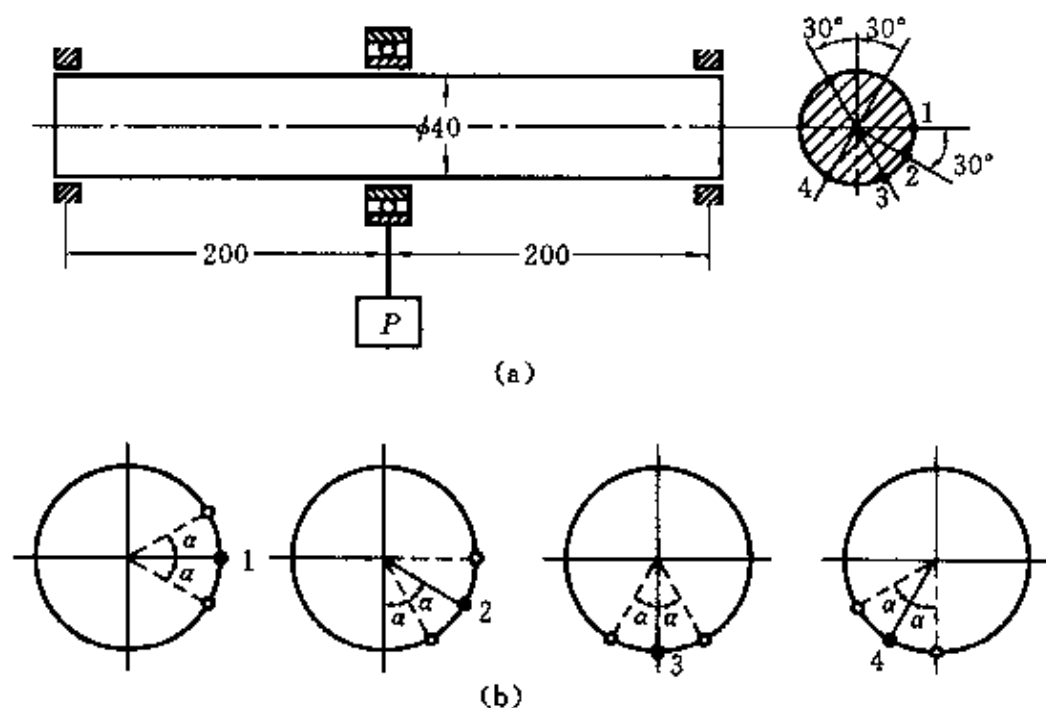
敏感因数(查附录四表4) $\phi_r = 0.15$

所以按疲劳强度要求,工作安全因数为

$$n_r = \frac{\tau_{-1}}{\frac{K_r}{\epsilon_r \beta} \tau_a + \phi_r \tau_m} = \frac{300}{\frac{1}{1 \times 1} \times 122 + 0.15 \times 316} = 1.77$$

11.11 如题11.11图(a)所示,重物 P 通过轴承对圆轴作用一垂直方向的力, $P=10 \text{ kN}$,而轴在 $\pm 30^\circ$ 范围内往返摆动。已知

材料的 $\sigma_b = 600 \text{ MPa}$, $\sigma_{-1} = 250 \text{ MPa}$, $\sigma_s = 340 \text{ MPa}$, $\psi_s = 0.1$ 。试求危险截面上的点 1、2、3、4 的: (1) 应力变化的循环特征; (2) 工作安全因数。



题 11.11 图

解 (1) 应力变化的循环特征

危险截面为跨度中央截面, 该截面上的弯矩

$$M_{\max} = Pl/4 = 10 \times 10^3 \times 0.4/4 \text{ N} \cdot \text{m} = 1 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

当轴在 $\pm 30^\circ$ 范围内往返摆动时, 点 1、2、3、4 的位置如题 11.11 图 (b) 所示, 图中 $\alpha = 30^\circ$ 。

点 1

最大与最小正应力

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= -\sigma_{\min} = \frac{M_{\max}}{I_z} \left(\frac{d}{2} \sin 30^\circ \right) \\ &= \left(\frac{64 \times 10^3}{\pi \times 0.04^4} \times \frac{0.04}{2} \times \sin 30^\circ \right) \text{ Pa} = 79.6 \text{ MPa} \end{aligned}$$

循环特征

$$r = \sigma_{\min} / \sigma_{\max} = -1$$

点2

最大正应力

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} &= \frac{M_{\max}}{I_z} \left(\frac{d}{2} \sin 60^\circ \right) \\ &= \left(\frac{64 \times 10^3}{\pi \times 0.04^4} \times \frac{0.04}{2} \times \sin 60^\circ \right) \text{ Pa} = 138 \text{ MPa}\end{aligned}$$

最小正应力

$$\sigma_{\min} = 0$$

循环特征

$$r = \sigma_{\min} / \sigma_{\max} = 0$$

点3

最大正应力

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} &= \frac{M_{\max}}{I_z} \left(\frac{d}{2} \sin 90^\circ \right) \\ &= \left(\frac{64 \times 10^3}{\pi \times 0.04^4} \times \frac{0.04}{2} \times \sin 90^\circ \right) \text{ Pa} = 159 \text{ MPa}\end{aligned}$$

最小正应力

$$\begin{aligned}\sigma_{\min} &= \frac{M_{\max}}{I_z} \left(\frac{d}{2} \sin 60^\circ \right) \\ &= \left(\frac{64 \times 10^3}{\pi \times 0.04^4} \times \frac{0.04}{2} \times \sin 60^\circ \right) \text{ Pa} = 138 \text{ MPa}\end{aligned}$$

循环特征

$$r = \sigma_{\min} / \sigma_{\max} = 138 / 159 = 0.87$$

点4

从题11.11图(b)可见,点4的最大正应力等于点3的最大正应力,点4的最小正应力等于点1的最小正应力,所以点4的最大正应力和最小正应力为

$$\sigma_{\max} = 159 \text{ MPa}, \quad \sigma_{\min} = 79.6 \text{ MPa}$$

循环特征

$$r = \sigma_{\min} / \sigma_{\max} = 79.6 / 159 = 0.5$$

(2) 工作安全因数

因截面无变化,所以取 $K_\sigma = 1$,查附录四表2得 $\beta = 1$,查附录四表4得 $\phi_\sigma = 0.05$,查附录四表1得 $\epsilon_\sigma = 0.88$ 。

点1

$$n_s = \sigma_{-1} / \left(\frac{K_\sigma}{\epsilon_\sigma \beta} \sigma_{\max} \right) = \frac{250 \times 0.88}{79.6} = 2.76$$

点2

$$\sigma_m = \sigma_s = \sigma_{\max} / 2 = 138 / 2 \text{ MPa} = 69 \text{ MPa}$$

$$n_s = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_\sigma}{\epsilon_\sigma \beta} \sigma_s + \psi_\sigma \sigma_m} = \frac{250}{\frac{1}{0.88 \times 1} \times 69 + 0.05 \times 69} = 3.05$$

点3

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = \frac{159 + 138}{2} \text{ MPa} = 149 \text{ MPa}$$

$$\sigma_s = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{159 - 138}{2} \text{ MPa} = 10.5 \text{ MPa}$$

$$n_s = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_\sigma}{\epsilon_\sigma \beta} \sigma_s + \psi_\sigma \sigma_m} = \frac{250}{\frac{1}{0.88 \times 1} \times 10.5 + 0.05 \times 149} = 12.9$$

因点3的 $r > 0$,故应计算屈服强度安全因数

$$n_s = \sigma_s / \sigma_{\max} = 340 / 159 = 2.14$$

点4

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = \frac{159 + 79.6}{2} \text{ MPa} = 119 \text{ MPa}$$

$$\sigma_s = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{159 - 79.6}{2} \text{ MPa} = 39.7 \text{ MPa}$$

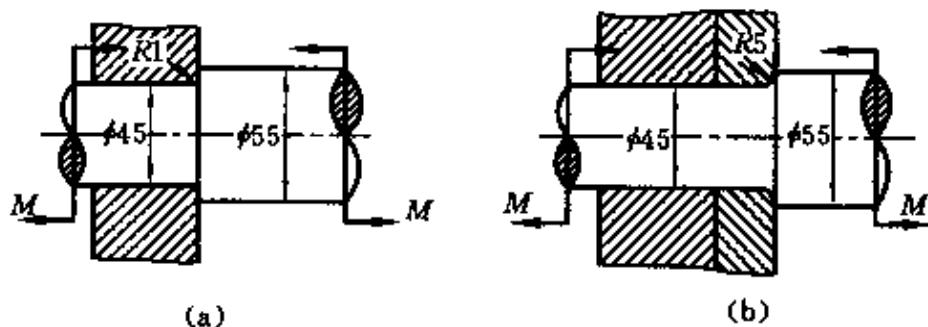
$$n_s = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_\sigma}{\epsilon_\sigma \beta} \sigma_s + \psi_\sigma \sigma_m} = \frac{250}{\frac{1}{0.88 \times 1} \times 39.7 + 0.05 \times 119} = 4.9$$

因为3点和4点的循环特征 $r > 0$,故应计算屈服强度安全因数

$$n_s = \frac{\sigma_s}{\sigma_{\max}} = \frac{340}{159} = 2.14$$

11.12 卷扬机的阶梯轴的某段需要安装一滚珠轴承,因滚珠轴承内座圈上圆角半径很小,如装配时不用定距环(题11.12图(a)),则轴上的圆角半径应为 $R_1 = 1 \text{ mm}$,如增加一定距环(题

11.12图(b)), 则轴上圆角半径可增加为 $R_2=5\text{ mm}$ 。已知材料为 Q255 钢, $\sigma_b=520\text{ MPa}$, $\sigma_{-1}=220\text{ MPa}$, $\beta=1$, 规定安全因数 $n=1.7$ 。试比较轴在题11.12图(a)、(b)两种情况下, 对称循环许可弯矩 $[M]$ 。



题 11.12 图

解 因轴旋转, 受不变弯矩作用, 所以是对称循环, 工作安全因数由下式确定

$$n_\sigma = \sigma_{-1} / \left(\frac{K_\sigma}{\epsilon_\sigma \beta} \sigma_{\max} \right)$$

当不用定距环时, 由 $D/d=55/45=1.22$, $R/d=1/45=0.022$, 查附录四图 3, 并用直线插入法得

$$K_\sigma = 2.34 + \frac{2.53 - 2.34}{600 - 500} (520 - 500) = 2.38$$

查附录四表 1, 得

$$\epsilon_\sigma = 0.84, \quad \text{并设 } \beta = 1$$

应用疲劳强度条件

$$n_\sigma = \sigma_{-1} / \left(\frac{K_\sigma}{\epsilon_\sigma \beta} \sigma_{\max} \right) = \frac{\sigma_{-1} \epsilon_\sigma \beta W}{K_\sigma M_1} \geq 1.7$$

可得不用定距环时的许用弯矩为

$$\begin{aligned} M_1 &\leq \frac{\sigma_{-1} \epsilon_\sigma \beta}{K_\sigma \times 1.7} W = \frac{220 \times 10^6 \times 0.84 \times 1}{2.38 \times 1.7} \times \frac{\pi \times 0.045^3}{32} \text{ N} \cdot \text{m} \\ &= 409 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

当用定距环时, 由 $D/d=55/45=1.22$, $R/d=5/45=0.11$, 查附录

四图 3, 得

$$K_\sigma = 1.53$$

并仍有

$$\epsilon_\sigma = 0.84, \quad \beta = 1$$

应用疲劳强度条件

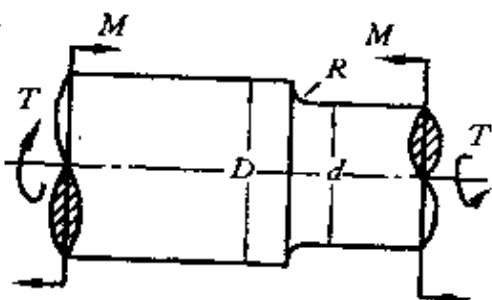
$$n_\sigma = \sigma_{-1} / \left(\frac{K_\sigma}{\epsilon_\sigma \beta} \sigma_{\max} \right) \geq 1.7$$

得用定距环时的许用弯矩

$$\begin{aligned} M_2 &\leq \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_\sigma}{\epsilon_\sigma \beta} \times 1.7} W = \frac{220 \times 10^6}{\frac{1.53}{0.84 \times 1} \times 1.7} \times \frac{\pi \times 0.045^3}{32} \text{ N} \cdot \text{m} \\ &= 636 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

两者相比较, 后者比前者增大许多。原因是因为用定距环而使轴截而变化处的圆角半径增大, 从而减小了有效应力集中因数, 使得轴的承载能力增大。

11.13 如题 11.13 图所示, 直径 $D=50 \text{ mm}$ 、 $d=40 \text{ mm}$ 的阶梯轴, 受交变弯矩和扭矩的联合作用。圆角半径 $R=2 \text{ mm}$ 。正应力从 50 MPa 变到 -50 MPa 。切应力从 40 MPa 变到 20 MPa , 轴的材料为碳钢, $\sigma_b = 550 \text{ MPa}$, $\sigma_{-1} = 220 \text{ MPa}$, $\tau_{-1} = 120$



题 11.13 图

MPa , $\sigma_s = 300 \text{ MPa}$, $\tau_s = 180 \text{ MPa}$ 。若取 $\phi_r = 0.1$, 试求此轴的工作安全因数。设 $\beta = 1$ 。

解 弯曲交变正应力的循环特征

$$r = \sigma_{\min} / \sigma_{\max} = 50 / (-50) = -1$$

由 $D/d = 50/40 = 1.25$, $R/d = 2/40 = 0.05$, 查附录四的图 3 和表 1 得

$$K_\sigma = 1.93, \quad \epsilon_\sigma = 0.84, \quad \text{并设 } \beta = 1$$

其工作安全因数

$$n_\sigma = \sigma_{-1} / \left(\frac{K_\sigma}{\epsilon_\sigma \beta} \sigma_{\max} \right) = \frac{220 \times 0.84 \times 1}{1.93 \times 50} = 1.92$$

扭转交变切应力的循环特征

$$r = \tau_{\min}/\tau_{\max} = 20/40 = 0.5$$

平均切应力 $\tau_m = \frac{\tau_{\max} + \tau_{\min}}{2} = \frac{40 + 20}{2} \text{ MPa} = 30 \text{ MPa}$

切应力幅值 $\tau_a = \frac{\tau_{\max} - \tau_{\min}}{2} = \frac{40 - 20}{2} \text{ MPa} = 10 \text{ MPa}$

由 $D/d=50/40=1.25$, $R/d=2/40=0.05$, 查附录四的图5 和表1 得

$$K_r=1.46, \quad \epsilon_r=0.78, \quad \text{并设 } \beta=1$$

其工作安全因数

$$n_r = \frac{\tau_{-1}}{\frac{K_r}{\epsilon_r \beta} \tau_a + \psi_r \tau_m} = \frac{120}{\frac{1.46}{0.78 \times 1} \times 10 + 0.10 \times 30} = 5.53$$

弯扭组合交变应力下, 轴的工作安全因数

$$n_{\sigma\tau} = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} = \frac{1.92 \times 5.53}{\sqrt{1.92^2 + 5.53^2}} = 1.82$$

11.14 题11.14 图所示圆柱齿轮轴, 左端由电机输入功率 $P=29.4 \text{ kW}$, 转速 $n=800 \text{ r/min}$ 。齿轮圆周力为 F_1 , 径向力 $F_2=0.36F_1$ 。轴上两个键槽均为端铣加工。安装齿轮处轴径 $\phi 40$, 左边轴肩直径 $\phi 50$ 。轴的材料为40 Cr, $\sigma_b=900 \text{ MPa}$, $\sigma_{-1}=410 \text{ MPa}$, $\tau_{-1}=240 \text{ MPa}$, 规定安全因数 $n=1.8$, 试校核轴的疲劳强度。

解 轴的受力分析:

齿轮轴承受的扭矩

$$T = 9549 \frac{P}{n} = \left(9549 \times \frac{29.4}{800} \right) \text{ N} \cdot \text{m} = 351 \text{ N} \cdot \text{m}$$

由平衡条件 $T=F_1 \times D/2$ 得啮合力

$$F_1 = 2T/D = 2 \times 351/0.1 \text{ N} = 7020 \text{ N}$$

径向力 $F_2 = 0.36F_1 = (0.36 \times 7020) \text{ N} = 2530 \text{ N}$

齿轮轴承受的合力

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{7020^2 + 2530^2} \text{ N} = 7460 \text{ N}$$

查附录四的表4得敏感因数

$$\phi_r = 0.05$$

工作安全因数

$$n_r = \frac{\tau_{-1}}{\frac{K_r}{\epsilon_r \beta} \tau_s + \phi_r \tau_m} = \frac{240}{\frac{2.06}{0.89 \times 0.875} \times 33.1 + 0.05 \times 33.1} \\ = 2.69 > n = 1.8$$

校核2-2截面:

齿轮轴承受的扭矩 $T_2 = 351 \text{ N} \cdot \text{m}$

齿轮轴承受的弯矩

$$M_2 = \frac{F}{2} \times 0.050 = \left(\frac{7460}{2} \times 0.050 \right) \text{ N} \cdot \text{m} = 187 \text{ N} \cdot \text{m}$$

最大正应力与最小正应力

$$\sigma_{\max} = -\sigma_{\min} = \frac{M_2}{W} = \frac{32 \times 187}{\pi \times 0.04^3} \text{ Pa} = 29.8 \text{ MPa}$$

最大切应力

$$\tau_{\max} = \frac{T_2}{W_t} = \frac{16 \times 351}{\pi \times 0.04^3} \text{ Pa} = 28 \text{ MPa}$$

最小切应力

$$\tau_{\min} = 0$$

平均切应力等于应力幅值

$$\tau_m = \tau_s = \tau_{\max}/2 = 28/2 \text{ MPa} = 14 \text{ MPa}$$

如前所述,查附录四中的相关图表得各影响因数

$$K_r = 1.36, \quad \epsilon_r = 0.81, \quad \beta = 0.875, \quad \phi_r = 0.05$$

$$K_\sigma = 1.80, \quad \epsilon_\sigma = 0.77, \quad \beta = 0.875$$

工作安全因数

$$n_r = \frac{\tau_{-1}}{\frac{K_r}{\epsilon_r \beta} \tau_s + \phi_r \tau_m} = \frac{240}{\frac{1.36}{0.81 \times 0.875} \times 14 + 0.05 \times 14} = 8.71$$

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_\sigma}{\epsilon_\sigma \beta} \sigma_{\max}} = \frac{410 \times 0.875 \times 0.77}{1.80 \times 29.8} = 5.15$$

$$n_{\sigma\tau} = \frac{n_{\sigma}n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}} = \frac{8.71 \times 5.15}{\sqrt{8.71^2 + 5.15^2}} = 4.43 > n = 1.8$$

校核 3-3 截面:

齿轮轴承受的扭矩 $T_3 = 351 \text{ N} \cdot \text{m}$

齿轮轴承受的弯矩

$$M_3 = \frac{F}{2} \times 0.09 = \left(\frac{7460}{2} \times 0.09 \right) \text{ N} \cdot \text{m} = 336 \text{ N} \cdot \text{m}$$

最大正应力与最小正应力

$$\sigma_{\max} = -\sigma_{\min} = \frac{M_3}{W} = \frac{32 \times 336}{\pi \times 0.04^3} \text{ Pa} = 53.5 \text{ MPa}$$

最大切应力

$$\tau_{\max} = \frac{T_3}{W_t} = \frac{16 \times 351}{\pi \times 0.04^3} \text{ Pa} = 28 \text{ MPa}$$

最小切应力

$$\tau_{\min} = 0$$

平均切应力等于切应力幅值

$$\tau_m = \tau_a = \tau_{\max}/2 = 28/2 \text{ MPa} = 14 \text{ MPa}$$

查附录四的相关图表得各影响因数

$$K_r = 2.07, \quad \epsilon_r = 0.81, \quad \beta = 0.875, \quad \phi_r = 0.05$$

$$K_{\sigma} = 2.13, \quad \epsilon_{\sigma} = 0.77, \quad \beta = 0.875$$

工作安全因数

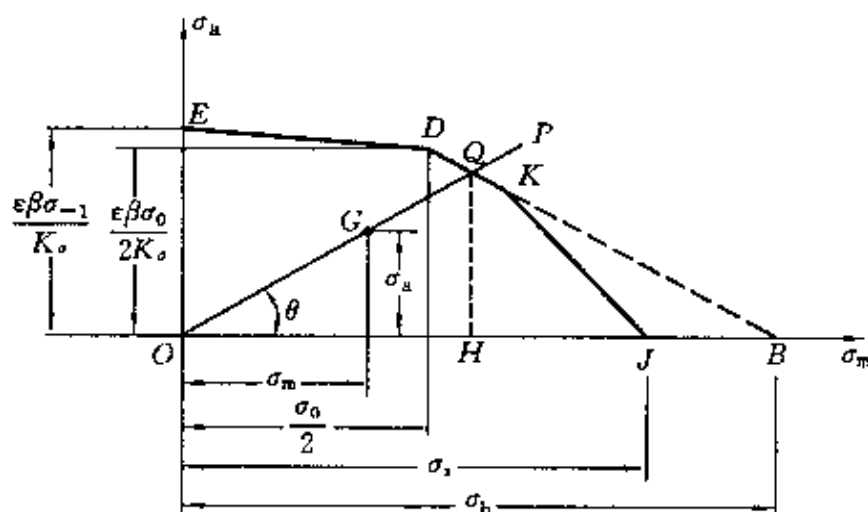
$$n_r = \frac{\tau_{-1}}{\frac{K_r}{\epsilon_r \beta} \tau_a + \phi_r \tau_m} = \frac{240}{\frac{2.07}{0.81 \times 0.875} \times 14 + 0.05 \times 14} = 5.77$$

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_{\sigma}}{\epsilon_{\sigma} \beta} \sigma_{\max}} = \frac{410 \times 0.875 \times 0.77}{2.13 \times 53.5} = 2.42$$

$$n_{\sigma\tau} = \frac{n_{\sigma}n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}} = \frac{2.42 \times 5.77}{\sqrt{2.42^2 + 5.77^2}} = 2.23 > n = 1.8$$

1-1、2-2、3-3 截面的工作安全因数均大于规定的安全因数,故安全。

11.15 若材料持久极限曲线简化成题 11.15 图所示折线 $EDKJ$, G 点代表构件危险点的交变应力, OG 的延长线适与简化折线的线段 DK 相交, 试求这一应力循环的工作安全因数。



题 11.15 图

解 考虑影响因数 K_s 、 ϵ_s 、 β 后, 得构件的持久极限简化直线 DK , 它的直线方程为

$$y = -\frac{\epsilon_s \beta}{K_s \frac{2\sigma_b - \sigma_0}{\sigma_0}} x + \frac{\epsilon_s \beta}{K_s \frac{2\sigma_b - \sigma_0}{\sigma_0}} \sigma_b$$

设 $\psi_s = \frac{2\sigma_b - \sigma_0}{\sigma_0}$, 则上方程可简化为

$$y = -\frac{\epsilon_s \beta}{K_s \psi_s} x + \frac{\epsilon_s \beta}{K_s \psi_s} \sigma_b \quad (1)$$

射线 OP 与直线 DK 相交于 Q 点, 射线 OP 的直线方程为

$$y = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} x \quad (2)$$

所以直线 OP 的斜率

$$\tan \theta = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = \frac{QH}{OH} \quad (3)$$

解方程①、②, 可得 Q 点的横坐标为

$$\frac{\epsilon_s \beta \sigma_b \sigma_m}{\epsilon_s \beta \sigma_m + \sigma_s K_s \psi_s}$$

构件的工作安全因数

$$n_s = \frac{\sigma_r}{\sigma_{\max}} = \frac{OH + HQ}{\sigma_m + \sigma_s} \quad (4)$$

OH 的长度为 Q 点的横坐标。由③式可得

$$\frac{\sigma_s + \sigma_m}{\sigma_m} = \frac{QH + OH}{OH}, \quad \text{或} \quad \frac{OH}{\sigma_m} = \frac{QH + OH}{\sigma_s + \sigma_m}$$

将上式代入④式中,得

$$n_s = \frac{OH}{\sigma_m}$$

所以工作安全因数为

$$n_s = \frac{\sigma_b}{\sigma_m + \psi_s \sigma_s \frac{K_s}{\epsilon_s \beta}}$$

第十二章 弯曲的几个补充问题

知识要点

1. 非对称弯曲

梁无纵向对称平面,或者虽有纵向对称平面,但载荷并不作用在这个平面内时的弯曲。

(1) 非对称纯弯曲正应力

$$\sigma = \frac{M_x(I_{yz}z - I_y y)}{I_y I_x - I_{yz}^2} + \frac{M_y(I_x z - I_{yz} y)}{I_y I_x - I_{yz}^2} \quad (12-1)$$

(2) 非对称纯弯曲的几个特殊情况

① 当只在 xy 平面内作用纯弯矩 M_x , 且 xy 平面不是形心主惯性平面时

$$\sigma = \frac{M_x(I_{yz}z - I_y y)}{I_y I_x - I_{yz}^2} \quad (12-2)$$

② 当只在 xz 平面内作用纯弯矩 M_y 时

$$\sigma = \frac{M_y(I_x z - I_{yz} y)}{I_y I_x - I_{yz}^2} \quad (12-3)$$

③ 当只在 xy 平面内作用纯弯矩 M_x , 且 xy 平面为形心主惯性平面时, 因 $M_y=0, I_{yz}=0$, 所以(12-1)或(12-2)式简化为

$$\sigma = -\frac{M_x y}{I_x} \quad (12-4)$$

④ 若 M_x 和 M_y 同时存在, 但它们的作用平面 xy 和 xz 皆为形心主惯性平面, 则因 $I_{yz}=0$, (12-1)式简化为

$$\sigma = \frac{M_y z}{I_y} - \frac{M_x y}{I_x} \quad (12-5)$$

2. 开口薄壁杆件的弯曲中心

(1) 开口薄壁截面上的切应力

① 计算假设——切应力方向与截面周边相切,切应力大小沿壁厚均匀分布。

② 计算公式:

$$\tau = \frac{F_s S^*}{\delta I} \quad (12-6)$$

注意:公式形式与矩形截面梁的切应力公式相同,但其意义并不完全相同,如上式中的 τ ,其方向与截面中线相切, δ 为壁厚,且沿截面中线单位长度的剪力(即沿壁厚的切应力的合力)形成“顺流”。

(2) 开口薄壁截面的弯曲中心

① 弯曲中心——横力弯曲时,欲使梁只产生弯曲变形,不发生扭转变形,外力必须通过的点。

② 弯曲中心的位置——弯曲中心的位置即为横截面内切应力的合力作用点。

(3) 平面弯曲的外力作用条件

① 纯弯曲——外力偶矩作用面与梁的形心主惯性平面重合或平行。

② 横力弯曲

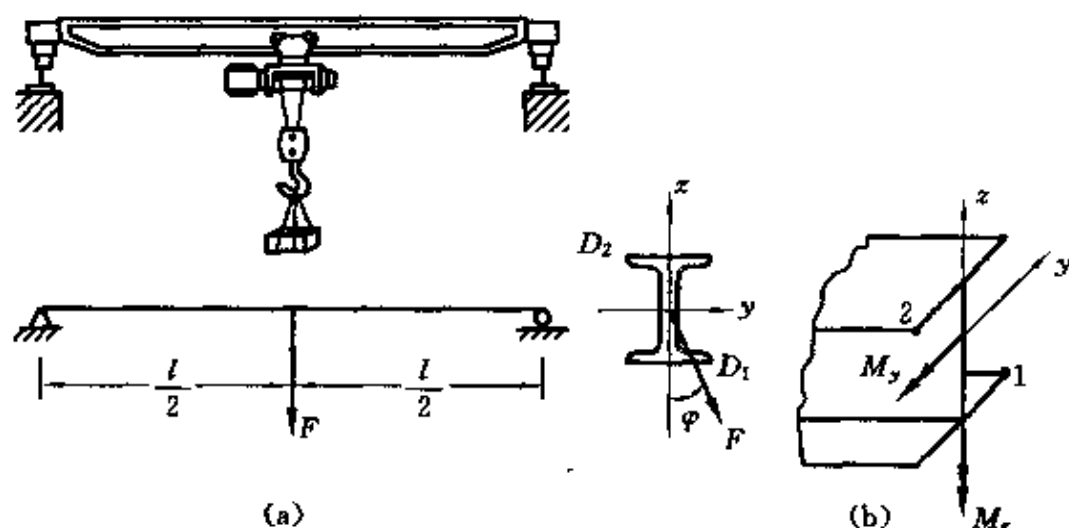
a. 外力作用线通过弯曲中心。

b. 外力(及外力偶矩)作用面与梁的形心主惯性平面重合或平行。

习题详解

12.1 如题 12.1 图(a)所示,桥式起重机大梁为 32a 工字钢, $[\sigma]=160 \text{ MPa}$, $l=4 \text{ m}$ 。行进时由于某种原因,载荷 F 偏离纵向对

称面一个角度 φ 。若 $\varphi=15^\circ$, $F=30\text{ kN}$, 试校核梁的强度, 并与 $\varphi=0$ 的情况相比较。



题 12.1 图

解 y, z 轴为截面的形心主惯性轴。将力 F 分解成沿 y, z 轴的分量

$$F_z = F \cos \varphi, \quad F_y = F \sin \varphi$$

起重机大梁的弯曲变形可简化为简支梁在 xy 和 xz 两个形心主惯性平面内的平面弯曲的叠加, 危险截面应为跨度中间截面。在中间截面上, 弯矩(题 12.1 图(b))分别为

$$M_z = \frac{F_y l}{4} = \frac{F l \sin \varphi}{4}, \quad M_y = \frac{F_z l}{4} = \frac{F l \cos \varphi}{4} \quad (1)$$

最大应力发生在 1 点(受拉)和 2 点(受压), 如题 12.1 图(b)所示。最大弯曲正应力

$$\sigma_{\max} = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} = \frac{F l \cos \varphi}{4 W_y} + \frac{F l \sin \varphi}{4 W_z} \quad (2)$$

查附录三型钢表得 32a 工字钢的 $W_y=692\text{ cm}^3$, $W_z=70.8\text{ cm}^3$ 将 $\varphi=15^\circ$ 及 W_y, W_z 之值代入②式中, 得

$$\begin{aligned} |\sigma_{\max}| &= \left(\frac{30 \times 10^3 \times 4 \cos 15^\circ}{4 \times 692 \times 10^{-6}} + \frac{30 \times 10^3 \times 4 \sin 15^\circ}{4 \times 70.8 \times 10^{-6}} \right) \text{ Pa} \\ &= 152 \text{ MPa} < [\sigma] \end{aligned}$$

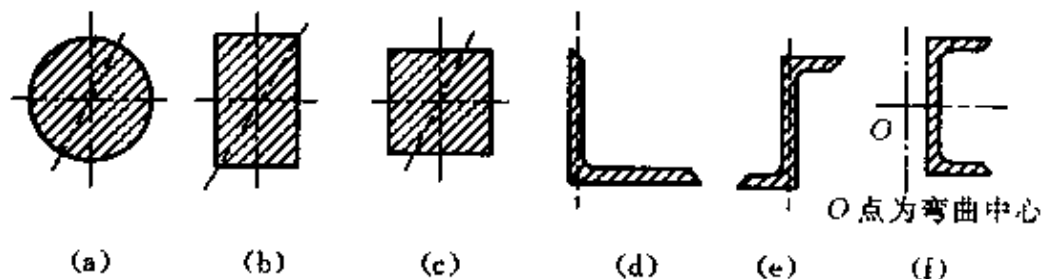
当 $\varphi=0^\circ$ 时梁只在 xz 平面内产生弯曲,

$$\sigma'_{\max} = \frac{M_y}{W_y} = \frac{30 \times 10^3 \times 4}{4 \times 692 \times 10^{-6}} \text{ Pa} = 43.4 \text{ MPa}$$

$$\frac{|\sigma_{\max}|}{\sigma'_{\max}} = \frac{152}{43.4} = 3.5$$

载荷 F 偏离比不偏离最大应力增长了2.5倍。

12.2 悬臂梁的横截面形状如题12.2图所示。若作用于自由端的载荷 F 垂直于梁的轴线,且其作用方向如图中虚线所示,试指出哪种情况是平面弯曲。如非平面弯曲,将为哪种变形?



题12.2图

解 (a) 平面弯曲。

(b) 斜弯曲。

(c) 平面弯曲。

(d) 非平面弯曲,既有弯曲,又有扭转。

(e) 斜弯曲。

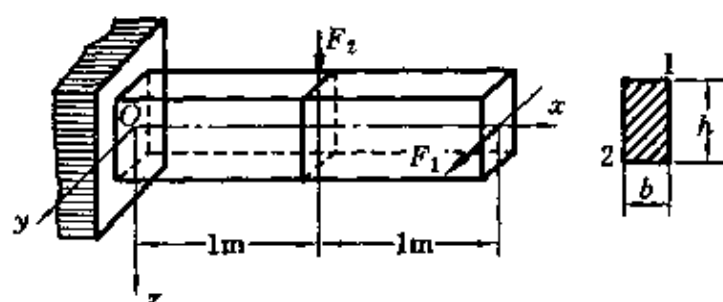
(f) 平面弯曲。

12.3 作用于题12.3图所示悬臂木梁上的载荷为:在水平平面内 $F_1=800 \text{ N}$,在垂直平面内, $F_2=1650 \text{ N}$ 。木材的许用应力 $[\sigma]=10 \text{ MPa}$ 。若矩形截面 $h/b=2$,试确定其尺寸。

解 危险点为1点和2点。危险截面在固定端处,危险截面上的弯矩为

$$M_y = F_2 \times 1 = 1.65 \text{ kN} \cdot \text{m}, \quad M_z = F_1 \times 2 = 1.6 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

危险点上的应力不应超过许用应力,即



题 12.3 图

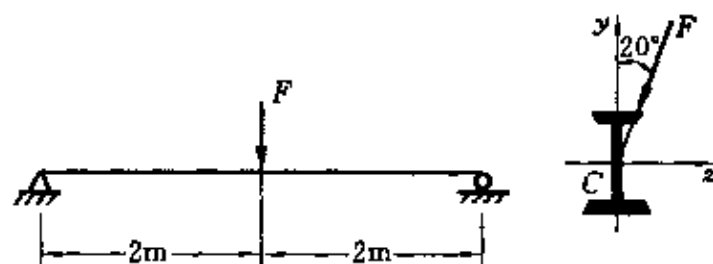
$$|\sigma_{\max}| = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} = \frac{6M_y}{bh^2} + \frac{6M_z}{hb^2} \leq [\sigma]$$

将 $h/b=2$ 代入上式得

$$\begin{aligned} h &\geq \sqrt[3]{\frac{12M_y + 24M_z}{[\sigma]}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{12 \times 1.65 \times 10^3 + 24 \times 1.6 \times 10^3}{10 \times 10^6}} \text{ m} \\ &= 180 \text{ mm} \end{aligned}$$

截面尺寸为 $b=90 \text{ mm}$, $h=180 \text{ mm}$

12.4 题12.4图所示工字梁两端简支,集中载荷 $F=7 \text{ kN}$,作用于跨度中点截面,通过截面形心,并与截面的垂直对称轴成 20° 角。若材料的 $[\sigma]=160 \text{ MPa}$,试选择工字梁的型号。



题 12.4 图

解 最大弯矩产生在跨度中点, $M_{\max}=PL/4$, 由强度条件

$$|\sigma_{\max}| = \frac{M_{y\max}}{W_y} + \frac{M_{z\max}}{W_z} = \frac{FL}{4} \left(\frac{\sin 20^\circ}{W_y} + \frac{\cos 20^\circ}{W_z} \right) \leq [\sigma]$$

$$W_z \geq \frac{FL}{4[\sigma]} \left(\sin 20^\circ \frac{W_z}{W_y} + \cos 20^\circ \right)$$

设 $\frac{W_z}{W_y} = 10$, 则

$$W_z \geq \frac{7 \times 10^3 \times 4}{4 \times 160 \times 10^6} (10 \sin 20^\circ + \cos 20^\circ) \text{ m}^3 = 190.8 \text{ cm}^3$$

试选 No. 18 工字钢, 查附录三型钢表得

$$W_z = 185 \text{ cm}^3, \quad W_y = 26 \text{ cm}^3$$

则

$$\frac{W_z}{W_y} = \frac{185}{26} = 7.12$$

检验强度

$$\begin{aligned} |\sigma_{\max}| &= \frac{7 \times 10^3 \times 4}{4 \times 185 \times 10^{-6}} (7.12 \sin 20^\circ + \cos 20^\circ) \text{ Pa} \\ &= 127.7 \text{ MPa} < [\sigma] = 160 \text{ MPa} \end{aligned}$$

显然, 截面选得过大, 再选 No. 16 工字钢 (查附录三型钢表得 $W_z = 141 \text{ cm}^3$, $W_y = 21.2 \text{ cm}^3$), 则

$$\sigma_{\max} = \frac{7 \times 10^3 \times 4}{4 \times 141 \times 10^{-6}} \left(\frac{141}{21.2} \sin 20^\circ + \cos 20^\circ \right) \text{ Pa} = 159.6 \text{ MPa}$$

最大应力非常接近 (但仍小于) 许用应力, 所以选 No. 16 工字钢更合适。

12.5 两端铰支的角钢如题 12.5 图(a)所示。角钢横截面两翼缘中线的交点即为弯曲中心, 横向力 F 通过弯曲中心, 且与 y 轴的夹角为 10° 。若 $F = 4 \text{ kN}$, 试求最大拉应力和最大压应力。

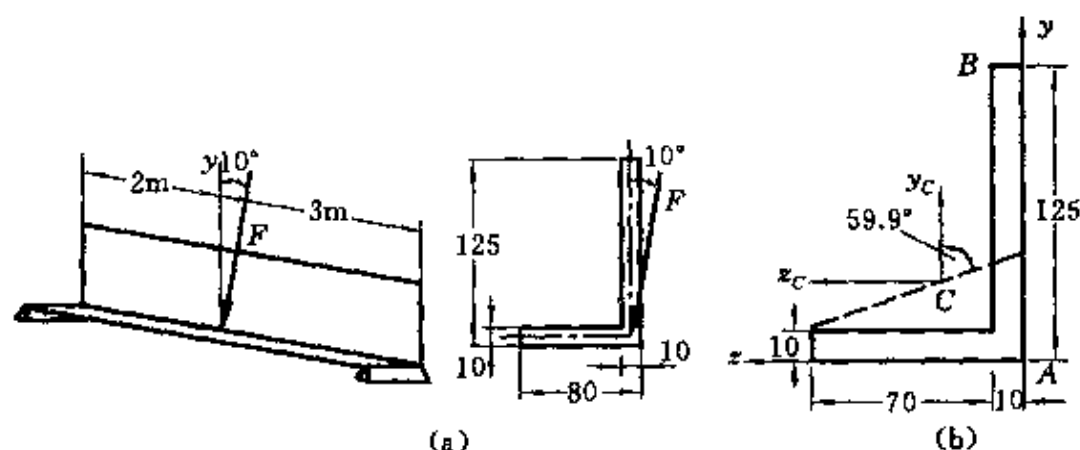
解 角钢截面的形心 C 的坐标位置 (题 12.5 图(b))

$$z_c = \frac{45 \times 10 \times 70 + 5 \times 10 \times 125}{10 \times 70 + 10 \times 125} \text{ mm} = 19.4 \text{ mm}$$

$$y_c = \frac{5 \times 10 \times 70 + 62.5 \times 10 \times 125}{10 \times 70 + 10 \times 125} \text{ mm} = 41.9 \text{ mm}$$

角钢截面积对形心轴的惯性矩和惯性积

$$I_{xc} = \left[\frac{1}{12} \times 70 \times 10^3 + 10 \times 70 \times (41.9 - 5)^2 \right]$$



题 12.5 图

$$+ \frac{1}{12} \times 10 \times 125^3 + 10 \times 125 \times (62.5 - 41.9)^2 \Big] \text{ mm}^4 \\ = 3.12 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_{y_c} = \left[\frac{1}{12} \times 70^3 \times 10 + 10 \times 70 \times (45 - 19.4)^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{12} \times 125 \times 10^3 + 10 \times 125 \times (19.4 - 5)^2 \right] \text{ mm}^4 \\ = 1.01 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_{y_c z_c} = [10 \times 70 \times (41.9 - 5)(19.4 - 45) \\ + 10 \times 125 \times (41.9 - 62.5)(19.4 - 5)] \text{ mm}^4 \\ = -1.03 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

简支梁的最大弯矩产生在 F 力作用点 C 处截面上, 其沿 y 、 z 轴的分量分别为

$$M_z = \left(\frac{3}{5} F \cos 10^\circ \right) \times 2 = 4.73 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_y = \left(\frac{3}{5} F \sin 10^\circ \right) \times 2 = 0.834 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}$$

角钢截面中性轴的位置

$$\tan \theta = \frac{z_0}{y_0} = \frac{M_z I_{y_c} + M_y I_{y_c z_c}}{M_y I_{z_c} + M_z I_{y_c z_c}}$$

$$= \frac{4.73 \times 10^3 \times 1.01 \times 10^{-6} + 0.834 \times 10^3 \times (-1.03 \times 10^{-6})}{0.834 \times 10^3 \times 3.12 \times 10^{-6} + 4.73 \times 10^3 \times (-1.03 \times 10^{-6})}$$

$$= -1.724$$

$$\theta = -59.9^\circ$$

θ 角为负值,表明中性轴的位置是在 y_c 轴顺时针转过 59.9° 角的方向上,如题12.5图(b)所示。最大应力发生在离中性轴最远的点A、B上。(题12.5图(b))。由广义弯曲应力公式得

$$\sigma_A = - \frac{M_z I_{y_c} + M_y I_{y_c z_c}}{I_{y_c} I_{z_c} - I_{y_c z_c}^2} y_{CA} + \frac{M_y I_{z_c} + M_z I_{y_c z_c}}{I_{y_c} I_{z_c} - I_{y_c z_c}^2} z_{CA}$$

$$= \left[- \frac{4.73 \times 10^3 \times 1.01 \times 10^{-6} + 0.834 \times 10^3 \times (-1.03 \times 10^{-6})}{1.01 \times 10^{-6} \times 3.12 \times 10^{-6} - (-1.03 \times 10^{-6})^2} \times (-41.9 \times 10^{-3}) \right. \\ \left. + \frac{0.834 \times 10^3 \times 3.12 \times 10^{-6} + 4.73 \times 10^3 \times (-1.03 \times 10^{-6})}{1.01 \times 10^{-6} \times 3.12 \times 10^{-6} - (-1.03 \times 10^{-6})^2} \times (-19.4 \times 10^{-3}) \right] \text{ Pa}$$

$$= 99.6 \text{ MPa (拉)}$$

$$\sigma_B = - \frac{M_z I_{y_c} + M_y I_{y_c z_c}}{I_{y_c} I_{z_c} - I_{y_c z_c}^2} y_{CB} + \frac{M_y I_{z_c} + M_z I_{y_c z_c}}{I_{y_c} I_{z_c} - I_{y_c z_c}^2} z_{CB}$$

$$= \left[- \frac{4.73 \times 10^3 \times 1.01 \times 10^{-6} + 0.834 \times 10^3 \times (-1.03 \times 10^{-6})}{1.01 \times 10^{-6} \times 3.12 \times 10^{-6} - (-1.03 \times 10^{-6})^2} \times (83.1 \times 10^{-3}) \right. \\ \left. + \frac{0.834 \times 10^3 \times 3.12 \times 10^{-6} + 4.73 \times 10^3 \times (-1.03 \times 10^{-6})}{1.01 \times 10^{-6} \times 3.12 \times 10^{-6} - (-1.03 \times 10^{-6})^2} \times (-9.36 \times 10^{-3}) \right] \text{ Pa}$$

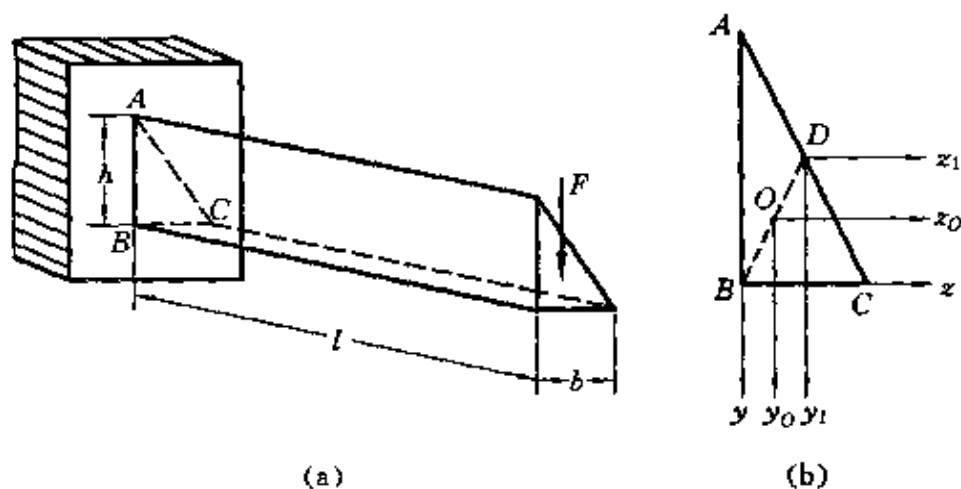
$$= -146 \text{ MPa (压)}$$

本题还有另外一种解法,先确定横截面形心主惯性轴,然后把力 P 分解成在两个形心主惯性平面上沿两个主惯性轴方向的两个分量。使问题变成在两个形心主惯性平面内的平面弯曲的叠加。

12.6 题12.6图(a)所示悬臂梁的横截面为直角三角形, $h=150 \text{ mm}$, $b=75 \text{ mm}$ 。自由端的集中力 $F=6 \text{ kN}$,且通过截面形心并平行于三角形的竖直边。若不计杆件的扭转变形,试求固定端A、B、C三点的应力。设跨度 $l=1.25 \text{ m}$ 。

解 直角三角形截面的形心为截面对形心轴 y_o, z_o 的惯性矩和惯性积

$$I_{z_o} = I_z - a^2 A = \frac{1}{12} b h^3 - \left(\frac{h}{3} \right)^2 \left(\frac{bh}{2} \right) = \frac{bh^3}{36}$$



题 12.6 图

同理
$$I_{y_0} = \frac{hb^3}{36}$$

取斜边中点 D 建立 y_1, z_1 坐标系, 如题 12.6 图 (b) 所示。轴 y_1, z_1 分别为 $\triangle CDB$ 和 $\triangle BDA$ 的对称轴, 故 $I_{y_1 z_1} = 0$, 则

$$I_{y_0 z_0} = I_{y_1 z_1} - abA = \frac{h}{6} \times \frac{b}{6} \times \frac{bh}{2} = \frac{b^2 h^2}{72}$$

最大弯矩发生在悬臂梁根部截面上

$$M_x = Fl$$

A 点的坐标为
$$y_{OA} = -\frac{2}{3}h, \quad z_{OA} = -\frac{b}{3}$$

代入广义弯曲应力公式, 得

$$\begin{aligned} \sigma_A &= \frac{M_x (I_{y_0 z_0} z_{OA} - I_{z_0} y_{OA})}{I_{y_0} I_{z_0} - I_{y_0 z_0}^2} \\ &= \frac{Fl \left[\frac{b^2 h^2}{72} \left(-\frac{b}{3} \right) - \frac{hb^3}{36} \left(-\frac{2}{3}h \right) \right]}{\frac{hb^3}{36} \left(\frac{h^3 b}{36} \right) - \left(\frac{b^2 h^2}{72} \right)^2} = \frac{24}{bh^2} Fl \\ &= \frac{24 \times 6 \times 10^3 \times 1.25}{75 \times 10^{-3} \times 150^2 \times 10^{-6}} \text{ Pa} = 107 \text{ MPa} \quad (\text{拉}) \end{aligned}$$

B 点的坐标为
$$y_{OB} = \frac{h}{3}, \quad z_{OB} = -\frac{b}{3}$$

代入广义弯曲应力公式,得

$$\sigma_B = \frac{M_z(I_{y_0 z_0} z_{OB} - I_{y_0} y_{OB})}{I_{y_0} I_{z_0} - I_{y_0 z_0}^2} = \frac{Fl \left[\frac{b^2 h^2}{72} \left(-\frac{b}{3} \right) - \frac{hb^3}{36} \left(\frac{h}{3} \right) \right]}{\frac{hb^3}{36} \left(\frac{h^3 b}{36} \right) - \left(\frac{b^2 h^2}{72} \right)^2}$$

$$= -\frac{24}{bh^2} Fl = -107 \text{ MPa (压)}$$

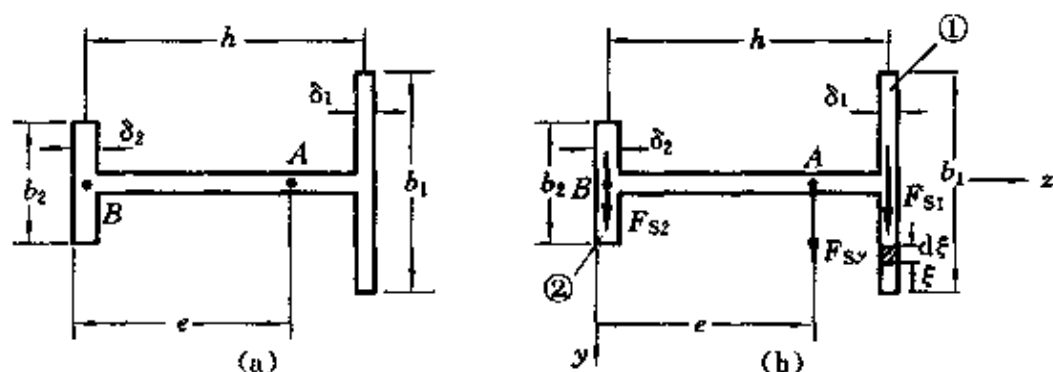
C 点的坐标为 $y_{OC} = \frac{h}{3}$, $z_{OC} = \frac{2}{3}b$

代入广义弯曲应力公式,得

$$\sigma_C = \frac{M_z(I_{y_0 z_0} z_{OC} - I_{y_0} y_{OC})}{I_{y_0} I_{z_0} - I_{y_0 z_0}^2} = \frac{Fl \left[\frac{b^2 h^2}{72} \left(\frac{2b}{3} \right) - \frac{hb^3}{36} \left(\frac{h}{3} \right) \right]}{\frac{hb^3}{36} \left(\frac{h^3 b}{36} \right) - \left(\frac{b^2 h^2}{72} \right)^2} = 0$$

因 O 点、C 点应力为零,所以 OC 连线为中性轴。

12.7 试确定题 12.7 图(a)所示薄壁截面的弯曲中心 A 的位置。



题 12.7 图

解 如题 12.7 图(b)所示。设 A 为弯心,截面的对称轴为 z 轴,作用在弯心上的剪力 F_{sy} 平行于 y 轴,因此在剪力 F_{sy} 作用下,杆件产生无扭转变形,腹板内的剪应力主要为水平方向的剪应力,铅垂方向剪力大部分由两侧翼缘承受。

设翼缘①和②内剪应力的合力分别为 F_{s1} 和 F_{s2} 。薄壁截面对 z

轴的惯性矩为 $I_z = I_{z_1} + I_{z_2} = \frac{1}{12}(\delta_1 b_1^3 + \delta_2 b_2^3)$

翼缘①内的切应力

$$\tau_1 = \frac{F_{sy} S_z^*}{\delta I_z} = \frac{F_{sy} \delta_1 \xi \left(\frac{b_1}{2} - \frac{\xi}{2} \right)}{\delta_1 I_z} \quad (0 \leq \xi \leq b_1)$$

$$F_{s1} = \int_A \tau_1 dA = \int_0^{b_1} \tau_1 \delta_1 d\xi = \int_0^{b_1} \frac{F_{sy} \xi (b_1 - \xi)}{2 I_z} (\delta_1 d\xi) = \frac{F_{sy} b_1^3 \delta_1}{12 I_z}$$

根据合力矩定理,合力对一点之矩,等于其分力对同一点之矩的代数和,可以证明 F_{sy} 为 F_{s1} 和 F_{s2} 的合力。如对 B 点取矩,水平方向剪应力的合力和剪力 F_{s2} 对 B 点之矩为零,故有

$$F_{sy} e = F_{s1} h = \frac{F_{sy} b_1^3 \delta_1}{12 I_z} h$$

从上式求得弯曲中心位置 $e = \frac{b_1^3 \delta_1 h}{\delta_1 b_1^3 + \delta_2 b_2^3}$

从弯曲中心 e 的位置表达式可知,弯曲中心位置仅与截面形状和尺寸有关,而与载荷的大小无关。弯曲中心位置是一个纯几何量。

12.8 试确定题 12.8 图(a)所示箱形开口截面的弯曲中心 A 的位置。设截面的壁厚 δ 为常量,且壁厚及开口切缝都很小。

解 如题 12.8 图(b)所示。开口处 B 面与 bb 截面间的面积 $\xi\delta$ 对 z 轴的面距为

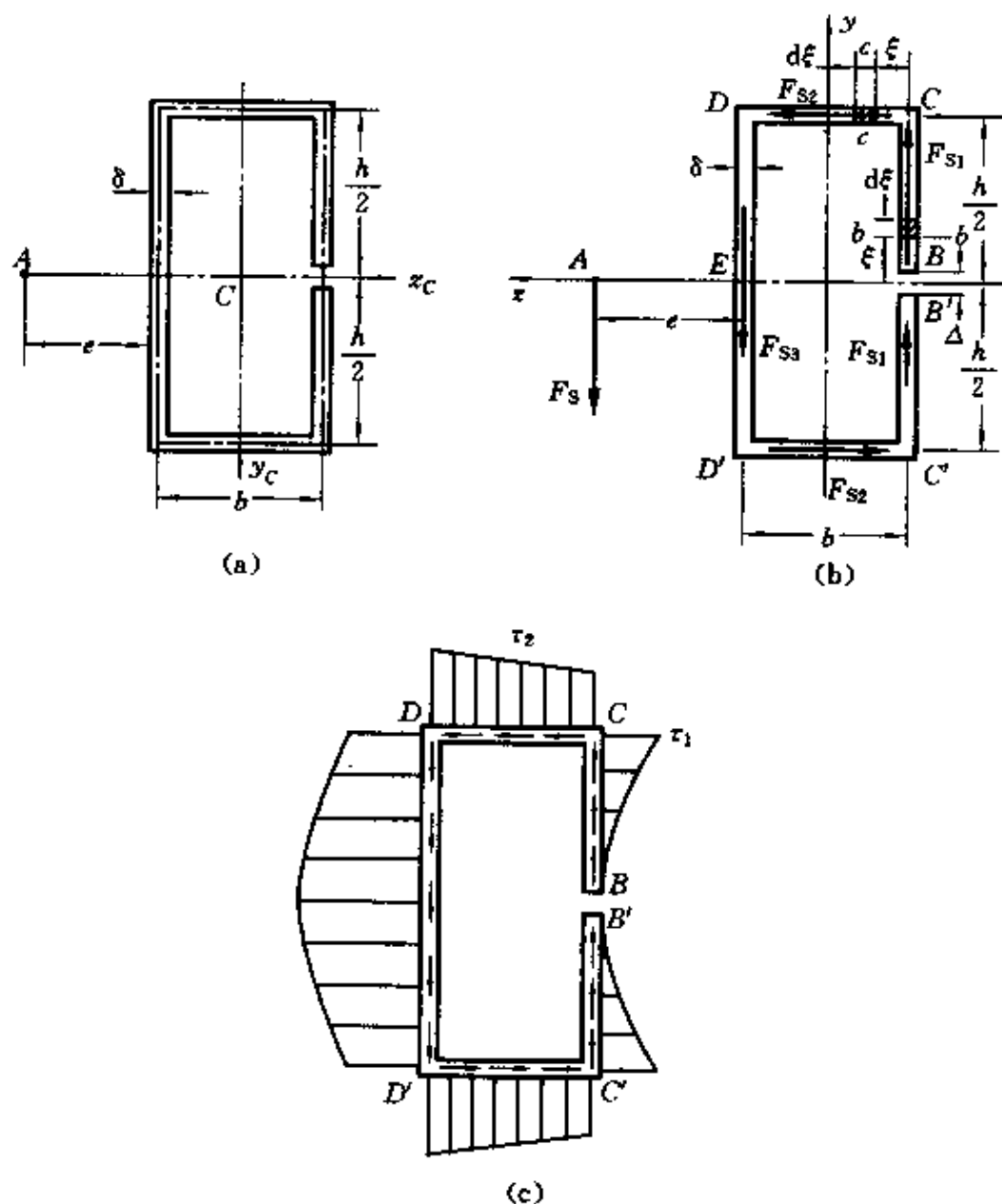
$$S_z^* = (\xi\delta) \frac{\xi}{2} = \frac{\delta \xi^2}{2} \quad \left(0 \leq \xi \leq \frac{h}{2} \right)$$

则 bb 截面上的切应力 $\tau_1 = \frac{F_{sy} S_z^*}{\delta I_z} = \frac{F_{sy} \xi^2}{2 I_z}$

BC 段内切应力的合力为

$$F_{s1} = \int_A \tau_1 dA = \int_0^{h/2} \tau_1 (\delta d\xi) = \frac{F_{sy} \delta h^3}{48 I_z}$$

显然, $B'C'$ 段内的切应力分布和 BC 段的切应力分布相对于 z 轴对称,方向相同,因此切应力的合力必大小相等,方向相同(题 12.8 图(c))。



题 12.8 图

cc 截面与 B 截面之间的面积(题 12.8 图(b))对 z 轴的面矩为

$$S_z^* = \left(\frac{h}{2} \delta \right) \frac{h}{4} + (\xi \delta) \frac{h}{2} = \frac{\delta h^2}{8} + \frac{\delta h}{2} \xi \quad (0 \leq \xi \leq b)$$

则 cc 截面上的剪应力为

$$\tau_2 = \frac{F_S S_z^*}{\delta I_z} = \frac{F_S h}{8 I_z} (h + 4\xi)$$

CD 段内切应力的合力为

$$F_{s2} = \int_0^b \tau_2 (\delta d\xi) = \frac{F_s \delta h}{8I_z} (hb + 2b^2)$$

显然, $C'D'$ 段内的切应力分布与 CD 段内的切应力分布相同, 切应力的合力与 CD 段内的切应力合力大小相等, 方向相反。假设 DD' 段内切应力的合力为 F_{s3} 。

题 12.8 图(b)中, 五段内的切应力合力与作用于弯曲中心 A 的合力 F_s 静力等效, 因此五段内的切应力合力对 E 点之矩应等于 F_s 对 E 点之矩, 即

$$F_{se} = 2F_{s1}b + F_{s2}h$$

$$e = \frac{1}{F_s} (F_{s2}h + 2F_{s1}b) = \frac{\delta h^2 b}{24I_z} [h + 3(h + 2b)] = \frac{\delta h^2 b}{12I_z} (2h + 3b) \quad (1)$$

箱形开口截面对 z 轴的惯性矩

$$\begin{aligned} I_z &= 2 \left(\frac{\delta h^3}{12} \right) + 2 \left[\frac{b\delta^3}{12} + (b\delta) \left(\frac{h}{2} \right)^2 \right] = 2 \left(\frac{\delta h^3}{12} \right) + 2 \left[b\delta \left(\frac{h}{2} \right)^2 \right] \\ &= \frac{\delta h^3}{6} + \frac{b\delta h^2}{2} \end{aligned} \quad (2)$$

上式计算中略去了高阶小量 $b\delta^3/12$ 。将 I_z 表达式(②式)代入①式得

$$e = \frac{b(2h + 3b)}{2h + 6b}$$

剪应力分布如题 12.8 图(c)所示。

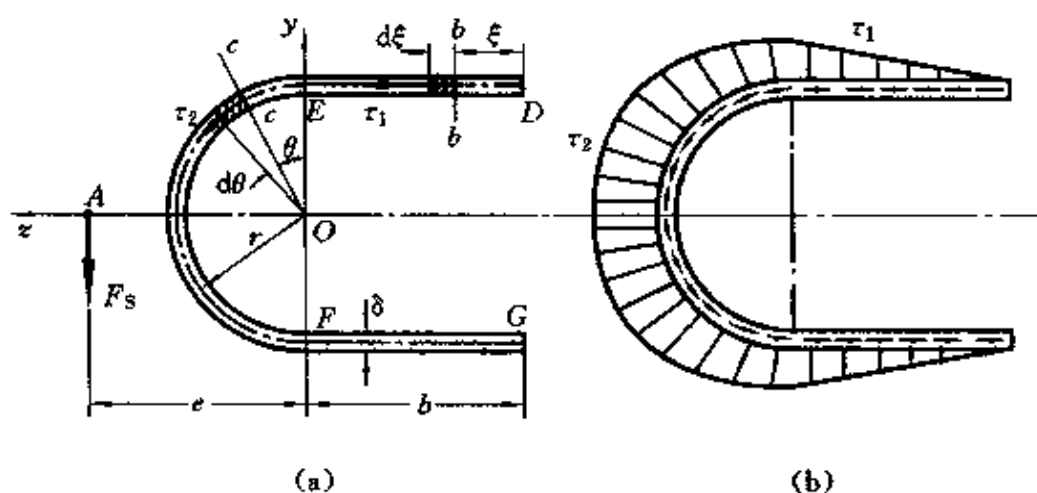
12.9 试确定题 12.9 图(a)所示薄壁截面的弯曲中心 A 的位置, 设壁厚 δ 为常数。

解 如题 12.9 图(a)、(b)所示。弯曲中心在对称轴 z 上, z 轴是形心轴。在 DE 段内, 边缘 D 至 bb 截面间的面积 $\xi\delta$ 对 z 轴的面矩为

$$S_z^* = (\delta\xi)r \quad (0 \leq \xi \leq b)$$

则 bb 截面处的切应力为 $\tau_1 = \frac{F_s S_z^*}{\delta I_z} = \frac{F_s r \xi}{I_z}$

cc 截面和 D 边缘间的面积对 z 轴的面矩为



题 12.9 图

$$\begin{aligned} S_z^* &= \delta b r + \int_A y dA = \delta b r + \int_0^\theta (r \cos \theta) \delta r d\theta \\ &= \delta b r + \delta r^2 \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi) \end{aligned}$$

EF 段内的切应力为

$$\tau_z = \frac{F_s S_z^*}{\delta I_z} = \frac{F_s r}{I_z} (b + r \sin \theta)$$

上翼缘 DE 段内切应力的合力为

$$F_{s1} = \int_A \tau_1 dA = \int_0^b \frac{F_s r \xi}{I_z} \delta d\xi = \frac{F_s b^2 r \delta}{2 I_z}$$

下翼缘 FG 段内切应力的合力与 F_{s1} 大小相等, 方向相反。上、下翼缘内切应力的合力产生的力偶矩为

$$M_1 = F_{s1}(2r) = \frac{F_s b^2 r^2 \delta}{I_z}$$

腹板 EF 段内切应力产生绕 O 点的力矩为

$$\begin{aligned} M_2 &= \int_A \tau_z r dA = \int_0^\pi \frac{F_s r}{I_z} (b + r \sin \theta) r (\delta) (r d\theta) \\ &= \frac{F_s r^3 \delta}{I_z} (b\pi + 2r) \end{aligned}$$

作用与剪切中心 A 点处的 F_s 力对 O 点之矩为

$$M = F_s e$$

因 $M = M_1 + M_2$, 所以

$$e = \frac{r^2 \delta}{I_z} (b^2 + b\pi r + 2r^2)$$

将 $I_z = 2(b\delta^2/12 + b\delta r^2) + \pi\delta r^3/2 = 2\delta br^2 + \pi\delta r^3/2$ 代入上式, 得

$$e = \frac{2b^2 + 2\pi br + 4r^2}{4b + \pi r}$$

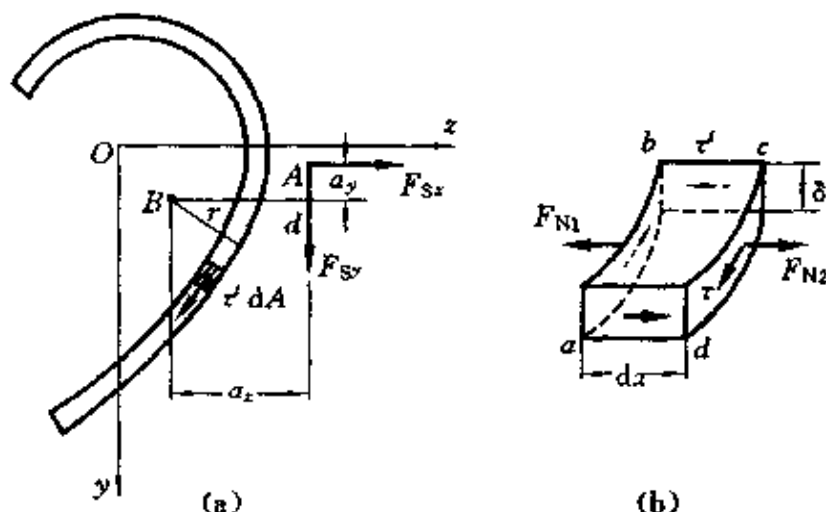
计算 I_z 时, 略去了 δ 的高阶微量。

12.10 导出公式(12.9)和(12.10)时(见文献1), 假设 y, z 为截面的形心主惯性轴。若 y, z 为通过截面形心的任意轴, 外力 F 通过截面弯曲中心且平行于 y 轴, 试证弯曲切应力的计算公式应为

$$\tau = \frac{F_{sy}(I_y S_z^* - I_{yz} S_y^*)}{(I_y I_z - I_{yz}^2) \delta}$$

同理, 当 F 通过弯曲中心且平行于 z 轴时

$$\tau = \frac{F_{sz}(I_x S_y^* - I_{yz} S_z^*)}{(I_y I_z - I_{yz}^2) \delta}$$



题 12.10 图

解 从题 12.10 图(a)所示曲杆中截出一段 $abcd$, 如题 12.10 图(b)所示。由平衡方程得

$$\sum F_x = 0, \quad F_{N2} - F_{N1} - \tau' \delta dx = 0 \quad (1)$$

因假设 y, z 是通过截面形心的任意轴, 弯曲正应力应按广义弯曲应力公式来计算。故

$$\begin{aligned} F_{N1} &= \int_{A_1} \sigma dA = \int_{A_1} \frac{M_z(I_y y - I_{yz} z)}{I_y I_z - I_{yz}^2} dA \\ &= \frac{M_z I_y \int_{A_1} y dA - M_z I_{yz} \int_{A_1} z dA}{I_y I_z - I_{yz}^2} = \frac{M_z (I_y S_z^* - I_{yz} S_y^*)}{I_y I_z - I_{yz}^2} \\ F_{N2} &= \int_{A_1} \frac{(M_z + dM_z)(I_y y - I_{yz} z)}{I_y I_z - I_{yz}^2} dA \\ &= \frac{(M_z + dM_z)(I_y S_z^* - I_{yz} S_y^*)}{I_y I_z - I_{yz}^2} \end{aligned}$$

将 N_1, N_2 代入①式得

$$\tau' = \frac{dM_z}{dx} \times \frac{(I_y S_z^* - I_{yz} S_y^*)}{(I_y I_z - I_{yz}^2) \delta} = \frac{F_{Sy} (I_y S_z^* - I_{yz} S_y^*)}{(I_y I_z - I_{yz}^2) \delta}$$

由切应力互等定理有

$$\tau = \tau' = \frac{F_{Sy} (I_y S_z^* - I_{yz} S_y^*)}{(I_y I_z - I_{yz}^2) \delta}$$

用类似的方法可以证明, 当 P 通过弯曲中心且平行于 z 轴时

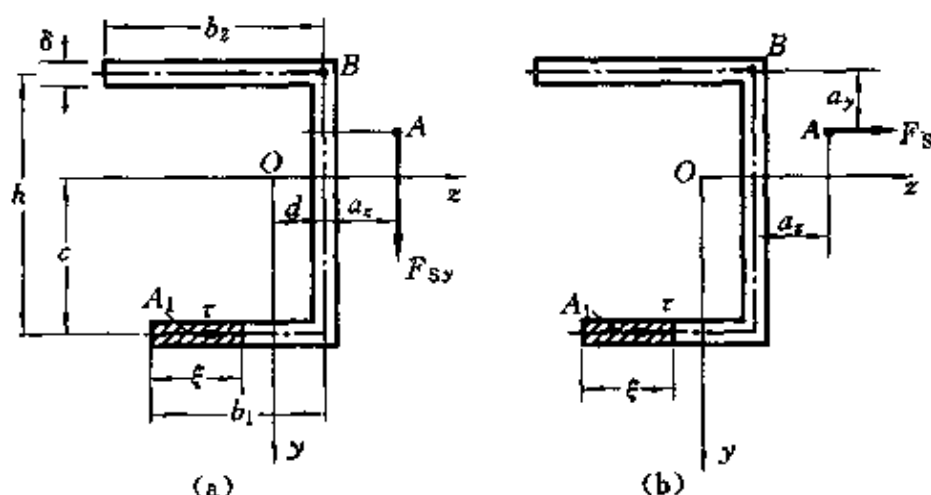
$$\tau = \frac{F_{Sz} (I_z S_y^* - I_{yz} S_z^*)}{(I_y I_z - I_{yz}^2) \delta}$$

12.11 确定题 12.11 图(a)所示薄壁截面的弯曲中心, 设壁厚为 δ 。

解 为了计算简便, 把通过形心 O , 并分别平行于腹板和翼缘中线的轴作为 y 轴和 z 轴。当剪力平行于 y 轴时(题 12.11 图(a)), 由于 y, z 不是形心主惯性轴, 弯曲切应力应按题 12.10 中导出的公式计算。在截面上截取部分面积 A_1 , 算出

$$S_z^* = \xi \delta c, \quad S_y^* = -\xi \delta (b_1 - d - \xi/2)$$

代入题 12.10 所求得的弯曲切应力公式, 得



题 12.11 图

$$\tau = \frac{-F_{Sy}[I_y \xi c + I_{yz} \xi (b_1 - d - \xi/2)]}{I_y I_z - I_{yz}^2}$$

若选取 \$B\$ 点为力矩中心, 则无需再求上翼缘和腹板上的切应力, 就可由合力矩定理得到

$$\begin{aligned} F_{Sy} a_z &= \int_A h \tau dA = \int_0^{b_1} h \frac{-F_{Sy}[I_y \xi c + I_{yz} \xi (b_1 - d - \xi/2)]}{I_y I_z - I_{yz}^2} \delta d\xi \\ &= \frac{-F_{Sy} b_1^2 h \delta}{6(I_y I_z - I_{yz}^2)} [3I_y c + I_{yz}(2b_1 - 3d)] \end{aligned} \quad (1)$$

当剪力平行于 \$z\$ 轴时(题 12.11 图(b)), 切应力按题 12.10 中导出的切应力公式算出为

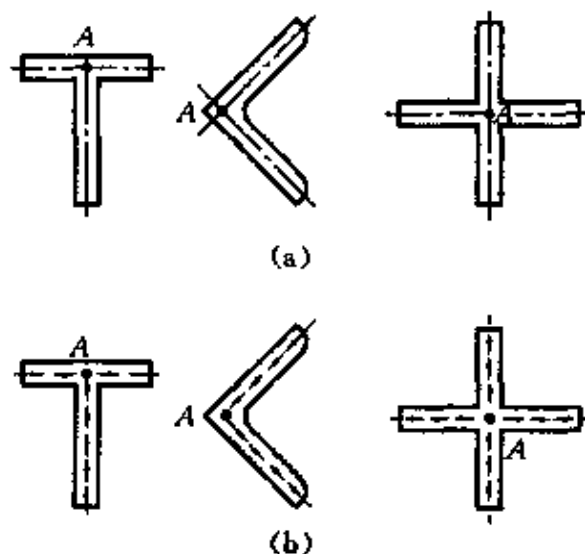
$$\tau = - \frac{F_{Sx}[I_{yz} \xi c + I_z \xi (b_1 - d - \xi/2)]}{I_y I_z - I_{yz}^2}$$

等号右边的负号表明 \$\tau\$ 指向截出面积 \$A_1\$ 的外部, 即指向右方, 如题 12.11 图(b)所示。对 \$B\$ 点取矩时考虑到 \$\tau\$ 的方向, 合力矩定理写成

$$\begin{aligned} F_{Sx} a_y &= \int_0^{b_1} h \frac{F_{Sx}[I_{yz} \xi c + I_z \xi (b_1 - d - \xi/2)]}{I_y I_z - I_{yz}^2} \delta d\xi \\ &= \frac{F_{Sx} b_1^2 h \delta}{6(I_y I_z - I_{yz}^2)} [3I_{yz} c + I_z(2b_1 - 3d)] \end{aligned} \quad (2)$$

从①、②式中容易解出 \$a_y\$ 和 \$a_z\$, 这就确定了弯曲中心的位置。

12.12 若薄壁截面由两个狭长的矩形所组成,如题12.12图(a)所示,试证明两矩形中线的交点即为弯曲中心。



题12.12图

解 由于截面是由两个狭长的矩形组成,每一个狭长矩形截面上的剪力流方向是沿着中心线的。如题12.12图(b)所示,所以切应力的合力 F_{S1} 、 F_{S2} 的方向也沿着中心线。

弯曲中心实质上是横截面上切应力合力的作用点。设合力为 F_S , 根据合力矩定理, F_{S1} 、 F_{S2} 对弯曲中心 A 之矩 M_{A1} 、 M_{A2} 应等于合力 F_S 对弯曲中心 A 之矩 $M_A = F_S e$ 。 F_{S1} 和 F_{S2} 的作用线总相交于某一点 A , 所以

$$M_{A1} = 0, \quad M_{A2} = 0, \quad M_A = M_{A1} + M_{A2} = 0$$

即
$$F_S e = 0, \quad e = 0$$

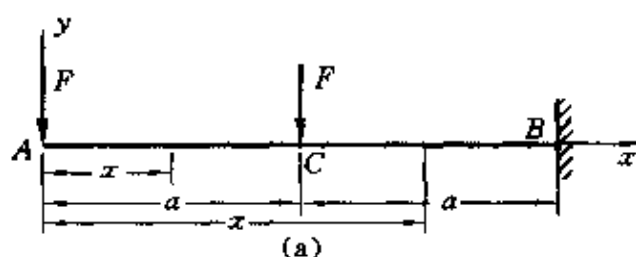
所以 A 就是弯曲中心。

12.13 利用函数 $\langle x-a \rangle^n$, 重解题6.3的(b)和(d), 题6.4的(b)和(d)。

解 (1) 题6.3(b)。如题12.13图(a)所示。首先列出弯矩方程:

AC段
$$M_1(x) = -Fx$$

CB段
$$M_2(x) = -Fx - F(x-a)$$



题 12.13 图

把弯矩方程写成一个统一的式子

$$M(x) = -Fx - F\langle x - a \rangle$$

$$EIw'' = -Fx - F\langle x - a \rangle$$

积分得 $EIw' = -F\frac{x^2}{2} - \frac{F}{2}\langle x - a \rangle^2 + C$

$$EIw = -\frac{F}{6}x^3 - \frac{F}{6}\langle x - a \rangle^3 + Cx + D$$

边界条件是

$x = 2a$ 时, $w' = 0$, 得

$$-F\frac{(2a)^2}{2} - \frac{F}{2}(2a - a)^2 + C = 0, \quad C = \frac{5}{2}Fa^2$$

$x = 2a$ 时, $w = 0$, 得

$$-\frac{F}{6}(2a)^3 - \frac{F}{6}(2a - a)^3 + C2a + D = 0, \quad D = -\frac{7}{2}Fa^3$$

挠度方程和转角方程分别是

$$EIw' = EI\theta = -F\frac{x^2}{2} - \frac{F}{2}\langle x - a \rangle^2 + \frac{5}{2}Fa^2$$

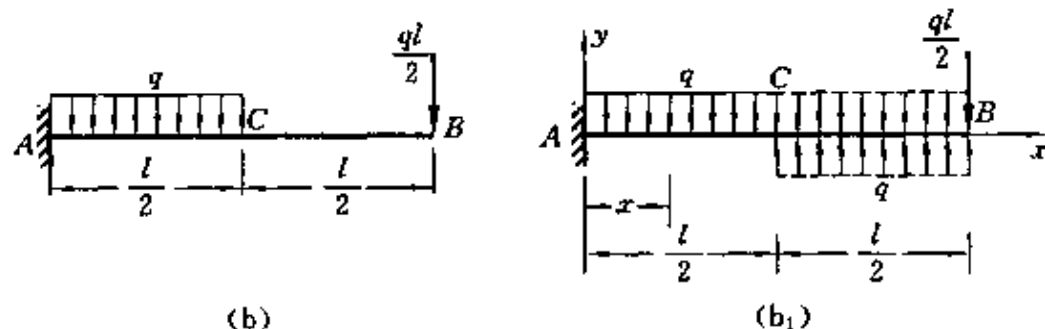
$$EIw = -\frac{F}{6}x^3 - \frac{F}{6}\langle x - a \rangle^3 + \frac{5}{2}Fa^2x - \frac{7}{2}Fa^3$$

自由端的转角和挠度

$$\theta_A|_{x=0} = \frac{5}{2EI}Fa^2, \quad w_A|_{x=0} = -\frac{7}{2EI}Fa^3$$

(2) 题 6.3(d)。如题 12.13 图(b)、(b₁)所示。

根据平衡条件求出约束反力



续题 12.13 图

$$\sum F_y = 0, \quad F_{RA} - q \frac{l}{2} - \frac{ql}{2} = 0, \quad F_{RA} = ql$$

$$\sum M_A = 0, \quad M_A - \frac{ql}{2}l - q \frac{l}{2} \times \frac{l}{4} = 0, \quad M_A = \frac{5}{8}ql^2$$

弯矩方程:

AC 段 $M_1(x) = qlx - \frac{5}{8}ql^2 - \frac{q}{2}x^2$

CB 段 $M_2(x) = qlx - \frac{5}{8}ql^2 - q \frac{l}{2} \left(x - \frac{l}{4} \right)$

为了使弯矩方程能利用函数 $\langle x-a \rangle^n$ 写成全梁弯矩方程统一的形式, 设想将 AC 段内的均布载荷一直向右延伸, 然后再用方向相反, 数值相等的载荷抵消延伸的部分, 如题 12.13 图 (b₁) 所示。这样并未改变原来的载荷性质, 弯矩方程可以写成统一的表达式:

$$M(x) = -\frac{5}{8}ql^2 + qlx - \frac{q}{2}x^2 + \frac{q}{2}\langle x - \frac{l}{2} \rangle^2$$

$$EIw'' = M(x) = -\frac{5}{8}ql^2 + qlx - \frac{q}{2}x^2 + \frac{q}{2}\langle x - \frac{l}{2} \rangle^2$$

$$EIw' = EI\theta = -\frac{5}{8}ql^2x + \frac{ql}{2}x^2 - \frac{q}{6}x^3 + \frac{q}{6}\langle x - \frac{l}{2} \rangle^3 + C$$

$$EIw = -\frac{5}{16}ql^2x^2 + \frac{ql}{6}x^3 - \frac{q}{24}x^4 + \frac{q}{24}\langle x - \frac{l}{2} \rangle^4 + Cx + D$$

利用边界条件确定积分常数:

$$x=0 \text{ 时, } w'=0, \text{ 得 } C=0$$

$$x=0 \text{ 时, } w=0, \text{ 得 } D=0$$

转角方程和挠度方程分别是

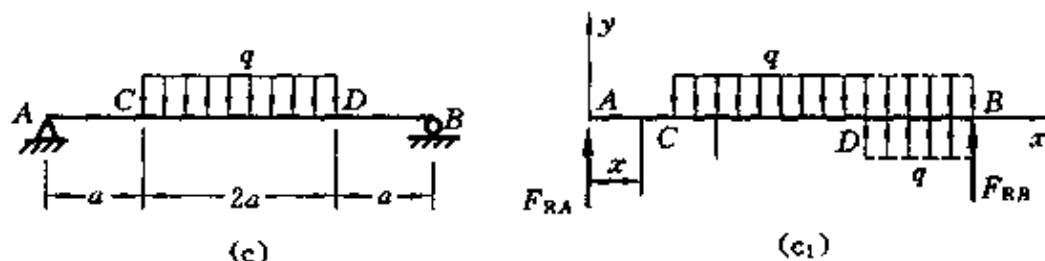
$$EI\theta = -\frac{5}{8}ql^2x + \frac{1}{2}qlx^2 - \frac{q}{6}x^3 + \frac{q}{6}\langle x - \frac{l}{2} \rangle^3$$

$$EIy = -\frac{5}{16}ql^2x^2 + \frac{1}{6}qlx^3 - \frac{q}{24}x^4 + \frac{q}{24}\langle x - \frac{l}{2} \rangle^4$$

自由端的转角和挠度

$$\theta|_{x=l} = -\frac{13ql^3}{48EI}, \quad w|_{x=l} = -\frac{71ql^4}{384EI}$$

(3) 题 6.4(b)。如题 12.13 图(c)、(c₁)所示。



续题 12.13 图

因结构和载荷均对称,所以应用平衡条件,可求出支座反力

$$F_{RA} = F_{RB} = qa$$

为了能利用函数 $\langle x-a \rangle^n$ 写成全梁弯矩方程统一的形式,将 CD 段的均布载荷一直向右延伸,然后用方向相反、数值相等的载荷抵消延伸部分的载荷,如题 12.13 图(c₁)所示,于是得弯矩方程

$$M(x) = qax - \frac{q}{2}\langle x-a \rangle^2 + \frac{q}{2}\langle x-3a \rangle^2$$

挠曲线微分方程及其积分

$$EIw'' = M(x) = qax - \frac{q}{2}\langle x-a \rangle^2 + \frac{q}{2}\langle x-3a \rangle^2$$

$$EIw' = EI\theta = \frac{qa}{2}x^2 - \frac{q}{6}\langle x-a \rangle^3 + \frac{q}{6}\langle x-3a \rangle^3 + C$$

$$EIw = \frac{qa}{6}x^3 - \frac{q}{24}\langle x-a \rangle^4 + \frac{q}{24}\langle x-3a \rangle^4 + Cx + D$$

利用边界条件确定积分常数

$x=0$ 时, $w=0$, 得

$$D=0$$

$x=4a$ 时, $w=0$, 得

$$\frac{qa}{6}(4a)^3 - \frac{q}{24}(3a)^4 + \frac{q}{24}a^4 + C \times 4a = 0$$

解上式得 $C = -\frac{11qa^3}{6}$

转角方程和挠度方程分别是

$$EI\theta = \frac{qa}{2}x^2 - \frac{a}{6}\langle x-a \rangle^3 + \frac{q}{6}\langle x-3a \rangle^3 - \frac{11}{6}qa^3$$

$$EIw = \frac{qa}{6}x^3 - \frac{q}{24}\langle x-a \rangle^4 + \frac{q}{24}\langle x-3a \rangle^4 - \frac{11}{6}qa^3x$$

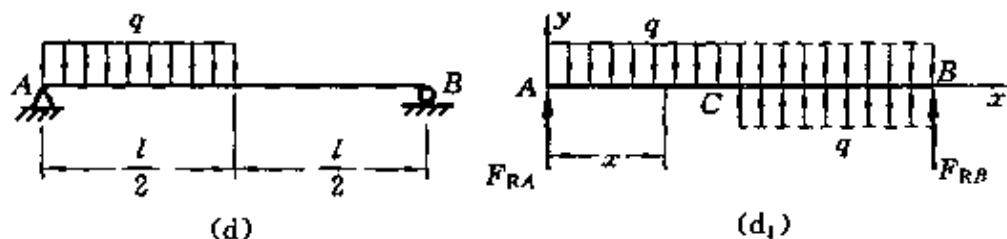
将 $x=0, x=4a$ 代入转角方程得端截面转角

$$\theta_A = -\frac{11qa^3}{6EI}, \quad \theta_B = \frac{11qa^3}{6EI}$$

将 $x=2a$ 代入挠曲线方程, 得最大挠度

$$w|_{x=2a} = w_{\max} = -\frac{19qa^4}{8EI}$$

(4) 题 6.4(d)。如题 12.13 图(d)、(d₁)所示。



续题 12.13 图

根据平衡条件求出约束反力(题 12.13 图(d₁))

$$\sum M_B = 0, \quad -F_{RA}l + q \times \frac{l}{2} \times \frac{3}{4}l = 0, \quad F_{RA} = \frac{3}{8}ql$$

利用函数 $\langle x-a \rangle^n$ 写出全梁弯矩方程

$$M(x) = \frac{3}{8}qlx - \frac{q}{2}x^2 + \frac{q}{2}\langle x - \frac{l}{2} \rangle^2$$

挠曲线微分方程及其积分

$$EIw'' = M(x) = \frac{3}{8}qlx - \frac{q}{2}x^2 + \frac{q}{2}\langle x - \frac{l}{2} \rangle^2$$

$$EIw' = EI\theta = \frac{3}{16}qlx^2 - \frac{q}{6}x^3 + \frac{q}{6}\langle x - \frac{l}{2} \rangle^3 + C$$

$$EIw = \frac{1}{16}qlx^3 - \frac{q}{24}x^4 + \frac{q}{24}\langle x - \frac{l}{2} \rangle^4 + Cx + D$$

利用边界条件确定积分常数

$$x=0 \text{ 时, } w=0, \text{ 得 } D=0$$

$$x=l \text{ 时, } w=0, \text{ 得}$$

$$\frac{1}{16}ql^4 - \frac{1}{24}ql^4 + \frac{1}{24}q\left(\frac{l}{2}\right)^4 + Cl = 0$$

$$\text{解上式得 } C = -\frac{3ql^3}{128}$$

转角方程和挠度方程分别是

$$EI\theta = \frac{3}{16}qlx^2 - \frac{q}{6}x^3 + \frac{q}{6}\langle x - \frac{l}{2} \rangle^3 - \frac{3}{128}ql^3$$

$$EIw = \frac{1}{16}qlx^3 - \frac{q}{24}x^4 + \frac{q}{24}\langle x - \frac{l}{2} \rangle^4 - \frac{3}{128}ql^3x$$

端截面转角为

$$\theta_A|_{x=0} = -\frac{3ql^3}{128EI}, \quad \theta_B|_{x=l} = \frac{7ql^3}{384EI}$$

$$\text{跨度中点挠度 } w_{l/2} = -\frac{5ql^4}{768EI}$$

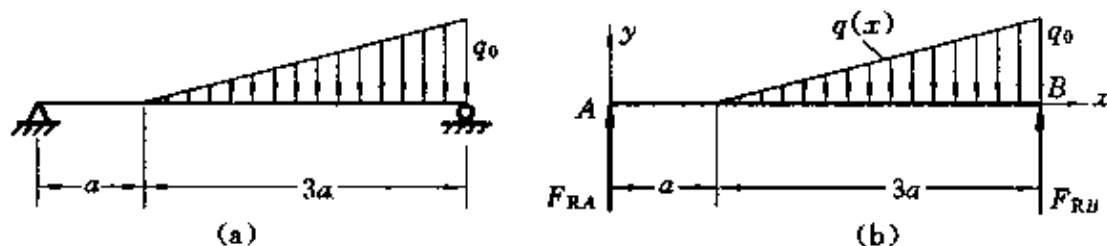
12.14 利用函数 $\langle x-a \rangle^n$, 求题 12.14 图(a)所示简支梁的弯曲变形。设 EI 为常数。

解 应用平衡条件求出支座反力(题 12.14 图(b))

$$\sum M_B = 0, \quad -F_{RA} \times 4a + \frac{1}{2}q_0 \times 3a \times a = 0, \quad F_{RA} = \frac{3}{8}q_0a$$

分布载荷函数、挠曲线微分方程及其积分

$$q(x) = -q_0 \frac{x-a}{3a}$$



题 12.14 图

$$EIw^{(4)} = -\frac{q_0}{3a}\langle x-a \rangle$$

$$EIw^{(3)} = -\frac{q_0}{6a}\langle x-a \rangle^2 + C_1$$

由 $x=0, w^{(3)} = \frac{F_{RA}}{EI}$, 得 $C_1 = \frac{3}{8}q_0a$

$$EIw'' = -\frac{q_0}{18a}\langle x-a \rangle^3 + \frac{3}{8}q_0ax + C_2$$

由 $x=0, w'' = \frac{M}{EI} = 0$, 得 $C_2 = 0$

$$EIw' = -\frac{q_0}{72a}\langle x-a \rangle^4 + \frac{3}{16}q_0ax^2 + C_3$$

$$EIw = -\frac{q_0}{360a}\langle x-a \rangle^5 + \frac{1}{16}q_0ax^3 + C_3x + C_4$$

由 $x=0, w=0$, 得 $C_4 = 0$

由 $x=4a, w=0$, 得 $C_3 = -\frac{133}{160}q_0a^3$

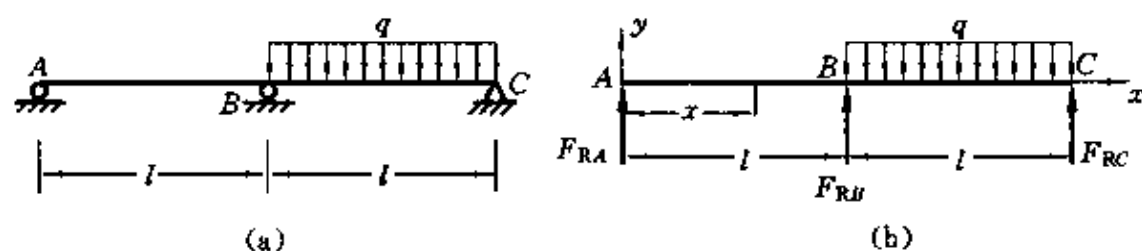
挠度方程和转角方程分别是

$$EIw = -\frac{q_0}{360a}\langle x-a \rangle^5 + \frac{1}{16}q_0ax^3 - \frac{133}{160}q_0a^3x$$

$$EIw' = EI\theta = -\frac{q_0}{72a}\langle x-a \rangle^4 + \frac{3}{16}q_0ax^2 - \frac{133}{160}q_0a^3$$

12.15 求解题 12.15 图(a)所示超静定梁。设 EI 为常数。

解 如题 12.15 图(b)所示。设支座 A 和 B 的反力为 F_{RA} 和 F_{RB} 。弯矩方程可以写成



题 12.15 图

$$M(x) = F_{RA}x + F_{RB}\langle x - l \rangle^1 - \frac{q}{2}\langle x - l \rangle^2$$

于是有

$$EIw'' = M(x) = F_{RA}x + F_{RB}\langle x - l \rangle^1 - \frac{q}{2}\langle x - l \rangle^2$$

$$EIw' = \frac{1}{2}F_{RA}x^2 + \frac{1}{2}F_{RB}\langle x - l \rangle^2 - \frac{q}{6}\langle x - l \rangle^3 + C$$

$$EIw = \frac{1}{6}F_{RA}x^3 + \frac{1}{6}F_{RB}\langle x - l \rangle^3 - \frac{q}{24}\langle x - l \rangle^4 + Cx + D$$

这里共有四个未知量: F_{RA} 、 F_{RB} 、 C 、 D 。边界条件有三个, 即

$$x=0 \text{ 时, } w=0, \text{ 得 } D=0$$

$$x=l \text{ 时, } w=0, \text{ 得}$$

$$\frac{1}{6}F_{RA}l^3 + Cl = 0 \quad (1)$$

$$x=2l \text{ 时, } w=0, \text{ 得}$$

$$\frac{1}{6}F_{RA}(2l)^3 + \frac{1}{6}F_{RB}l^3 - \frac{1}{24}ql^4 + C \times 2l = 0 \quad (2)$$

平衡条件

$$\sum M_C = 0, \quad F_{RA} \times 2l + F_{RB} \times l - \frac{q}{2}l^2 = 0 \quad (3)$$

联立①、②、③式求解, 得

$$F_{RA} = -\frac{1}{16}ql \quad (\downarrow), \quad F_{RB} = \frac{5}{8}ql \quad (\uparrow)$$

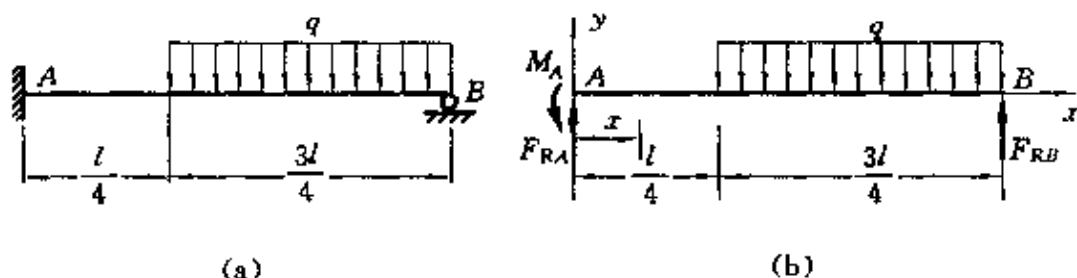
应用平衡条件

$$\sum F_y = 0, \quad F_{RA} + F_{RB} + F_{RC} - ql = 0$$

解得

$$F_{RC} = \frac{7}{16}ql \quad (\uparrow)$$

12.16 求解题 12.16 图(a)所示超静定梁。设 EI 为常数。



题 12.16 图

解 如题 12.16 图(b)所示。弯矩方程、挠曲线微分方程及其积分为

$$M(x) = F_{RA}x - M_A - \frac{q}{2}\left(x - \frac{l}{4}\right)^2$$

$$EIw'' = M(x) = F_{RA}x - M_A - \frac{q}{2}\left(x - \frac{l}{4}\right)^2$$

$$EIw' = \frac{1}{2}F_{RA}x^2 - M_Ax - \frac{q}{6}\left(x - \frac{l}{4}\right)^3 + C$$

$$EIw = \frac{1}{6}F_{RA}x^3 - \frac{1}{2}M_Ax^2 - \frac{q}{24}\left(x - \frac{l}{4}\right)^4 + Cx + D$$

利用边界条件确定积分常数

$$\text{由 } x=0, \quad w'=0, \text{ 得 } C=0$$

$$\text{由 } x=0, \quad w=0, \text{ 得 } D=0$$

$$\text{由 } x=l, \quad w=0, \text{ 得}$$

$$\frac{1}{6}F_{RA}l^3 - \frac{1}{2}M_Al^2 - \frac{1}{24}q \times \left(\frac{3}{4}l\right)^4 = 0 \quad (1)$$

静力学平衡方程

$$\sum F_y = 0, \quad F_{RA} + F_{RB} - \frac{3}{4}ql = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_B = 0, \quad -F_{RA}l + q \times \frac{3}{4}l \times \frac{3}{8}l + M_A = 0 \quad (3)$$

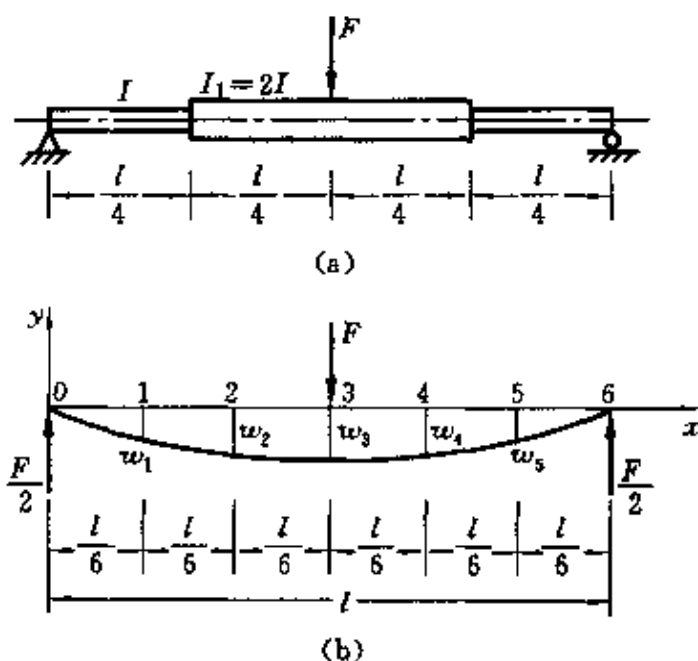
联立①、②、③式求解,得

$$F_{RA} = 0.382ql \quad (\uparrow)$$

$$M_A = 0.101ql^2 \quad (\uparrow)$$

$$F_{RB} = 0.368ql \quad (\uparrow)$$

12.17 将题 6.13 中的变截面梁分成六个相等间隔(题 12.17 图),用差分法求解,并与题 6.13 的结果进行比较。



题 12.17 图

解 将简支梁分成六个相等的间隔,在梁上确定 0、1、2、3、4、5、6 点,由题 12.17 图可得

$$M_1 = \frac{1}{12}Fl, \quad M_2 = \frac{1}{6}Fl, \quad M_3 = \frac{1}{4}Fl$$

$$E_1I_1 = EI, \quad E_2I_2 = 2EI, \quad E_3I_3 = 2EI, \quad h = \frac{l}{6}$$

代入差分方程得

$$w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1} = h^2 \frac{M_i}{EI_i}$$

$$w_0 - 2w_1 + w_2 = \left(\frac{l}{6}\right)^2 \frac{1}{EI} \left(\frac{Fl}{12}\right)$$

$$w_1 - 2w_2 + w_3 = \left(\frac{l}{6}\right)^2 \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{6}Fl\right)$$

$$w_2 - 2w_3 + w_4 = \left(\frac{l}{6}\right)^2 \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{4}Fl\right)$$

由边界条件 $w_0=0$ 及对称性 $w_2=w_4$ 解得

$$w_1 = -0.00637 \frac{Fl^3}{EI} \quad (\downarrow)$$

$$w_2 = -0.01042 \frac{Fl^3}{EI} \quad (\downarrow)$$

$$w_3 = -0.01215 \frac{Fl^3}{EI} \quad (\downarrow)$$

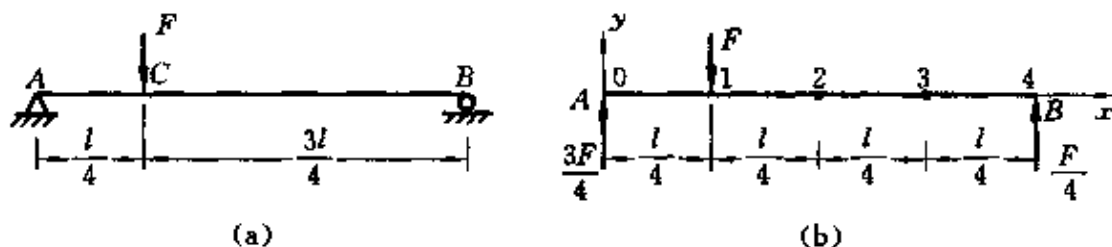
题 6.13 的结果是

$$|w_c| = \frac{3}{256} \frac{Fl^3}{EI} = 0.01172 \frac{Fl^3}{EI}$$

误差为

$$\left| \frac{|w_3| - |w_c|}{|w_c|} \right| = \left| \frac{0.01215 - 0.01172}{0.01172} \right| = 3.67\%$$

12.18 用有限差分法求题 12.18 图(a)所示简支梁集中力 F 作用处截面 C 的挠度。将梁分成四个相等的间隔, 设 EI 为常数。



题 12.18 图

解 将简支梁分成四个相等的间隔, 在梁上确定 0、1、2、3、4 点, 利用平衡条件确定支座反力, 如题 12.18 图(b)所示, 于是有

$$M_1 = \frac{3}{16}Fl, \quad M_2 = \frac{1}{8}Fl, \quad M_3 = \frac{1}{16}Fl, \quad E_i I_i = EI, \quad h = \frac{l}{4}$$

代入差分方程得

$$w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1} = h^2 \frac{M_i}{EI_i}$$

$$w_0 - 2w_1 + w_2 = \left(\frac{l}{4}\right)^2 \frac{1}{EI} \left(\frac{3}{16}Fl\right)$$

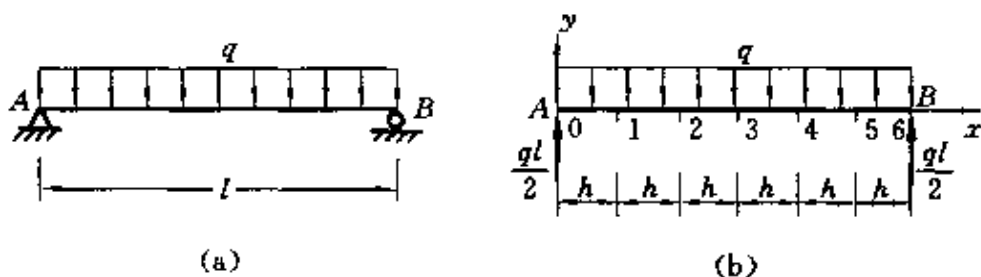
$$w_1 - 2w_2 + w_3 = \left(\frac{l}{4}\right)^2 \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{8}Fl\right)$$

$$w_2 - 2w_3 + w_4 = \left(\frac{l}{4}\right)^2 \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{16}Fl\right)$$

由边界条件 $w_0 = w_4 = 0$ 解得力 F 作用点处截面 C 的挠度

$$w_C = w_1 = -0.0137 \frac{Fl^3}{EI} \quad (\downarrow)$$

12.19 跨度为 l 的简支梁(题 12.19 图(a)), 受集度为 q 的均布载荷作用, $EI = \text{常数}$ 。将梁分成六个相等的间隔, 用有限差分法求跨度中点的挠度, 并将所得结果与文献 1 例 6.2 的结果比较。



题 12.19 图

解 将简支梁分成六个相等的间隔, 在梁上确定 0、1、2、3、4、5、6 点, 如题 12.19 图(b)所示。由题 12.19 图(b)可得

$$M_1 = \frac{5}{72}ql^2, \quad M_2 = \frac{1}{9}ql^2, \quad M_3 = \frac{1}{8}ql^2, \quad E_i I_i = EI, \quad h = \frac{l}{6}$$

代入差分方程得

$$w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1} = h^2 \times \frac{M_i}{EI_i}$$

$$w_0 - 2w_1 + w_2 = \left(\frac{l}{6}\right)^2 \frac{1}{EI} \left(\frac{5}{72}ql^2\right)$$

$$w_1 - 2w_2 + w_3 = \left(\frac{l}{6}\right)^2 \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{9}ql^2\right)$$

$$w_2 - 2w_3 + w_4 = \left(\frac{l}{6}\right)^2 \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{8}ql^2\right)$$

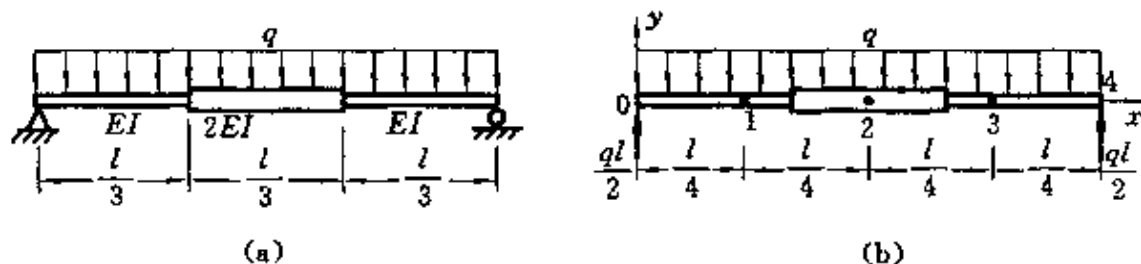
由边界条件 $w_0=0$ 及对称性 $w_2=w_4$ 解得

$$w_2 = -0.0133 \frac{ql^4}{EI} \quad (\downarrow)$$

与例 6.2 的结果 $|w_{\Phi}| = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI} = 0.0130 \frac{ql^4}{EI}$ 比较, 误差为

$$\left| \frac{|w_3| - |w_{\text{中}}|}{w_{\text{中}}} \right| = \left| \frac{0.0133 - 0.0130}{0.0130} \right| = 2.30\%$$

12.20 题 12.20 图(a)所示变截面简支梁受均布载荷作用。将梁分成四个相等的间隔,用有限差分法求跨度中点的挠度。



題 12.20 圖

解 将简支梁分成四个相等的间隔,在梁上确定 0、1、2、3、4 点,并根据平衡条件求出支座反力,如题 12.20 图(b)所示。因 $w_0 = w_4 = 0$,所以只有 w_1, w_2, w_3 三个未知量。由题 12.20 图(b)可得

$$M_1 = \frac{3}{32}ql^2, \quad M_2 = \frac{1}{8}ql^2, \quad M_3 = \frac{3}{32}ql^2$$

$$E_1 I_1 = EI, \quad E_2 I_2 = 2EI, \quad E_3 I_3 = EI, \quad h = \frac{l}{4}$$

代人差分方程

$$w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1} = h^2 \frac{M_i}{EI}$$

$$w_0 - 2w_1 + w_2 = \left(\frac{l}{4}\right)^2 \frac{1}{EI} \left(\frac{3}{32}ql^2\right)$$

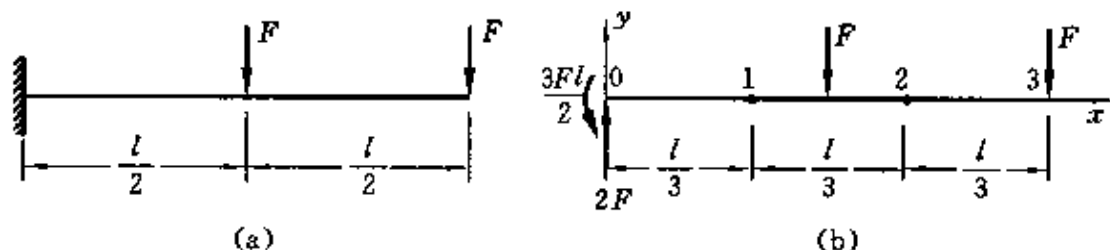
$$w_1 - 2w_2 + w_3 = \left(\frac{l}{4}\right)^2 \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{8}ql^2\right)$$

$$w_2 - 2w_3 + w_4 = \left(\frac{l}{4}\right)^2 \frac{1}{EI} \left(\frac{3}{32}ql^2\right)$$

由边界条件 $w_0 = w_4 = 0$ 解得跨度中点挠度

$$w_{l/2} = w_2 = -\frac{5ql^4}{512EI} \quad (\downarrow)$$

12.21 题 12.21 图(a)所示悬臂梁, EI 为常数。将梁分成三个相等的间隔, 用有限差分法求梁的自由端的挠度。



题 12.21 图

解 将悬臂梁分成三个相等的间隔, 在梁上确定 0、1、2、3 点, 如题 12.21 图(b)所示。因 0 点挠度 $w_0 = 0$, 所以只有其余三点挠度 w_1, w_2, w_3 为未知量。由题 12.21 图(b)可得

$$M_0 = -\frac{3}{2}Fl, \quad M_1 = -\frac{5}{6}Fl, \quad M_2 = -\frac{1}{3}Fl, \quad h = \frac{l}{3}$$

代入差分方程

$$w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1} = h^2 \frac{M_i}{EI}$$

$$w_{-1} - 2w_0 + w_1 = \left(\frac{l}{3}\right)^2 \frac{1}{EI} \left(-\frac{3}{2}Fl\right)$$

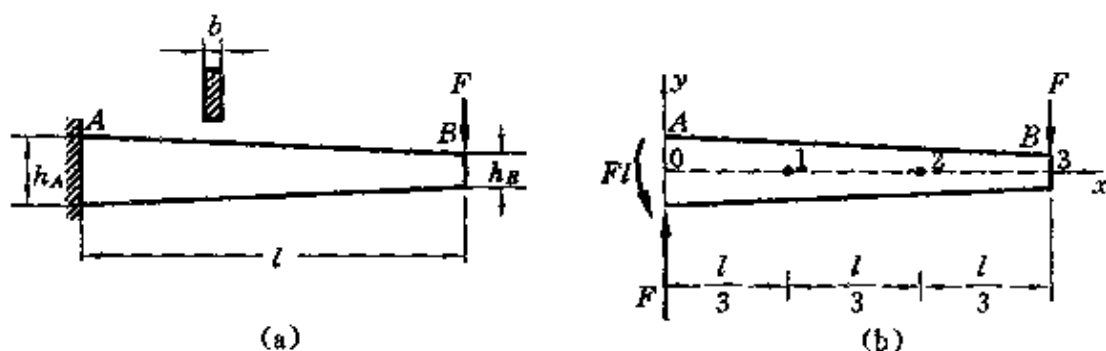
$$w_0 - 2w_1 + w_2 = \left(\frac{l}{3}\right)^2 \frac{1}{EI} \left(-\frac{5}{6}Fl\right)$$

$$w_1 - 2w_2 + w_3 = \left(\frac{l}{3}\right)^2 \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{3}Fl\right)$$

由边界条件 $w_0=0, w_{-1}=w_1$ (因 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_0 = \frac{w_1 - w_{-1}}{2h} = 0$), 解得

$$w_3 = -\frac{17Fl^3}{36EI} \quad (\downarrow)$$

12.22 题 12.22 图(a)所示锥形悬臂梁, 截面为矩形, 宽度 b 为常数, 高度 $h_A=2h_B$, 弹性模量为 E 。将梁分成三个相等的间隔, 用有限差分法求自由端 B 的挠度。



题 12.22 图

解 将悬臂梁分成三个相等的间隔, 在梁上确定 0、1、2、3 点, 如题 12.22 图(b)所示, 因为 0 点挠度 $w_0=0$, 所以只有其余三点挠度 w_1, w_2, w_3 为未知量。由题 12.22 图(b)可得

$$M_0 = -Fl, \quad M_1 = -\frac{2}{3}Fl, \quad M_2 = -\frac{1}{3}Fl$$

梁的截面面积成线性变化

$$h_x = h_A - \frac{h_A x}{2l}$$

$$h_0 = h_A, \quad h_1 = \frac{5}{6}h_A, \quad h_2 = \frac{2}{3}h_A$$

$$EI_0 = \frac{Eb h_A^3}{12} = EI_A, \quad EI_1 = \frac{Eb \left(\frac{5}{6}h_A \right)^3}{12} = E \left(\frac{5}{6} \right)^3 I_A$$

$$EI_2 = \frac{Eb \left(\frac{2}{3}h_A \right)^3}{12} = E \left(\frac{2}{3} \right)^3 I_A, \quad h = \frac{l}{3}$$

代入差分方程

$$w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1} = h^2 \frac{M_i}{EI_i}$$

$$w_{-1} - 2w_0 + w_1 = \left(\frac{l}{3}\right)^2 \frac{1}{EI_A} (-Fl)$$

$$w_0 - 2w_1 + w_2 = \left(\frac{l}{3}\right)^2 \frac{1}{E(5/6)^3 I_A} \left(-\frac{2}{3}Fl\right)$$

$$w_1 - 2w_2 + w_3 = \left(\frac{l}{3}\right)^2 \frac{1}{E(2/3)^3 I_A} \left(-\frac{1}{3}Fl\right)$$

由边界条件 $w_0=0, w_{-1}=w_1$ (因 $\left.\frac{dw}{dx}\right|_0 = \frac{w_1 - w_{-1}}{2h} = 0$), 解得自由端的挠度

$$w_l = w_3 = -0.548 \frac{Fl^3}{EI_A} \quad (\downarrow)$$

式中, $I_A = \frac{1}{12}bh_A^3$

第十三章 能量方法

知识要点

1. 弹性应变能

(1) 弹性应变能

外力作用在弹性体上,弹性体因变形而储存的能量。当弹性体承受的外力由零缓慢增至最终值,且忽略弹性体在变形过程中的其他能量损耗时,弹性体所储存的应变能等于外力所作的功。

(2) 杆件基本变形时的应变能

① 轴向拉伸(压缩)时的应变能

a. F_N 、 A 为常量时
$$V_\epsilon = \frac{F_N^2 l}{2EA}$$

b. F_N 、 A 为变量时
$$V_\epsilon = \int_l \frac{F_N^2(x) dx}{2EA(x)}$$

② 扭转时的应变能

a. T 、 I_p 为常量时
$$V_\epsilon = \frac{T^2 l}{2GI_p}$$

b. T 、 I_p 为变量时
$$V_\epsilon = \int_l \frac{T^2(x) dx}{2GI_p(x)}$$

③ 平面弯曲时的应变能

a. M 、 I 为常量时
$$V_\epsilon = \frac{M^2 l}{2EI}$$

b. M 、 I 为变量时
$$V_\epsilon = \int_l \frac{M^2(x) dx}{2EI(x)}$$

注意:① 应变能恒为正的标量,与坐标选择无关,在杆系结构中,每根杆可独立地选取其坐标,不要求各杆的坐标一致。

② 应变能为内力分量(F_N 、 T 、 M)的二次函数,故不能应用力

作用的叠加法。

③ 杆件的应变能仅与载荷的最终值有关,与加载的次序无关。

(3) 杆件组合变形时的应变能

在小变形情况下,轴力、扭矩和弯矩所引起的变形和位移都是独立的,它们只引起各自的变形和位移,在组合变形过程中,这些内力分量所作的功也都是独立的,故组合变形时弹性应变能等于各基本变形下应变能的代数和

$$V_e = \int_l \frac{F_N^2(x)dx}{2EA} + \int_l \frac{T^2(x)dx}{2GI_p} + \int_l \frac{M^2(x)dx}{2EI}$$

2. 卡氏定理

(1) 广义力与广义位移

① 广义力——用 F_i 代表一个力,也代表一个力偶,并可代表一对力或一对力偶。

② 广义位移——用 δ_i 代表一点的线位移,也代表一线段的角位移,并可代表两点之间的相对线位移或两线段间的相对角位移。

广义力与广义位移之间的相应关系:一个力相应的位移是该力作用点沿其作用线的方向线位移;一个力偶相应的位移是该力偶的作用面沿力偶转向的角位移;一对力的相应位移,是这一对力的两个作用点在力作用线上沿力的指向的相对线位移;一对力偶相应的位移是这一对力偶作用面沿力偶转向的相对角位移。

(2) 卡氏定理

弹性体(或弹性体系)的应变能对任一外力的一次偏微商,等于该力作用点沿力作用线方向的位移。

$$\delta_i = \frac{\partial V_e}{\partial F_i}$$

注意:① 卡氏定理只适用于符合叠加原理的线弹性材料在小变形下的情况。

② 在具体计算中,也可不必求出结构的应变能,如求桁架节

点位移,用

$$V_e = \sum \frac{F_{Ni}^2 l_i}{2EA_i}$$

$$\delta_i = \sum \left(\frac{F_{Ni} l_i}{EA_i} \cdot \frac{\partial F_{Ni}}{\partial F_i} \right)$$

求梁的位移用

$$V_e = \int_l \frac{M^2(x) dx}{2EI}$$

挠度

$$\delta_i = \int_l \left(\frac{M(x)}{EI} \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial F_i} \right) dx$$

转角

$$\theta_i = \int_l \left(\frac{M(x)}{EI} \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial M_i} \right) dx$$

求刚架或曲杆的位移用

$$V_e = \sum \int_l \frac{F_N^2(x) dx}{2EA} + \sum \int_l \frac{T^2(x) dx}{2GI_p} + \sum \int_l \frac{M^2(x) dx}{2EI}$$

$$\delta_i = \sum \int_l \left(\frac{F_N(x)}{EA} \cdot \frac{\partial F_N(x)}{\partial F_i} \right) dx + \sum \int_l \left(\frac{T(x)}{GI_p} \cdot \frac{\partial T(x)}{\partial F_i} \right) dx \\ + \sum \int_l \left(\frac{M(x)}{EI} \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial F_i} \right) dx$$

若所求位移处没有相应的力 F_i 作用,则可在其上施加一个与所求位移 δ_i 相应的虚载荷 F_0 ,在求得偏导数后,再令虚载荷为零,即可得所求位移 δ_i 。

3. 单位载荷法(莫尔积分)

(1) 用单位载荷法求位移

对于线弹性结构,欲求结构任一点沿任一方向的位移,则应在该点施加一与所求位移(方向)相应的单位载荷,所求位移

$$\delta = \sum \int_l \frac{F_N \bar{F}_N dx}{EA} + \sum \int_l \frac{T \bar{T} dx}{GI_p} + \sum \int_l \frac{M \bar{M} dx}{EI}$$

(2) 关于单位载荷法的讨论

① 适用于线弹性材料、小变形的结构,即载荷与位移成线性关系的结构。

② 单位载荷应与所求广义位移对应,即求线位移,单位载荷

应为数值等于1的力;求角位移,单位载荷应为数值等于1的力偶矩。

③ 公式适用于任意载荷作用下任意形状的结构,积分、求和遍及整个结构(式中忽略了弯曲剪力的影响)。

④ 位移 δ 的正值表示其方向(线位移的指向、角位移的转向)与所施加的单位载荷方向相同,负值表示相反。式中由真实力引起的内力分量(F_N 、 T 、 M)和由单位载荷引起的内力分量(\bar{F}_N 、 \bar{T} 、 \bar{M})的正负号规定同前。

(3) 用单位载荷法求位移的步骤

① 计算真实载荷下各构件的内力分量。

② 根据所求位移施加相应的单位载荷,并计算单位载荷作用下各构件的内力分量。

③ 建立方程,对整个结构逐项积分,求和。

4. 互等定理

(1) 功互等定理

力 F_1 在由 F_2 引起的 F_1 力作用点位移上所作的功,等于力 F_2 在由 F_1 引起的 F_2 力作用点位移上所作的功,即

$$F_1 \delta_{12} = F_2 \delta_{21}$$

(2) 位移互等定理

作用于2点处的力使1点处所产生的位移等于作用于1点处相同的力使2点处所产生的位移,即

$$\delta_{12} = \delta_{21}$$

(3) 关于互等定理的讨论

① 适用于线弹性材料、小变形情况下任意形状的结构,即力与位移成线性关系的结构。

② F_1 、 F_2 均为广义力, δ_{12} 、 δ_{21} 为广义位移。

③ 在互等定理中, F_1 、 F_2 可分别代表两个力系。

④ 在位移互等定理中,只要求 F_1 与 F_2 的数值相等,并不要求它们的量纲相同,所得结论也仅表示 δ_{12} 与 δ_{21} 的数值相等。

5. 力法及力法正则方程

(1) 力法

以多余反力为未知数求解超静定系统的方法。由于应用了单位载荷法和广义力及广义位移的概念,从而扩大了求解超静定结构的类型,并使变形相容方程(或补充方程)具有标准的形式。

(2) 用力法求解超静定结构的步骤

① 选取基本系统——基本系统可任意选取,但必须是静定且几何不变的。

② 变形相容条件——比较基本系统与超静定系统在多余约束处的变形,应用叠加原理和广义力、广义位移概念,列出标准形式的变形相容方程

$$\Delta_1 = \delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0$$

③ 列出力-变形关系——应用单位载荷法计算基本系统的柔度系数 δ_{11} 和位移 Δ_{1F} 。

④ 由补充方程求解多余反力——将力-变形关系代入变形相容方程,得补充方程,并求解多余反力。解得多余反力后,以后的计算(强度与刚度)均与静定结构相同。

(3) 关于力法的讨论

① 适用于线弹性材料、小变形情况下各种类型的超静定结构。

② 变形相容方程不一定总是零,应视具体问题而定。

③ 用力法解超静定结构的基本思路与基本变形中超静定系统的解法相同。

(4) 力法正则方程

设弹性结构为 n 次超静定,其多余力为 X_1, X_2, \dots, X_n ,则其变形相容方程为

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1F} = 0 \\ \vdots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nF} = 0 \end{cases}$$

或写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_{1F} \\ \vdots \\ \Delta_{nF} \end{bmatrix} = 0$$

(5) 关于正则方程的讨论

① 方程中 X_i 为多余的广义力, δ_{ij} 、 Δ_{iF} 为广义位移。

② 柔度系数 $\delta_{ij} = \delta_{ji} (i, j = 1, 2, 3, \cdots, n)$ 。

③ 变形相容方程不一定总为零, 应视具体问题而定。

④ 在具体解题中, 关键在于基本系统的选取, 而在运算中, 由正则方程的标准形式, 可直接计算柔度系数 δ_{ij} 及位移 Δ_{iF} , 代入正则方程中求解多余力 X_i 。

6. 图乘法

计算莫尔积分的图乘法

在等截面直梁情况下, 梁任一截面的广义位移为

$$\Delta = \int_l \frac{M(x)\bar{M}(x)dx}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot \omega \bar{M}_c$$

以上对莫尔积分的简化运算称为图乘法。上式积分符号下的内力函数也可以是轴力或扭矩。

有时 $M(x)$ 图为连续光滑曲线, 而 $\bar{M}(x)$ 图为折线, 这时应以折线的转折点为界, 把积分分成几段, 逐段使用图乘法, 然后求总和。

习题详解

13.1 两根圆截面直杆的材料相同, 尺寸如题 13.1 图(a)、(b)所示, 其中一根为等截面杆, 另一根为变截面杆。试比较两根杆件的应变能。

解 (a) 如题 13.1 图(a)所示。

$$V_e = \frac{F^2 l}{2EA} = \frac{2F^2 l}{\pi E d^2}$$

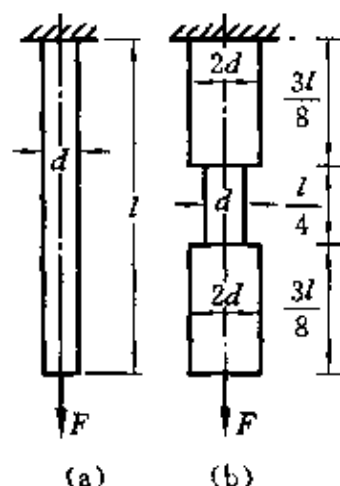
(b) 如题 13.1 图(b)所示。

$$V_e = 2 \times \frac{F^2(3/8)l}{2EA_1} + \frac{F^2(l/4)}{2EA_2}$$

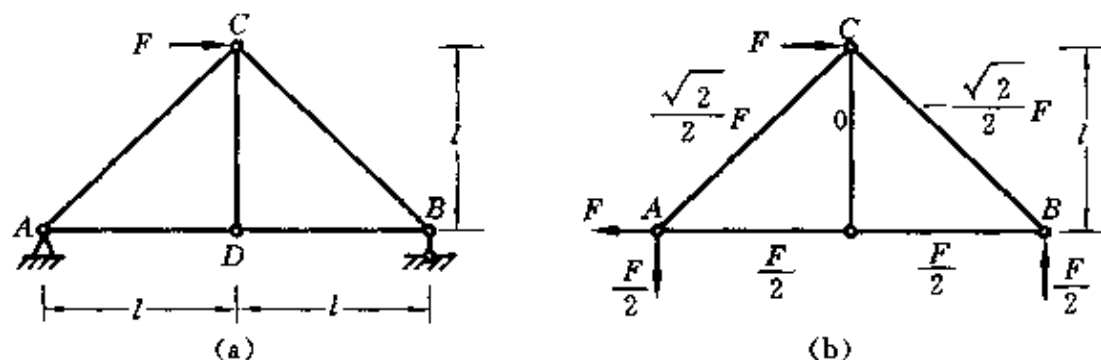
$$= \frac{3F^2l}{8E\pi d^2} + \frac{F^2l}{2E\pi d^2} = \frac{7F^2l}{8\pi E d^2}$$

13.2 题 13.2 图(a)所示桁架各杆的材料相同,截面面积相等。试求在 F 力作用下,桁架的应变能。

解 应用静力学平衡方程计算出桁架支座反力及各杆的轴力,并标示在题 13.2 图



题 13.1 图



题 13.2 图

(b)中。桁架的应变能为

$$V_e = \sum \frac{F_N^2 l}{2EA} = 2 \times \frac{(\sqrt{2}F/2)^2 \times \sqrt{2}l}{2EA} + 2 \times \frac{(F/2)^2 l}{2EA}$$

$$= 0.957 \frac{F^2 l}{EA}$$

13.3 计算题 13.3 图所示各杆的应变能。

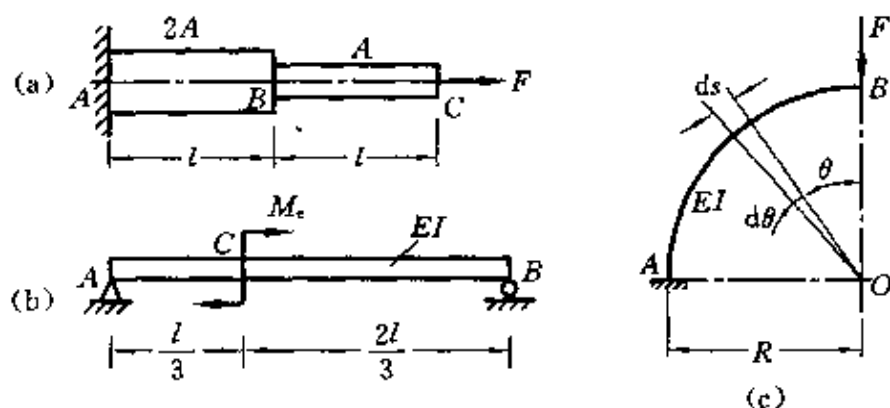
解 (a) 如题 13.3 图(a)所示。

AB 段与 BC 段的轴力都等于 F , 所以

$$V_e = \frac{F^2 l}{2E(2A)} + \frac{F^2 l}{2EA} = \frac{3F^2 l}{4EA}$$

(b) 如题 13.3 图(b)所示。

应用静力学平衡条件,可以计算出 A 支座的反力为 M_e/l , 方向



题 13.3 图

朝下。B 支座的反力与 A 支座的反力大小相等, 方向相反。

$$\begin{aligned}
 V_e &= \int_{AC} \frac{M^2(x)dx}{2EI} + \int_{CB} \frac{M^2(x)dx}{2EI} \\
 &= \int_0^{l/3} \frac{\left(\frac{M_e}{l}x\right)^2 dx}{2EI} + \int_0^{2l/3} \frac{\left(\frac{M_e}{l}x\right)^2 dx}{2EI} = \frac{M_e^2 l}{18EI}
 \end{aligned}$$

(c) 如题 13.3 图(c)所示。

夹角为 θ 的截面上, 弯矩

$$M(\theta) = FR \sin \theta$$

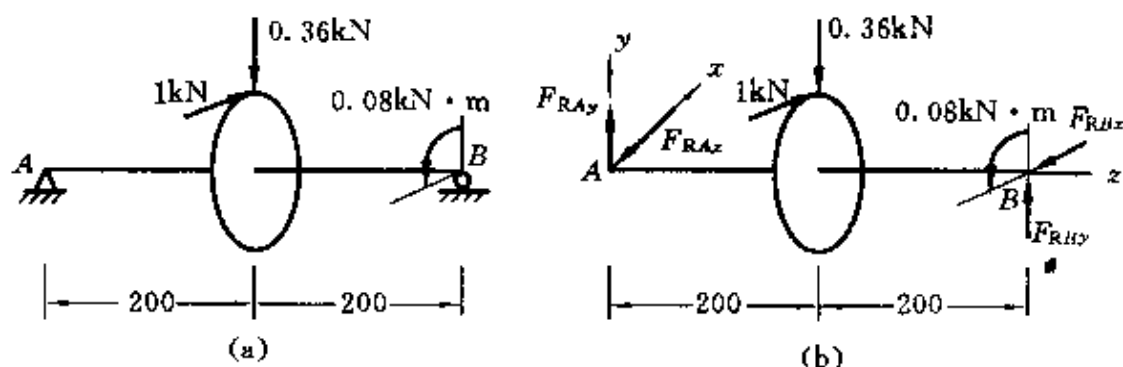
$$\text{应变能 } V_e = \int \frac{M^2(\theta)}{2EI} ds = \int_0^{\pi/2} \frac{(FR \sin \theta)^2 R d\theta}{2EI} = \frac{\pi F^2 R^3}{8EI}$$

13.4 传动轴受力情况如题 13.4 图(a)所示。轴的直径为 40 mm, 材料为 45 钢, $E=210 \text{ GPa}$, $G=80 \text{ GPa}$ 。试计算轴的应变能。

解 应用平衡条件解得支座反力分别为

$$F_{RAx} = F_{RBx} = 0.5 \text{ kN}, \quad F_{RAy} = F_{RBy} = 0.18 \text{ kN}$$

$$\begin{aligned}
 V_e &= \int_0^l \frac{T^2(x)}{2GI_p} dx + \int_0^l \frac{M^2(x)}{2EI} dx \\
 &= \left(\int_0^{0.2} \frac{(0.08 \times 10^3)^2 \times 32}{2 \times 80 \times 10^9 \times \pi \times 0.04^4} dx \right. \\
 &\quad \left. + 2 \int_0^{0.2} \frac{(0.18 \times 10^3 x)^2 \times 64}{2 \times 210 \times 10^9 \times (0.04)^4 \pi} dx \right)
 \end{aligned}$$



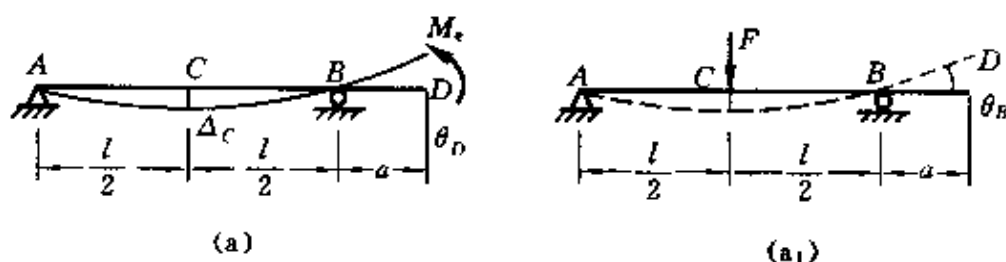
题 13.4 图

$$+ 2 \int_0^{0.2} \frac{(0.5 \times 10^3 x)^2 \times 64}{2 \times 210 \times (0.04)^4 \times 10^9 \times \pi} dx \Big) \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$= 60.4 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

13.5 (1) 在外伸梁的自由端作用力偶矩 M_e (题 13.5 图(a)), 试用互等定理, 并借助附录二, 求跨度中点 C 的挠度 Δ_c 。

(2) 用互等定理求解 13.6、13.7、13.8。



题 13.5 图

解 (1) 如题 13.5 图(a)所示。

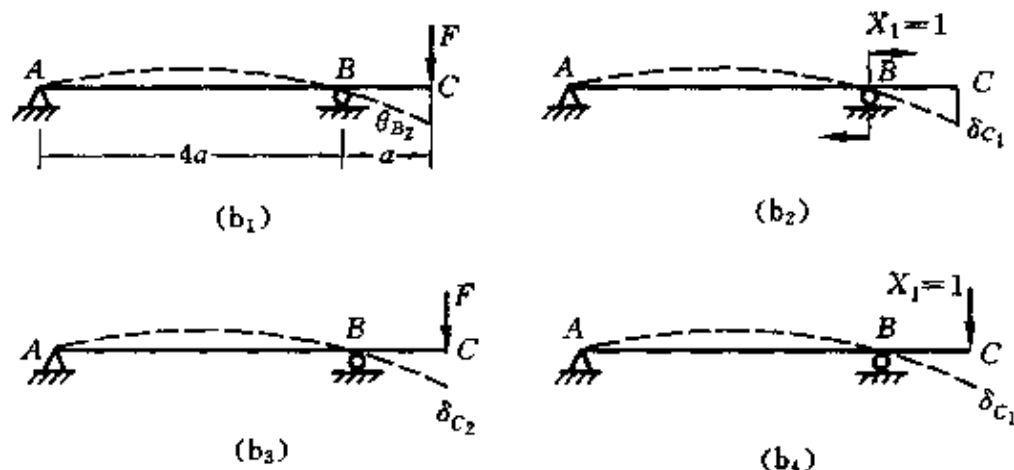
第一组力 M_e 在第二组力 F 的作用点产生的位移为 Δ_c (题 13.5 图(a)), 第二组力 F 在第一组力作用点 B 处产生的转角为 $\theta_B = \frac{Fl^2}{16EI}$ (查附录二, 题 13.5 图(a₁)), 根据功互等定理第一组力在第二组力引起的位移上所作的功, 等于第二组力在第一组力引起的位移上所作的功, 故有

$$M_e \times \frac{Fl^2}{16EI} = F \Delta_c$$

由上式得
$$\Delta_c = \frac{M_e l^2}{16EI}$$

(b) 用互等定理求解题 13.6、13.7、13.8。

(1) 解题 13.6 如题 13.5 图(b₁)所示。



续题 13.5 图

① 求 B 截面的转角

在 B 处加一单位力偶矩 $X_1=1$ 作为系统的第一组力(题 13.5 图(b₂)),它在第二组力 F 的作用点 C 处产生的挠度经查附录二可得

$$\delta_{C_1} = \frac{4a^2}{3EI}$$

F 力作为系统的第二组力,它在 B 处产生的转角为 θ_{B_2} (题 13.5 图(b₁)),第一组力在第二组力引起的位移上所作的功为 $X_1\theta_{B_2}$,第二组力在第一组力引起的位移上所作的功为 $F\delta_{C_1}$,根据功互等定理两者应相等,即

$$X_1\theta_{B_2} = F\delta_{C_1}$$

解上式得 B 截面的转角

$$\theta_{B_2} = \frac{4Fa^2}{3EI} (\circ)$$

② 求 C 点的挠度。

在题 13.5 图(b₄)的 C 处加一单位力 $X_1=1$ 作为第一组力,它

在 C 处产生的位移 δ_{C_1} 经查附录二得到

$$\delta_{C_1} = \frac{5a^3}{3EI}$$

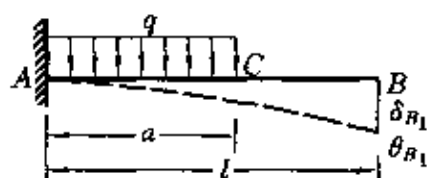
F 力作为第二组力, 它在 C 处引起的位移为 δ_{C_2} (题 13.5 图(b₃)), 根据功互等定理

$$F\delta_{C_1} = 1 \times \delta_{C_2}$$

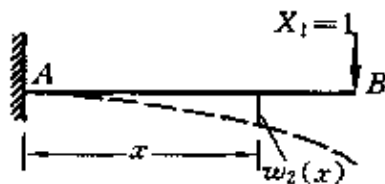
所以 C 点挠度为 $\delta_{C_2} = F\delta_{C_1} = \frac{5Fa^3}{3EI}$ (\downarrow)

(2) 解题 13.7

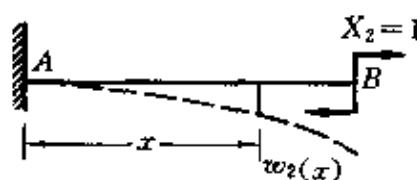
A. 如题 13.5 图(b₅)所示。



(b₅)



(b₆)



(b₇)

续题 13.5 图

① 求 B 点的挠度

把均布载荷看成系统的第一组力, 它在 B 点产生的位移为 δ_{B_1} , 如题 13.5 图(b₅)所示。在题 13.5 图(b₆)的 B 处作用一单位力 $X_1=1$, 作为系统的第二组力, 它在 x 截面引起的挠度为 $w_2(x)$, 查附录二得

$$w_2(x) = -\frac{x^2}{6EI}(3l-x) \quad (0 \leq x \leq a)$$

第二组力在第一组力引起的位移上作的功为 $X_1\delta_{B_1}$, 第一组力在第

二组力引起的位移上作的功为 $\int_0^a q w_2(x) dx$, 根据互等定理两者应相等, 即

$$X_1 \delta_{B_1} = \int_0^a q w_2(x) dx$$

解上式得题 13.5 图(b₅)中 B 点的挠度

$$\delta_{B_1} = \int_0^a \left[-\frac{q}{6EI} x^2 (3l - x) \right] dx = -\frac{qa^3}{24EI} (4l - a)$$

② 求 B 处的转角

把均布载荷看成系统的第一组力, 它在 B 点产生的角位移为 θ_{B_1} (题 13.5 图(b₅))。在 B 处作用一单位力偶矩 $X_2 = 1$, 作为系统的第二组力 (题 13.5 图(b₇)), 引起 x 截面的挠度为 $w_2(x)$, 查附录二得

$$w_2(x) = -\frac{x^2}{2EI} \quad (0 \leq x \leq a)$$

第一组力在第二组力引起的位移上作的功为 $\int_0^a q y_2(x) dx$, 第二组力在第一组力引起的位移上作的功为 $X_2 \theta_{B_1}$, 根据功互等定理二者应相等, 即

$$X_2 \theta_{B_1} = \int_0^a q w_2(x) dx$$

解上式得
$$\theta_{B_1} = \int_0^a \left(-\frac{q}{2EI} x^2 \right) dx = -\frac{qa^3}{6EI}$$

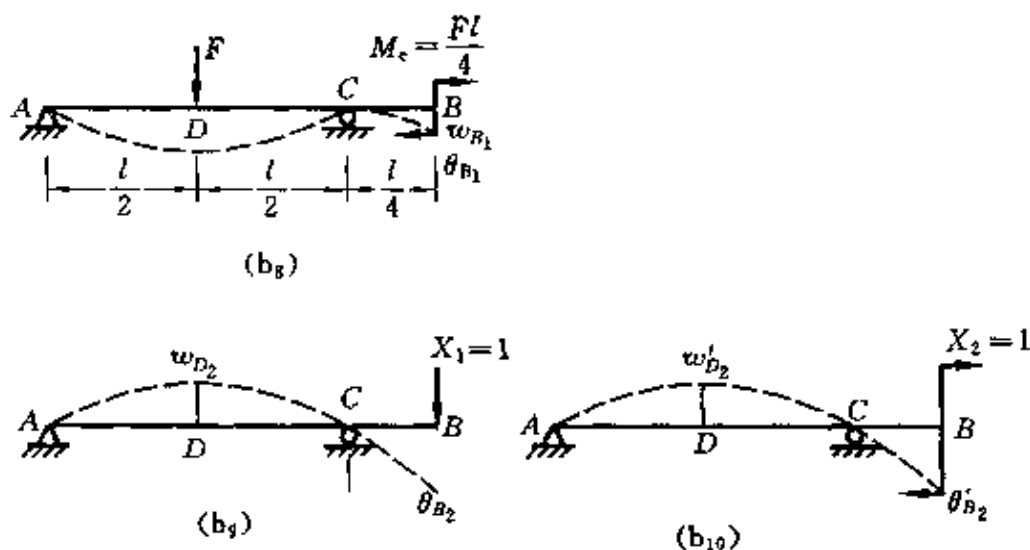
B. 如题 13.5 图(b₈)所示。

① 求 B 点的挠度

把 F 、 M_c 看成系统的第一组力, 在 B 点产生的位移为 w_{B_1} (题 13.5 图(b₈)), 在 B 处作用一单位力 $X_1 = 1$, 作为系统的第二组力 (题 13.5 图(b₉)), 在 D 点产生的挠度和 B 点产生的转角 (由计算或查附录二得到) 分别为

$$w_{D_2} = \frac{1 \times (l/4) \times (l/2)}{6EI} \left[l^2 - \left(\frac{l}{2} \right)^2 \right] = \frac{l^3}{64EI} \quad (\downarrow)$$

$$\theta_{B_2} = \frac{1 \times (l/4)}{6EI} \left(2l + \frac{3l}{4} \right) = \frac{11l^2}{96EI} \quad (\cup)$$



续题 13.5 图

第二组力在第一组力引起的位移上作的功为 $X_1 w_{B_1}$, 第一组力在第二组力引起的位移上作的功为 $(-F w_{D_2} + M_c \theta_{B_2})$, 根据功互等定理二者应相等, 即

$$X_1 w_{B_1} = -F w_{D_2} + M_c \theta_{B_2}$$

$$w_{B_1} = -\frac{Fl^3}{64EI} + \frac{Fl}{4} \times \frac{11l^2}{96EI}$$

解上式得 $w_{B_1} = \frac{5Fl^3}{384EI} (\downarrow)$

② 求 B 处的转角

把 F 、 M_c 看成系统的第一组力(题 13.5 图(b₈)), 在 B 点产生的角位移为 θ_{B_1} , 在 B 处作用一单位力偶矩 $X_2 = 1$, 作为系统的第二组力(题 13.5 图(b₁₀)), 在 D 点产生的挠度和 B 点产生的转角(由计算或查附录二得到)

$$w'_{D_2} = \frac{1 \times (l/2)}{6EI} \left[l^2 - \left(\frac{l}{2} \right)^2 \right] = \frac{l^2}{16EI}$$

$$\theta'_{B_2} = \frac{1}{3EI} \left(l + \frac{3l}{4} \right) = \frac{7l}{12EI} (\circlearrowleft)$$

第一组力在第二组力引起的位移上作的功为 $(-F w'_{D_2} + M_c \theta'_{B_2})$, 第二组力在第一组力引起的位移上作的功为 $X_2 \theta_{B_1}$, 根据功互等定

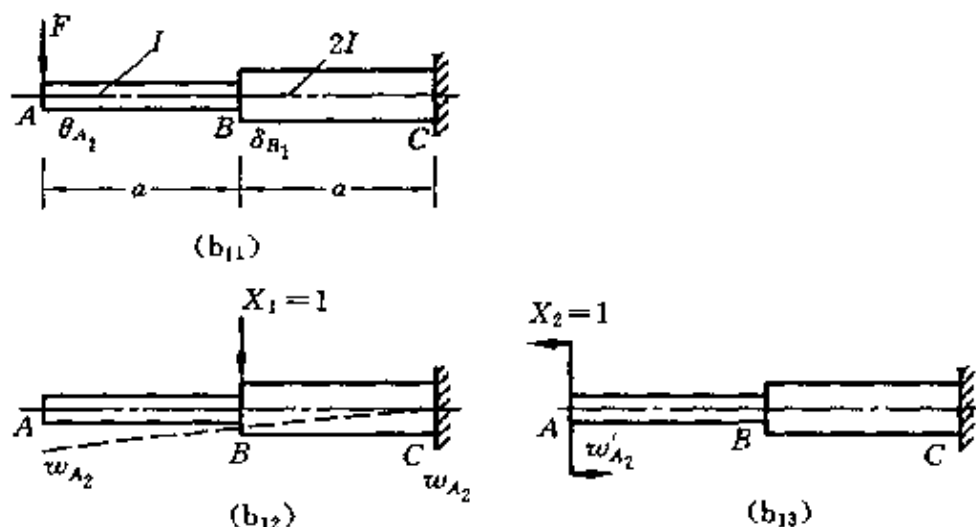
理两者应相等,即

$$X_1 \theta_{B_1} = -F w'_{D_2} + M_2 \theta_{B_2} = \frac{-Fl^2}{16EI} + \frac{Fl}{4} \times \frac{7l}{12EI}$$

解上式得 $\theta_{B_1} = \frac{Fl^2}{12EI} (\cup)$

(3) 解题 13.8

A. 如题 13.5 图(b₁₁)所示。



续题 13.5 图

① 求 B 点的挠度

F 作为系统的第一组力,在 B 处产生的位移为 δ_{B_1} ,如题 13.5 图(b₁₁)所示。在 B 处作用一单位力 X_1 ,作为第二组力,在 A 处产生的挠度为 w_{A_2} ,如题 13.5 图(b₁₂)所示。

$$w_{A_2} = \frac{1 \times a^3}{3 \times 2EI} + \frac{1 \times a^2}{2 \times 2EI} \times a = \frac{5a^3}{12EI}$$

第二组力在第一组力引起的位移上作的功为 $X_1 \delta_{B_1}$,第一组力在第二组力引起的位移上作的功为 $F w_{A_2}$,根据功互等定理两者应相等,即

$$F w_{A_2} = X_1 \delta_{B_1}$$

$$F \frac{5a^3}{12EI} = X_1 \delta_{B_1}$$

解上式得 B 截面的位移

$$\delta_{B_1} = \frac{5Fa^3}{12EI} (\downarrow)$$

② 求 A 截面的转角

F 作为系统的第一组力, 在 A 处产生的角位移为 θ_{A_1} 。在 A 处作用一单位力偶矩 X_2 , 作为第二组力, 在 A 处产生的挠度为 w'_{A_2} , 利用莫尔积分

$$w'_{A_2} = \sum \int \frac{M\bar{M}}{EI} dx = \int_0^a \frac{x}{EI} dx + \int_a^{2a} \frac{x}{2EI} dx = \frac{5a^2}{4EI}$$

第一组力在第二组力引起的位移上作的功为 Fw'_{A_2} , 第二组力在第一组力引起的位移上作的功为 $X_2\theta_{A_1}$, 根据功互等定理两者应相等, 即

$$F \frac{5a^2}{4EI} = X_2\theta_{A_1}$$

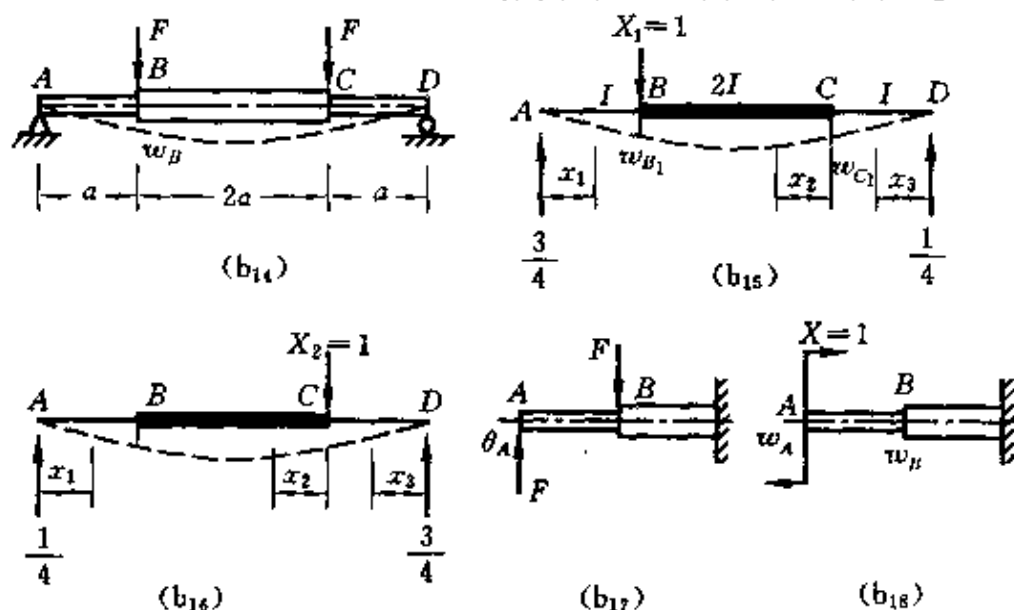
解得

$$\theta_{A_1} = \frac{5Fa^2}{4EI} (\circlearrowleft)$$

B. 如题 13.5 图(b₁₄)所示。

① 求 B 点挠度

题 13.5 图(b₁₄)中的外载荷作为第一组力, 在 B 点产生的挠度



续题 13.5 图

为 w_B 。在 B 点加单位力 $X_1=1$, 作为第二组力, 在 B 点产生挠度为 w_{B_1} , 在 C 点产生的挠度为 w_{C_1} , 如题 13.5 图(b₁₅)所示。

i. 求单位力 $X_1=1$ 作用在 B 点时在 B 点产生的挠度 w_{B_1} 根据题 13.5 图(b₁₅) (用莫尔积分)

AB 段: x_1 坐标原点在 A 点, 指向右

$$M = \frac{3}{4}x_1, \quad \bar{M} = \frac{3}{4}x_1 \quad (0 \leq x_1 \leq a)$$

BC 段: x_2 坐标原点在 C 点, 指向左

$$M = \frac{1}{4}(a + x_2), \quad \bar{M} = \frac{1}{4}(a + x_2) \quad (a \leq x_2 \leq 3a)$$

CD 段: x_3 坐标原点在 D 点, 指向左

$$M = \frac{1}{4}x_3, \quad \bar{M} = \frac{1}{4}x_3 \quad (0 \leq x_3 \leq a)$$

在单位力 $X_1=1$ 作用下 B 截面位移

$$\begin{aligned} w_{B_1} &= \frac{1}{EI} \left[\int_0^a \left(\frac{3}{4}x_1 \right)^2 dx_1 + \int_0^a \left(\frac{1}{4}x_3 \right)^2 dx_3 \right] \\ &\quad + \frac{1}{2EI} \int_0^{2a} \left[\frac{1}{4}(a + x_2) \right]^2 dx_2 \\ &= \frac{23a^3}{48EI} \end{aligned}$$

ii. 求单位力 $X_1=1$ 作用时在 B 点时, 在 C 点产生的挠度 w_{C_1} 根据题 13.5 图(b₁₅)、(b₁₆) (用莫尔积分)

AB 段: x_1 坐标原点在 A 点, 指向右

$$M = \frac{3}{4}x_1, \quad \bar{M} = \frac{1}{4}x_1 \quad (0 \leq x_1 \leq a)$$

BC 段: x_2 坐标原点在 C 点, 指向左

$$M = \frac{1}{4}(a + x_2) \quad (a \leq x_2 \leq 3a)$$

$$\bar{M} = \frac{3}{4}(a + x_2) - 1 \times x_2 = \frac{3}{4}a - \frac{1}{4}x_2$$

CD 段: x_3 坐标原点在 D 点, 指向左

$$M = \frac{1}{4}x_3, \quad \bar{M} = \frac{3}{4}x_3 \quad (0 \leq x_3 \leq a)$$

$$\begin{aligned} w_{C_1} &= \frac{1}{EI} \left[\int_0^a \left(\frac{3}{4}x_1 \right) \left(\frac{1}{4}x_1 \right) dx + \int_0^a \left(\frac{1}{4}x_3 \right) \left(\frac{3}{4}x_3 \right) dx_3 \right] \\ &\quad + \frac{1}{2EI} \left[\int_0^{2a} \frac{1}{4}(a+x_2) \left(\frac{3}{4}a - \frac{1}{4}x_2 \right) dx_2 \right] \\ &= \frac{17a^3}{48EI} \end{aligned}$$

由功的互等定理有

$$X_1 \times w_B = F(w_{B_1} + w_{C_1}) = F \times \left(\frac{23a^3}{48EI} + \frac{17a^3}{48EI} \right)$$

解上式得
$$w_B = \frac{5Fa^3}{6EI} \quad (\downarrow)$$

② 求 A 点转角

由于结构对称, 梁跨度中间截面转角为 0。取梁的一半视为悬臂梁, 则其自由端 A 的转角即为所求(续题 13.5 图(b₁₇))。

外载荷作为第一组力, 在 A 点产生转角为 θ_A , 在 A 点加单位力偶矩 $X=1$ 作为第二组力, 单位力偶在 A 点和 B 点产生挠度分别为 w_A, w_B (题 13.5 图(b₁₈))。由功的互等定理得

$$1 \times \theta_A = Fw_A - Fw_B \quad \text{①}$$

①式中的 w_A 为作用于 A 处的单位力偶在 A 点产生的挠度, 应用位移互等定理, A 点的单位力偶在 A 点产生的挠度在数值上等于 A 点的单位力在 A 点产生的转角, 即 $w_A = \frac{5a^2}{4EI} (\uparrow)$ (利用此题

(3)A②的计算结果 $\theta_{A_1} = \frac{5Fa^2}{4EI}$, 令 $F=1$)。

①式中的 w_B 为作用在 A 点的单位力偶在 B 点产生的挠度, 同样应用位移互等定理, 作用在 A 点的单位力偶在 B 点产生的挠度在数值上应该等于作用在 B 点的单位力在 A 点产生的转角, 查附录二可得

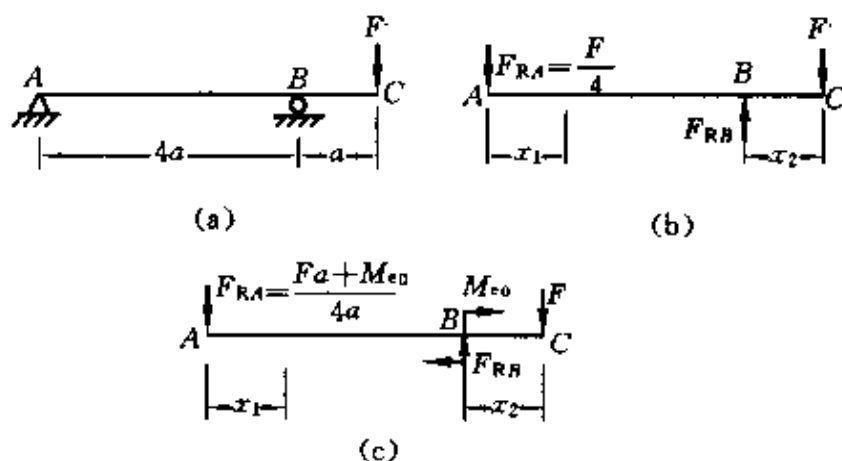
$$w_B = \frac{1 \times a^2}{2 \times (2EI)} = \frac{a^2}{4EI} \quad (\uparrow)$$

将 w_A, w_B 代入①式, 得

$$1 \times \theta_A = F \left(\frac{5a^2}{4EI} - \frac{a^2}{4EI} \right)$$

解上式得 $\theta_A = \frac{Fa^2}{EI} \quad (\cup)$

13.6 车床主轴如题 13.6 图(a)所示, 在转化为当量轴以后, 其抗弯刚度 EI 可以作为常量。试求在载荷 F 作用下, 截面 C 的挠度和前轴承 B 处的截面转角。



题 13.6 图

解 解法一 能量法(卡氏定理)

应用平衡条件, 解出 A 支座的反力 $F_{RA} = F/4$ (题 13.6 图(b)), C 截面挠度

$$\begin{aligned} w_C &= \frac{\partial V_e}{\partial F} = \frac{\partial}{\partial F} \left[\int_0^{4a} \frac{\left(-\frac{F}{4}x_1 \right)^2}{2EI} dx_1 + \int_0^a \frac{(-Fx_2)^2}{2EI} dx_2 \right] \\ &= \frac{5Fa^3}{3EI} \quad (\downarrow) \end{aligned}$$

欲求 B 截面的转角, 因该截面没有力偶矩作用, 所以加上一个虚力偶矩 M_{e0} , $M_{e0} = 0$ (题 13.6 图(c)), 这时 A 支座的反力 $F_{RA} = (Fa + M_{e0})/4a$, B 截面的转角

$$\begin{aligned}\theta_B = \frac{\partial V_i}{\partial M_{e0}} &= \frac{\partial}{\partial M_{e0}} \left[\int_0^{4a} \frac{\left(\frac{Fa + M_{e0}}{4a} x_1 \right)^2}{2EI} dx_1 + \int_0^a \frac{(Fx_2)^2}{2EI} dx_2 \right] \\ &= \int_0^{4a} \frac{\left(\frac{Fa + M_{e0}}{4a} x_1 \right) \times \frac{x_1}{4a}}{EI} dx_1\end{aligned}$$

令上式中 $M_{e0}=0$, 解得 B 截面转角

$$\theta_B = \frac{4Fa^2}{3EI} (\circ)$$

解法二 叠加法

C 截面的挠度等于将 BC 段视为 B 截面为固定端的悬臂梁, 其自由端 C 处作用集中力 F 时, C 的挠度 $w'_c = \frac{Fa^3}{3EI}$, 加上视 AB 为简支梁在 B 截面处作用集中力偶矩 $M_c = Fa$ 时, 使 B 截面处产生转角 $\frac{4Fa^2}{3EI}$ 而引起的 C 点的挠度

$$w''_c = \frac{4Fa^2}{3EI} \times a = \frac{4Fa^3}{3EI}$$

因此, C 点的挠度

$$w_c = w'_c + w''_c = \frac{5Fa^3}{3EI} (\downarrow)$$

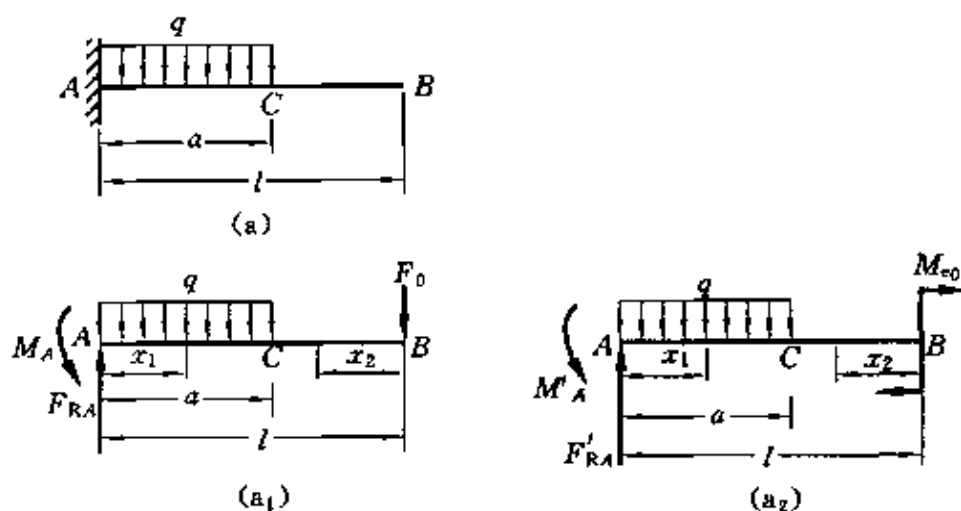
C 截面的转角就是视 AB 为简支梁在 B 支座处作用集中力偶矩 $M_c = Fa$ 时, 使 B 截面产生的转角 $\theta_B = \frac{4Fa^2}{3EI} (\circ)$ 。

13.7 试求题 13.7 图(a)、(b)所示各梁的截面 B 的挠度和转角。 EI 为常数。

解 (a) 如题 13.7 图(a)所示。

因 B 点无集中力作用, 故欲求该处挠度须在 B 点加一虚力 $F_0 = 0$, 如题 13.7 图(a₁)所示。 AC 段任一截面上的弯矩方程为

$$M(x_1) = F_{RA}x_1 - \frac{1}{2}qx_1^2 - M_A$$



题 13.7 图

CB 段任一截面上的弯矩方程为

$$M(x_2) = -F_0 x_2$$

由平衡条件可计算出

$$F_{RA} = F_0 + qa, \quad M_A = F_0 l + \frac{1}{2} qa^2$$

应用卡氏定理, B 截面的挠度

$$\begin{aligned} w_B &= \frac{\partial}{\partial F_0} \left\{ \frac{1}{2EI} \int_0^a \left[(F_0 + qa)x_1 - \frac{1}{2} qx_1^2 - F_0 l - \frac{1}{2} qa^2 \right]^2 dx_1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2EI} \int_0^{l-a} (-F_0 x_2)^2 dx_2 \right\} \\ &= \frac{qa^3}{24EI} (4l - a) \quad (\downarrow) \end{aligned}$$

欲求 B 截面的转角, 因该处无集中力偶矩作用, 所以须在此处加一虚力偶矩 $M_{e0} = 0$ (题 13.7 图(a)), 利用平衡条件可计算出固定端处的反力

$$F'_{RA} = qa, \quad M'_A = M_{e0} + \frac{1}{2} qa^2$$

所以 AC 段任一截面上的弯矩方程

$$M(x_1) = F'_{RA} x_1 - \frac{1}{2} qx_1^2 - M'_A$$

CB 段任一截面上的弯矩方程为

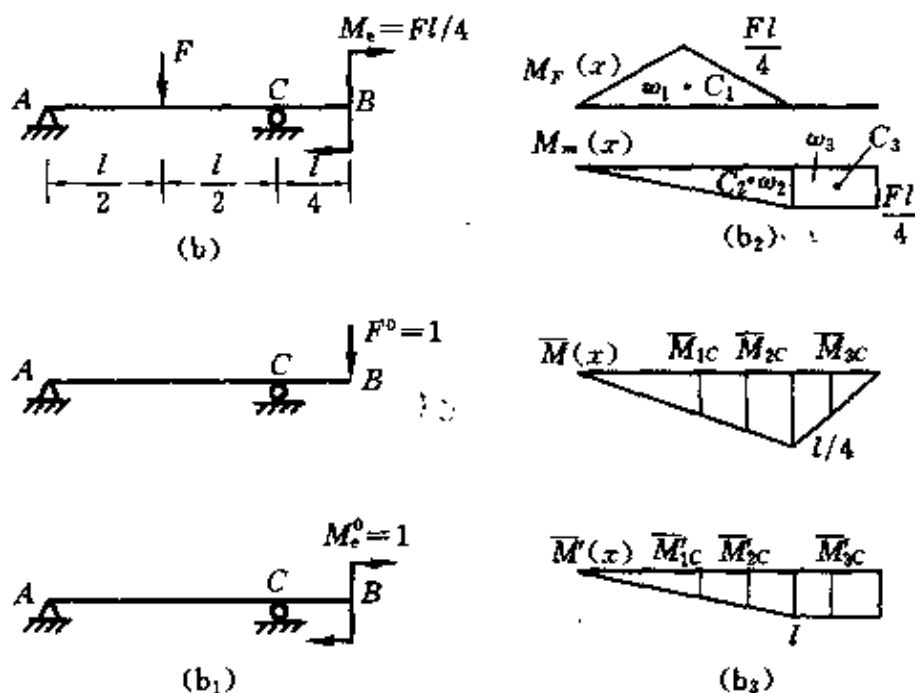
$$M(x_2) = -M_{e0}$$

应用卡氏定理, B 截面的转角为

$$\begin{aligned}\theta_B &= \frac{\partial}{\partial M_{e0}} \left\{ \frac{1}{2EI} \int_0^a \left[qax_1 - \frac{1}{2}qx_1^2 - M_{e0} - \frac{1}{2}qa^2 \right]^2 dx_1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2EI} \int_0^{l-a} M_{e0}^2 dx_2 \right\} \\ &= \frac{qa^3}{6EI} (\circ)\end{aligned}$$

在上述应用卡氏定理求解 B 截面的挠度和转角时, 应先对梁的变形能求偏微商后, 再积分。

(b) 如题 13.7 图(b)所示。此题用卡氏定理求解较繁琐, 用图乘法较简便。题 13.7 图(b₂)分别是载荷 F 和 M_e 单独作用(题 13.7 图(b))下的 $M_F(x)$ 图和 $M_m(x)$ 图, 题 13.7 图(b₃)分别是单位载荷 $F^0=1$ 和 $M_e^0=1$ 单独作用(题 13.7 图(b₁))在 B 点时的 $\bar{M}(x)$ 图和 $\bar{M}'(x)$ 图, 应用图乘法有

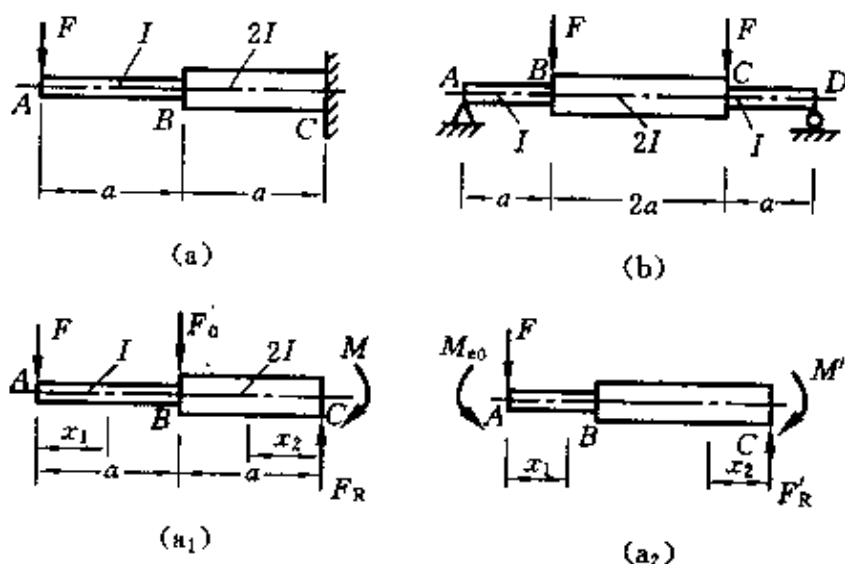


续题 13.7 图

$$\begin{aligned}
 w_B &= \frac{1}{EI} \sum \omega \bar{M}_C = \frac{1}{EI} (\omega_1 \bar{M}_{1C} + \omega_2 \bar{M}_{2C} + \omega_3 \bar{M}_{3C}) \\
 &= \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} \times \frac{Fl^2}{4} \times \frac{l}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{Fl}{4} \times l \times \frac{2}{3} \right. \\
 &\quad \left. \times \frac{l}{4} + \frac{Fl}{4} \times \frac{l}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{l}{4} \right) \\
 &= \frac{5Fl^3}{384EI} (\downarrow)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \theta_B &= \frac{1}{EI} \sum \omega \bar{M}'_C = \frac{1}{EI} (\omega_1 \bar{M}'_{1C} + \omega_2 \bar{M}'_{2C} + \omega_3 \bar{M}'_{3C}) \\
 &= \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} \times l \times \frac{Fl}{4} \times \frac{l}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{Fl}{4} \times l \times \frac{2}{3} l \right. \\
 &\quad \left. + \frac{Fl}{4} \times \frac{l}{4} \times l \right) \\
 &= \frac{Fl^2}{12EI} (\cup)
 \end{aligned}$$

13.8 题13.8图所示为变截面梁,试求在 F 力作用下截面 B 的竖向位移和截面 A 的转角。



题13.8图

解 (a) 如题13.8图(a)所示。
求 B 截面的竖向位移

在 B 处加一虚力 $F_0=0$, 应用平衡条件计算出 C 处的反力 (题 13.8 图(a₁))

$$M = 2Fa + F_0a, \quad F_R = F + F_0$$

应用卡氏定理

$$\begin{aligned} w_B &= \frac{\partial V_e}{\partial F_0} \\ &= \frac{\partial}{\partial F_0} \left[\int_0^a \frac{(-Fx_1)^2}{2EI} dx_1 + \int_0^a \frac{[(F+F_0)x_2 - (2Fa + F_0a)]^2}{2E \times 2I} dx_2 \right] \\ &= \int_0^a \frac{[(F+F_0)x_2 - (2Fa + F_0a)](x_2 - a)}{2EI} dx_2 \end{aligned}$$

令上式中的 $F_0=0$, 得 B 截面的竖向位移

$$w_B = \frac{5Fa^3}{12EI} (\downarrow)$$

求 A 截面的转角

在 A 处加一个虚力偶矩 M_{e0} , C 截面处的反力可应用平衡条件确定 (题 13.8(a₂))

$$F_{R'} = F, \quad M' = 2Fa + M_{e0}$$

应用卡氏定理得 A 截面的转角

$$\begin{aligned} \theta_A &= \frac{\partial V_e}{\partial M_{e0}} \\ &= \frac{\partial}{\partial M_{e0}} \left[\int_0^a \frac{(-Fx_1 - M_{e0})^2}{2EI} dx_1 + \int_0^a \frac{(Fx_2 - 2Fa - M_{e0})^2}{2E \times 2I} dx_2 \right] \\ &= \int_0^a \frac{(-Fx_1 - M_{e0})(-1)}{EI} dx + \int_0^a \frac{(Fx_2 - 2Fa - M_{e0})(-1)}{2EI} dx_2 \end{aligned}$$

令上式中的 $M_{e0}=0$, 得 A 截面的转角

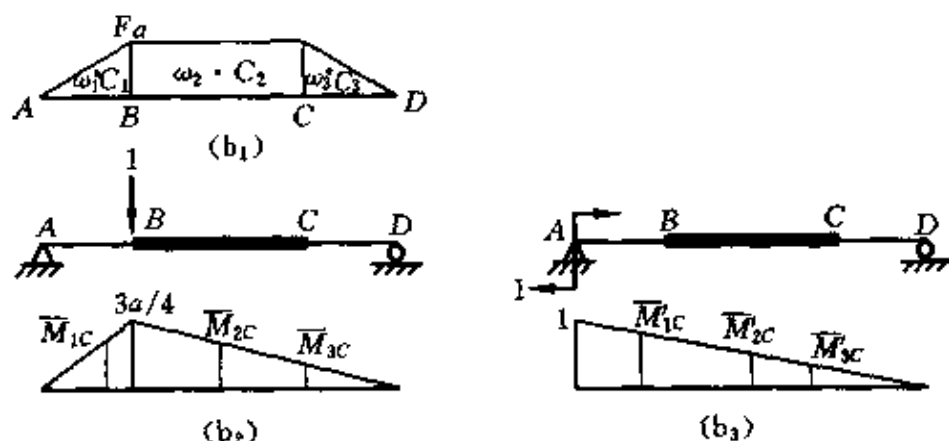
$$\theta_A = \frac{5Fa^2}{4EI} (\circlearrowleft)$$

(b) 如题 13.8 图(b)所示。

用图乘法

题 13.8 图(b₁)是载荷弯矩图, 题 13.8 图(b₂)、(b₃)分别是单

位载荷 $F^0=1$ 、 $M_e^0=1$ 的弯矩图。



续题 13.8 图

应用图乘法得 B 截面的竖向位移和 A 截面的转角

$$\begin{aligned}
 w_B &= \sum \frac{\omega \bar{M}_C}{EI} = \frac{1}{EI} \times \frac{1}{2} Fa^2 \times \frac{a}{2} + \frac{1}{2EI} \times 2Fa^2 \times \frac{a}{2} \\
 &\quad + \frac{1}{EI} \times \frac{1}{2} Fa^2 \times \frac{a}{6} \\
 &= \frac{5Fa}{6EI} (\downarrow) \\
 \theta_A &= \sum \frac{\omega \bar{M}'_C}{EI} = \frac{1}{EI} \times \frac{1}{2} Fa^2 \times \frac{5}{6} + \frac{1}{2EI} \times 2Fa^2 \times \frac{1}{2} \\
 &\quad + \frac{1}{EI} \times \frac{1}{2} Fa^2 \times \frac{1}{6} \\
 &= \frac{Fa^2}{EI} (\circlearrowleft)
 \end{aligned}$$

13.9 题 13.9 图(a)、(b)、(c)所示刚架的各杆的 EI 皆相等，试求截面 A 、 B 的位移和截面 C 的转角。

解 (a) 如题 13.9 图(a)所示。

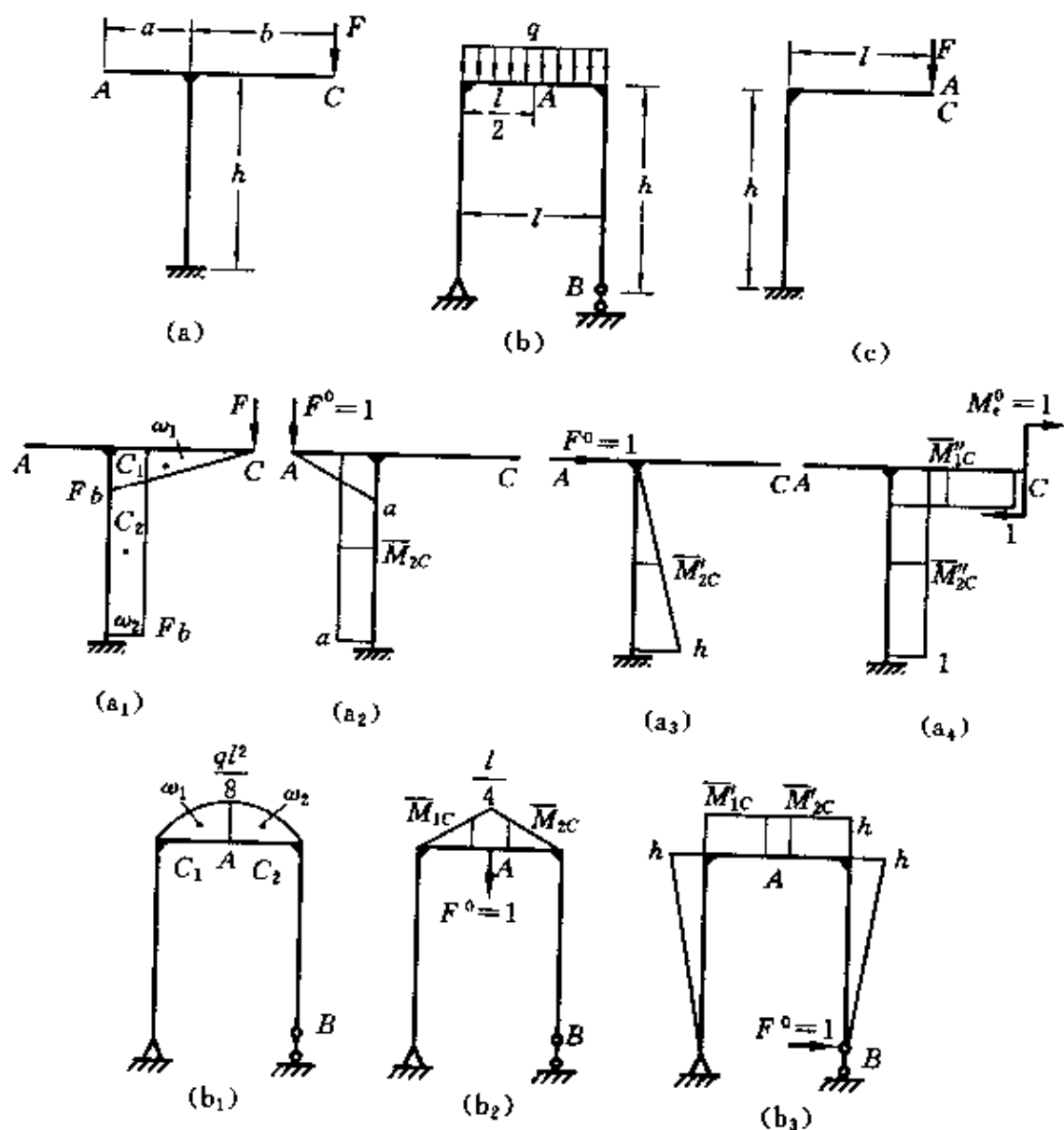
用图乘法

题 13.9 图(a₁)是载荷弯矩图，题 13.9 图(a₂)、(a₃)是单位力 $F_0=1$ 的弯矩图，题 13.9 图(a₄)是单位力偶矩 $M_e^0=1$ 的弯矩图。

$$w_A = \frac{1}{EI} \sum \omega \bar{M}_C = \frac{1}{EI} \omega_2 \bar{M}_{2C} = \frac{Fbha}{EI} (\uparrow)$$

$$x_A = \frac{1}{EI} \sum \omega \bar{M}'_C = \frac{1}{EI} \omega_2 \bar{M}_{2C} = \frac{Fbh^2}{2EI} (\rightarrow)$$

$$\begin{aligned} \theta_C &= \frac{1}{EI} \sum \omega \bar{M}''_C = \omega_1 \bar{M}''_{1C} + \omega_2 \bar{M}''_{2C} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} Fb^2 + Fbh \right) \\ &= \frac{Fb}{2EI} (b + 2h) (\curvearrowright) \end{aligned}$$



题 13.9 图

(b) 如题 13.9 图(b)所示。

用图乘法

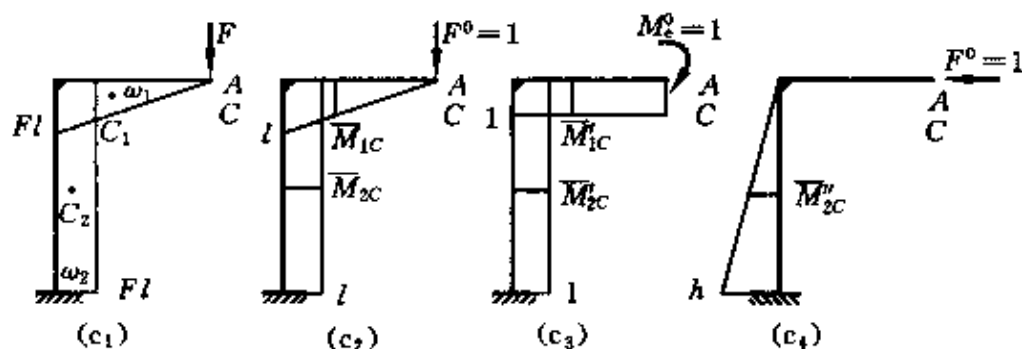
题 13.9 图(b₁)是载荷弯矩图,题 13.9 图(b₂)、(b₃)是单位载荷弯矩图。

应用图乘法,得 A、B 点的位移

$$\begin{aligned} w_{Ay} &= \frac{1}{EI} \sum \omega_1 \bar{M}_{C1} = \frac{1}{EI} \left(\frac{2}{3} \times \frac{l}{2} \times \frac{1}{8} ql^2 \times \frac{5}{8} \times \frac{l}{4} \right) \times 2 \\ &= \frac{5ql^4}{384EI} (\downarrow) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_{Bx} &= \frac{1}{EI} \sum \omega \bar{M}'_C = \frac{1}{EI} \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{8} ql^2 \times \frac{l}{2} \times h \right) \times 2 \\ &= \frac{ql^3 h}{12EI} (\rightarrow) \end{aligned}$$

(c) 如题 13.9 图(c)所示。



续题 13.9 图

用图乘法

题 13.9 图(c₁)是载荷弯矩图,题 13.9 图(c₂)、(c₄)是单位载荷 $F^0=1$ 的弯矩图,题 13.9 图(c₃)是单位载荷 $M^0=1$ 的弯矩图。

应用图乘法可得 A、C 截面的位移和转角

$$\begin{aligned} w_{Ay} &= \frac{1}{EI} \sum \omega \bar{M}_C = \omega_1 \bar{M}_{1C} + \omega_2 \bar{M}_{2C} \\ &= \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} Fl^2 \times \frac{2}{3} l + Fl \times h \times l \right) = \frac{Fl^2(l+3h)}{3EI} (\downarrow) \end{aligned}$$

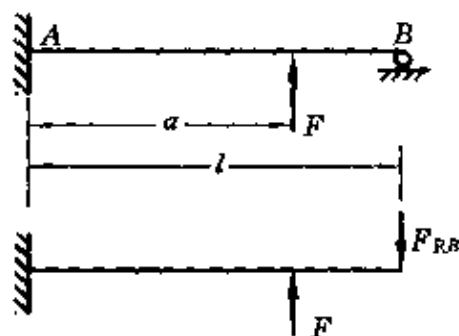
$$\begin{aligned} \theta_C &= \frac{1}{EI} \sum \omega \bar{M}_C = \omega_1 \bar{M}'_{1C} + \omega_2 \bar{M}'_{2C} \\ &= \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} Fl^2 \times 1 + Fl \times h \times 1 \right) = \frac{Fl(l+2h)}{2EI} (\circlearrowleft) \end{aligned}$$

$$w_{Ax} = \frac{1}{EI} \sum w_2 \bar{M}_{2C}'' = -\frac{Flh^2}{2EI} (\rightarrow)$$

w_{Ax} 为负值, 表明其方向与单位载荷 F^0 的方向相反。

13.10 用卡氏定理理解例 13.4 (文献 1 图 13.11(a))。

解 如题 13.10 图所示。工件简化为超静定梁, 求解时解除支座 B, 代之以未知反力 F_{RB} , 使工件变为在 F 及 F_{RB} 作用下静定的悬臂梁, 其弯曲应变能为



题 13.10 图

$$V_e = \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{3} F^2 a^3 - \frac{1}{3} F F_{RB} a^2 (3l - a) + \frac{1}{3} F_{RB}^2 l^3 \right]$$

因 B 端为铰支座, 其垂直位移为零, 根据卡氏定理, 有

$$\frac{\partial V_e}{\partial F_{RB}} = 0 \quad (1)$$

以 V_e 代入上式后解出

$$F_{RB} = \frac{Fa^2}{2l^3} (3l - a)$$

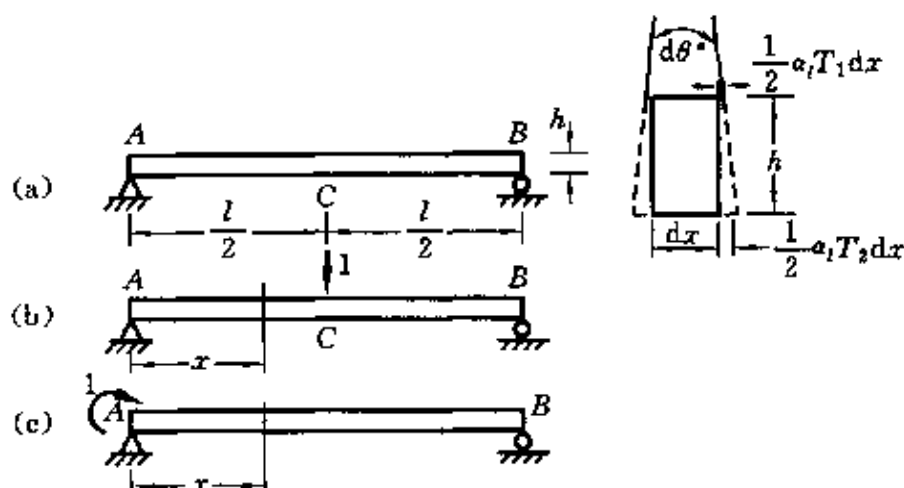
值得注意的是, ①式是应变能为最小值的极值条件。可见, 超静定结构多余未知力的数值恰好使应变能为最小值。这就是通常所说的最小功原理。

13.11 如题 13.11 图(a)所示, 跨度为 l 的简支梁截面高度为 h , 设温度沿梁的长度不变, 但沿梁截面高度 h 按线性规律变化。若梁顶面的温度为 T_1 , 底面的温度为 T_2 , 且 $T_2 > T_1$, 试求梁在跨度中点的挠度和左端截面的转角。

解 由于温度沿截面高度按线性规律变化, 横截面将仍然保持为平面。取长为 dx 的微段, 其两端截面的相对转角应为

$$d\theta = \frac{\alpha_t (T_2 - T_1)}{h} dx$$

式中, α_t 为材料的线膨胀系数。



题 13.11 图

为了求出跨度中点的挠度,以单位力作用于跨度中点(题 13.11 图(b)),这时梁截面上的弯矩为

$$\bar{M}(x) = \frac{1}{2}x$$

设跨度中点因温度影响而引起的挠度为 Δ_c 。把温度位移作为虚位移,加于题 13.11 图(b)所示的平衡位置。根据虚功原理,有

$$1 \times \Delta_c = \int \bar{M}(x) d\theta^*$$

$$\int \bar{M}(x) d\theta^* = 2 \int_0^{l/2} \frac{x}{2} \frac{\alpha_l(T_2 - T_1)}{h} dx = \frac{\alpha_l(T_2 - T_1)l^2}{8h}$$

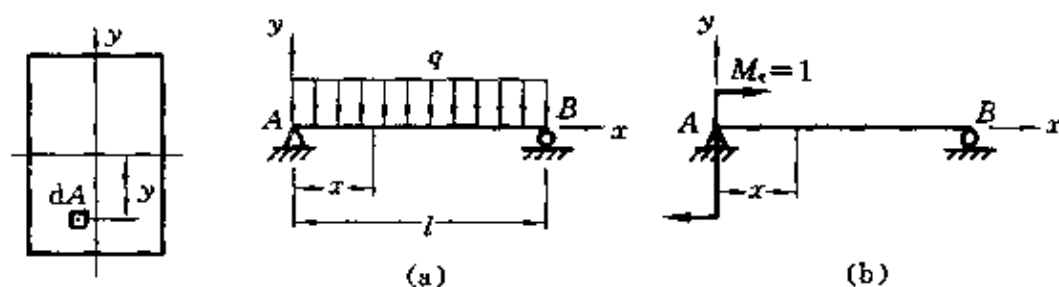
因为 $T_2 > T_1$, Δ_c 为正,表明单位力在 Δ_c 上作的功为正,亦即 Δ_c 与单位力的方向相同。

计算梁左端截面的转角时,在左端作用单位力偶矩如题 13.11 图(c)所示。这时 $\bar{M}(x) = 1 - \frac{x}{l}$, 设梁的左端截面因温度影响而引起的转角为 θ_A , 仍以温度位移作为虚位移加于题 13.11 图(c)所示情况上。由虚功原理,有

$$\begin{aligned} \theta_A &= \int \bar{M}(x) d\theta^* = \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right) \frac{\alpha_l(T_2 - T_1)}{h} dx \\ &= \frac{\alpha_l(T_2 - T_1)l}{2h} \end{aligned}$$

θ_A 为正表示它与单位力偶矩的方向一致。

13.12 如题 13.12 图(a)所示,在简支梁的整个跨度 l 内,作用均布载荷 q 。材料的应力-应变关系为 $\sigma = C \sqrt{\varepsilon}$ 。式中 C 为常量, σ 与 ε 皆取绝对值。试求梁的端截面的转角。



题 13.12 图

解 $\sigma = C \sqrt{\varepsilon} = C \sqrt{y/\rho}$

设梁任一截面上的弯矩为 M , 该截面上距中心轴为 y 的一点应力为 σ , 包含这一点取微面积 dA , 根据平衡条件有

$$M = \int_A y \sigma dA = C \sqrt{1/\rho} \int_A y^{3/2} dA$$

令
$$I^* = \int_A y^{3/2} dA \quad (1)$$

则有
$$\frac{1}{\rho} = \frac{M^2}{(CI^*)^2} = \frac{d\theta}{dx} \quad (2)$$

任一 x 截面上由于载荷 q 作用产生的弯矩(题 13.12 图(a))

$$M(x) = \frac{1}{2}qlx - \frac{1}{2}qx^2 \quad (3)$$

由②、③式,得

$$d\theta = \frac{1}{\rho} dx = \frac{M^2 dx}{(CI^*)^2} = \frac{q^2 (lx - x^2)^2 dx}{4(CI^*)^2} \quad (4)$$

在 A 截面加上一单位力偶矩 $M_e = 1$, 单位载荷作用下, 在 x 截面上产生的弯矩(题 13.12 图(b))为

$$\bar{M}(x) = 1 - x/l \quad (5)$$

梁的端面 A 的转角

$$\begin{aligned}
 \theta_A &= \int_0^l \bar{M}(x) d\theta = \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right) \frac{q^2(lx - x^2)^2}{4(CI^*)^2} dx \\
 &= \int_0^l \frac{q^2(l^3x^2 - 3l^2x^3 + 3lx^4 - x^5)}{4(CI^*)^2} dx \\
 &= \frac{q^2}{4(CI^*)^2 l} \times \frac{l^6}{60} = \frac{q^2 l^5}{240(CI^*)^2}
 \end{aligned}$$

13.13 在例13.9中,若材料的应力-应变关系为 $\sigma = C \sqrt{\epsilon}$ 。式中 C 为常量, σ 与 ϵ 皆取绝对值。试求各杆的内力。

解 如题13.13图所示,设 A 点垂直位移为 v ,由此引起杆1和杆2的伸长分别为

$$\Delta l_1 = v, \quad \Delta l_2 = v \cos \alpha$$

由应力-应变关系

$$\sigma_1 = C \sqrt{\epsilon_1} = C \sqrt{\frac{\Delta l_1}{l}} = \frac{N_1}{A}$$

$$\sigma_2 = C \sqrt{\epsilon_2} = C \sqrt{\frac{\Delta l_2}{l_2}} = C \sqrt{\frac{v \cos \alpha}{l / \cos \alpha}} = C \sqrt{v / l \cos \alpha} = \frac{N_2}{A}$$

可求出三杆的内力分别为

$$F_{N1} = CA \sqrt{v/l}$$

$$F_{N2} = F_{N3} = CA \sqrt{v/l \cos \alpha} \quad (1)$$

设节点 A 有一垂直虚位移 δv , 对于这一虚位移 δv , 外力虚功是 $F \delta v$, 杆1因虚位移 δv 引起伸长是 $(\Delta l_1)^* = \delta v$, 杆2和杆3的伸长是

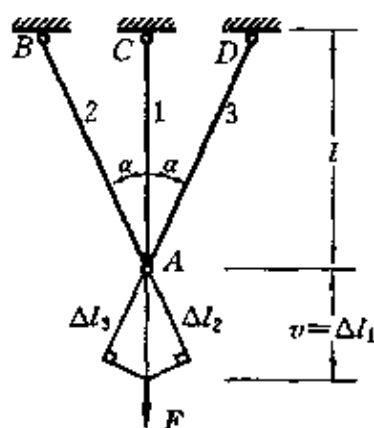
$$(\Delta l_2)^* = \delta v \cos \alpha$$

杆1的内力虚功为

$$\int_l F_{N1} d(\Delta l_1)^* = F_{N1} \int_l d(\Delta l_1)^* = F_{N1} (\Delta l_1)^* = CA \sqrt{v/l} \delta v$$

同理可求出杆2和杆3的内力虚功为

$$F_{N2} (\Delta l_2)^* = F_{N3} (\Delta l_3)^* = CA \sqrt{v/l} \delta v \cos^2 \alpha$$



题13.13图

杆系总的内力虚功为

$$F_{N1}(\Delta l_1)^* + 2F_{N2}(\Delta l_2)^* = CA \sqrt{v/l} \delta v + 2CA \sqrt{v/l} \delta v \cos^2 \alpha$$

由虚功原理, 内力虚功等于外力虚功, 所以有

$$CA \sqrt{v/l} \delta v + 2CA \sqrt{v/l} \delta v \cos^2 \alpha = F \delta v$$

消去 δv , 可将上式写成

$$\sqrt{v/l} = \frac{F}{CA(1 + 2\cos^2 \alpha)} \quad (2)$$

将②式代回①式, 可求出

$$F_{N1} = \frac{F}{1 + 2\cos^2 \alpha}, \quad F_{N2} = F_{N3} = \frac{F \cos \alpha}{1 + 2\cos^2 \alpha}$$

13.14 如题 13.14 图(a)、(b)所示, 刚架各杆的材料相同, 但截面尺寸不一, 所以抗弯刚度 EI 不同。试求在 F 力作用下, 截面 A 的位移和转角。

解 (a) 如题 13.14 图(a)所示。

题 13.14 图(a₁)是载荷 F 作用下的弯矩 $M(x)$ 图, 题 13.14 图(a₂)和题 13.14 图(a₃)分别是单位载荷 $F^0=1$ 和 $M_c^0=1$ 单独作用下的弯矩 $\bar{M}(x)$ 和 $\bar{M}'(x)$ 图, 应用图乘法可得 A 截面的位移和转角

$$w_{Ax} = \frac{\omega \bar{M}_c}{EI} = \frac{1}{EI_2} \left(-\frac{1}{2} l \times \frac{Fl}{4} \times h \right) = -\frac{Fl^2 h}{8EI_2} (\leftarrow)$$

$$\theta_A = \frac{\omega \bar{M}'_c}{EI} = \frac{1}{EI_2} \left(\frac{1}{2} \times l \times \frac{Fl}{4} \times \frac{1}{2} \right) = \frac{Fl^2}{16EI_2} (\cup)$$

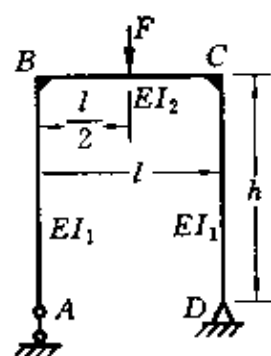
(b) 如题 13.14 图(b)所示。

题 13.14 图(b₁)是载荷 F 作用下的弯矩 $M(x)$ 图, 题 13.14 图(b₂)和题 13.14 图(b₃)分别是单位载荷 $F^0=1$ 和 $M_c^0=1$ 单独作用下的弯矩 $\bar{M}(x)$ 和 $\bar{M}'(x)$ 图, 应用图乘法可确定 A 截面的位移和转角

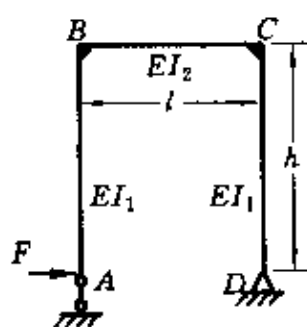
$$\begin{aligned} w_{Ax} &= \sum \frac{\omega \bar{M}_c}{EI} = \frac{\omega_1 \bar{M}_{1c}}{EI_1} \times 2 + \frac{\omega_2 \bar{M}_{2c}}{EI_2} \\ &= \frac{2}{EI_1} \left(\frac{1}{2} F h^2 \times \frac{2}{3} h \right) + \frac{1}{EI_2} (F h^2 l) \end{aligned}$$

$$= \frac{Fh^2}{3E} \left(\frac{2h}{I_1} + \frac{3l}{I_2} \right) (\rightarrow)$$

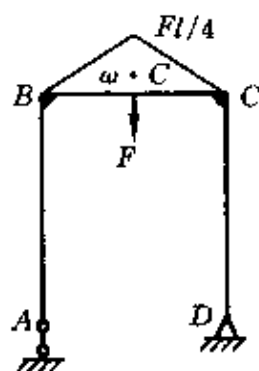
$$\begin{aligned} \theta_A &= \sum \frac{\omega \bar{M}'_C}{EI} = \frac{\omega_1 \bar{M}'_{1C}}{EI_1} + \frac{\omega_2 \bar{M}'_{2C}}{EI_2} \\ &= \frac{1}{EI_1} \left(\frac{1}{2} Fh^2 \times 1 \right) + \frac{1}{EI_2} \left(Fhl \times \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{Fh}{2E} \left(\frac{h}{I_1} + \frac{l}{I_2} \right) (\circ) \end{aligned}$$



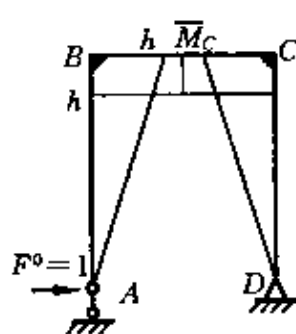
(a)



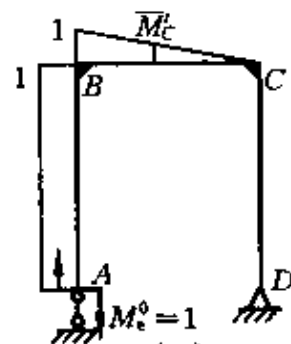
(b)



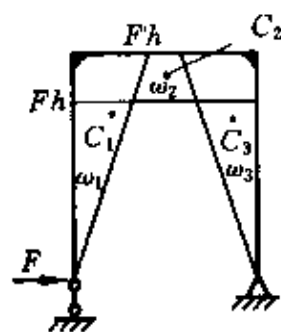
(a₁)



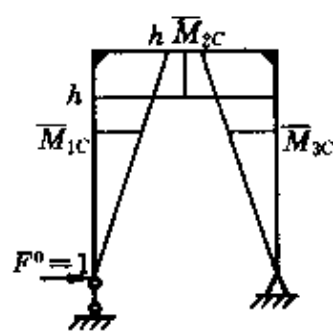
(a₂)



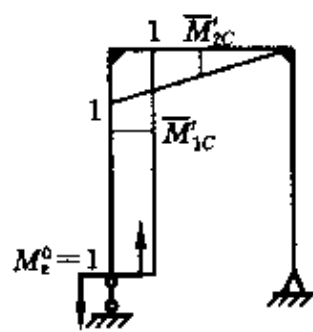
(a₃)



(b₁)



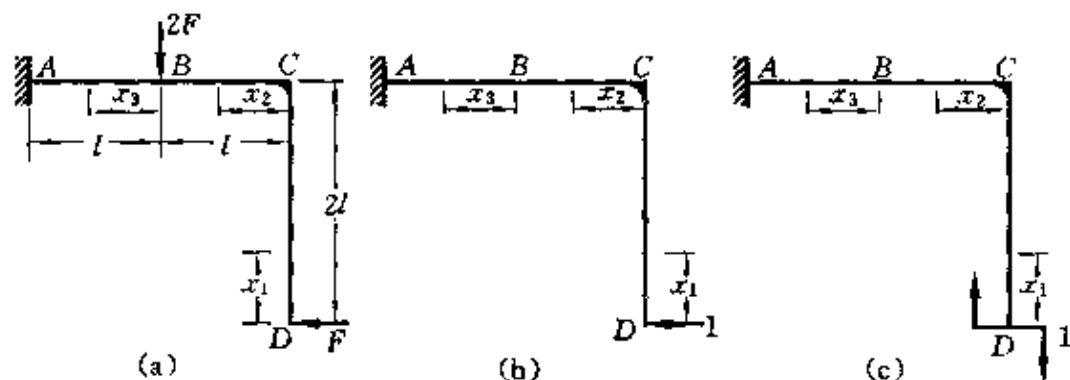
(b₂)



(b₃)

题 13.14 图

13.15 已知题 13.15 图(a)所示刚架 AC 和 CD 两部分的 $I = 3 \times 10^3 \text{ cm}^4$, $E = 200 \text{ GPa}$ 。试求截面 D 的水平位移和转角。 $F = 10 \text{ kN}$, $l = 1 \text{ m}$ 。



题 13.15 图

解 应用单位载荷法,应先分别写出载荷作用下的弯矩方程 $M(x)$ (题 13.15 图(a)) 和单位载荷 $F^0 = 1$, $M^0 = 1$ 作用下的弯矩方程 $\bar{M}(x)$ 和 $\bar{M}'(x)$ (题 13.15 图(b)、(c))。

DC 段

$$M_1(x_1) = Fx_1, \quad \bar{M}_1(x_1) = x_1, \quad \bar{M}'_1(x_1) = 1$$

CB 段

$$M_2(x_2) = 2Fl, \quad \bar{M}_2(x_2) = 2l, \quad \bar{M}'_2(x_2) = 1$$

BA 段

$$M_3(x_3) = 2Fl + 2Fx_3, \quad \bar{M}_3(x_3) = 2l, \quad \bar{M}'_3(x_3) = 1$$

$$x_D = \sum \int \frac{\bar{M}(x)M(x)}{EI} dx$$

$$= \frac{1}{EI} \left(\int_0^{2l} \bar{M}_1(x)M_1(x)dx + \int_0^l \bar{M}_2(x)M_2(x)dx + \int_0^l \bar{M}_3(x)M_3(x)dx \right)$$

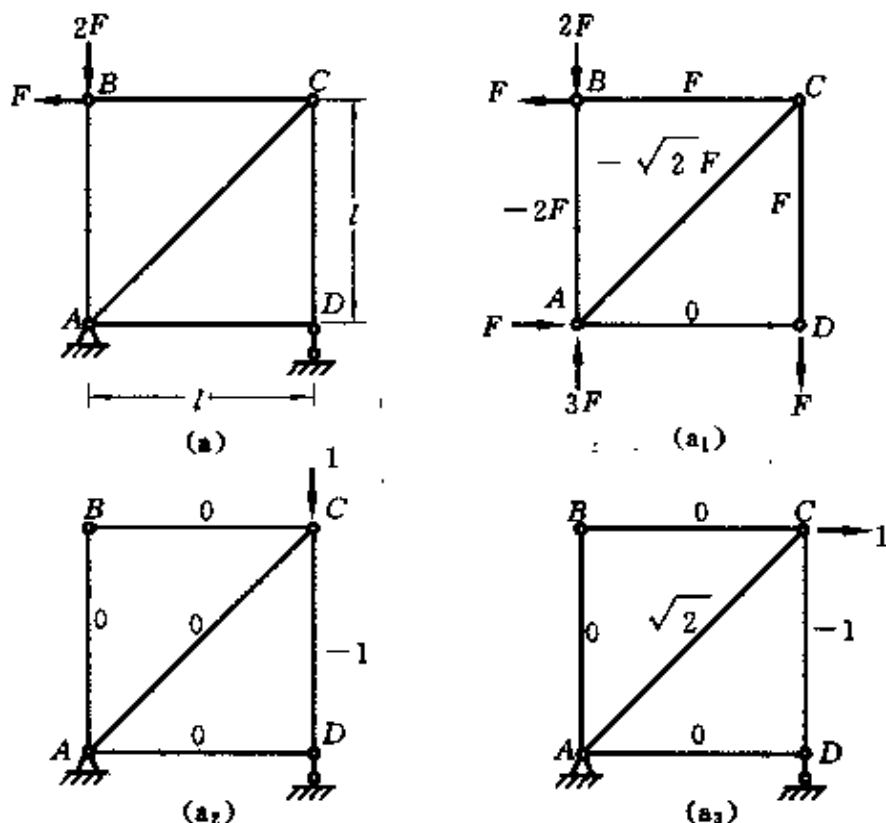
$$= \frac{1}{EI} \left(\int_0^{2l} x_1 F x_1 dx_1 + \int_0^l 2Fl \times 2l dx_2 + \int_0^l 2l(2Fl + 2Fx_3) dx_3 \right)$$

$$= \frac{38Fl^3}{3EI} = \frac{38 \times 10 \times 10^3 \times 1^3}{3 \times 200 \times 10^9 \times 3 \times 10^3 \times 10^{-8}} \text{ m}$$

$$= 21.1 \text{ mm}(\leftarrow)$$

$$\begin{aligned}\theta_D &= \sum \int \frac{\bar{M}'(x)M(x)}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left(\int_0^{2l} \bar{M}'_1(x_1)M_1(x_1)dx_1 \right. \\ &\quad \left. + \int_0^l \bar{M}'_2(x_2)M_2(x_2)dx_2 + \int_0^l \bar{M}'_3(x_3)M_3(x_3)dx_3 \right) \\ &= \frac{1}{EI} \left(\int_0^{2l} 1 \times Fx_1 dx_1 + \int_0^l 1 \times 2Fl dx_2 + \int_1^l 1 \times (2Fl + 2Fx_3) dx_3 \right) \\ &= \frac{7Fl^2}{EI} = \frac{7 \times 10 \times 10^3 \times 1^2}{200 \times 10^9 \times 3 \times 10^3 \times 10^{-8}} = 0.0117 \text{ rad} (\circ)\end{aligned}$$

13.16 题 13.16 图(a)所示桁架各杆的材料相同,截面面积相等。试求节点C处的水平位移和垂直位移。



题 13.16 图

解 解除题 13.16 图(a)中的支座,用约束反力代之,利用平衡条件,求出约束反力及各杆轴力,并标示在题 13.16 图(a₁)中;分别在C节点加上垂直单位力和水平单位力 $F^0=1$,应用平衡条件

求出各杆的轴力,并标示在题 13.16 图(a₂)、(a₃)中。

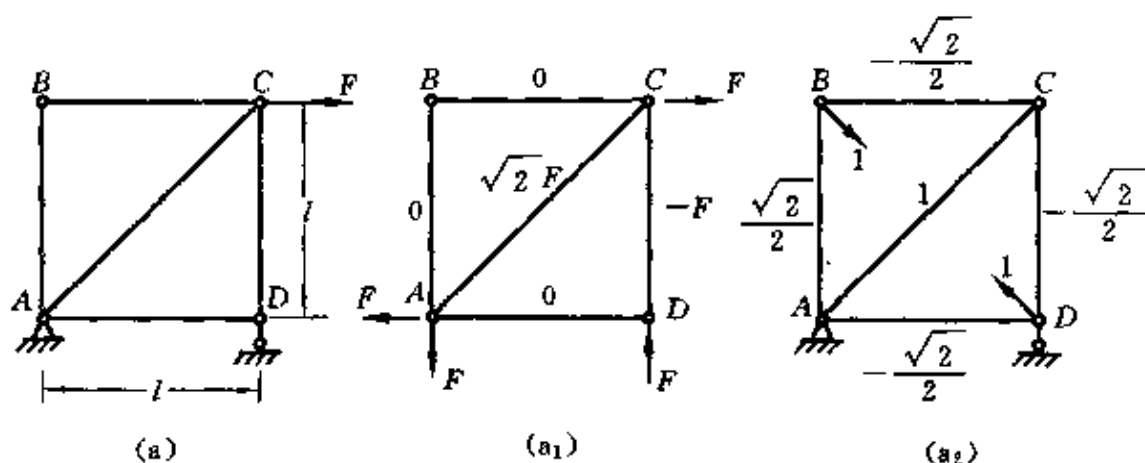
应用单位载荷法求解出 C 点的水平位移和垂直位移

$$w_{Cy} = \sum \frac{F_N(x) \bar{F}_N(x)}{EA} L = \frac{F \times (-1)}{EA} l = -\frac{Fl}{EA} (\uparrow)$$

$$\begin{aligned} w_{Cx} &= \sum \frac{F_N(x) \bar{F}_N(x)}{EA} L \\ &= \frac{1}{EA} [\sqrt{2} \times (-\sqrt{2}F) \sqrt{2}l + (-1)Fl] \\ &= -\frac{3.83Fl}{EA} (\leftarrow) \end{aligned}$$

得负值说明真实的位移方向与单位力的方向相反。

13.17 题 13.17 图(a)所示桁架各杆的材料相同,截面面积相等。在载荷 F 作用下,试求节点 B 与 D 间的相对位移。



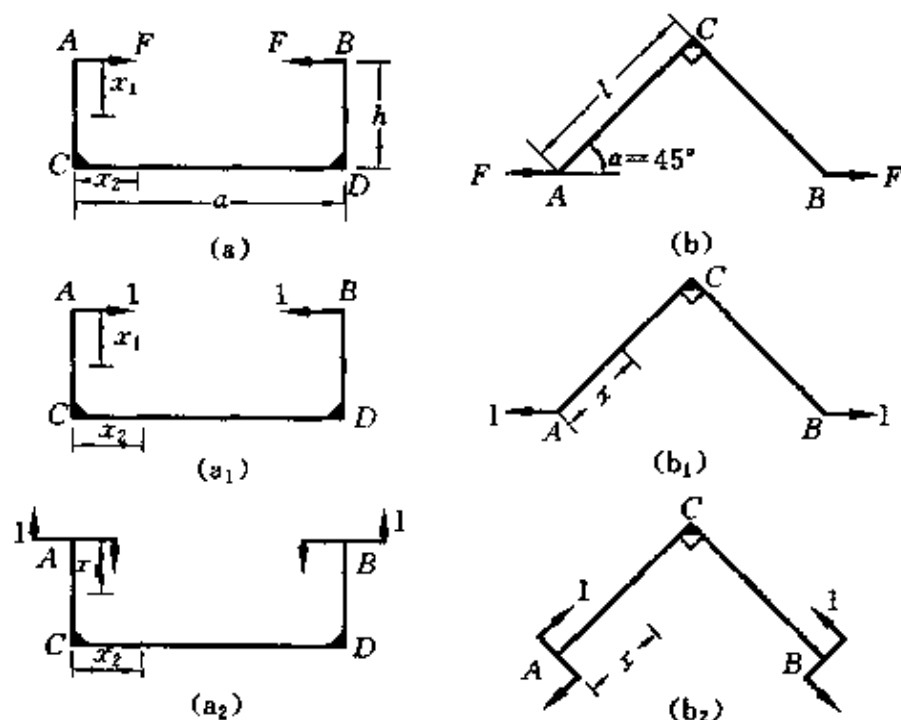
题 13.17 图

解 解除题 13.17 图(a)中的支座,用约束反力代之,利用平衡条件,求出约束反力及各杆轴力,并标示在题 13.17 图(a₁)中;在 B、D 两点加一对方向相反的沿 BD 连线方向的单位力,利用平衡条件,求出各杆的内力,并标示在题 13.17 图(a₂)中。应用单位载荷法,求出 B、D 两点间的相对位移

$$\delta_{BD} = \sum \frac{F_N(x) \bar{F}_N(x)}{EA} L$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{EA} \left[\sqrt{2} F \times 1 \times \sqrt{2} l + (-F)(-\sqrt{2}/2)l \right] \\
 &= \frac{2.71Fl}{EA} \quad (\text{靠近})
 \end{aligned}$$

13.18 刚架各部分的 EI 相等, 试求在题 13.18 图(a)、(b)所示一对 F 力作用下, A 、 B 两点之间的相对位移, A 、 B 两截面的相对转角。



题 13.18 图

解 (a) 如题 13.18 图(a)所示。

分别在 A 、 B 两点作用单位力和单位力偶矩, 如题 13.18 图(a₁)和(a₂)所示, 计算刚架各段的 $M(x)$ 和 $\bar{M}(x)$;

AC 段

$$M(x_1) = Fx_1, \quad \bar{M}(x_1) = x_1, \quad \bar{M}'(x_1) = 1$$

CD 段

$$M(x_2) = Fh, \quad \bar{M}(x_2) = h, \quad \bar{M}'(x_2) = 1$$

应用莫尔定理求 A 、 B 二点之间的相对位移及 A 、 B 二截面的

相对转角

$$\begin{aligned}
 \delta_{AB} &= \sum \int \frac{M(x)\bar{M}(x)}{EI} dx \\
 &= 2 \left[\int_0^h \frac{M(x_1)\bar{M}(x_1)}{EI} dx_1 + \int_0^{a/2} \frac{M(x_2)\bar{M}(x_2)}{EI} dx_2 \right] \\
 &= 2 \times \frac{1}{EI} \left[\int_0^h Fx_1 \times x_1 dx_1 + \int_0^{a/2} Fh \times h dx_2 \right] \\
 &= \frac{Fh^2(2h+3a)}{3EI} \quad (\text{靠近})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \theta_{AB} &= \sum \int \frac{M(x)\bar{M}'(x)}{EI} dx \\
 &= 2 \left[\int_0^h \frac{M(x_1)\bar{M}'(x_1)}{EI} dx_1 + \int_0^{a/2} \frac{M(x_2)\bar{M}'(x_2)}{EI} dx_2 \right] \\
 &= 2 \times \frac{1}{EI} \left[\int_0^h Fx_1 \times 1 dx_1 + \int_0^{a/2} Fh \times 1 dx_2 \right] \\
 &= \frac{Fh(h+a)}{EI}
 \end{aligned}$$

(b) 如题 13.18 图(b)所示。

分别在 A、B 两点作用单位力和单位力偶矩, 如题 13.18 图 (b₁) 和 (b₂) 所示, 计算刚架各段的 $M(x)$ 和 $\bar{M}(x)$:

AC 段

$$M(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}Fx, \quad \bar{M}(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}x, \quad \bar{M}'(x) = 1$$

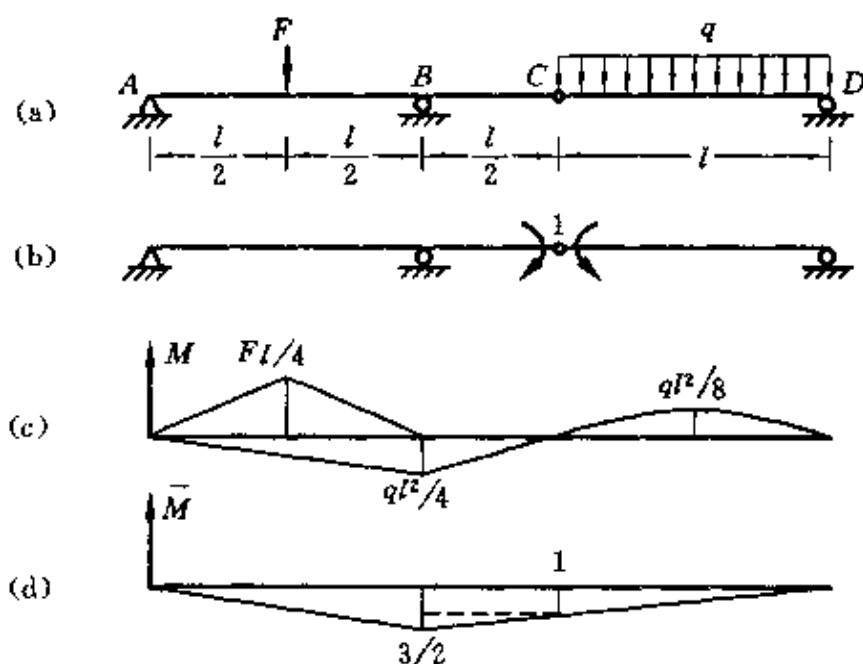
因结构和载荷均对称, 所以只写出 AC 杆的 $M(x)$ 和 $\bar{M}'(x)$ 。

应用莫尔定理求 A、B 两点之间的相对位移及 A、B 两截面的相对转角

$$\begin{aligned}
 \delta_{AB} &= \int \frac{M(x)\bar{M}(x)}{EI} dx = 2 \times \frac{1}{EI} \left[\int_0^l \frac{\sqrt{2}}{2}Fx \times \frac{\sqrt{2}}{2}x dx \right] \\
 &= \frac{Fl^3}{3EI} \quad (\text{离开})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta_{AB} &= \int \frac{M(x)\bar{M}'(x)}{EI} dx = 2 \times \frac{1}{EI} \left[\int_0^l \frac{\sqrt{2}}{2} Fx \times 1 dx \right] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{Fl^2}{EI}\end{aligned}$$

13.19 如题13.19图(a)所示,梁ABC和CD在C端以铰相连。试求C铰两侧梁截面的相对转角。设 EI =常量。



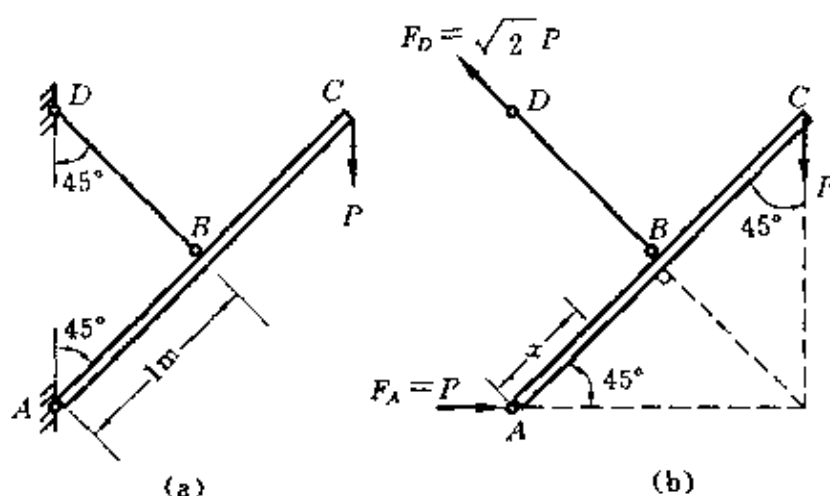
题13.19图

解 求C铰两侧梁截面的相对转角时,在C铰两侧梁截面上各加一个单位力偶矩,且使其方向相反(题13.19图(b))。这样,莫尔积分的结果等于两个梁截面转角的和,也就是两个梁截面的相对转角 θ 。按叠加法,梁在载荷作用下的弯矩图画成题13.19图(c)的形式。单位力偶矩引起的弯矩图则表示于题13.19图(d)中。用图乘法完成莫尔积分,得

$$\begin{aligned}\theta &= \int \frac{M(x)\bar{M}(x)}{EI} dx \\ &= \frac{1}{EI} \left[-\frac{1}{2} \times \frac{Fl}{4} \times l \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{ql^2}{4} \times l \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \times \frac{ql^2}{4} \times \frac{l}{2} \left(1 + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \right) - \frac{2}{3} \times \frac{ql^2}{8} \times l \times \frac{1}{2} \times 1 \Big] \\
& = \frac{1}{EI} \left(-\frac{3Fl^2}{32} + \frac{ql^3}{6} \right)
\end{aligned}$$

13.20 题13.20图(a)所示简易吊车的吊重 $P=2.83\text{ kN}$ 。撑杆 AC 长为 2 m ，截面的惯性矩为 $I=8.53 \times 10^6\text{ mm}^4$ 。拉杆 BD 的横截面面积为 600 mm^2 。如撑杆只考虑弯曲的影响，试求 C 点的垂直位移。设 $E=200\text{ GPa}$ 。



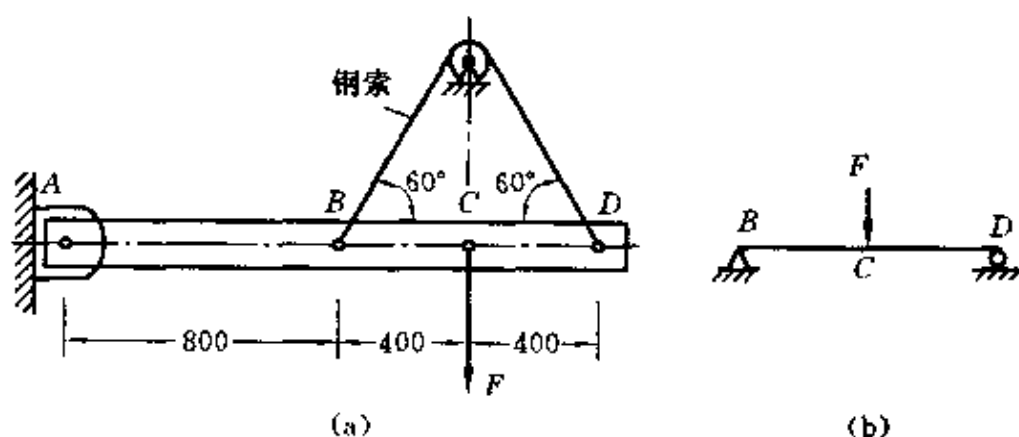
题13.20图

解 解除题13.20图(a)中 A 、 D 处的约束，代之以约束反力。 F_A 和 F_D 利用静力学平衡条件，确定 F_A 和 F_D ，并标示在题13.20图(b)中。结构总的变形能只考虑拉杆 BD 的拉伸应变能和撑杆 AC 的弯曲应变能， AC 杆的压缩应变能相对于弯曲应变能可以忽略不计。应用卡氏定理求 C 点的垂直位移

$$\begin{aligned}
\delta_c &= \frac{\partial W_c}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} \left\{ 2 \int_0^1 \frac{[(F_A/\sqrt{2})x]^2}{2EI} dx + \frac{F_D^2 \times 1}{2EA} \right\} \\
&= \frac{\partial}{\partial P} \left[2 \int_0^1 \frac{((1/\sqrt{2})Px)^2}{2EI} dx + \frac{(\sqrt{2}P)^2 \times 1}{2EA} \right] \\
&= 2 \times \frac{1}{EI} \times \frac{P}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}P \sqrt{2}}{EA} = \frac{P}{3EI} + \frac{2P}{EA}
\end{aligned}$$

$$= \frac{2.83 \times 10^3}{200 \times 10^9} \left(\frac{1}{3 \times 8.53 \times 10^{-6}} + \frac{2}{600 \times 10^{-6}} \right) \text{ m} \\ = 0.6 \text{ mm}$$

13.21 在题 13.21 图(a)中, 绕过无摩擦滑轮的钢索的截面积为 76.36 mm^2 , $E_{\text{钢}} = 177 \text{ GPa}$ 。 $F = 20 \text{ kN}$ 。在题 2.29 中求 F 力作用点 C 的位移时, 曾假设横梁 $ABCD$ 为刚体。若不把 $ABCD$ 假设为刚体, 且已知其抗弯刚度为 $EI = 1440 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$, 试再求 C 点的垂直位移。



题 13.21 图

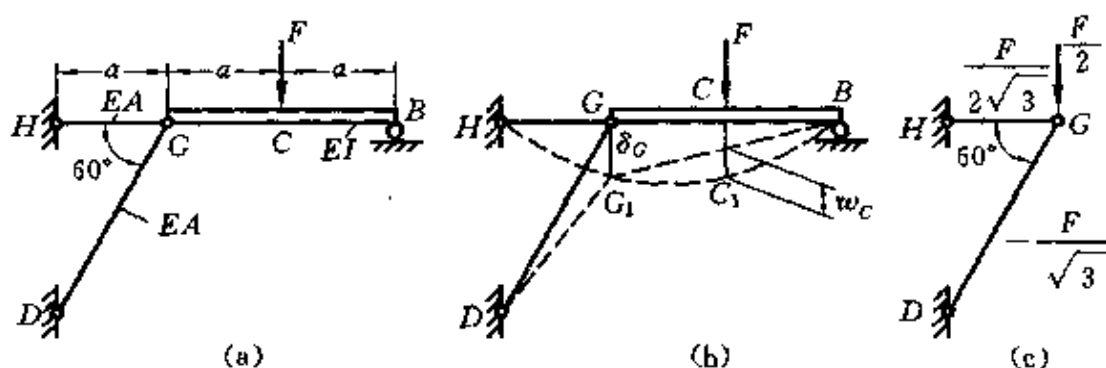
解 在题 2.29 中, 不考虑 $ABCD$ 梁的弹性变形, 仅由钢索变形产生的 C 点垂直位移 $\delta_1 = 0.79 \text{ mm}$ 。如果考虑 $ABCD$ 梁的变形和钢索变形引起的 C 点的总的垂直位移 δ_c , 就只需求出因梁变形引起 C 点的垂直位移 δ_2 即可。从机构的受力情况可以看到 A 点处无约束反力, 所以梁的 AB 段无变形。因此 C 点的垂直位移仅由 BD 段梁的变形引起, 可视 BD 段为简支梁, 在跨度中点作用有集中力 F , 如题 13.21 图(b)所示。 C 点的挠度为(计算或查附录二)

$$\delta_2 = \frac{Fl^3}{48EI} = \frac{20 \times 10^3 \times 0.8^3}{48 \times 1440 \times 10^3} \text{ m} = 0.148 \text{ mm}$$

C 点垂直位移 $\delta_c = \delta_1 + \delta_2 = 0.938 \text{ mm}$

13.22 由杆系及梁组成的混合结构如题 13.22 图(a)所示。设 F 、 α 、 E 、 A 、 I 均已知。试求 C 点的垂直位移。

解 因在 G 点处, 只有垂直方向的约束反力, 所以 BC 可以视



题 13.22 图

为简支梁, C 点的垂直位移 δ_C , 等于桁架 HGD 的 G 点垂直位移 δ_G 之半再加上简支梁自身变形引起跨度中点 C 的位移 w_C (题 13.22 图(b)). 根据平衡条件, 求出桁架 HGD 各杆内力, 并标示在题 13.22 图(c)中, 杆系总的应变能

$$V_\epsilon = \frac{(F/2 \sqrt{3})^2 \times a}{2EA} + \frac{(F/\sqrt{3})^2 \times 2a}{2EA}$$

应用卡氏定理, G 点的垂直位移

$$\delta_G = \frac{\partial V_\epsilon}{\partial (F/2)} = \frac{Fa}{6EA} + \frac{4Fa}{3EA} = \frac{3Fa}{2EA}$$

简支梁 BCG 跨度中点位移可计算或查附录二得到

$$w_C = \frac{8Fa^3}{48EI} = \frac{Fa^3}{6EI}$$

所以 C 点的垂直位移

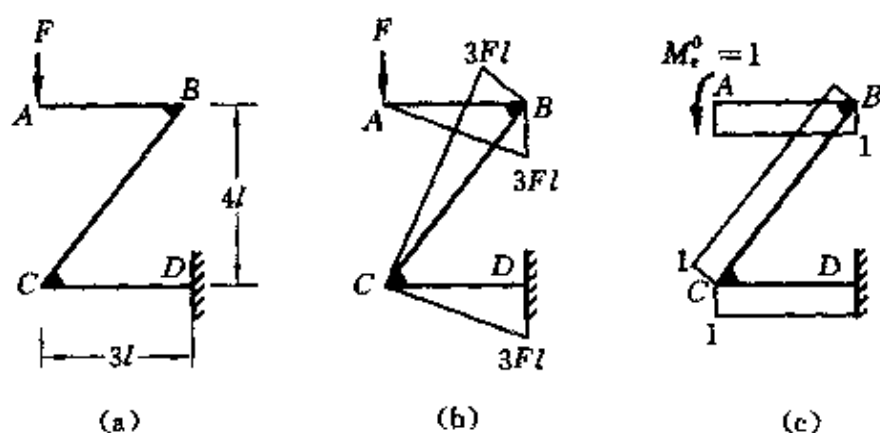
$$\delta_C = \frac{\delta_G}{2} + w_C = \frac{3Fa}{4EA} + \frac{Fa^3}{6EI} \quad (\downarrow)$$

13.23 平面刚架如题 13.23 图(a)所示。若刚架各部分材料和截面相同, 试求截面 A 的转角。

解 用图乘法解本题十分简便, 作载荷弯矩图如题 13.23 图(b)所示, 作单位载荷 $M_2^0=1$ 弯矩图如题 13.23 图(c)所示。

截面 A 的转角

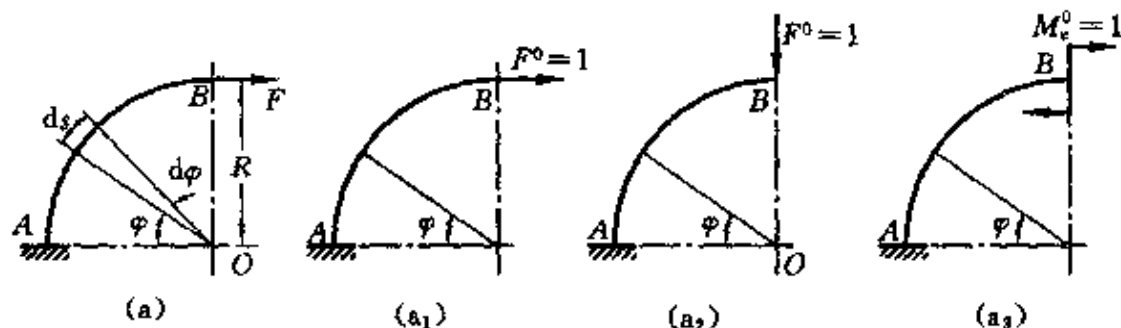
$$\theta_A = \frac{1}{EI} \sum \omega \bar{M}_C$$



题 13.23 图

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{EI} \left[\left(3Fl \times 3l \times \frac{1}{2} \times 1 \right) \times 2 + 3Fl \times 5l \times \frac{1}{2} \times 1 \right] \\
 &= \frac{33Fl^2}{2EI} (\circ)
 \end{aligned}$$

13.24 等截面曲杆如题 13.24 图(a)所示。试求截面 B 的垂直位移和水平位移以及截面 B 的转角。



题 13.24 图

解 按照题 13.24 图(a)、(a₁)、(a₂)和(a₃)列出载荷作用下的弯矩方程和单位载荷下的弯矩方程

$$M(\varphi) = F(1 - \sin\varphi)R, \quad \bar{M}(\varphi) = (1 - \sin\varphi)R$$

$$\bar{M}'(\varphi) = R\cos\varphi, \quad \bar{M}''(\varphi) = 1$$

应用莫尔积分,求 B 截面的水平和垂直方向的位移及 B 截面的转角,并注意 $ds = R d\varphi$, 故

$$x_B = \int_0^{\pi/2} \frac{M(\varphi)\bar{M}(\varphi)}{EI} ds = \int_0^{\pi/2} \frac{FR^3(1 - \sin\varphi)^2}{EI} d\varphi$$

$$= \frac{FR^3}{EI} \left(\frac{3\pi}{4} - 2 \right) = 0.356 \frac{FR^3}{EI} (\rightarrow)$$

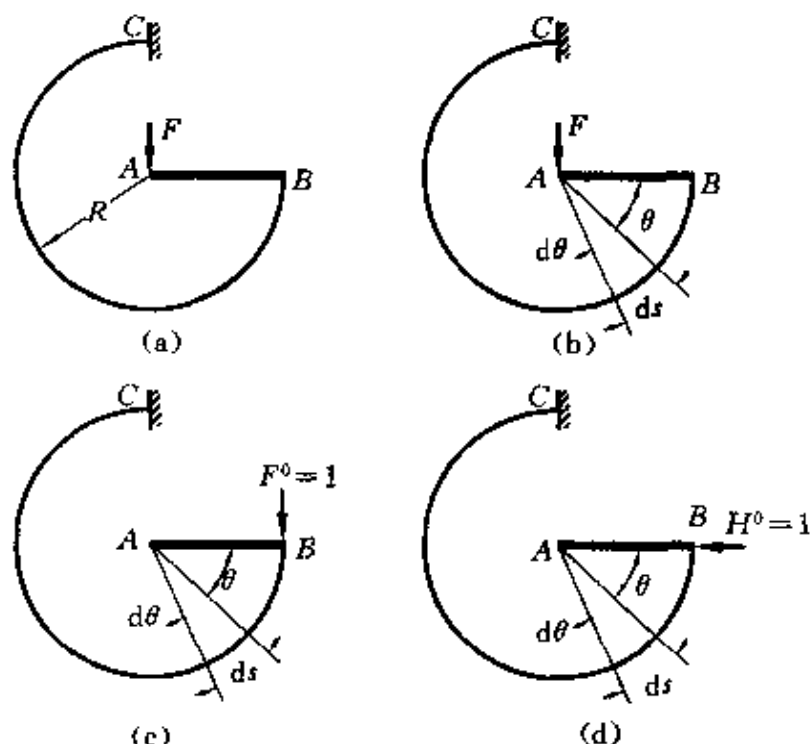
$$y_B = \int_0^{\pi/2} \frac{M(\varphi)\bar{M}'(\varphi)}{EI} ds = \int_0^{\pi/2} \frac{FR^3(1 - \sin\varphi)\cos\varphi}{EI} d\varphi$$

$$= \frac{FR^3}{EI} \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{FR^3}{2EI} (\downarrow)$$

$$\theta_B = \int_0^{\pi/2} \frac{M(\varphi)\bar{M}''(\varphi)}{EI} ds = \int_0^{\pi/2} \frac{FR^2(1 - \sin\varphi)}{EI} d\varphi$$

$$= \frac{FR^2}{EI} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = 0.571 \frac{FR^2}{EI} (\curvearrowright)$$

13.25 如题13.25图(a)所示,等截面曲杆BC的轴线为四分之三的圆周。若AB杆可视为刚性杆,试求在F力作用下,截面B的水平位移及垂直位移。



题13.25图

解 根据题13.25图(b),写出载荷F作用下的弯矩方程

$$M(\theta) = FR\cos\theta$$

根据题 13.25 图(c)、(d), 分别写出单位载荷 $F^0=1$ 和 $H^0=1$ 作用下的弯矩方程, 并注意 $ds=Rd\theta$, 故

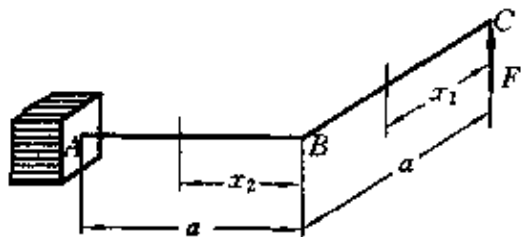
$$\bar{M}(\theta) = -R(1 - \cos\theta), \quad \bar{M}'(\theta) = R\sin\theta$$

应用莫尔积分求 B 截面垂直位移和水平位移

$$\begin{aligned} w_{By} &= \int_0^{3\pi/2} \frac{M(\theta)\bar{M}(\theta)}{EI} ds = \int_0^{3\pi/2} \frac{-FR^3\cos\theta(1 - \cos\theta)}{EI} d\theta \\ &= -\frac{FR^3}{EI} \left(-1 - \frac{3\pi}{4} \right) = 3.36 \frac{FR^3}{EI} (\downarrow) \end{aligned}$$

$$w_{Bx} = \int_0^{3\pi/2} \frac{M(\theta)\bar{M}'(\theta)}{EI} ds = \int_0^{3\pi/2} \frac{FR^3\sin\theta\cos\theta}{EI} d\theta = \frac{FR^3}{2EI} (\leftarrow)$$

13.26 在题 13.26 图所示曲拐的端点 C 上作用集中力 F 。设曲拐两段材料相同且均为同一直径的圆截面杆, 试求 C 点的垂直位移。



题 13.26 图

解 曲杆的总变形能由三部分组成: AB 段的弯曲应变能、BC 段的弯曲应变能及 AB 段的扭转应变能

$$V_e = \int_0^a \frac{(Fx_1)^2}{2EI} dx + \int_0^a \frac{(Fx_2)^2}{2EI} dx + \frac{(Fa)^2 a}{2GI_p}$$

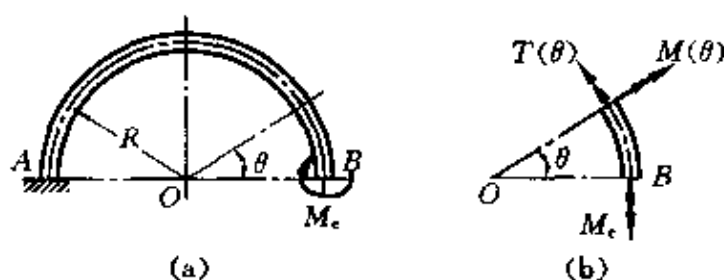
应用卡氏定理求 C 点的垂直位移

$$y_C = \frac{\partial V_e}{\partial F} = \frac{Fa^3}{3EI} + \frac{Fa^3}{3EI} + \frac{Fa^3}{GI_p} = \frac{2Fa^3}{3EI} + \frac{Fa^3}{GI_p} (\uparrow)$$

13.27 半圆形小曲率曲杆的 A 端固定, 在自由端作用扭转力偶矩 M_e 。曲杆横截面为圆形, 其直径为 d 。试求 B 端的扭转角。

解 把 B 端面上的 M_e 用矢量来表示(题 13.27 图(b))。根据部分杆件的平衡条件, 不难求出在坐标为 θ 的任意横截面上, 弯矩 $M(\theta)$ 和扭矩 $T(\theta)$ 分别是

$$\begin{cases} M(\theta) = M_e \sin\theta \\ T(\theta) = M_e \cos\theta \end{cases} \quad (1)$$



题 13.27 图

所以曲杆的变形是扭转和弯曲的组合变形。这时如用莫尔积分求端截面 B 的扭转角,积分的形式应为

$$\varphi = \int_0^\pi \frac{T(\theta)\bar{T}(\theta)Rd\theta}{GI_p} + \int_0^\pi \frac{M(\theta)\bar{M}(\theta)Rd\theta}{EI} \quad (2)$$

在①式中令 $M_e=1$,求得

$$\bar{M}(\theta) = \sin\theta, \quad \bar{T}(\theta) = \cos\theta \quad (3)$$

将①式和③式代入②式,完成积分,得

$$\varphi = \frac{RM_e}{GI_p} \int_0^\pi \cos^2\theta d\theta + \frac{RM_e}{EI} \int_0^\pi \sin^2\theta d\theta = \frac{\pi RM_e}{2} \left(\frac{1}{GI_p} + \frac{1}{EI} \right)$$

以 $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ 和 $I_p = 2I = \frac{\pi d^4}{32}$ 代入上式,化简后得

$$\varphi = \frac{32(2+\mu)RM_e}{Ed^4}$$

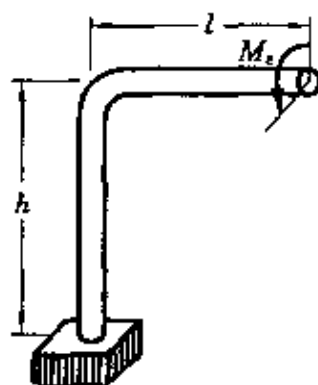
本题也可用卡氏定理求解。

13.28 题 13.28 图所示折杆的横截面为圆形。在力偶矩 M_e 作用下,试求折杆自由端的线位移和角位移。

解 自由端只有向前的线位移,此位移仅由竖直部分的弯曲变形引起,查附录二

$$\delta = \frac{M_e h^2}{2EI} = \frac{M_e h^2}{2E(\pi d^4/64)} = \frac{32M_e h^2}{E\pi d^4}$$

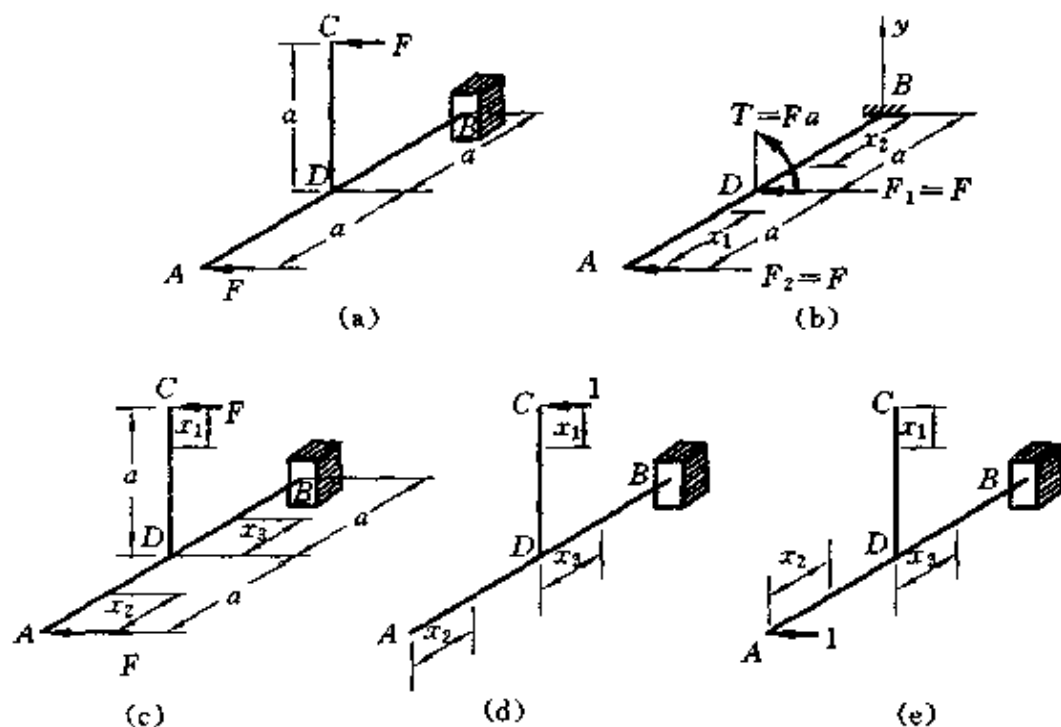
自由端的转角是水平部分扭转变形和竖直部分弯曲变形叠加的结果



题 13.28 图

$$\theta = \frac{M_e h}{EI} + \frac{M_e l}{GI_p} = \frac{64 M_e h}{E \pi d^4} + \frac{32 M_e l}{G \pi d^4}$$

13.29 题13.29图(a)所示刚架的各组成部分的抗弯刚度 EI 相同, 抗扭刚度 GI_p 也相同, 在 F 力作用下, 试求截面 A 和 C 的水平位移。



题 13.29 图

解 解法一 用卡氏定理解

把 DC 杆 C 点的 F 力平移到 AB 杆的 D 点, 受力图如题 13.29 图(b)所示。固定端 B 截面上的约束反力

$$F_{Rx} = (F_1 + F_2), \quad M_y = F_1 a + 2F_2 a, \quad T = Fa$$

AB 杆的应变能(题 13.29 图(b))

$$V_e = \int_0^a \frac{(-F_2 x_1)^2}{2EI} dx_1 + \int_0^a \frac{[(F_1 + F_2)x_2 - (F_1 a + 2F_2 a)]^2}{2EI} dx_2$$

A 点的水平位移和 D 点的水平位移

$$\begin{aligned} w_{Ax} &= \frac{\partial V_e}{\partial F_2} = \frac{1}{EI} \left[\int_0^a F x^2 dx + \int_0^a (2Fx - 3Fa)(x - 2a) dx \right] \\ &= \frac{7Fa^3}{2EI} \end{aligned}$$

$$w_{Dx} = \frac{\partial V_c}{\partial F_1} = \frac{1}{EI} \int_0^a (2Fx - 3Fa)(x - a)dx = \frac{7Fa^3}{6EI}$$

C 点的水平位移等于 AB 杆上 D 点水平位移加上因 DB 杆扭转变形使 C 点产生的水平位移再加上 CD 杆弯曲变形使 C 点产生的水平位移

$$w_{Cx} = w_{Dx} + \frac{Ta}{GI_p}a + \frac{Fa^3}{3EI} = \frac{7Fa^3}{6EI} + \frac{Fa^3}{GI_p} + \frac{Fa^3}{3EI} = \frac{3Fa^3}{2EI} + \frac{Fa^3}{GI_p}$$

解法二 用莫尔定理理解

载荷产生的内力(题 13.29 图(c))

$$CD \text{ 段} \quad M_1(x_1) = Fx_1$$

$$AD \text{ 段} \quad M_2(x_2) = Fx_2$$

$$BD \text{ 段} \quad M_3(x_3) = F(a + 2x_3), \quad T_3(x_3) = Fa$$

C 处作用一水平单位力产生的内力(题 13.29 图(d))

$$CD \text{ 段} \quad \bar{M}_1(x_1) = x_1$$

$$AD \text{ 段} \quad \bar{M}_2(x_2) = 0$$

$$BD \text{ 段} \quad \bar{M}_3(x_3) = x_3, \quad \bar{T}_3(x_3) = a$$

A 处作用一水平力产生的内力(题 13.29 图(e))

$$CD \text{ 段} \quad \bar{M}'_1(x_1) = 0$$

$$AD \text{ 段} \quad \bar{M}'_2(x_2) = x_2$$

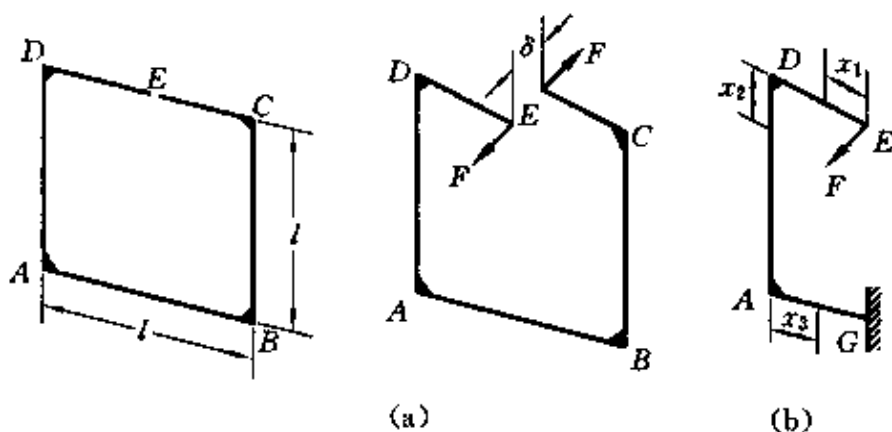
$$BD \text{ 段} \quad \bar{M}'_3(x_3) = x_3 + a, \quad \bar{T}'_3(x_3) = 0$$

A、C 截面的水平位移分别为

$$\begin{aligned} w_{Cx} &= \frac{1}{EI} \left[\int_0^a Fx_1 \times x_1 dx_1 + \int_0^a Fx_2 \times 0 \times dx_2 \right. \\ &\quad \left. + \int_0^a F(a + 2x_3)x_3 dx_3 \right] + \frac{1}{GI_p} \int_0^a Fa \times a dx_3 \\ &= \frac{3Fa^3}{2EI} + \frac{Fa^3}{GI_p} \quad (\leftarrow) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_{Ax} &= \frac{1}{EI} \left[\int_0^a Fx_2 \times x_2 dx_2 + \int_0^a F(a + 2x_3)(a + x_3) dx_3 \right] \\ &= \frac{7Fa^3}{2EI} \quad (\leftarrow) \end{aligned}$$

13.30 如题 13.30 图(a)所示,正方形刚架各部分的 EI 相等, GI_p 也相等。 E 处有一切口。在一对垂直于刚架平面的水平力 F 作用下,试求切口两侧的相对水平位移 δ 。



题 13.30 图

解 利用对称性,对刚架一半进行分析(题 13.30 图(b)),各段的弯矩方程和扭矩方程如下:

$$DE \text{ 段} \quad M_1(x_1) = Fx_1, \quad \bar{M}_1(x_1) = \frac{\partial M_1(x_1)}{\partial F} = x_1$$

$$DA \text{ 段} \quad M_2(x_2) = Fx_2, \quad \bar{M}_2(x_2) = \frac{\partial M_2(x_2)}{\partial F} = x_2$$

$$T_2(x_2) = \frac{Fl}{2}, \quad \bar{T}_2(x_2) = \frac{\partial T_2(x_2)}{\partial F} = \frac{l}{2}$$

$$AG \text{ 段} \quad M_3(x_3) = F\left(\frac{l}{2} - x_3\right), \quad \bar{M}_3(x_3) = \frac{\partial M_3(x_3)}{\partial F} = \frac{l}{2} - x_3$$

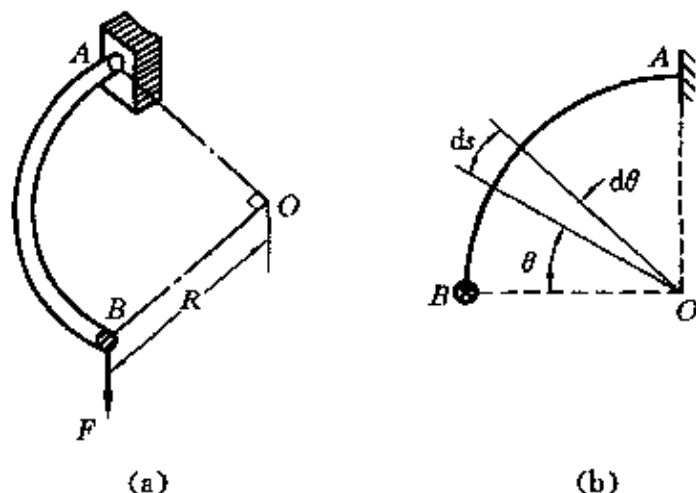
$$T_3(x_3) = Fl, \quad \bar{T}_3(x_3) = \frac{\partial T_3(x_3)}{\partial F} = l$$

应用莫尔积分确定 E 处二载荷作用点间的相对位移。

$$\begin{aligned} \delta = & 2 \left[\int_0^{l/2} \frac{M_1(x_1)\bar{M}_1(x_1)}{EI} dx_1 + \int_0^l \frac{M_2(x_2)\bar{M}_2(x_2)}{EI} dx_2 \right. \\ & + \int_0^l \frac{T_2(x_2)\bar{T}_2(x_2)}{GI_p} dx_2 + \int_0^{l/2} \frac{M_3(x_3)\bar{M}_3(x_3)}{EI} dx_3 \\ & \left. + \int_0^{l/2} \frac{T_3(x_3)\bar{T}_3(x_3)}{GI_p} dx_3 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \left[\int_0^{l/2} \frac{Fx_1^2}{EI} dx_1 + \int_0^l \frac{Fx_2^2}{EI} dx_2 + \int_0^l \frac{Fl^2}{4GI_p} dx_2 \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{l/2} \frac{F(l/2 - x_3)^2}{EI} dx_3 + \int_0^{l/2} \frac{Fl^2}{GI_p} dx_3 \right] \\
&= \frac{5Fl^3}{6EI} + \frac{3Fl^3}{2GI_p} \quad (\text{离开})
\end{aligned}$$

13.31 轴线为水平平面内四分之一圆周的曲杆如题 13.31 图(a)所示,在自由端B作用垂直载荷F。设EI 和GI_p 已知,试求截面B 在垂直方向的位移。



题 13.31 图

解 根据题 13.31 图(b),列出任一截面上由于载荷F 的作用产生的弯矩方程和扭矩方程及单位载荷作用产生的弯矩方程和扭矩方程如下:

$$M(\theta) = FR \sin \theta, \quad \bar{M}(\theta) = \frac{\partial M(\theta)}{\partial F} = R \sin \theta$$

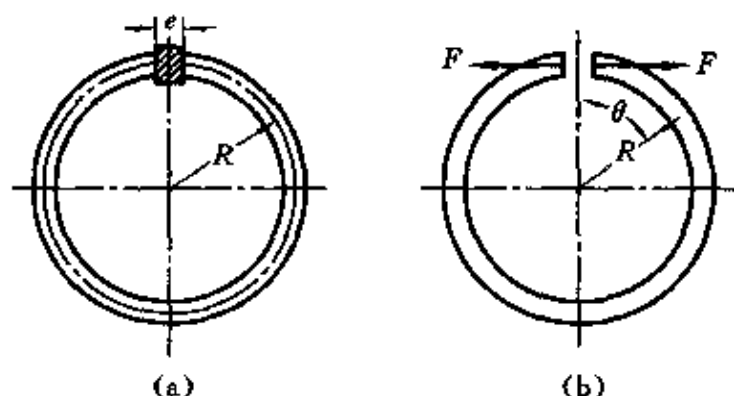
$$T(\theta) = FR(1 - \cos \theta), \quad \bar{T}(\theta) = \frac{\partial T(\theta)}{\partial F} = R(1 - \cos \theta)$$

应用单位载荷法,B 截面的垂直方向位移

$$\delta_B = \int_0^{\pi/2} \frac{M(\theta)\bar{M}(\theta)}{EI} ds + \int_0^{\pi/2} \frac{T(\theta)\bar{T}(\theta)}{GI_p} ds$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\pi/2} \frac{FR^3}{EI} \sin^2 \theta d\theta + \int_0^{\pi/2} \frac{FR^3}{GI_p} (1 - \cos \theta)^2 d\theta \\
&= \frac{FR^3}{EI} \left(\frac{\pi}{4} - 0 \right) + \frac{FR^3}{GI_p} \left(-2 + \frac{3\pi}{4} \right) = \frac{\pi FR^3}{4EI} + \frac{FR^3(3\pi - 8)}{4GI_p}
\end{aligned}$$

13.32 如题 13.32 图(a)所示,平均半径为 R 的细圆环,在切口处嵌入一块体,使环张开 e 。试求环中的最大弯矩。设 EI 已知。



题 13.32 图

解 假想将题 13.32 图(a)中切口处的嵌入块取出,代之以一对等值反向的 F 力,分别作用在切口左右两截面上(题 13.32 图(b)),在 F 力作用下的弯矩方程和用单位载荷取代 F 力后的弯矩方程为

$$M(\theta) = FR(1 - \cos \theta) \quad (1)$$

$$\bar{M}(\theta) = \frac{\partial M(\theta)}{\partial F} = R(1 - \cos \theta) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

应用单位载荷法有

$$e = \int_0^{2\pi} \frac{M(\theta)\bar{M}(\theta)}{EI} ds, \quad ds = R d\theta$$

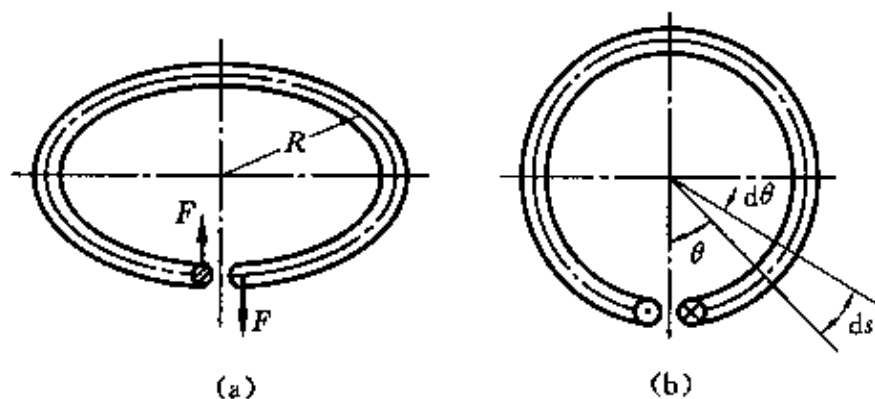
所以

$$e = \int_0^{2\pi} \frac{FR^3}{EI} (1 - \cos \theta)^2 d\theta = \frac{FR^3}{EI} (2\pi + \pi) = \frac{3\pi FR^3}{EI} \quad (2)$$

由弯矩方程 $M(\theta) = FR(1 - \cos \theta)$ 可知,当 $\theta = \pi$ 时,弯矩最大,由①、②式得

$$\cos \pi = -1, \quad M(x)_{\max} = 2FR = \frac{2eEI}{3\pi R^2}$$

13.33 平均半径为 R 的细圆环, 截面为圆形, 其直径为 d 。 F 力垂直于圆环中线所在的平面。试求两个 F 力作用点的相对线位移。



题 13.33 图

解 载荷 F 作用下的弯矩方程及以单位载荷取代 F 时的弯矩方程为

$$M(\theta) = FR \sin \theta, \quad \bar{M}(\theta) = \frac{\partial M(\theta)}{\partial F} = R \sin \theta$$

载荷 F 作用下的扭矩方程及以单位载荷取代 F 时的扭矩方程为

$$T(\theta) = FR(1 - \cos \theta), \quad \bar{T}(\theta) = \frac{\partial T(\theta)}{\partial F} = R(1 - \cos \theta)$$

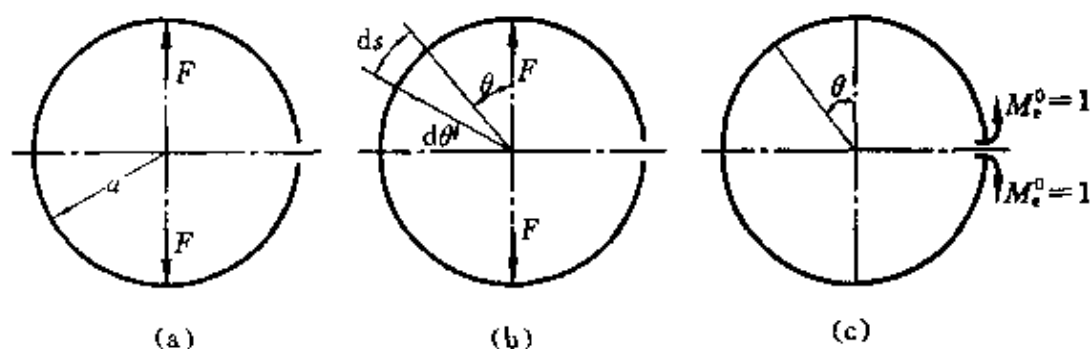
应用单位载荷法, 切口处 F 力作用点的相对位移

$$\begin{aligned} \delta &= \int_0^{2\pi} \frac{M(\theta)\bar{M}(\theta)}{EI} ds + \int_0^{2\pi} \frac{T(\theta)\bar{T}(\theta)}{GI_p} ds \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{FR^3 \sin^2 \theta}{EI} d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{FR^3 (1 - \cos \theta)^2}{GI_p} d\theta \\ &= \frac{\pi FR^3}{EI} + \frac{3\pi FR^3}{GI_p} \end{aligned}$$

13.34 如题 13.34 图(a)所示, 圆形曲杆的横截面尺寸远小于曲杆的半径 a , 试求切口两侧截面的相对转角。

解 载荷 F 作用下的弯矩方程(题 13.34 图(b))

$$M(\theta) = -F a \sin \theta$$



题 13.34 图

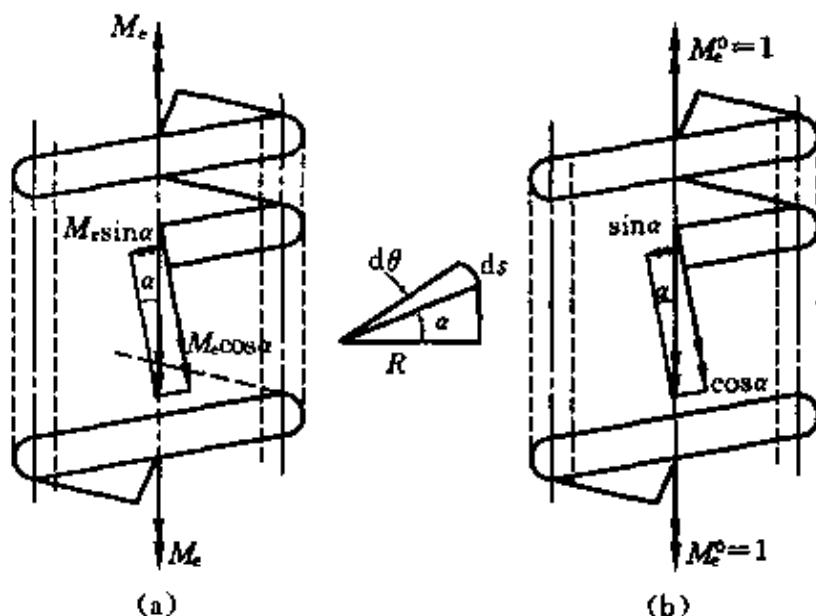
单位载荷 $M_c^0 = 1$ 作用下的弯矩方程(题 13.34 图(c))

$$\bar{M}(\theta) = -1$$

应用单位载荷法求切口两侧截面的相对转角

$$\theta = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{M(\theta) \bar{M}(\theta)}{EI} ds = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{a^2 F \sin \theta}{EI} d\theta = \frac{2Fa^2}{EI}$$

13.35 柱形密圈螺旋弹簧的簧圈平均直径为 D , 簧丝横截面直径为 d , 有效圈数为 n 。在弹簧两端受到扭转力偶矩 M_c 的作用, 试求弹簧上端水平面相对于下端水平面的扭转角。



题 13.35 图

解 按右手螺旋法则,用双箭头表示力偶矩矢量 M_c ,将扭转力偶矩 M_c 分解为 $M_c \sin \alpha$ 和 $M_c \cos \alpha$,前者为扭矩,后者为弯矩。它们作用在簧杆的横截面上,是内力,见题 13.35 图(a)。

$$T = M_c \sin \alpha, \quad M = M_c \cos \alpha$$

在单位载荷 $M_c^0 = 1$ 作用下(题 13.35 图(b)),簧杆的内力为

$$\bar{T} = \sin \alpha, \quad \bar{M} = \cos \alpha$$

弹簧上、下端水平面的相对扭转角(注意: $ds = \frac{Rd\theta}{\cos \alpha}$)

$$\begin{aligned} \theta &= \int_s \frac{M\bar{M}}{EI} ds + \int_s \frac{T\bar{T}}{GI_p} ds \\ &= \int_0^{2n\pi} \frac{M_c \cos^2 \alpha}{EI} \left(\frac{Rd\theta}{\cos \alpha} \right) + \int_0^{2n\pi} \frac{M_c \sin^2 \alpha}{GI_p} \left(\frac{Rd\theta}{\cos \alpha} \right) \\ &= \frac{32nM_c D}{d^4 \cos \alpha} \left(\frac{2 \cos^2 \alpha}{E} + \frac{\sin^2 \alpha}{G} \right) \end{aligned}$$

13.36 超静定刚架如题 13.36 图(a)所示, $EI = \text{常量}$ 。将固定铰支座 C 改变为可动铰支座,并将解除的约束用多余未知力 F_{RC} 来代替(题 13.36 图(b))。试按最小功原理求解,并作刚架的弯矩图。

解 根据超静定结构多余未知力的数值恰好是使变形能为最小值这一最小功原理的概念,有

$$\frac{dV_\epsilon}{dF_{RCy}} = 0 \quad (1)$$

在题 13.36 图(c)中,由平衡条件

$$\sum M(A) = 0, \quad F_{RCy}a - qa \frac{a}{2} + F_{RCx}a = 0$$

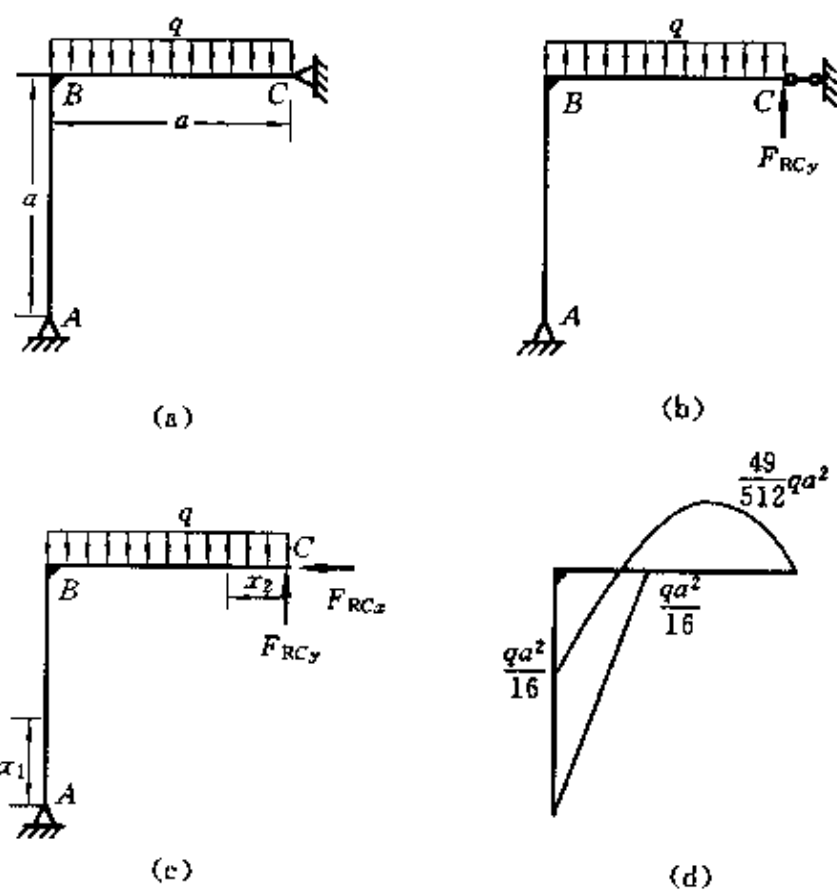
解得

$$F_{RCx} = qa/2 - F_{RCy}$$

载荷作用下及单位载荷作用下的弯矩如下(题 13.36 图(c)):

$$AB \text{ 段 } M_1(x_1) = (qa/2 - F_{RCy})x_1, \quad \bar{M}_1(x_1) = \frac{dM}{dF_{RCy}} = -x_1$$

$$CB \text{ 段 } M_2(x_2) = -F_{RCy}x_2 + \frac{1}{2}qx_2^2$$



题 13.36 图

$$\bar{M}_2(x_2) = \frac{dM}{dF_{RCy}} = -x_2$$

刚架的应变能为

$$V_\epsilon = \int_0^a \frac{M_1^2(x_1)}{2EI} dx_1 + \int_0^a \frac{M_2^2(x_2)}{2EI} dx_2$$

根据最小功能原理①式有

$$\frac{dV_\epsilon}{dF_{RCy}} = \frac{1}{EI} \left[\int_0^a M_1(x_1) \bar{M}_1(x_1) dx_1 + \int_0^a M_2(x_2) \bar{M}_2(x_2) dx_2 \right] = 0$$

$$\frac{1}{EI} \left[\int_0^a \left(\frac{qa}{2} - F_{RCy} \right) x_1 (-x_1) dx_1 + \int_0^a \left(F_{RCy} x_2 - \frac{1}{2} q x_2^2 \right) x_2 dx_2 \right] = 0$$

解上式得

$$F_{RCy} = \frac{7}{16} qa$$

最大弯矩显然产生在 BC 段, 该段任一截面上的弯矩为

$$M(x_2) = F_{RCy}x_2 - \frac{1}{2}qx_2^2 = \frac{7}{16}qax_2 - \frac{1}{2}qx_2^2$$

$M(x_2)$ 取极值的条件是 $M(x_2)$ 对 x_2 的一次导数等于零

$$\frac{dM(x_2)}{dx_2} = \frac{7}{16}qa - qx_2 = 0$$

解上式得

$$x_2 = \frac{7}{16}a$$

将 x_2 之值代入 $M(x_2)$ 表达式中,得最大弯矩

$$M_{\max} = M(x_2)|_{x_2=7a/16} = \frac{49}{512}qa^2$$

作弯矩图如题 13.36 图(d)所示。

如果为多次超静定结构,则变形协调条件为多余约束力使应变能为最小值,即 $\frac{\partial V_e}{\partial F_i} = 0$ 。

第十四章 超静定结构

知识要点

1. 超静定结构概念

(1) 几何不变结构(运动不变结构)

除变形引起的位移外,结构不产生任何刚体位移,这样的结构称为几何不变结构。

(2) 多余约束反力

超静定结构的支座,维持结构的几何不变性。不是维持几何不变性所必须的约束,称为多余约束,与之对应的约束反力,称为多余约束反力。

(3) 超静定结构

有多余约束的结构,它的未知数不能用静力平衡方程完全确定。

(4) 三种超静定结构

① 外力超静定结构——超静定结构是因为存在多余的约束反力。

② 内力超静定结构——结构的约束反力个数不超过独立的平衡方程数,而是由于结构内部存在多余约束。

③ 二者兼而有之的结构。

2. 用力法正则方程解三次超静定平面杆系结构

(1) 平面杆系结构

结构是由棱杆通过铰节点或刚节点连接而成,各杆的轴线在同一平面内,此平面就是各杆的形心主惯性平面,外力均作用在此平面内。

(2) 力法正则方程

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2F} = 0 \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3F} = 0 \end{cases}$$

根据位移互等定理, $\delta_{12} = \delta_{21}$, $\delta_{13} = \delta_{31}$, $\delta_{23} = \delta_{32}$ 。所以柔度系数 δ_{ij} 只有 6 个是独立的。柔度系数 δ_{ij} 可用单位载荷法, 或图乘法确定。

(3) 利用对称性条件简化力法正则方程的计算

① 两种对称性

a. 结构对称——结构的外形尺寸、截面刚性、支座情况都对称。

b. 载荷对称——载荷作用点位置及方向对称。

② 不论外力如何作用, 只要结构对称, 并沿对称轴将超静定结构切开, 得到对称的静定基, 则必有

$$\delta_{12} = \delta_{21} = 0, \quad \delta_{23} = \delta_{32} = 0$$

所以力法正则方程可简化为

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1F} = 0 \\ \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0 \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3F} = 0 \end{cases}$$

③ 当结构对称, 载荷也对称, 并选定对称的静定基时, 必有 $\Delta_{2F} = 0$, 于是力法正则方程进一步简化为

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1F} = 0 \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3F} = 0 \\ \delta_{22}X_2 = 0 \end{cases}$$

于是可得 $X_2 = 0$ 。这说明, 对称结构受对称载荷作用时, 在对称截面上的反对称内力必为零。

④ 当结构对称, 载荷反对称, 并选用对称静定基时, 必有 $\Delta_{1F} = 0$, $\Delta_{3F} = 0$, 于是力法正则方程可简化为

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{13}X_3 = 0 \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{33}X_3 = 0 \\ \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0 \end{cases}$$

只要

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{13} \\ \delta_{31} & \delta_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

就必有 $X_1=0, X_3=0$ 。这说明对称结构作用以反对称载荷, 在对称截面上的对称内力必为零。

习题详解

14.1 用力法解题 6.38、6.39 和 6.40。

解 (1) 解题 6.38。 如题 14.1 图(a)所示。

这是个一次超静定问题。视 AB 为刚体, 解除支座 A , 代之以反力 X_1 , 相当系统如题 14.1 图(a₁)所示。正则方程为

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0 \quad (1)$$

由静力学平衡方程求得(题 14.1 图(a₂))

$$\bar{F}_{N1} = -2, \quad \bar{F}_{N2} = 1$$

应用莫尔定理

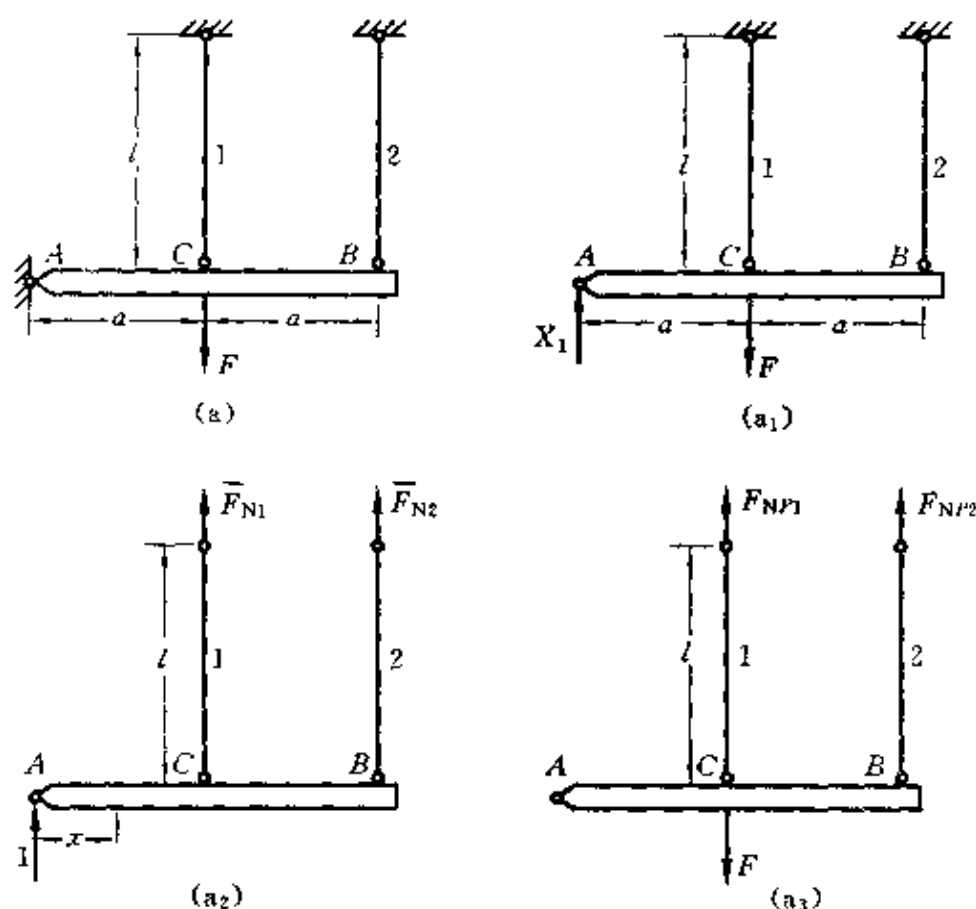
$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \sum \frac{\bar{F}_N^2 l}{EA} = \frac{\bar{F}_{N1}^2 l}{EA} + \frac{\bar{F}_{N2}^2 l}{EA} \\ &= \frac{(-2)^2 \times l}{EA} + \frac{1^2 \times l}{EA} = \frac{5l}{EA} \end{aligned} \quad (2)$$

由静力学平衡方程求得(题 14.1 图(a₃))

$$F_{NP1} = F, \quad F_{NP2} = 0$$

应用莫尔定理

$$\begin{aligned} \Delta_{1F} &= \sum \frac{F_{NP} \bar{F}_N l}{EA} = \frac{F_{NP1} \bar{F}_{N1} l}{EA} + \frac{F_{NP2} \bar{F}_{N2} l}{EA} \\ &= \frac{F \times (-2) \times l}{EA} + \frac{0 \times 1 \times l}{EA} = -\frac{2Fl}{EA} \end{aligned} \quad (3)$$



题 14.1 图

将②、③式代入①式得

$$\frac{5l}{EA}X_1 - \frac{2Fl}{EA} = 0, \quad X_1 = \frac{2}{5}F$$

根据题 14.1 图(a₁), 由静力学平衡方程求得

$$F_{N1} = \frac{F}{5}(\text{拉}), \quad F_{N2} = \frac{2}{5}F(\text{拉})$$

若考虑横梁的变形, 在应用莫尔定理求系数 δ_{11} 和常数 Δ_{1F} 时, 除了考虑 1、2 杆的变形能外, 还要考虑梁的变形能。利用题 14.1 图(a₂), 单位载荷下, 1、2 杆的轴力仍为

$$\bar{F}_{N1} = -2, \quad \bar{F}_{N2} = 1$$

梁 AB 的弯矩方程(题 14.1 图(a₂))

AC 段
$$\bar{M}_1 = x \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$\begin{aligned} BC \text{ 段} \quad \bar{M}_2 &= x + F_{N1}(x-a) = x - 2(x-a) \\ &= 2a - x \quad (a \leq x \leq 2a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \sum \frac{\bar{F}_{N1}^2 l}{EA} + \sum \int \frac{\bar{M}^2 dx}{EI} \\ &= \frac{\bar{F}_{N1}^2 l}{EA} + \frac{\bar{F}_{N2}^2 l}{EA} + \int_0^a \frac{\bar{M}_1^2}{EI} dx + \int_a^{2a} \frac{\bar{M}_2^2}{EI} dx \\ &= \frac{5l}{EA} + \int_0^a \frac{x^2}{EI} dx + \int_a^{2a} \frac{(2a-x)^2}{EI} dx = \frac{5l}{EA} + \frac{2a^3}{3EI} \quad (4) \end{aligned}$$

按题 14.1 图(a₃)求出 $F_{N1} = F, F_{N2} = 0$

梁 AB 弯矩为零即 $M_1 = M_2 = 0$

$$\begin{aligned} \Delta_{1F} &= \sum \frac{F_N \bar{F}_{N1} l}{EA} + \sum \int \frac{M \bar{M}}{EI} dx \\ &= \frac{F_{N1} \bar{F}_{N1} l}{EA} + \frac{F_{N2} \bar{F}_{N2} l}{EA} + \int_0^a \frac{M_1 \bar{M}_1}{EI} dx + \int_0^{2a} \frac{M_2 \bar{M}_2}{EI} dx \\ &= \frac{-2 \times F \times l}{EA} + \frac{0 \times 1 \times l}{EA} + 0 + 0 = -\frac{2Fl}{EA} \quad (5) \end{aligned}$$

将④、⑤式代入正则方程①式得

$$X_1 = \frac{-\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = \frac{6FlI}{15lI + 2a^3A}$$

根据题 14.1 图(a₁), 由静力学平衡方程求得

$$F_{N1} = \frac{(3lI + 2a^3A)}{15lI + 2a^3A} F, \quad F_{N2} = \frac{6lI}{15lI + 2a^3A} F$$

(2) 解题 6.39。 如题 14.1 图(b)所示。

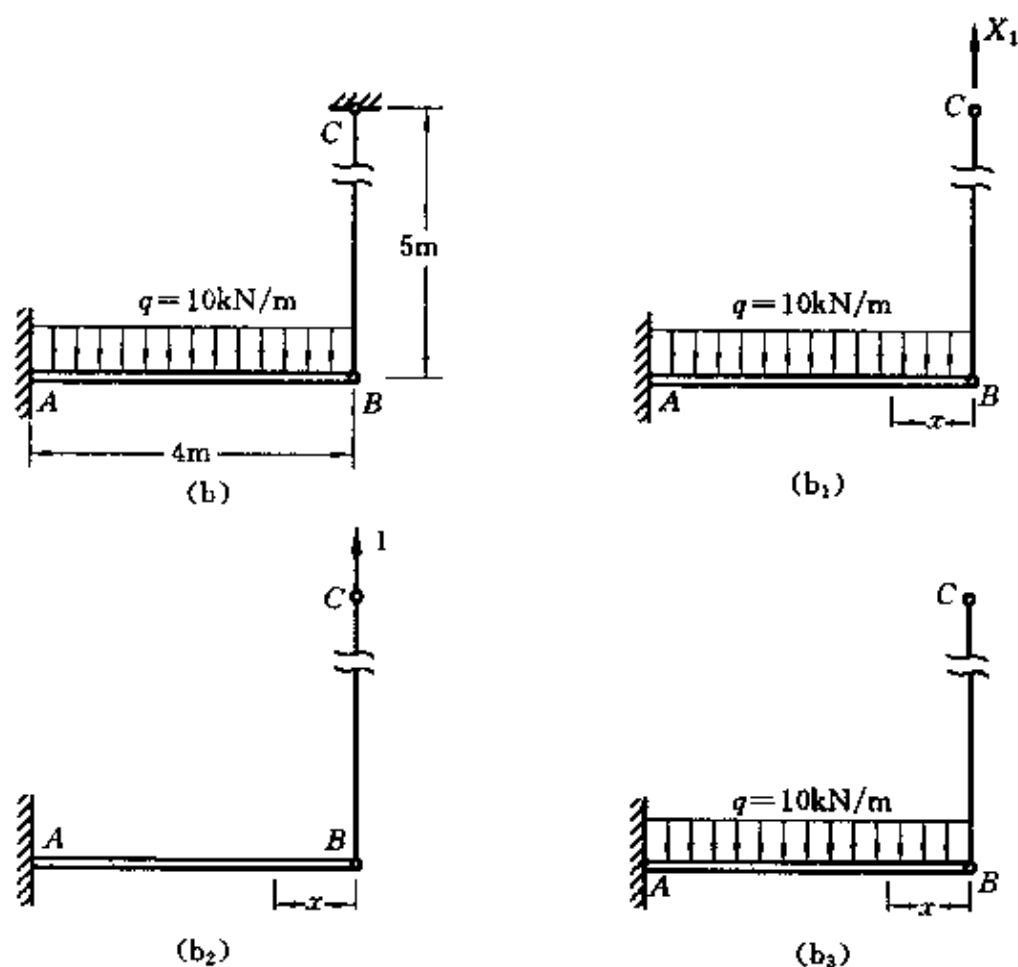
解除支座 C 的约束, 代之以约束反力 X_1 , 相当系统题 14.1 图(b₁)所示。正则方程为

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = 0 \quad (6)$$

利用莫尔积分求系数 δ_{11} 和常数 Δ_{1F} (题 14.1 图(b₂)、(b₃))

$$BC \text{ 段} \quad F_N = 0, \quad \bar{F}_N = 1$$

$$AB \text{ 段} \quad M = -\frac{1}{2}qx^2, \quad \bar{M} = x$$



续题 14.1 图

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= \sum \int \frac{\bar{M}^2}{EI} dx + \sum \frac{\bar{F}_N^2 l}{EA} \\ &= \int_0^{l_{AB}} \frac{x^2}{EI} dx + \frac{l_{BC}}{EA} = \frac{l_{AB}^3}{3EI} + \frac{l_{BC}}{EA}\end{aligned}\quad (7)$$

$$\begin{aligned}\Delta_{1F} &= \sum \int \frac{M\bar{M}}{EI} dx + \sum \frac{F_N \bar{F}_N l}{EA} \\ &= \int_0^{l_{AB}} -\frac{1}{2} \frac{qx^2 x}{EI} dx = -\frac{ql_{AB}^4}{8EI}\end{aligned}\quad (8)$$

将⑦、⑧式代入正则方程⑥式得

$$X_1 = \frac{-\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = \frac{ql_{AB}^4/(8EI)}{l_{AB}^3/(3EI) + l_{BC}/(EA)}\quad (9)$$

查附录三型钢表, No. 16 工字钢

$$I = 1130 \text{ cm}^4$$

把 I 及 l_{AB}, l_{BC} 的数值代入⑨式, 得

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\frac{10 \times 10^3 \times 4^3}{8 \times 200 \times 10^9 \times 1130 \times 10^{-8}}}{\frac{4^3}{3 \times 200 \times 10^9 \times 1130 \times 10^{-8}} + \frac{5 \times 4}{200 \times 10^9 \times \pi \times (10 \times 10^{-3})^2}} \text{ N} \\ &= 14.5 \text{ kN} \end{aligned}$$

最大弯矩在梁固定端处, 即

$$\begin{aligned} M_{\max} &= \left(-\frac{1}{2} \times 10 \times 10^3 \times 4^2 + 14.5 \times 10^3 \times 4 \right) \text{ N} \cdot \text{m} \\ &= -22 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

杆内最大正应力

$$\sigma_{\max} = \frac{X_1}{A} = \frac{14.5 \times 10^3}{\frac{\pi}{4} \times 0.01^2} \text{ Pa} = 185 \text{ MPa}$$

梁内最大正应力

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{22 \times 10^3}{141 \times 10^{-6}} \text{ Pa} = 156 \text{ MPa}$$

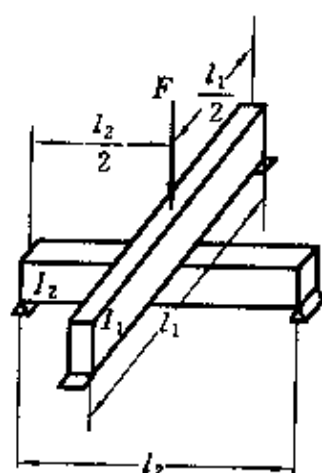
(3) 解题 6.40。 如题 14.1 图(c)所示。

这是个一次超静定问题。将二梁拆开, 它们之间的接触用约束反力 X_1 代之, 相当系统如题 14.1 图(c₁)所示。正则方程为

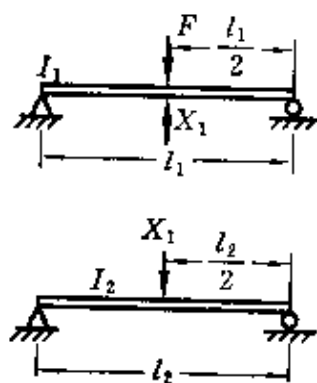
$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0 \quad (10)$$

利用图乘法求系数 δ_{11} 和常数 Δ_{1F} (题 14.1 图(c₂))

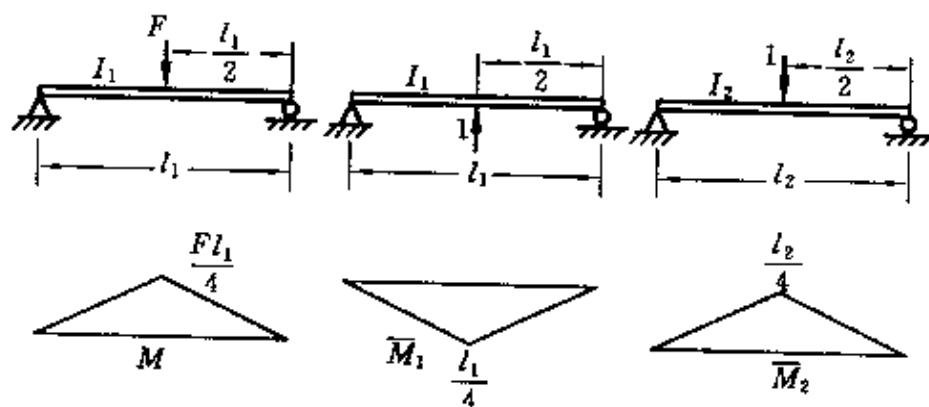
$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \sum \left(\frac{1}{EI} \omega \bar{M}_C \right) \\ &= \frac{2}{EI_1} \left[\left(\frac{1}{2} \times \frac{l_1}{4} \times \frac{l_1}{2} \right) \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{l_1}{4} \right) \right] \\ &\quad + \frac{2}{EI_2} \left[\left(\frac{1}{2} \times \frac{l_2}{4} \times \frac{l_2}{2} \right) \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{l_2}{4} \right) \right] \\ &= \frac{l_1^3}{48EI_1} + \frac{l_2^3}{48EI_2} \quad (11) \end{aligned}$$



(c)



(c1)



(c2)

续题 14.1 图

$$\begin{aligned}\Delta_{1F} &= \frac{1}{EI} \omega \bar{M}_C = -\frac{1}{EI_1} \left[\left(\frac{Fl_1}{4} \times \frac{l_1}{2} \times \frac{1}{2} \right) \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{l_1}{4} \right) \times 2 \right] \\ &= -\frac{Fl_1^3}{48EI_1}\end{aligned}\quad (12)$$

将⑪、⑫式代入正则方程⑩式得

$$X_1 = \frac{-\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = \frac{\frac{Fl_1^3}{48EI_1}}{\frac{l_1^3}{48EI_1} + \frac{l_2^3}{48EI_2}} = \frac{I_2 l_1^3 F}{I_2 l_1^3 + I_1 l_2^3}$$

设上梁承担载荷为 F_1 , 下梁承担载荷为 F_2 , 且 $F_2 = X_1$, 根据平衡条件有

$$F_1 + F_2 = F$$

$$F_1 = F - F_2 = F - X_1 = \frac{I_1 I_2^3 F}{I_2 I_1^3 + I_1 I_2^3}$$

14.2 用力法解题6.35和6.41。

解 (1) 解题6.35。

(a) 如题14.2图(a)所示。

这是个一次超静定问题。解除支座C, 代之以反力 X_1 , 静定基如题14.2图(a₁)所示。正则方程为

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = \delta$$

单位载荷作用下的弯矩方程(题14.2图(a₂))为

AB段

$$\bar{M}_1 = F_{RA} x = 1 \times x = x$$

BC段

$$\bar{M}_2 = 1 \times (2l - x) = 2l - x$$

在题14.2图(a₂)中, 无载荷作用, 弯矩方程为

AB段

$$M_1 = 0$$

BC段

$$M_2 = 0$$

故

$$\Delta_{1F} = \sum \int \frac{M \bar{M}}{EI} dx = 0$$

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}^2}{EI} dx = \int_0^l \frac{x^2}{EI} dx + \int_l^{2l} \frac{(2l-x)^2}{EI} dx = \frac{2l^3}{3EI}$$

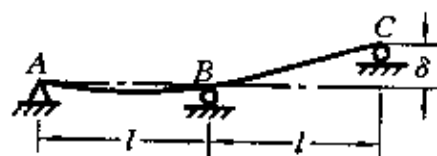
代入正则方程得

$$X_1 = \frac{3\delta EI}{2l^3}$$

最大弯矩发生在B截面, 即

$$M_{\max} = X_1 l = \frac{3\delta EI}{2l^3} \times l = \frac{3\delta EI}{2l^2}$$

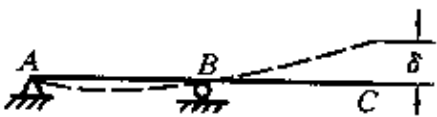
(b) 如题14.2图(b)所示。



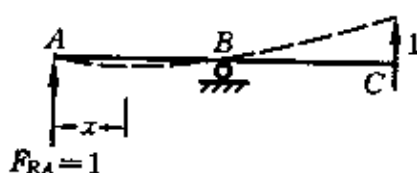
(a)



(a₁)

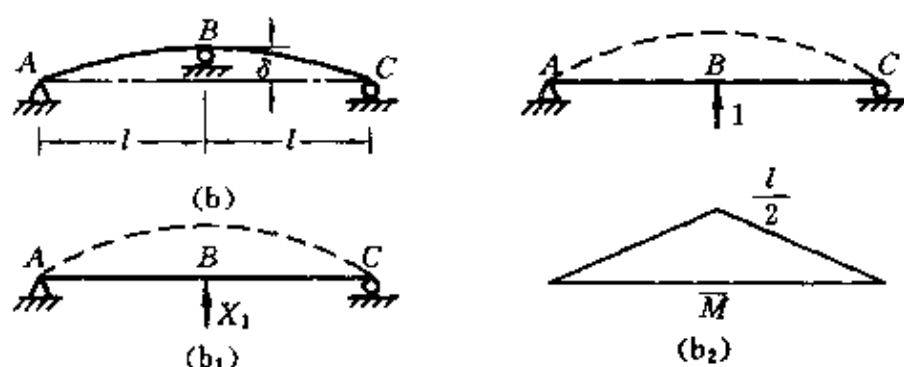


(a₂)



(a₃)

题14.2图



续题 14.2 图

这是个一次超静定问题。解除支座 B, 代之以反力 X_1 , 静定基如题 14.2 图 (b₁) 所示。正则方程为

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = \delta$$

因无外力作用, 所以常数

$$\Delta_{1F} = 0$$

用图乘法求系数 δ_{11} (题 14.2 图 (b₂))

$$\delta_{11} = \frac{\omega \bar{M}_C}{EI} = \frac{2}{EI} \left(\frac{1}{2} \times \frac{l}{2} \times l \times \frac{2}{3} \times \frac{l}{2} \right) = \frac{l^3}{6EI}$$

代入正则方程得 $X_1 = \frac{6EI\delta}{l^3}$

最大弯矩发生在 B 截面, 即

$$M_{\max} = \frac{X_1}{2} \times l = \frac{1}{2} \times \frac{6EI\delta}{l^3} \times l = \frac{3EI\delta}{l^2}$$

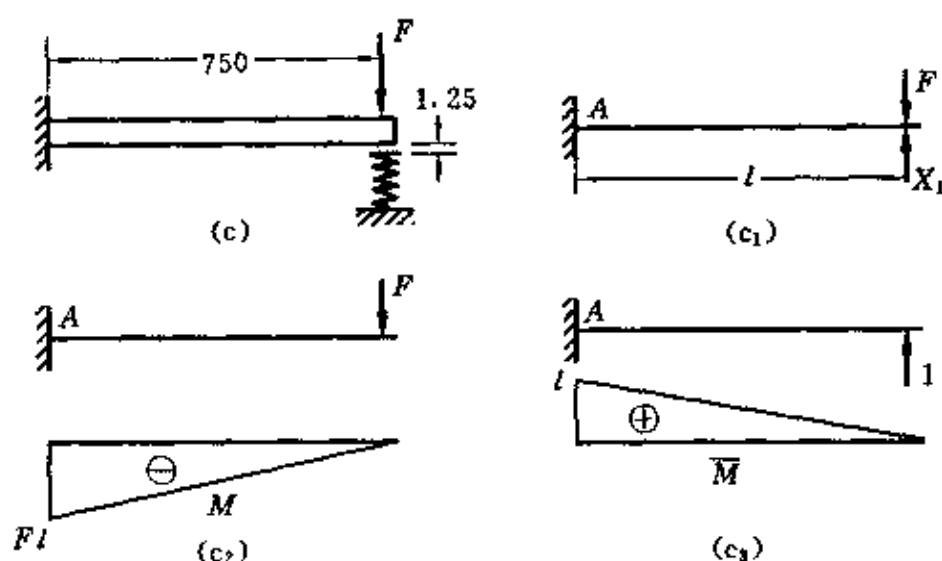
(2) 解题 6.41。 如题 14.2 图 (c) 所示。

这是个一次超静定问题。解除弹簧, 代之以反力 X_1 , 静定基如题 14.2 图 (c₁) 所示。正则方程为

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = -\Delta - X_1/C$$

方程右端 Δ 、 X_1/C 前的负号表示位移方向与 X_1 的指向相反。利用图乘法确定系数 δ_{11} 和常数 Δ_{1F} (题 14.2 图 (c₂)、(c₃))

$$\delta_{11} = \frac{\frac{1}{2}l^2 \times \frac{2}{3}l}{EI} = \frac{l^3}{3EI}$$



续题 14.2 图

$$\Delta_{1F} = \frac{-\frac{1}{2}Fl \times l \times \frac{2}{3}l}{EI} = -\frac{Fl^3}{3EI}$$

将上述 δ_{11} 、 Δ_{1F} 表达式代入正则方程得

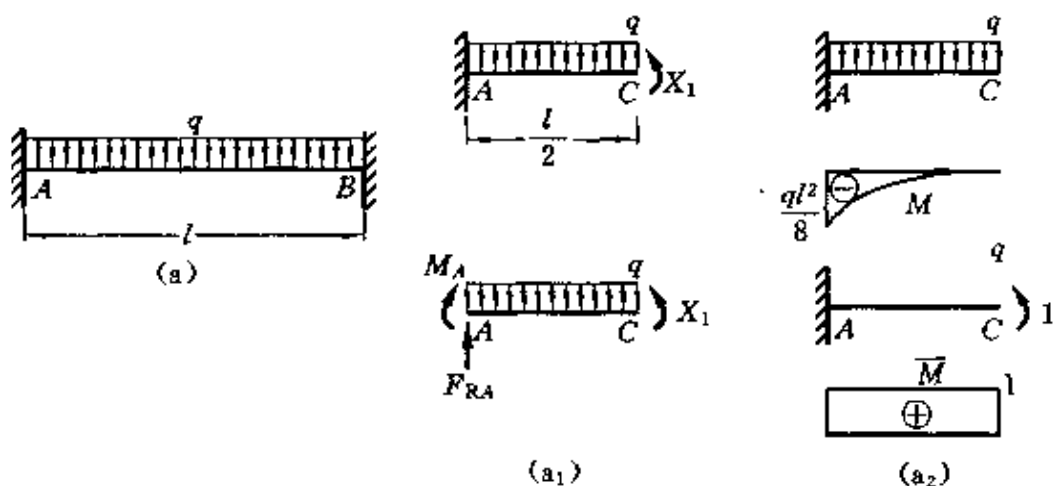
$$\begin{aligned} \frac{l^3}{3EI}X_1 - \frac{Fl^3}{3EI} &= -\left(\frac{X_1}{C} + 1.25 \times 10^{-3}\right) \\ X_1 &= \frac{\frac{Fl^3}{3EI} - 1.25 \times 10^{-3}}{\frac{l^3}{3EI} + \frac{1}{C}} = \frac{\frac{450 \times 0.75^3}{3 \times 30 \times 10^3} - 1.25 \times 10^{-3}}{\frac{0.75^3}{3 \times 30 \times 10^3} + \frac{1}{175 \times 10^3}} \text{ N} \\ &= 82.6 \text{ N} \end{aligned}$$

$X_1 = 82.6 \text{ N}$ 即为弹簧分担的力。

14.3 求题 14.3 图(a)、(b)所示超静定梁的两端反力。设固定端沿梁轴线的反力可以省略。

解 (a) 如题 14.3 图(a)所示。

题 14.3 图(a)所示为二次超静定结构,因结构和载荷均对称,从中间把梁切开(题 14.3 图(a₁)),截面上的反对称内力即剪力必为零,只有弯矩 X_1 ,问题简化为一次超静定。因对称截面的转角为零,所以正则方程为



题 14.3 图

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0 \quad (1)$$

利用图乘法(题 14.3 图(a₂))求系数 δ_{11} 和常数 Δ_{1F}

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \omega \bar{M}_C = \frac{(1 \times (l/2)) \times 1}{EI} = \frac{l}{2EI} \quad (2)$$

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EI} \omega \bar{M}_C = - \frac{\left(\frac{1}{3} \times \frac{l}{2} \times \frac{1}{8} ql^2 \right) \times 1}{EI} = - \frac{ql^3}{48EI} \quad (3)$$

将②、③式代入上述正则方程①式得

$$X_1 = - \frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = \frac{ql^3/(48EI)}{l/(2EI)} = \frac{ql^2}{24}$$

根据平衡条件求约束反力(题 14.3 图(a₁))

$$\sum M_A = 0, \quad M_A - X_1 + \frac{1}{2}q\left(\frac{l}{2}\right)^2 = 0$$

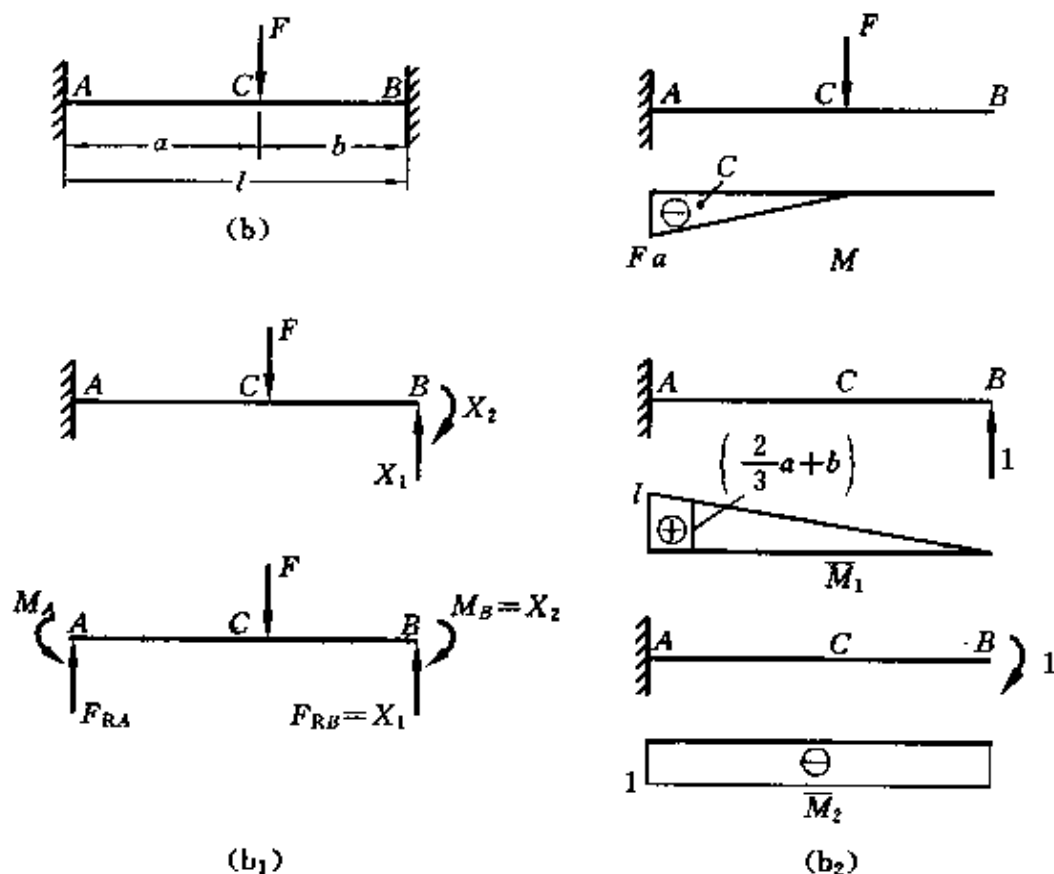
$$M_A = - \frac{ql^2}{12} (\cup), \quad F_{RA} = \frac{ql}{2} (\uparrow)$$

由对称性可以求得

$$M_B = - M_A = \frac{ql^2}{12} (\cup), \quad F_{RB} = F_{RA} = \frac{ql}{2} (\uparrow)$$

(b) 如题 14.3 图(b)所示。

这是个二次超静定问题。解除 B 端约束,代之以反力 X_1, X_2 ,



续题 14.3 图

静定基如题 14.3 图 (b₁) 所示。正则方程为

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

利用图乘法求系数 δ_{ij} 和常数 Δ_{iF} (题 14.3 图 (b₂))

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \omega \bar{M}_C = \frac{\left(\frac{1}{2}l^2\right) \left(\frac{2}{3}l\right)}{EI} = \frac{l^3}{3EI} \quad (5)$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI} \omega \bar{M}_C = \frac{\left(\frac{1}{2}l^2\right) \times (-1)}{EI} = -\frac{l^2}{2EI} \quad (6)$$

$$\delta_{22} = \frac{(-1 \times l) \times (-1)}{EI} = \frac{l}{EI} \quad (7)$$

$$\Delta_{1F} = -\frac{\left(\frac{1}{2}Fa^2\right) \left(\frac{2}{3}a + b\right)}{EI} = -\frac{Fa^2}{6EI}(3b + 2a) \quad (8)$$

$$\Delta_{2F} = \frac{\left(-\frac{1}{2}Fa^2\right) \times (-1)}{EI} = \frac{Fa^2}{2EI} \quad (9)$$

将⑤~⑨式代入正则方程④式求得

$$X_1 = \frac{Fa^2(l+2b)}{l^3}, \quad X_2 = \frac{Fba^2}{l^2}$$

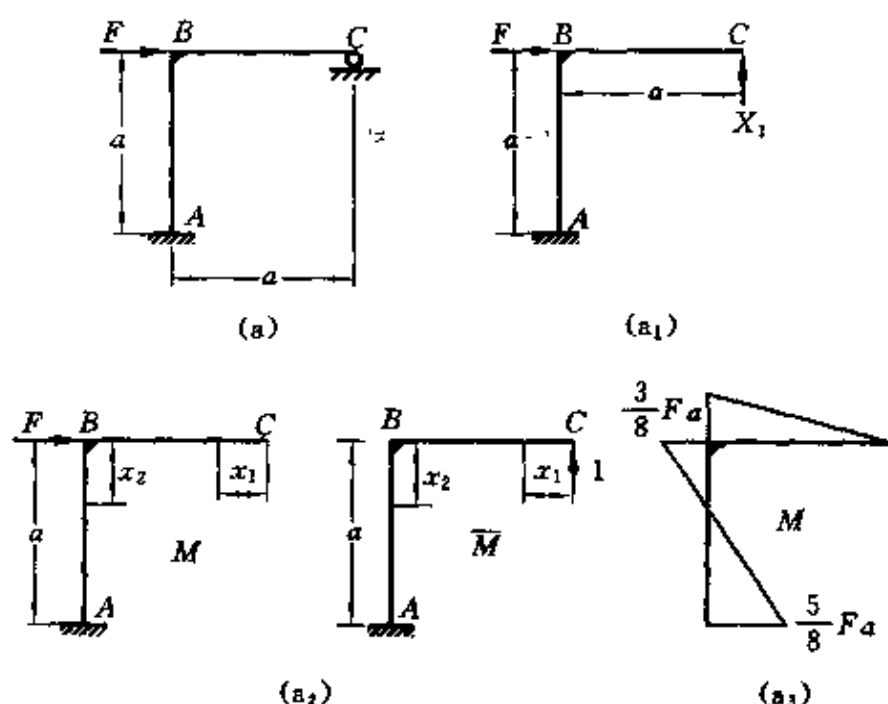
$$F_{RB} = X_1 = \frac{Fa^2(l+2b)}{l^3} (\uparrow), \quad M_B = X_2 = \frac{Fba^2}{l^2} (\circlearrowleft)$$

由静力平衡方程可求得(题14.3图(b₁))

$$F_{RA} = \frac{Fb^2(l+2a)}{l^3} (\uparrow), \quad M_A = \frac{Fab^2}{l^2} (\circlearrowleft)$$

14.4 作题14.4图(a)、(b)、(c)所示刚架的弯矩图。设刚架各杆的 EI 皆相等。

解 (a) 如题14.4图(a)所示。



题14.4图

这是个一次超静定问题。解除支座C,代之以反力 X_1 ,静定基如题14.4图(a₁)所示。正则方程为

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0 \quad (1)$$

用莫尔积分求 δ_{11} 、 Δ_{1F} (题 14.4 图(a₂))

$$AB \text{ 段} \quad M_2 = -Fx_2, \quad \bar{M}_2 = a$$

$$BC \text{ 段} \quad M_1 = 0, \quad \bar{M}_1 = x_1$$

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \sum \int \frac{\bar{M}^2}{EI} dx = \int_0^a \frac{\bar{M}_1^2}{EI} dx_1 + \int_0^a \frac{\bar{M}_2^2}{EI} dx_2 \\ &= \frac{1}{EI} \left[\int_0^a x_1^2 dx_1 + \int_0^a a^2 dx_2 \right] = \frac{4a^3}{3EI} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{1F} &= \sum \int \frac{M\bar{M}}{EI} dx = \int_0^a \frac{M_1\bar{M}_1}{EI} dx_1 + \int_0^a \frac{M_2\bar{M}_2}{EI} dx_2 \\ &= \frac{1}{EI} \left[\int_0^a (-Fx_2)a dx_2 \right] = -\frac{Fa^3}{2EI} \end{aligned} \quad (3)$$

将②、③式代入正则方程①式求得

$$X_1 = \frac{-\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = \frac{Fa^3/(2EI)}{4a^3/(3EI)} = \frac{3}{8}F$$

求得 X_1 后作弯矩图如题 14.4 图(a₃)所示。

(b) 如题 14.4 图(b)所示。

这是个一次超静定问题,解除支座 C,代之以反力 X_1 ,静定基如题 14.4 图(b₁)所示。正则方程为

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0 \quad (4)$$

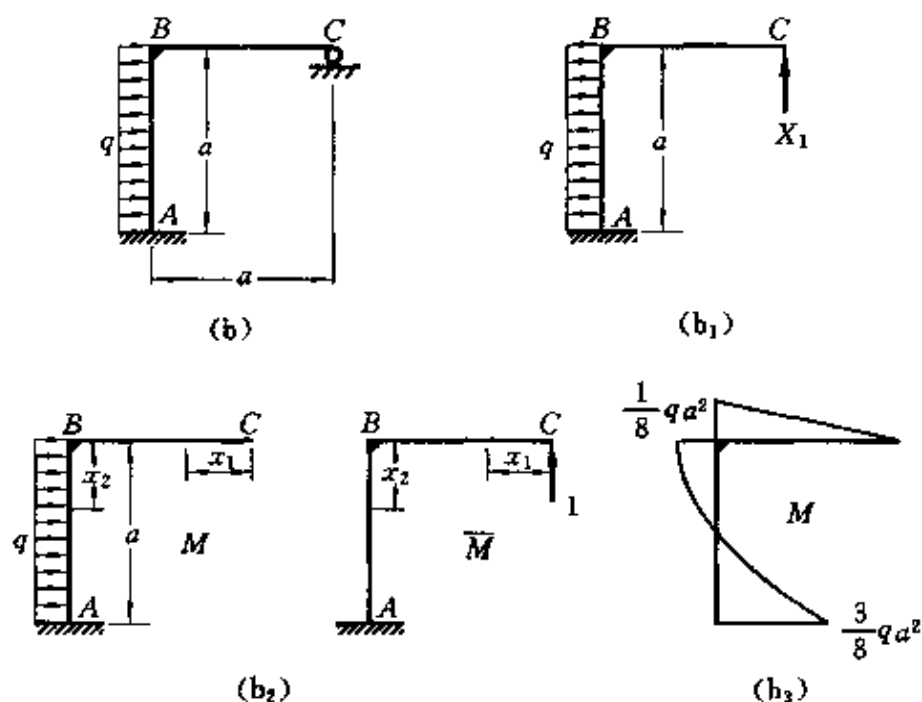
用莫尔积分求 δ_{11} 、 Δ_{1F} (题 14.4 图(b₂))

$$AB \text{ 段} \quad M_2 = -\frac{q}{2}x_2^2, \quad \bar{M}_2 = a$$

$$BC \text{ 段} \quad M_1 = 0, \quad \bar{M}_1 = x_1$$

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \sum \int \frac{\bar{M}^2}{EI} dx = \int_0^a \frac{\bar{M}_1^2}{EI} dx_1 + \int_0^a \frac{\bar{M}_2^2}{EI} dx_2 \\ &= \frac{1}{EI} \left[\int_0^a x_1^2 dx_1 + \int_0^a a^2 dx_2 \right] = \frac{4a^3}{3EI} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\Delta_{1F} = \sum \int \frac{M\bar{M}}{EI} dx = \int_0^a \frac{M_1\bar{M}_1}{EI} dx_1 + \int_0^a \frac{M_2\bar{M}_2}{EI} dx_2$$



续题 14.4 图

$$= \frac{1}{EI} \left[\int_0^a \left(-\frac{q}{2} x_2^2 \right) a dx_2 \right] = -\frac{qa^4}{6EI} \quad (6)$$

将⑤、⑥式代入正则方程④式求得

$$X_1 = \frac{-\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = \frac{qa^4/(6EI)}{4a^3/(3EI)} = \frac{1}{8}qa$$

求得 X_1 后作弯矩图如题 14.4 图(b₃)所示。

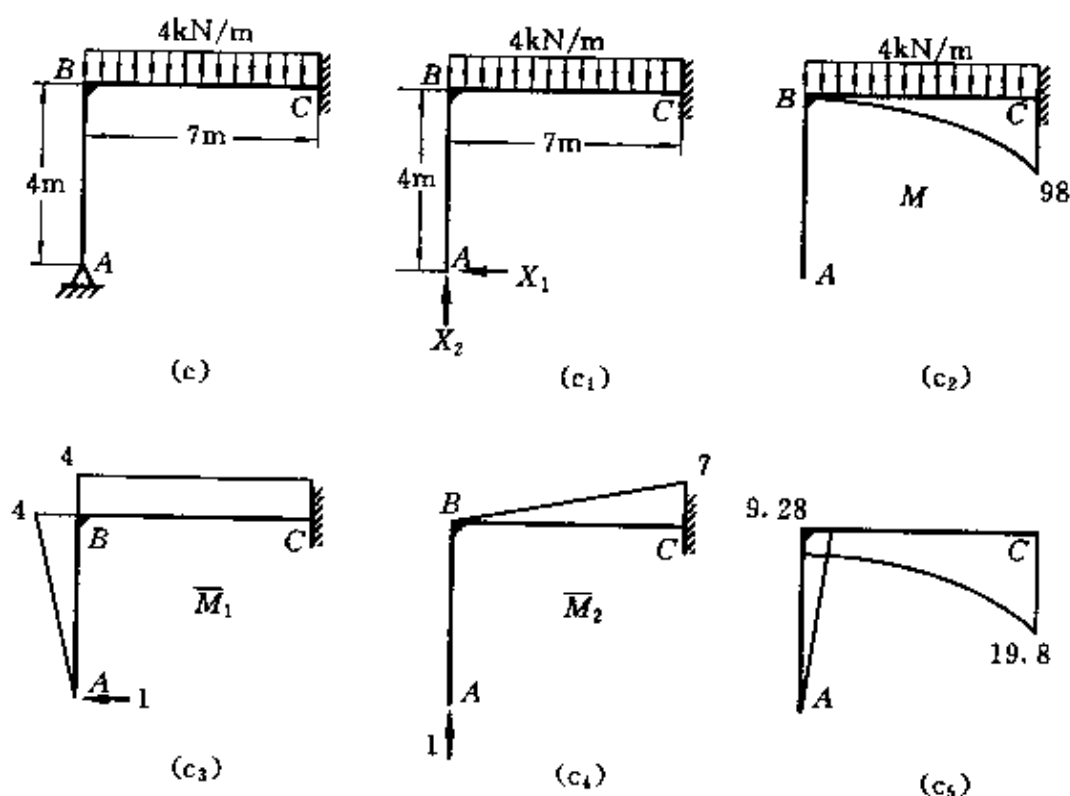
(c) 如题 14.4 图(c)所示。

题 14.4 图(c)所示的是二次超静定刚架,解除支座 A,代之以反力 X_1 、 X_2 ,正定基如题 14.4 图(c₁)所示。正则方程为

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

利用图乘法求 δ_{ij} 、 Δ_{iF} (题 14.4 图(c₂)、(c₃)、(c₄))

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \sum \frac{\omega \bar{M}_C}{EI} \\ &= \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{1}{2} \times 4 \times 4 \right) \times \left(\frac{2}{3} \times 4 \right) + (7 \times 4) \times 4 \right] = \frac{400}{3EI} \quad (8) \end{aligned}$$



续题 14.4 图

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{\omega \bar{M}_C}{EI} = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{1}{2} \times 7 \times 7 \right) \times 4 \right] = \frac{98}{EI} \quad (9)$$

$$\delta_{22} = \frac{\omega \bar{M}_C}{EI} = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{1}{2} \times 7 \times 7 \right) \times \left(\frac{2}{3} \times 7 \right) \right] = \frac{343}{3EI} \quad (10)$$

$$\Delta_{1F} = \frac{\omega \bar{M}_C}{EI} = \frac{1}{EI} \left[\left(-\frac{1}{3} \times 98 \times 7 \right) \times 4 \right] = -\frac{2744}{3EI} \quad (11)$$

$$\Delta_{2F} = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{3} \times 98 \times 7 \times \frac{3}{4} \times 7 \right) = -\frac{2401}{2EI} \quad (12)$$

将⑧~⑫式代入正则方程⑦式得

$$\frac{400}{3}X_1 + 98X_2 - \frac{2744}{3} = 0$$

$$98X_1 + \frac{343}{3}X_2 - \frac{2401}{2} = 0$$

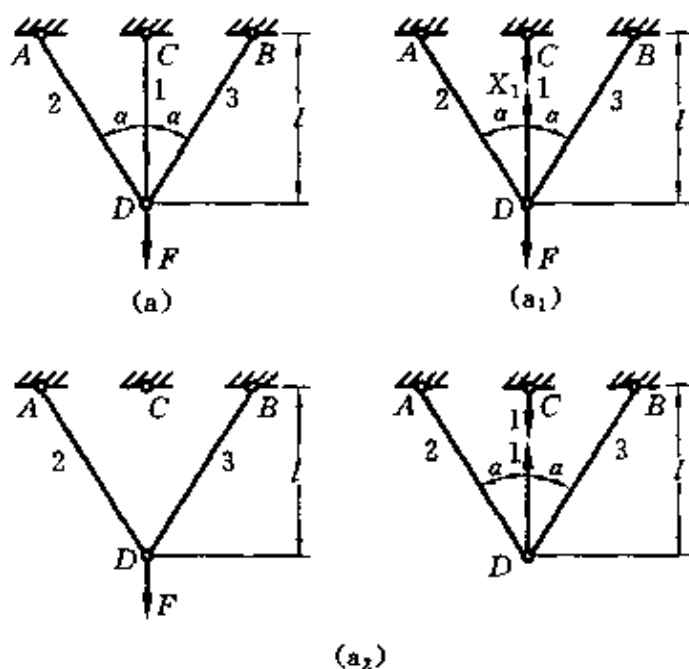
从上二式解得

$$X_1 = -2.32 \text{ kN}, \quad X_2 = 12.5 \text{ kN}$$

求出 X_1 、 X_2 后作弯矩图如题 14.4 图(c₅)所示。

14.5 题 14.5 图(a)、(b)、(c)所示杆系各杆的材料相同,横截面面积相等,试求各杆的内力。建议用力法求解。

解 (a) 如题 14.5 图(a)所示。



题 14.5 图

这是个一次超静定问题,解除 1 杆约束,代之以反力 X_1 ,静定基如题 14.5 图(a₁)所示。正则方程为

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0 \quad (1)$$

对桁架各杆编号,用单位力法(题 14.5 图(a₂))计算 δ_{11} 、 Δ_{1F} ,在单位力和外载荷 F 作用下各杆的轴力 \bar{F}_{Ni} 和 F_{Ni} 列入题 14.5 表(a)中。

应用莫尔定理求 δ_{11} 、 Δ_{1F}

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \sum \frac{\bar{F}_{Ni}^2 l_i}{EA_i} = \frac{l}{EA} \left(1 + 2 \times \frac{1}{4\cos^2\alpha} \times \frac{1}{\cos\alpha} \right) \\ &= \frac{l(2\cos^3\alpha + 1)}{2EA\cos^3\alpha} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}\Delta_{1F} &= \sum \frac{F_{Ni} \bar{F}_{Ni} l_i}{EA_i} = -\frac{l}{EA} \left(2 \times \frac{1}{2\cos\alpha} \times \frac{F}{2\cos\alpha} \times \frac{1}{\cos\alpha} \right) \\ &= -\frac{Fl}{2EA\cos^3\alpha}\end{aligned}\quad (3)$$

题 14.5 表(a)

杆件编号	1	2	3
\bar{F}_{Ni}	1	$-\frac{1}{2\cos\alpha}$	$-\frac{1}{2\cos\alpha}$
F_{Ni}	0	$\frac{F}{2\cos\alpha}$	$\frac{F}{2\cos\alpha}$
长度 l_i	l	$\frac{l}{\cos\alpha}$	$\frac{l}{\cos\alpha}$

将②、③式代入正则方程①式,求得

$$N_{CD} = X_1 = \frac{-\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = \frac{\frac{Fl}{2EA\cos^3\alpha}}{\frac{l(2\cos^3\alpha + 1)}{2EA\cos^3\alpha}} = \frac{F}{1 + 2\cos^3\alpha} \quad (\text{拉})$$

对题 14.5 图(a₁)应用平衡条件

$$\sum F_x = 0, \quad F_{NAD} = F_{NBD}$$

$$\sum F_y = 0, \quad 2F_{NAD}\cos\alpha + X_1 = F$$

求得

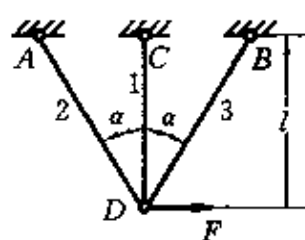
$$F_{NAD} = F_{NBD} = \frac{F\cos^2\alpha}{1 + 2\cos^3\alpha} \quad (\text{拉})$$

(b) 如题 14.5 图(b)所示。

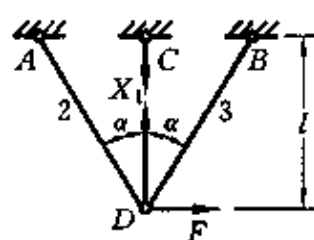
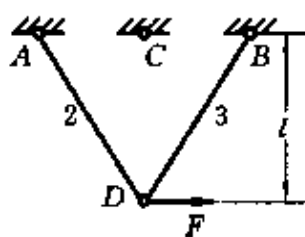
题 14.5 图(b)所示的是一次超静定杆系,解除 1 杆,代之以反力 X_1 ,静定基如题 14.5 图(b₁)所示,正则方程为

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0 \quad (4)$$

对桁架各杆编号,用单位力法(题 14.5 图(b₂))计算 δ_{11} 、 Δ_{1F} ,在单位力和外载荷 F 作用下各杆的轴力 \bar{F}_{Ni} 和 F_{Ni} 列入题 14.5 表(b)中。



(b)

(b₁)(b₂)

续题 14.5 图

题 14.5 表(b)

杆件编号	1	2	3
\bar{F}_{N_i}	1	$-\frac{1}{2\cos\alpha}$	$-\frac{1}{2\cos\alpha}$
F_{N_i}	0	$\frac{F}{2\sin\alpha}$	$-\frac{F}{2\sin\alpha}$
长度 l_i	l	$\frac{l}{\cos\alpha}$	$\frac{l}{\cos\alpha}$

应用莫尔定理求 δ_{11} 、 Δ_{1F}

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= \sum \frac{\bar{F}_{N_i}^2 l_i}{EA_i} = \frac{l}{EA} \left(1 + 2 \times \frac{1}{4\cos^2\alpha} \times \frac{1}{\cos\alpha} \right) \\ &= \frac{l(2\cos^3\alpha + 1)}{2EA\cos^3\alpha}\end{aligned}\quad (5)$$

$$\begin{aligned}\Delta_{1F} &= \sum \frac{F_{N_i} \bar{F}_{N_i} l_i}{EA_i} \\ &= -\frac{l}{EA} \left[\frac{-1}{2\cos\alpha} \times \frac{F}{2\sin\alpha} \times \frac{1}{\cos\alpha} + \frac{-1}{2\cos\alpha} \times \left(-\frac{F}{2\sin\alpha} \right) \times \frac{1}{\cos\alpha} \right] \\ &= 0\end{aligned}\quad (6)$$

将⑤、⑥式代入正则方程④式,求得

$$F_{NCD} = X_1 = -\frac{\bar{\Delta}_{1F}}{\delta_{11}} = 0$$

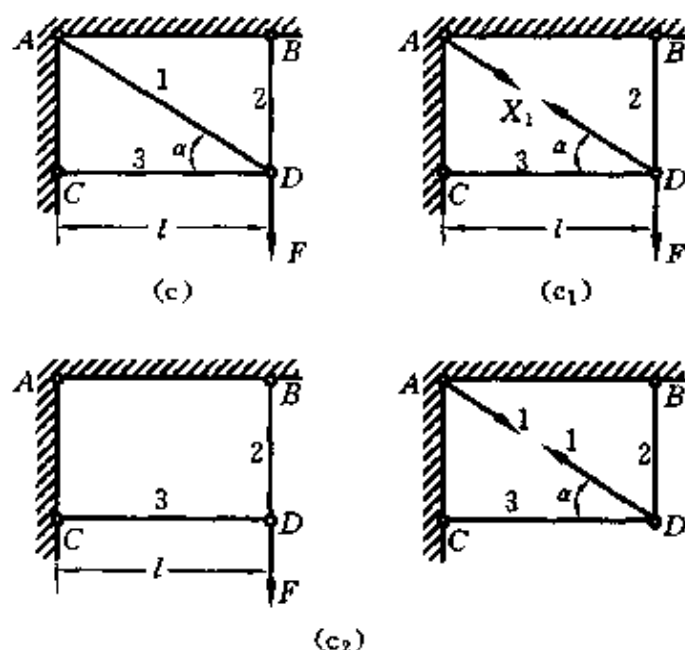
对题 14.5 图(b₁)应用平衡条件

$$\sum F_x = 0, \quad -F_{NAD}\sin\alpha + F_{NBD}\sin\alpha + F = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{NAD}\cos\alpha + F_{NBD}\cos\alpha + X_1 = 0$$

求得 $F_{NAD} = \frac{F}{2\sin\alpha}$ (拉), $F_{NBD} = -\frac{F}{2\sin\alpha}$ (压)

(c) 如题 14.5 图(c)所示。



续题 14.5 图

题 14.5 图(c)所示的是一次超静定杆系,解除 1 杆,代之以反力 X_1 ,静定基如题 14.5 图(c₁)所示,正则方程为

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0 \quad (7)$$

对桁架各杆编号,用单位力法(题 14.5 图(c₂))计算 δ_{11} 、 Δ_{1F} ,在单位力和外载荷 F 作用下各杆的轴力 \bar{F}_{Ni} 和 F_{Ni} 列入题 14.5 表(c)中。

题 14.5 表(c)

杆件编号	1	2	3
\bar{F}_{N_i}	1	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
F_{N_i}	0	F	0
长度 l_i	$\frac{l}{\cos\alpha}$	$l\tan\alpha$	l

应用莫尔定理求 δ_{11} 、 Δ_{1F}

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= \sum \frac{\bar{F}_{N_i}^2 l_i}{EA_i} = \frac{l}{EA} \left(\frac{1}{\cos\alpha} + \sin^2\alpha \tan\alpha + \cos^2\alpha \right) \\ &= \frac{l(1 + \sin^3\alpha + \cos^3\alpha)}{EA \cos\alpha}\end{aligned}\quad (8)$$

$$\Delta_{1F} = \sum \frac{F_{N_i} \bar{F}_{N_i} l_i}{EA_i} = \frac{Fl}{EA} (-\sin\alpha) \tan\alpha = -\frac{Fl \sin^2\alpha}{EA \cos\alpha}\quad (9)$$

将⑧、⑨式代入正则方程⑦式,求得

$$\begin{aligned}F_{NAD} = X_1 &= \frac{-\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = \frac{Fl \sin^2\alpha}{EA \cos\alpha} \bigg/ \frac{l(1 + \sin^3\alpha + \cos^3\alpha)}{EA \cos\alpha} \\ &= \frac{F \sin^2\alpha}{1 + \sin^3\alpha + \cos^3\alpha} \quad (\text{拉})\end{aligned}$$

对题 14.5 图(c₁)应用平衡条件

$$\sum F_x = 0, \quad F_{NCD} + F_{NAD} \cos\alpha = 0$$

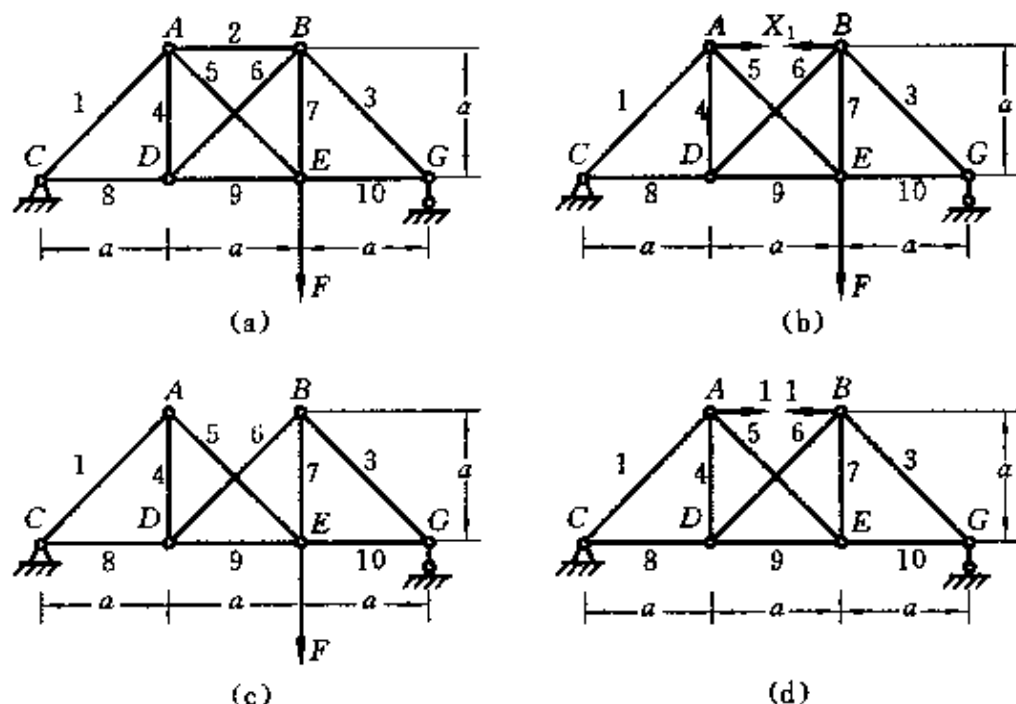
$$\sum F_y = 0, \quad F_{NBD} + F_{NAD} \sin\alpha - F = 0$$

求得

$$F_{NBD} = \frac{F(1 + \cos^3\alpha)}{1 + \sin^3\alpha + \cos^3\alpha} \quad (\text{拉})$$

$$F_{NCD} = -\frac{F \sin^2\alpha \cos\alpha}{1 + \sin^3\alpha + \cos^3\alpha} \quad (\text{压})$$

14.6 在题 14.6 图(a)所示平面桁架中,所有杆件的 E 皆相同, CA 、 AB 、 BG 三杆的横截面面积为 30 cm^2 ,其余各杆的横截面面积均为 15 cm^2 。 $a=6 \text{ m}$, $F=130 \text{ kN}$ 。试求 AB 杆的轴力。



题 14.6 图

解 题 14.6 图(a)所示的是一次超静定桁架,将 2 杆截断,用反力 X_1 代之,静定基如题 14.6 图(b)所示。正则方程为

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0$$

对桁架各杆编号,根据题 14.6 图(c)、(d),用单位力法计算 δ_{11} 、 Δ_{1F} ,并将单位力和载荷作用下的各杆轴力 \bar{F}_{Ni} 和 F_{Ni} 列入题 14.6 表中。

题 14.6 表

杆件编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_{Ni}	$-\frac{\sqrt{2}}{3}F$	0	$-\frac{2\sqrt{2}}{3}F$	$\frac{2}{3}F$	$-\frac{\sqrt{2}}{3}F$	$-\frac{2\sqrt{2}}{3}F$	$\frac{4}{3}F$	$\frac{1}{3}F$	F	$\frac{2}{3}F$
\bar{F}_{Ni}	0	1	0	1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	1	0	1	0
杆长 L_i	$\sqrt{2}a$	a	$\sqrt{2}a$	a	$\sqrt{2}a$	$\sqrt{2}a$	a	a	a	a

应用莫尔定理求 δ_{11} 、 Δ_{1F}

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= \sum \frac{\bar{F}_{Ni}^2 l_i}{EA_i} = \frac{a}{EA} \left(\frac{1}{2} + 1 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 1 + 1 \right) \\ &= \frac{(8\sqrt{2} + 7)a}{2EA} \\ \Delta_{1F} &= \sum \frac{F_{Ni} \bar{F}_{Ni} l_i}{EA_i} = \frac{Fa}{EA} \left(\frac{2}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{4}{3} + 1 \right) \\ &= (3 + 2\sqrt{2}) \frac{Fa}{EA}\end{aligned}$$

将上述 δ_{11} 、 Δ_{1F} 表达式代入正则方程, 得

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = -\frac{(3 + 2\sqrt{2}) \frac{Fa}{EA}}{\frac{(8\sqrt{2} + 7)a}{2EA}} = -\frac{6 + 4\sqrt{2}}{7 + 8\sqrt{2}} F$$

AB 杆的轴力

$$\begin{aligned}F_{NAB} &= X_1 = -\frac{6 + 4\sqrt{2}}{7 + 8\sqrt{2}} F = -\frac{6 + 4\sqrt{2}}{7 + 8\sqrt{2}} \times (130 \times 10^3) \text{ N} \\ &= -82.7 \text{ kN}\end{aligned}$$

AB 杆轴力为负值, 表明该杆受压。

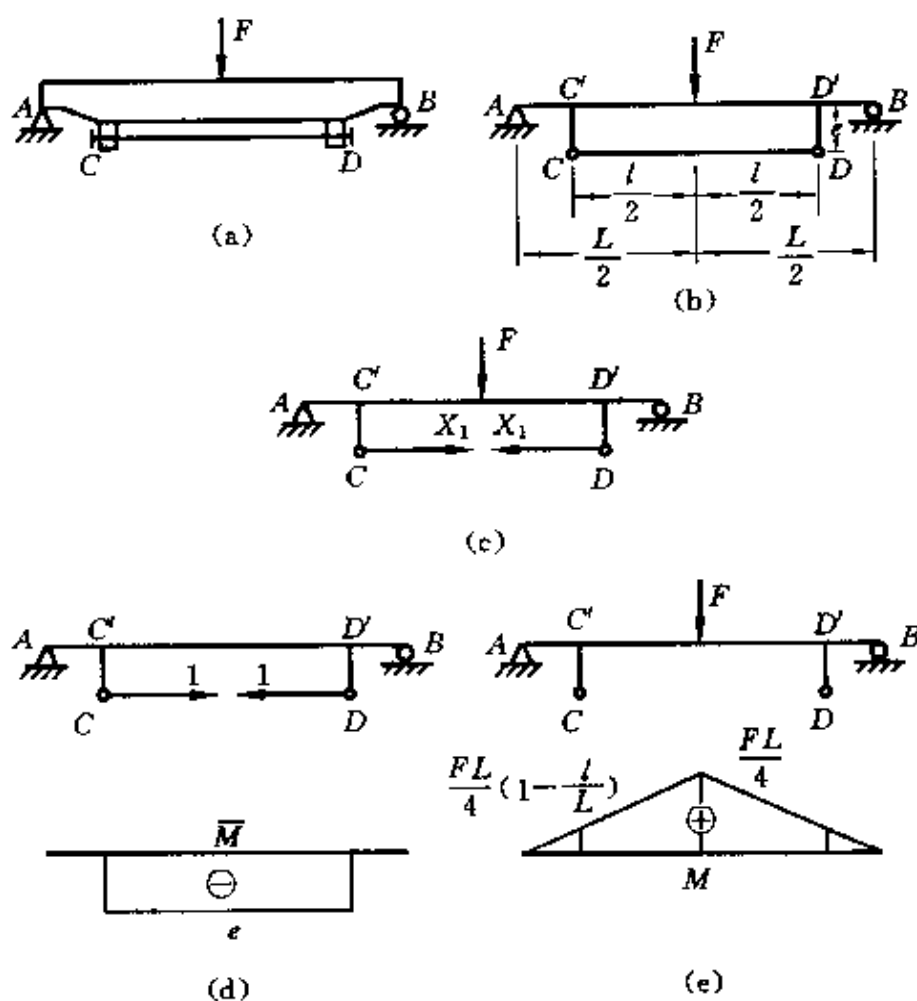
14.7 为改善题 14.7 图(a)所示桥式起重机大梁的刚度和强度, 在大梁的下方增加预应力拉杆 CD。梁的计算简图如题 14.7 图(b)所示。由于 CC' 和 DD' 两杆甚短, 且刚度较大, 其变形可以不计。试求拉杆 CD 因吊重 F 而增加的内力。

解 这是个一次超静定问题, 将 CD 杆截开, 代之以反力 X_1 , 静定基如题 14.7 图(c)所示。正则方程为

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = 0$$

根据题 14.7 图(d)、(e), 用单位力法计算 δ_{11} , 用图乘法计算 Δ_{1F} , 在计算 δ_{11} 时, 注意轴力对 δ_{11} 也有影响。

$$\delta_{11} = \frac{\bar{F}_{N杆}^2 l}{EA_{杆}} + \frac{\bar{F}_{N梁}^2 l}{EA_{梁}} + \frac{\bar{M}^2 l}{EI} = \frac{l}{EA_{杆}} + \frac{l}{EA_{梁}} + \frac{e^2 l}{EI}$$



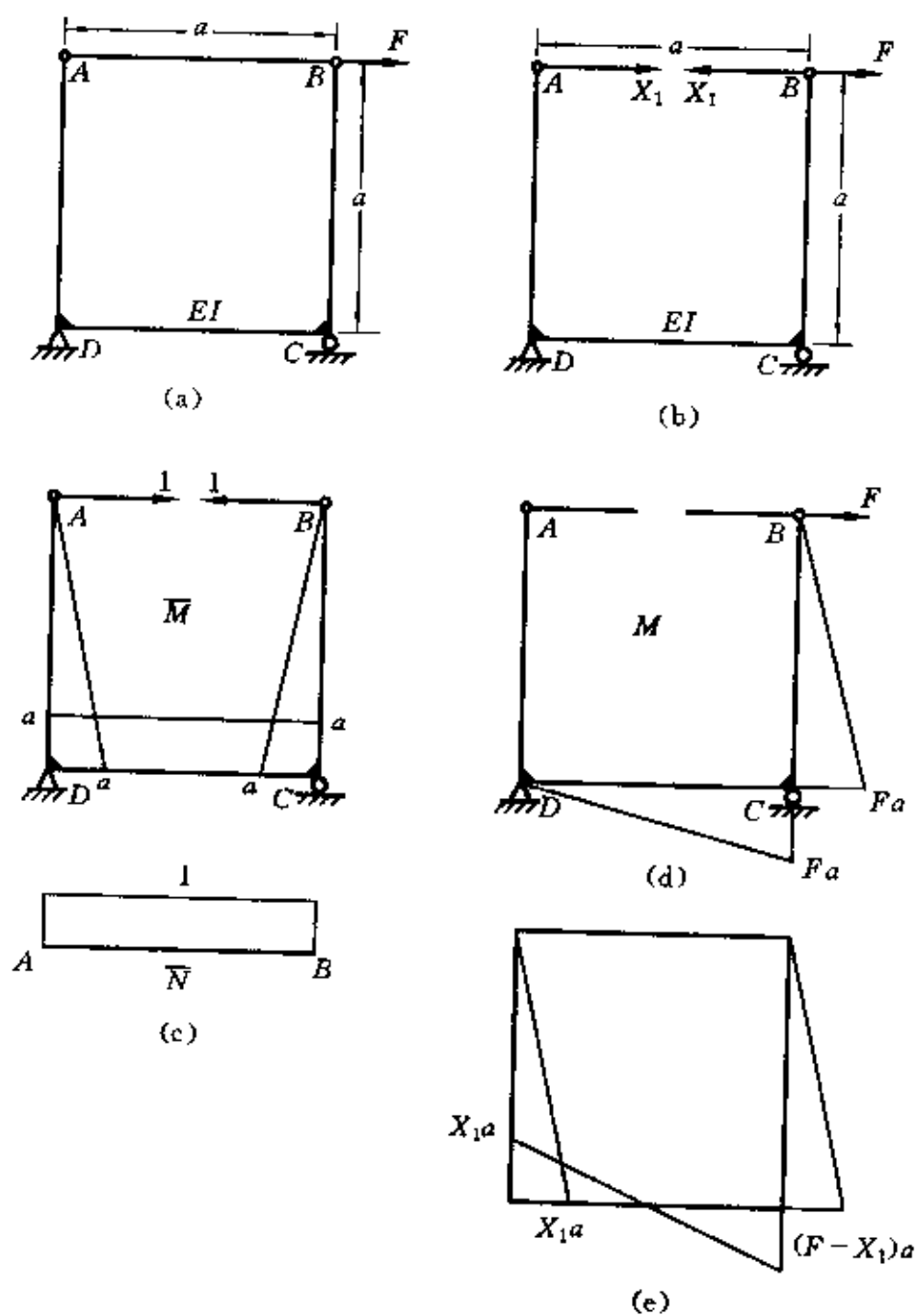
题 14.7 图

$$\begin{aligned}\Delta_{1F} &= \frac{\omega \bar{M}_C}{EI} = -\frac{2}{EI} \left[\frac{\frac{FL}{4} \left(1 - \frac{l}{L}\right) + \frac{FL}{4}}{2} \times \frac{l}{2} e \right] \\ &= -\frac{eFl(2L-l)}{8EI}\end{aligned}$$

将 δ_{11} 、 Δ_{1F} 代入正则方程, 解得的 X_1 即为 CD 杆的内力

$$X_1 = \frac{-\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = \frac{\frac{eFl(2L-l)}{8EI}}{\frac{l}{EA_{杆}} + \frac{l}{EA_{梁}} + \frac{e^2 l}{EI}} = \frac{Fe(2L-l)}{8I \left(\frac{e^2}{I} + \frac{1}{A_{杆}} + \frac{1}{A_{梁}} \right)}$$

14.8 如题 14.8 图(a)所示, 刚架的 A、B 两点由拉杆 AB 相连接, 拉杆的抗拉刚度为 EA。试作刚架的弯矩图。



题 14.8 图

解 题 14.8 图(a)所示的是一次超静定刚架, 将 AB 杆截开, 代之以反力 X_1 , 静定基如题 14.8 图(b)所示。正则方程为

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0$$

根据题 14.8 图(c)、(d)用图乘法计算 δ_{11} 和 Δ_{1F} 。

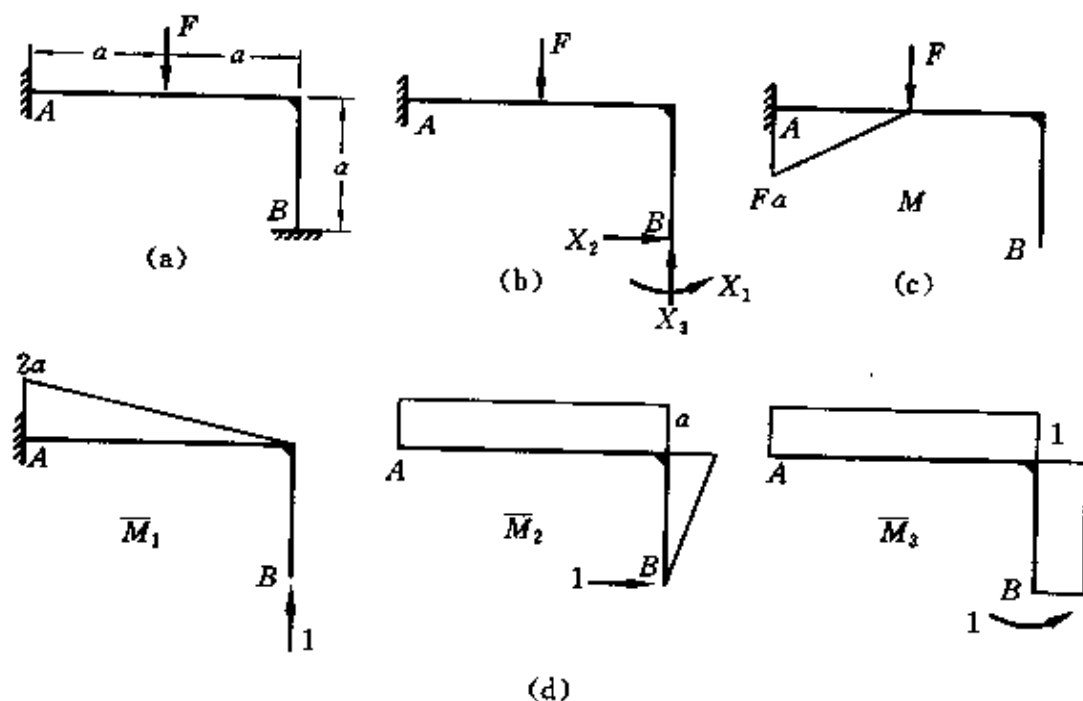
$$\begin{aligned}
\delta_{11} &= \sum \frac{\omega \bar{M}_c}{EI} + \frac{\omega \bar{N}_c}{EA} \\
&= \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{1}{2} a^2 \times \frac{2}{3} a \right) \times 2 + a^2 \times a \right] + \frac{a \times 1}{EA} \times 1 \\
&= \frac{5a^3}{3EI} + \frac{a}{EA} \\
\Delta_{1F} &= - \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{1}{2} Fa \times a \right) \times a + \left(\frac{1}{2} Fa \times a \right) \times \frac{2}{3} a \right] \\
&= - \frac{5}{6} \frac{Fa^3}{EI}
\end{aligned}$$

将上述 δ_{11} 、 Δ_{1F} 表达式代入正则方程中, 求出

$$X_1 = \frac{-\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = \frac{\frac{5Fa^3}{6EI}}{\frac{5a^3}{3EI} + \frac{a}{EA}} = \frac{F}{2} \times \frac{1}{1 + \frac{3I}{5Aa^2}} = \frac{5FAa^2}{2(5Aa^2 + 3I)}$$

求出 X_1 后作弯矩图如题 14.8 图(e)所示。

14.9 求解题 14.9 图(a)所示超静定刚架。



题 14.9 图

解 题14.9图(a)所示的是三次超静定刚架,解除支座B,代之以反力 X_1, X_2, X_3 ,静定基如题14.9图(b)所示,正则方程为

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2F} = 0 \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3F} = 0 \end{cases}$$

题14.9图(c)为外载荷作用下的弯矩图,题14.9图(d)为单位载荷作用下的弯矩图,根据题14.9图(c)、(d),用图乘法求 δ_{ij}, Δ_{iF}

$$\delta_{11} = \frac{\omega \bar{M}_C}{EI} = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{1}{2} \times 2a \times 2a \right) \left(\frac{2}{3} \times 2a \right) \right] = \frac{8a^3}{3EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{\omega \bar{M}_C}{EI} = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{1}{2} \times 2a \times 2a \right) a \right] = \frac{2a^3}{EI}$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = \frac{\omega \bar{M}_C}{EI} = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{1}{2} \times 2a \times 2a \right) \times 1 \right] = \frac{2a^2}{EI}$$

$$\begin{aligned} \delta_{22} &= \sum \frac{\omega \bar{M}_C}{EI} \\ &= \frac{1}{EI} \left[(2a \times a)a + \left(\frac{1}{2} \times a \times a \right) \times \frac{2}{3}a \right] = \frac{7a^3}{3EI} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{23} = \delta_{32} &= \sum \frac{\omega \bar{M}_C}{EI} \\ &= \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{a}{2} \times a \right) \times 1 + (2a \times a) \times 1 \right] = \frac{5a^2}{2EI} \end{aligned}$$

$$\delta_{33} = \sum \frac{\omega \bar{M}_C}{EI} = \frac{1}{EI} [(a \times 1) \times 1 + (2a \times 1) \times 1] = \frac{3a}{EI}$$

$$\Delta_{1F} = \frac{\omega \bar{M}_C}{EI} = \frac{1}{EI} \left[\left(-\frac{1}{2} \times Fa \times a \right) \left(\frac{5}{6} \times 2a \right) \right] = -\frac{5Fa^3}{6EI}$$

$$\Delta_{2F} = \frac{\omega \bar{M}_C}{EI} = \frac{1}{EI} \left[\left(-\frac{1}{2} \times Fa \times a \right) a \right] = -\frac{Fa^3}{2EI}$$

$$\Delta_{3F} = \frac{\omega \bar{M}_C}{EI} = \frac{1}{EI} \left[\left(-\frac{1}{2} \times Fa \times a \right) \times 1 \right] = -\frac{Fa^2}{2EI}$$

将以上求得的系数 δ_{ij} 和常数 Δ_{iF} 表达式代入到正则方程并化简,得

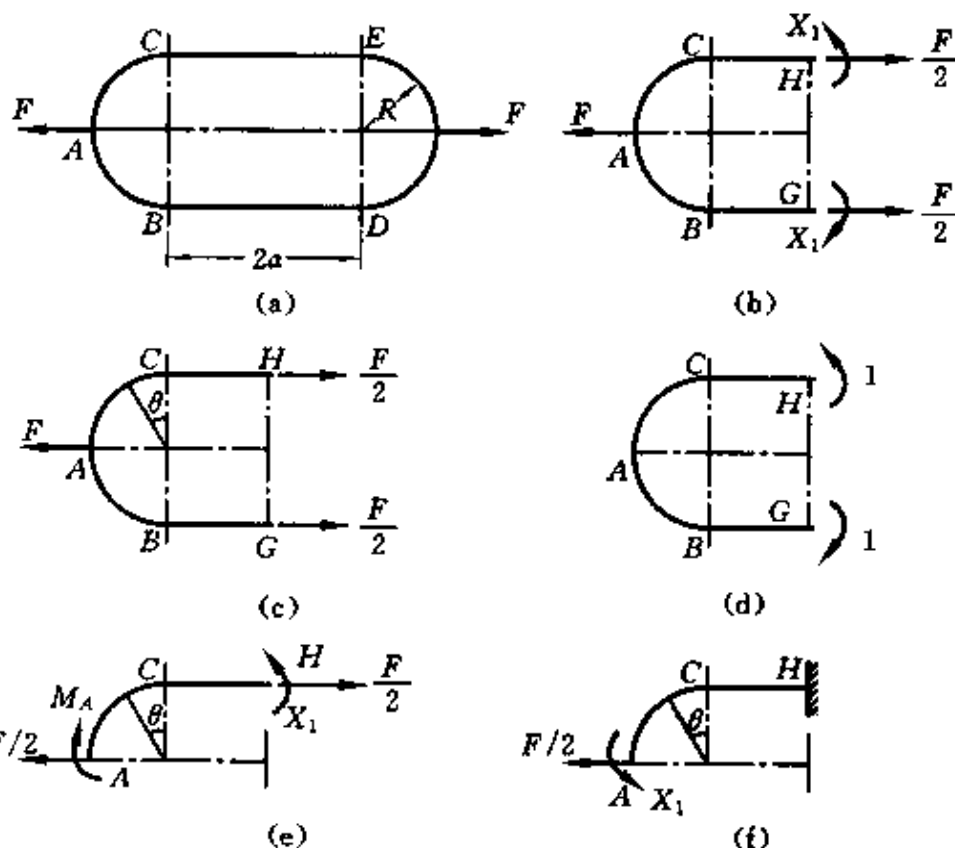
$$\begin{cases} \frac{8}{3}X_1 + 2X_2 + 2\left(\frac{X_3}{a}\right) = \frac{5}{6}F \\ 2X_1 + \frac{7}{3}X_2 + \frac{5}{2}\left(\frac{X_3}{a}\right) = \frac{F}{2} \\ 2X_1 + \frac{5}{2}X_2 + 3\left(\frac{X_3}{a}\right) = \frac{F}{2} \end{cases}$$

联立以上三方程,解得

$$X_1 = \frac{7}{16}F, \quad X_2 = -\frac{F}{4}, \quad X_3 = \frac{Fa}{12}$$

求出 B 支座的三个反力后,应用平衡条件很容易计算出 A 支座的反力。

14.10 链条的一环如题 14.10 图(a)所示。试求环内最大弯矩。



题 14.10 图

解 一般地说,求解封闭刚架是个三次超静定问题,但利用对

称性可使问题简化。将链环沿对称面切开,静定基如题 14.10 图 (b)所示。因载荷和结构均对称,所以在对称截面上的反对称内力必为零,因此 H 、 G 截面上的剪力为零,轴力为 $F/2$,只剩下一个未知数弯矩 X_1 ,正则方程为

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0$$

外力 F 产生的弯矩(题 14.10 图(c)):

$$AC \text{ 段} \quad M_1 = \frac{F}{2}R(1 - \cos\theta)$$

$$CF \text{ 段} \quad M_2 = 0$$

单位力产生的弯矩(题 14.10 图(d)):

$$AC \text{ 段} \quad \bar{M}_1 = -1$$

$$CE \text{ 段} \quad \bar{M}_2 = -1$$

应用莫尔定理,计算 δ_{11} 、 Δ_{1F}

$$\delta_{11} = \frac{2}{EI} \left[\int_0^{\pi/2} (-1)^2 R d\theta + \int_0^a (-1)^2 dx \right] = \frac{2}{EI} \left(\frac{\pi}{2} R + a \right)$$

$$\Delta_{1F} = \frac{2}{EI} \left[\int_0^{\pi/2} \frac{FR}{2} (1 - \cos\theta) (-1) R d\theta \right] = -\frac{FR^2}{EI} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)$$

将上述 δ_{11} 、 Δ_{1F} 表达式代入正则方程,求出

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = \frac{\frac{FR^2}{EI} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)}{\frac{2}{EI} \left(\frac{\pi}{2} R + a \right)} = \frac{FR^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)}{\pi R + 2a}$$

我们所求出的 X_1 不一定是最大弯矩,在 A 点处也可能有最大弯矩,需要求出进行比较。

由静力平衡得(题 14.10 图(e))

$$\sum M_A = 0, \quad X_1 - \frac{F}{2}R = M_A$$

$$M_A = \frac{FR^2(\pi/2 - 1)}{\pi R + 2a} - \frac{FR}{2} = -\frac{FR(R + a)}{\pi R + 2a}$$

为方便比较,令 $a=R$,则

$$X_1 = \frac{FR^2(\pi/2 - 1)}{\pi R + 2a} = \frac{0.571FR^2}{R(\pi + 2)}$$

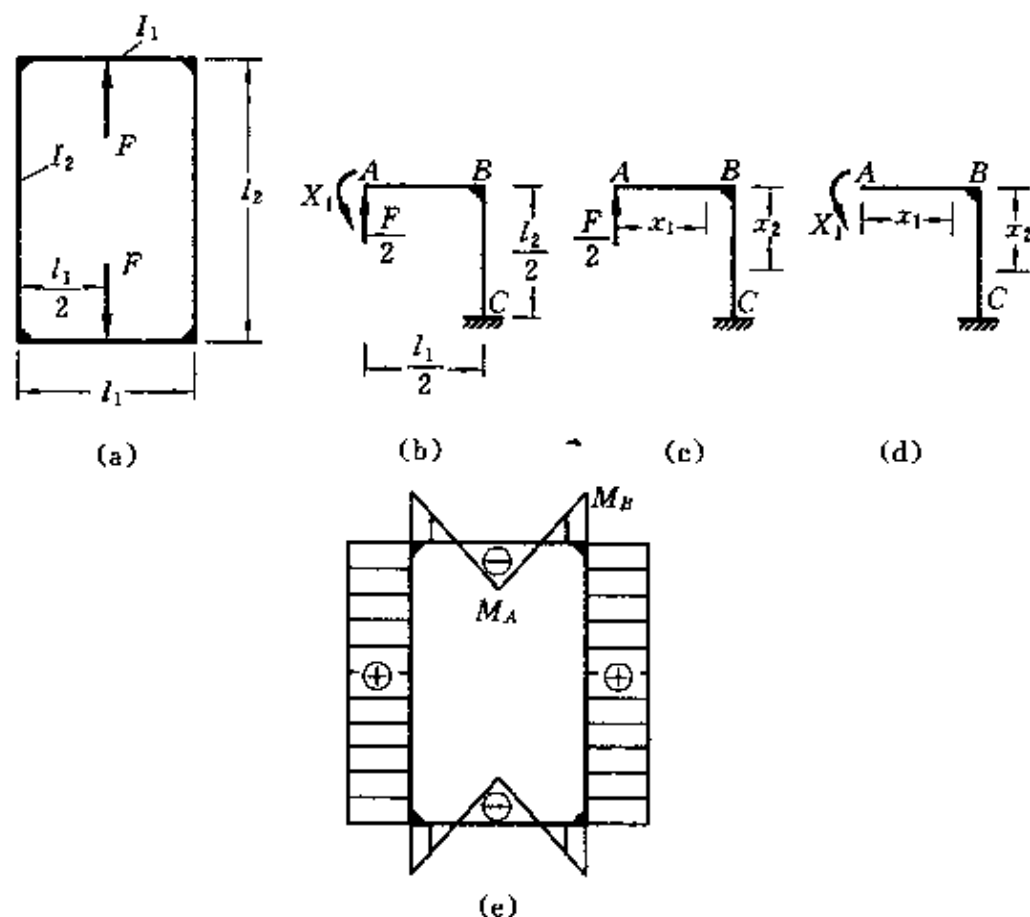
$$|M_A| = \frac{FR(R + a)}{\pi R + 2a} = \frac{2FR^2}{R(\pi + 2)}$$

可见 $M_A > X_1$, 最大弯矩为

$$M_{\max} = \frac{FR(R + a)}{\pi R + 2a}$$

本题也可用 1/4 链环为静定基求解, 如题 14.10 图 (f) 所示, 读者可试作。

14.11 压力机机身或轧钢机机架可以简化成封闭的矩形刚架(题 14.11 图 (a))。设刚架横梁的抗弯刚度为 EI_1 , 立柱的抗弯刚度为 EI_2 。作刚架的弯矩图。



题 14.11 图

解 由于构件和载荷对称,取 1/4 刚架为静定基,如题 14.11 图(b)所示,在 A 截面上只有一个未知内力 X_1 (弯矩),正则方程为

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0$$

载荷作用下的弯矩(题 14.11 图(c))

$$AB \text{ 段} \quad M_1 = \frac{F}{2}x_1$$

$$BC \text{ 段} \quad M_2 = \frac{F}{4}l_1$$

单位载荷作用下的弯矩

$$AB \text{ 段} \quad \bar{M}_1 = -1$$

$$BC \text{ 段} \quad \bar{M}_2 = -1$$

应用莫尔定理求 δ_{11} 、 Δ_{1F}

$$\delta_{11} = \int_0^{l_1/2} \frac{1}{EI_1} dx_1 + \int_0^{l_2/2} \frac{1}{EI_2} dx_2 = \frac{l_1}{2EI_1} + \frac{l_2}{2EI_2}$$

$$\Delta_{1F} = - \int_0^{l_1/2} \frac{Fx_1}{2EI_1} dx_1 - \int_0^{l_2/2} \frac{Fl_1}{4EI_2} dx_2 = - \left(\frac{Fl_1^2}{16EI_1} + \frac{Fl_1l_2}{8EI_2} \right)$$

将上述 δ_{11} 、 Δ_{1F} 表达式代入正则方程,求得

$$X_1 = - \frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = \frac{\frac{Fl_1^2}{16EI_1} + \frac{Fl_1l_2}{8EI_2}}{\frac{l_1}{2EI_1} + \frac{l_2}{2EI_2}} = \frac{Fl_1}{8} \left(\frac{l_1I_2 + 2l_2I_1}{l_1I_2 + l_2I_1} \right)$$

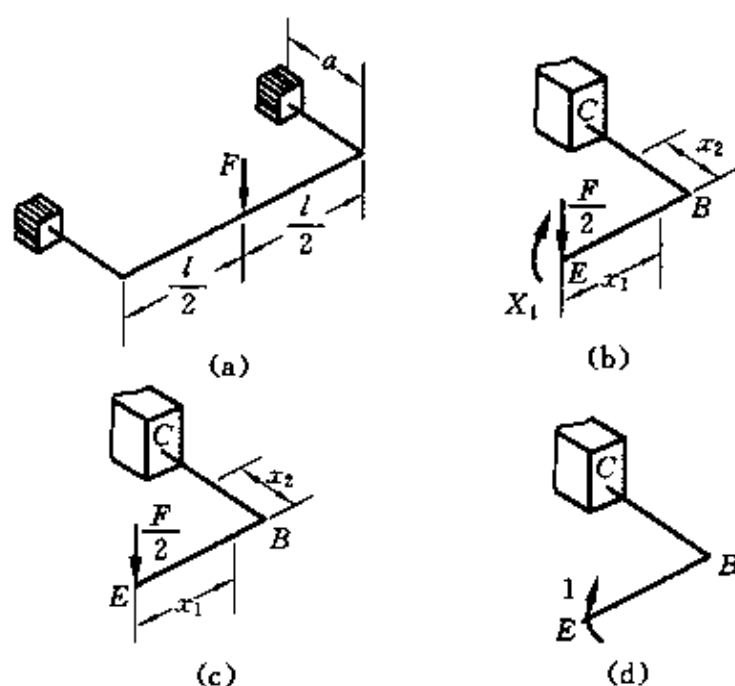
作弯矩图如题 14.11 图(e)所示。

$$\text{截面 A 弯矩} \quad M_A = -X_1$$

$$\text{截面 B 弯矩} \quad M_B = \frac{Fl_1}{4} - X_1 = \frac{Fl_1}{8} \left(\frac{l_1I_2 + l_2I_1}{l_1I_2 + l_2I_1} \right)$$

14.12 折杆截面为圆形,如题 14.12(a)所示,直径 $d=2 \text{ cm}$ 。 $a=0.2 \text{ m}$, $l=1 \text{ m}$, $F=650 \text{ N}$, $E=200 \text{ GPa}$, $G=80 \text{ GPa}$ 。试求 F 力作用点的垂直位移。

解 沿对称面将折杆截成两部分,右半部分如题 14.12 图(b)所示,由对称条件知,截出部分在截面 E 处作用有载荷 $F/2$ 及弯矩 X_1 ,其余内力为零,正则方程为



题 14.12 图

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0$$

根据题 14.12 图 (c)、(d), 内力方程为

$$EB \text{ 段} \quad M_1 = -\frac{F}{2}x_1, \quad \bar{M}_1 = 1$$

$$T_1 = 0, \quad \bar{T}_1 = 0$$

$$BC \text{ 段} \quad M_2 = -\frac{F}{2}x_2, \quad \bar{M}_2 = 0$$

$$T_2 = \frac{Fl}{4}, \quad \bar{T}_2 = -1$$

应用莫尔定理并考虑到 $GI_p = 0.4E \times 2I = 0.8EI$, 计算 Δ_{1F} 及 δ_{11}

$$\begin{aligned} \Delta_{1F} &= \int_0^{l/2} \frac{M_1 \bar{M}_1}{EI} dx_1 + \int_0^{l/2} \frac{T_1 \bar{T}_1}{GI_p} dx_1 + \int_0^a \frac{M_2 \bar{M}_2}{EI} dx_2 + \int_0^a \frac{T_2 \bar{T}_2}{GI_p} dx_2 \\ &= \frac{1}{EI} \int_0^{l/2} \left(-\frac{F}{2}x_1 \right) dx_1 + \frac{1}{GI_p} \int_0^a \frac{Fl}{4} (-1) dx_2 \\ &= -\frac{l^2}{16EI} - \frac{Fla}{4GI_p} = -\frac{Fl}{16EI} (l + 5a) \end{aligned}$$

$$\delta_{11} = \int_0^{l/2} \frac{\bar{M}_1^2}{EI} dx_1 + \int_0^{l/2} \frac{\bar{T}_1^2}{GI_p} dx_1 + \int_0^a \frac{\bar{M}_2^2}{EI} dx_2 + \int_0^a \frac{\bar{T}_2^2}{GI_p} dx_2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{EI} \int_0^{l/2} (1^2) dx_1 + \frac{1}{GI_p} \int_0^a (-1)^2 dx_2 \\
&= \frac{l}{2EI} + \frac{a}{GI_p} = \frac{l + 2.5a}{2EI}
\end{aligned}$$

将上述 δ_{11} 、 Δ_{1F} 表达式代入正则方程

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = \frac{\frac{Fl(l+5a)}{16EI}}{\frac{l+2.5a}{2EI}} = \frac{Fl(l+5a)}{8(l+2.5a)}$$

求得 X_1 后,可计算 EB 和 BC 段内的弯矩和扭矩

EB 段

$$M_1 = -\frac{F}{2}x_1 + X_1 = -\frac{Fx_1}{2} + \frac{Fl(l+5a)}{8(l+2.5a)}, \quad T_1 = 0$$

BC 段

$$M_2 = -\frac{F}{2}x_2, \quad T_2 = \frac{Fl}{4} - X_1 = \frac{Fl^2}{8(l+2.5a)}$$

用莫尔积分计算集中力作用点位移时,应在该点作用以单位力,为求由单位力引起的内力 \overline{M} 、 \overline{T} ,只要在上述 EB 和 BC 两段弯矩和扭矩表达式中令 $F=1$,就可得相应的 \overline{M} 和 \overline{T} 。

$$EB \text{ 段} \quad \overline{M}_1 = -\frac{x_1}{2} + \frac{l(l+5a)}{8(l+2.5a)}, \quad \overline{T}_1 = 0$$

$$BC \text{ 段} \quad \overline{M}_2 = -\frac{1}{2}x_2, \quad \overline{T}_2 = \frac{l^2}{8(l+2.5a)}$$

利用莫尔积分求 E 点的铅垂位移

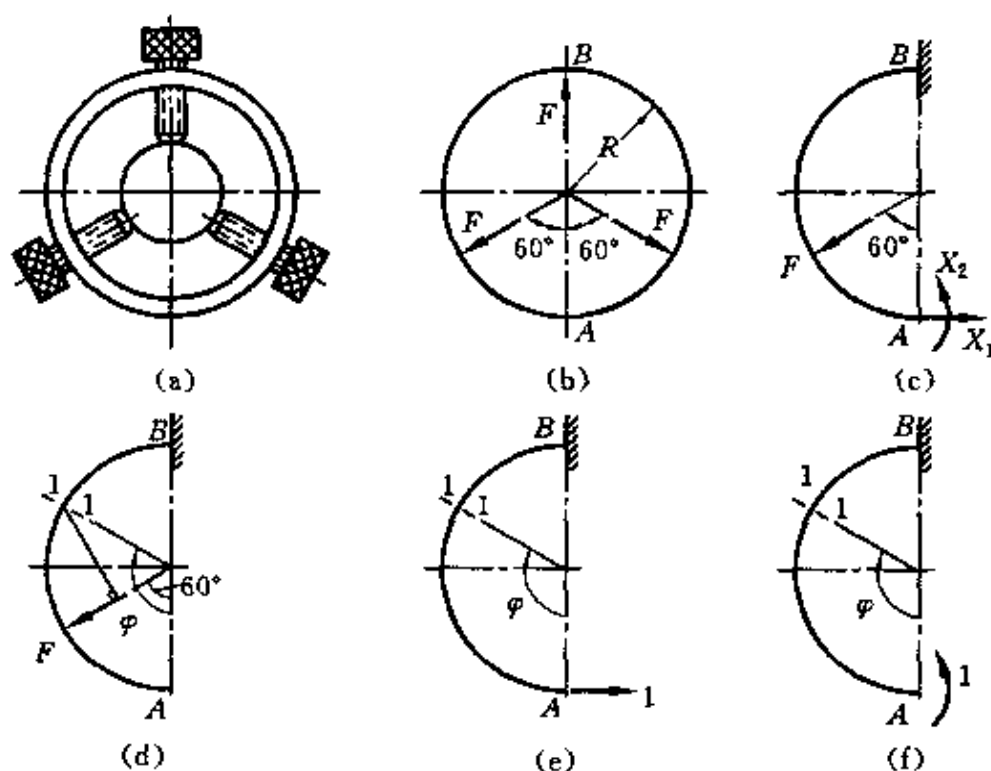
$$\begin{aligned}
w_E &= \int_s \frac{M\overline{M}}{EI} ds + \int_s \frac{T\overline{T}}{GI_p} ds \\
&= \frac{2}{EI} \int_0^{l/2} \left[-\frac{F}{2}x_1 + \frac{Fl(l+5a)}{8(l+2.5a)} \right] \left[-\frac{x_1}{2} + \frac{l(l+5a)}{8(l+2.5a)} \right] dx_1 \\
&\quad + \frac{2}{EI} \int_0^a \left(-\frac{F}{2}x_2 \right) \left(-\frac{1}{2}x_2 \right) dx_2 \\
&\quad + \frac{2}{GI_p} \int_0^a \frac{Fl^2}{8(l+2.5a)} \times \frac{l^2}{8(l+2.5a)} dx_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{Fl^3}{48EI} - \frac{Fl^3(l+5a)}{32EI(l+2.5a)} + \frac{Fl^3(l+5a)^2}{64EI(l+2.5a)^2} \\
&\quad + \frac{Fa^3}{6EI} + \frac{Fl^3a}{32GI_p(l+2.5a)^2} \\
&= \frac{Fl^3}{16EI} \left[\frac{1}{3} - \frac{l+5a}{2(l+2.5a)} + \frac{(l+5a)^2}{4(l+2.5a)^2} \right] \\
&\quad + \frac{Fa^3}{6EI} + \frac{5Fl^3a}{128EI(l+2.5a)^2}
\end{aligned}$$

将 $EI = 200 \times 10^9 \times \frac{\pi}{64} (0.02)^4 = 1571 \text{ N} \cdot \text{m}^2$, $l = 1 \text{ m}$, $a = 0.2 \text{ m}$, $F = 650 \text{ N}$ 代入上式得

$$w_E = 4.86 \text{ mm}$$

14.13 车床夹具如题14.13图(a)所示, EI 已知。试求夹具A截面上的弯矩。



题14.13图

解 题14.13图(a)的受力图如题14.13图(b)所示,从对称面

AB 切开, 取其一半作为静定基, 如题 14.13 图(c)所示, 未知内力为 X_1, X_2 , 正则方程为

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0 \end{cases}$$

外力 F 及单位力 $X_1=1, X_2=1$ 产生的内力分别为(题 14.13 图(d)、(e)、(f))

$$M_1 = 0 \quad \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}\right)$$

$$M_2 = -FR \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{FR}{2}(\sin\varphi - \sqrt{3}\cos\varphi)$$

$$\left(\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \pi\right)$$

$$\bar{M}_1 = 1 \times R(1 - \cos\varphi) \quad (0 \leq \varphi \leq \pi)$$

$$\bar{M}_2 = 1 \quad (0 \leq \varphi \leq \pi)$$

用莫尔定理计算 δ_{ij} 和 Δ_{iF}

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \int_0^\pi \bar{M}_1^2 R d\varphi = \frac{R^3}{EI} \int_0^\pi (1 - \cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{3\pi R^3}{2EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI} \int_0^\pi \bar{M}_1 \bar{M}_2 R d\varphi = \frac{R^2}{EI} \int_0^\pi (1 - \cos\varphi) d\varphi = \frac{\pi R^2}{EI}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \int_0^\pi \bar{M}_2^2 R d\varphi = \frac{R}{EI} \int_0^\pi 1^2 d\varphi = \frac{\pi R}{EI}$$

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EI} \int_{\pi/3}^\pi M_2 \bar{M}_1 R d\varphi$$

$$= -\frac{FR^3}{2EI} \int_{\pi/3}^\pi (\sin\varphi - \sqrt{3}\cos\varphi)(1 - \cos\varphi) d\varphi$$

$$= -2.41 \frac{FR^3}{EI}$$

$$\Delta_{2F} = \frac{1}{EI} \int_{\pi/3}^\pi M \bar{M}_2 R d\varphi = -\frac{FR^3}{EI} \int_{\pi/3}^\pi (\sin\varphi - \sqrt{3}\cos\varphi) d\varphi$$

$$= -\frac{3FR^2}{2EI}$$

将上述 δ_{11} 和 Δ_{1F} 表达式代入正则方程,得

$$\begin{cases} \frac{3\pi R^3}{2EI} X_1 + \frac{\pi R^2}{EI} X_2 = 2.41 \frac{FR^3}{EI} \\ \frac{\pi R^2}{EI} X_1 + \frac{\pi R}{EI} X_2 = \frac{3FR^2}{2EI} \end{cases}$$

联立以上二式求解,得

$$X_1 = 0.577F, \quad X_2 = -0.0999FR$$

A 截面上的弯矩

$$M_A = X_2 = -0.0999FR$$

负号表示真实的弯矩方向与假设的相反。

14.14 沿圆环的水平和垂直直径各作用一对 F 力,试求圆环横截面上的内力。

解 利用对称性,取 $1/4$ 圆环为静定基,如题 14.14 图(b)所示,截面上的轴力为 $F/2$,剪力为 0。设未知弯矩为 X_1 ,问题简化为一次超静定,正则方程为

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0$$

根据题 14.14 图(c),求出载荷作用下的弯矩,根据题 14.14 图(d)求出单位载荷作用下的弯矩

$$M = \frac{F}{2}[-a\sin\theta + a(1 - \cos\theta)], \quad \bar{M} = 1$$

应用莫尔定理求 δ_{11} 和 Δ_{1F}

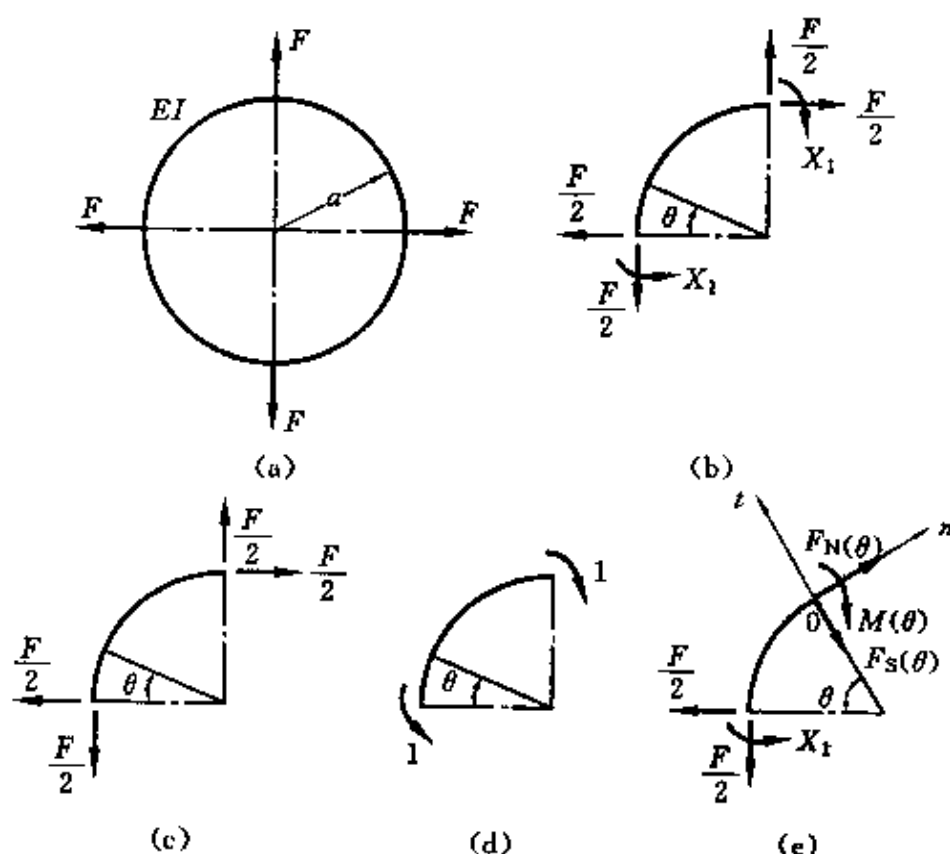
$$\delta_{11} = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{EI} ad\theta = \frac{\pi a}{2EI}$$

$$\Delta_{1F} = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{EI} \frac{F}{2} a(1 - \cos\theta - \sin\theta)ad\theta = \frac{Fa^2}{2EI} \left(\frac{\pi}{2} - 2 \right)$$

将上述 δ_{11} 和 Δ_{1F} 表达式代入正则方程得

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = \frac{\frac{Fa^2}{2EI} \left(\frac{\pi}{2} - 2 \right)}{\frac{\pi a}{2EI}} = Fa \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right)$$

应用平衡条件可确定任意截面上的内力(题 14.14 图(e))



题 14.14 图

$$\sum n = 0, \quad F_N(\theta) - \frac{F}{2}\sin\theta - \frac{F}{2}\cos\theta = 0$$

$$F_N(\theta) = \frac{F}{2}(\sin\theta + \cos\theta)$$

$$\sum t = 0, \quad F_S(\theta) + \frac{F}{2}\sin\theta - \frac{F}{2}\cos\theta = 0$$

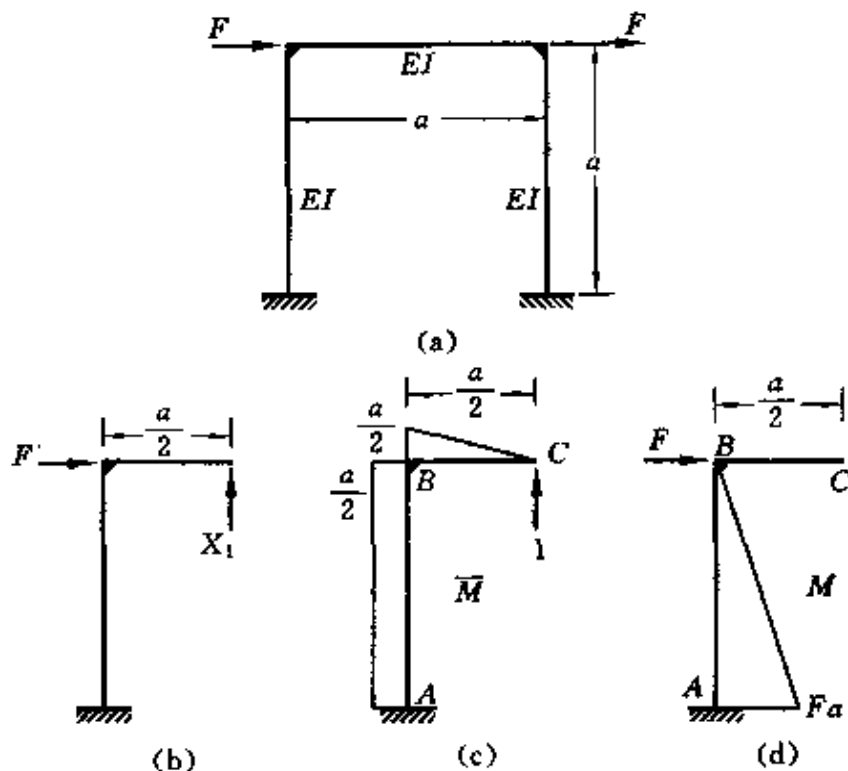
$$F_S(\theta) = \frac{F}{2}(\cos\theta - \sin\theta)$$

$$\sum M_O = 0, \quad M(\theta) - X_1 - \frac{F}{2}a(1 - \cos\theta) + \frac{F}{2}a\sin\theta = 0$$

$$M(\theta) = Fa\left(\frac{2}{\pi} - \frac{\sin\theta + \cos\theta}{2}\right)$$

14.15 求解题 14.15 图(a)所示超静定刚架。

解 这是个三次超静定刚架,从对称面将刚架切开,取其一



题 14.15 图

半。如图 14.15(b) 所示。由于结构对称, 载荷反对称, 所以在对称截面上的对称内力为零, 即轴力和弯矩均为零, 只有未知剪力 X_1 , 正则方程为

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0$$

单位载荷作用下的弯矩图如题 14.15 图(c) 所示, 载荷作用下的弯矩图如题 14.15 图(d) 所示, 应用图乘法计算 δ_{11} 和 Δ_{1F}

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= \sum \frac{\omega \bar{M}_C}{EI} \\ &= \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}a \right) \left(\frac{2}{3} \times \frac{a}{2} \right) + \left(\frac{1}{2}a \times a \right) \frac{a}{2} \right] \\ &= \frac{7a^3}{24EI}\end{aligned}$$

$$\Delta_{1F} = - \frac{\left(\frac{1}{2}Fa \times a \right) \frac{a}{2}}{EI} = - \frac{Fa^3}{4EI}$$

将上述 δ_{11} 和 Δ_{1F} 表达式代入正则方程得

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = \frac{Fa^3/(4EI)}{7a^3/(24EI)} = \frac{6}{7}F$$

求出未知剪力 X_1 后,由静力平衡方程可求固定端的约束反力并作出刚架弯矩图,读者可试之。

14.16 题 14.16 图(a)所示刚架几何上以 C 为对称中心。试证明截面 C 上的轴力及剪力皆等于零。

解 题 14.16 图(a)所示的刚架为三次超静定,从对称中心 C 将刚架切开,轴力、剪力和弯矩分别用 X_1 、 X_2 、 X_3 表示,静定基如题 14.16 图(b)所示。题 14.16 图(c)、(d)、(e)、(f)分别为单位轴力、单位剪力、单位弯矩和外力作用下的弯矩图,弯矩图都画在刚架的受压一侧。假定在刚架外侧的弯矩为正,则内侧的弯矩为负,利用图乘法求 δ_{ij} 、 Δ_{iF} ,显然有

$$\delta_{31} = \delta_{32} = \delta_{13} = \delta_{23} = 0, \quad \Delta_{1F} = \Delta_{2F} = 0$$

三次超静定的正则方程被简化为

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0 & \text{①} \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0 & \text{②} \\ \delta_{33}X_3 + \Delta_{3F} = 0 & \text{③} \end{cases}$$

①、②式是二元齐次线性方程组,它有非零解的条件是

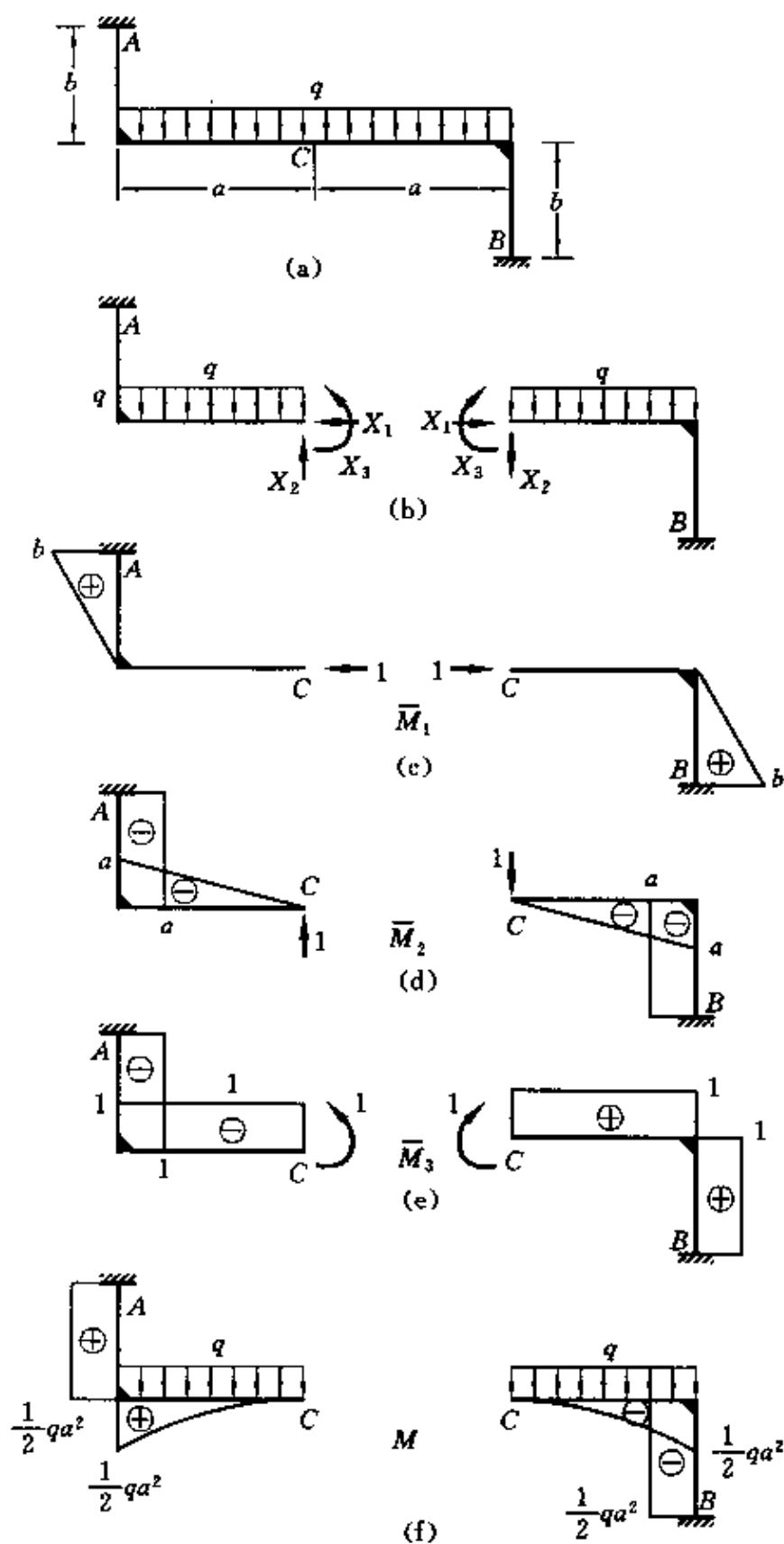
$$\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{vmatrix} = 0$$

但在本题中行列式不等于零,所以只能是 $X_1 = X_2 = 0$,即轴力和剪力皆等于零。证毕。

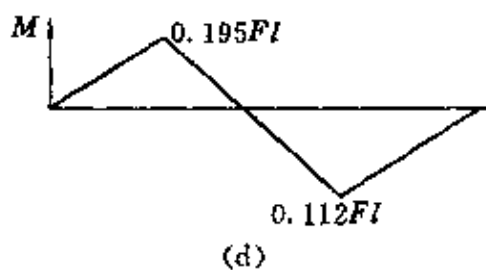
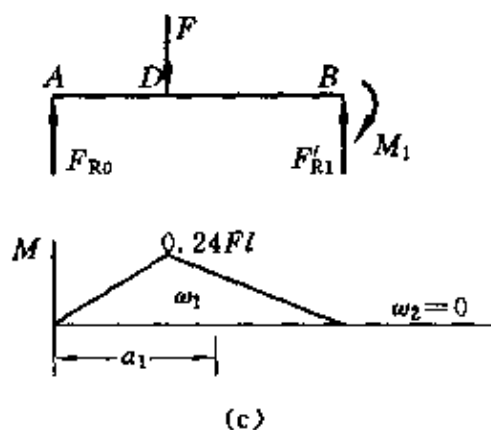
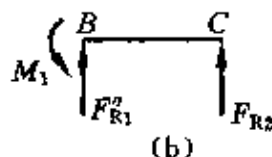
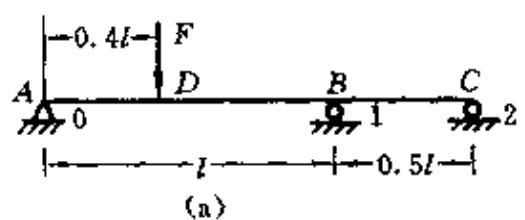
14.17 用三弯矩方程求解题 6.34。

解 支座编号如题 14.17 图(a)所示, $l_1 = l$, $l_2 = 0.5l$, 静定基的每个跨度皆为简支梁(题 14.17 图(b)), 简支梁在外载荷作用下的弯矩图如题 14.17 图(c), 从图中可知弯矩图面积

$$\omega_1 = \frac{1}{2}l \times 0.24Fl = 0.12Fl^2, \quad \omega_2 = 0$$



题 14.16 图



题 14.17 图

弯矩图面积的形心位置

$$a_1 = (l + 0.4l)/3 = 1.4l/3$$

利用三弯矩方程求支座 B 处的弯矩：

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = -6 \left(\frac{\omega_n a_n}{l_n} + \frac{\omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}} \right)$$

$n=1$ 时

$$M_0 l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 l_2 = -6(\omega_1 a_1/l_1 + \omega_2 b_2/l_2) \quad \textcircled{1}$$

$$M_0 = M_A = 0, M_2 = M_C = 0$$

把以上已知数据代入三弯矩方程①式得

$$M_1 = 2 \left(\frac{0.12Fl^2 \times (1.4/3)l}{l^2} \right) = 0.112Fl$$

根据静力平衡方程求出支座反力(题 14.17 图(b))

$$F_{RA} = F_{R0} = 0.488F (\uparrow)$$

$$F_{RC} = F_{R2} = 0.224F (\downarrow)$$

$$F_{RB} = F'_{R1} + F''_{R2} = 0.736F (\uparrow)$$

作弯矩图如题 14.17 图(d)所示。

14.18 等截面连续梁上, 载荷如题 14.18 图(a)所示。已知 $[\sigma] = 160 \text{ MPa}$ 。试选择适用的工字梁。

解 支座编号如题 14.18 图(a)所示, 静定基为三个简支梁, 如题 14.18 图(b)所示, 它们的跨度分别为

$$l_1 = 8 \text{ m}, \quad l_2 = 4 \text{ m}, \quad l_3 = 8 \text{ m}$$

各简支梁在外载荷作用下的弯矩图如题 14.18 图(c)所示, 弯矩图面积

$$\omega_1 = \left[\frac{1}{2} \times (4 + 8) \times 80 \right] \text{ kN} \cdot \text{m}^2 = 480 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

$$\omega_2 = 0$$

$$\omega_3 = \left(\frac{2}{3} \times 80 \times 8 \right) \text{ kN} \cdot \text{m}^2 = \frac{1280}{3} \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

其形心位置 $a_1 = 4 \text{ m}, \quad b_3 = 4 \text{ m}$

对 1、2 跨列三弯矩方程

$$\begin{aligned} M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} \\ = -6(\omega_n a_n/l_n + \omega_{n+1} b_{n+1}/l_{n+1}) \end{aligned}$$

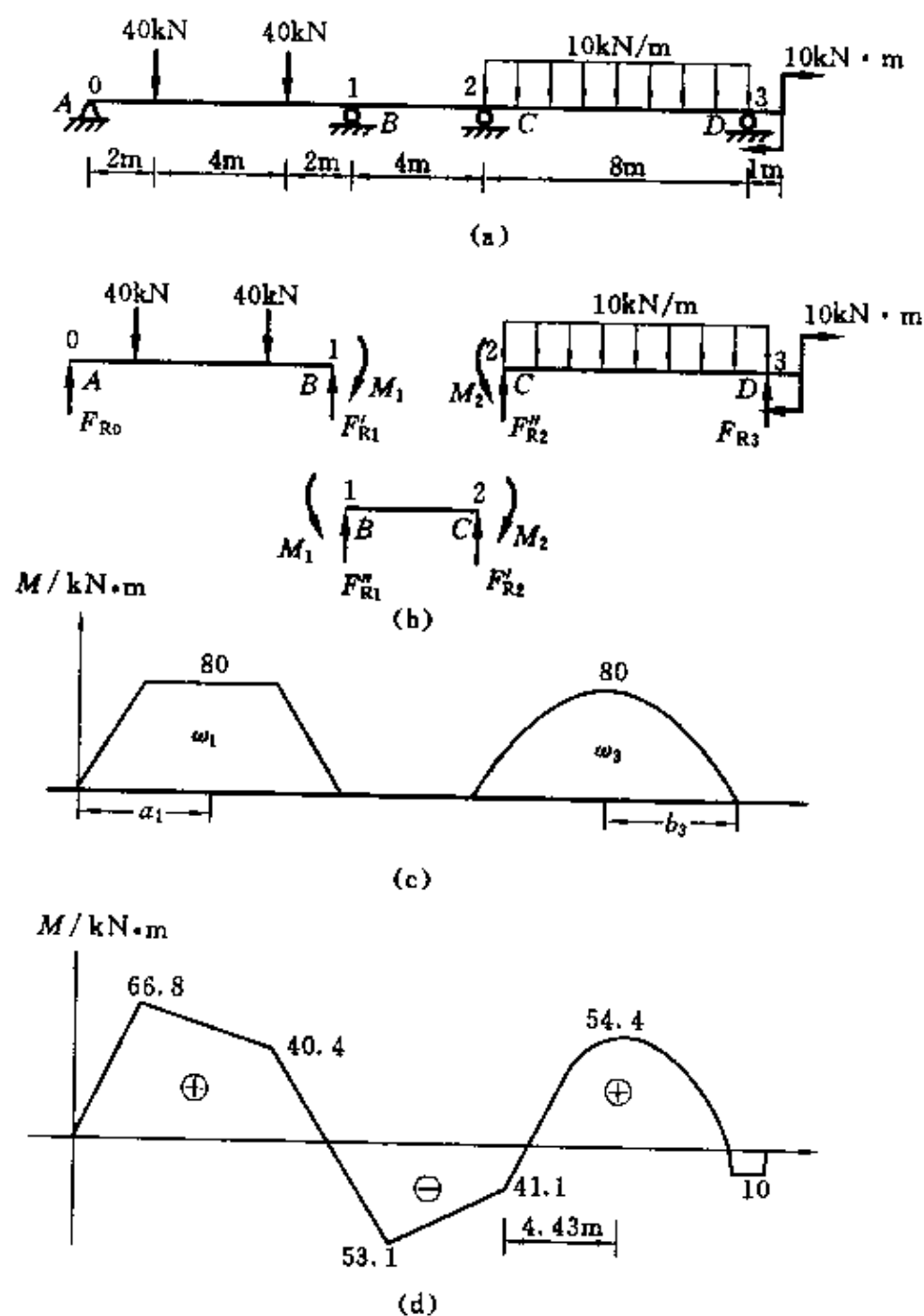
$n=1$ 时

$$M_0 l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 l_2 = -6(\omega_1 a_1/l_1 + \omega_2 b_2/l_2) \quad ①$$

$n=2$ 时

$$M_1 l_2 + 2M_2(l_2 + l_3) + M_3 l_3 = -6(\omega_2 a_2/l_2 + \omega_3 b_3/l_3) \quad ②$$

将 $M_0 = 0, M_3 = -10 \text{ kN} \cdot \text{m}$, 连同上述有关计算数据, 代入①、②两式并整理, 得



题 14.18 图

$$6M_1 + M_2 = -360, \quad M_1 + 6M_2 = -300$$

解以上二式得

$$M_1 = -53.1 \text{ kN} \cdot \text{m}, \quad M_2 = -41.1 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

根据静力平衡方程计算约束反力(题 14.18 图(b))

$$F_{RA} = F_{R0} = 33.4 \text{ kN}$$

$$F_{RB} = F'_{R1} + F''_{R1} = (46.6 + 3) \text{ kN} = 49.6 \text{ kN}$$

$$F_{RC} = F'_{R2} + F''_{R2} = (-3 + 43.9) \text{ kN} = 40.9 \text{ kN}$$

$$F_{RD} = F_{R3} = 36.1 \text{ kN}$$

作梁的弯矩图如题 14.18 图(d)所示。

最大弯矩 $M_{\max} = 66.8 \text{ kN} \cdot \text{m}$

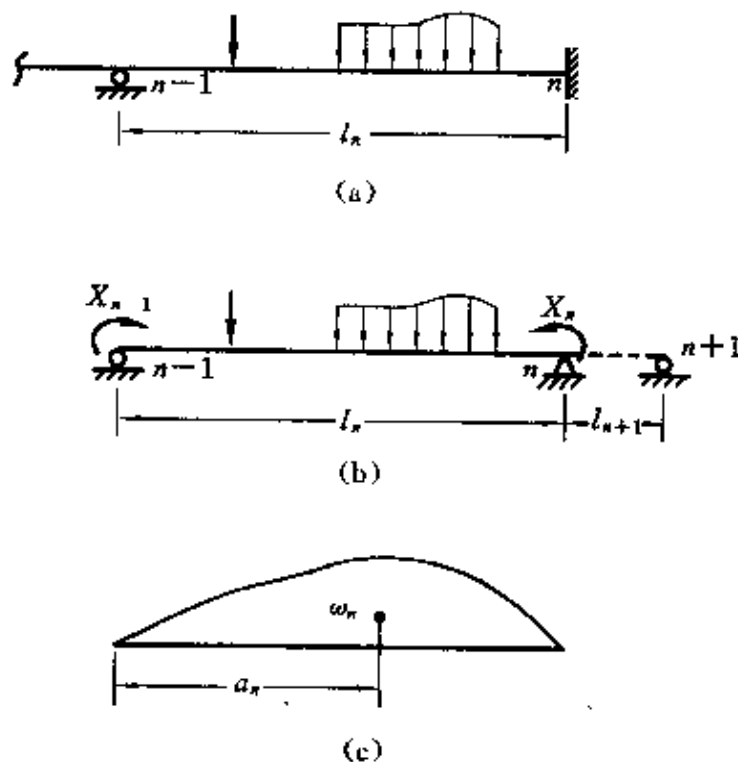
最大应力 $\sigma = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma]$

$$W \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{66.8 \times 10^3}{160 \times 10^6} \text{ m}^3 = 418 \text{ cm}^3$$

根据抗弯截面系数 W 值, 查附录三 No. 25b 工字钢的 $W = 423 \text{ cm}^3$, 所以选用 No. 25b 工字钢可安全工作。

14.19 若连续梁的一端固定, 将怎样使用三弯矩方程?

解 设梁的右端固定(题 14.19 图(a)), 把右端固定的跨度记为 l_n , 当 l_n 内只作用外载荷时, 弯矩图如题 14.19 图(c)所示, a_n 为



题 14.19 图

弯矩图面积 ω_n 的形心到左端支座的距离。仿照刘鸿文的《材料力学》教材 § 14.4 中使用的方法,不难求出支座 n 截面的转角为

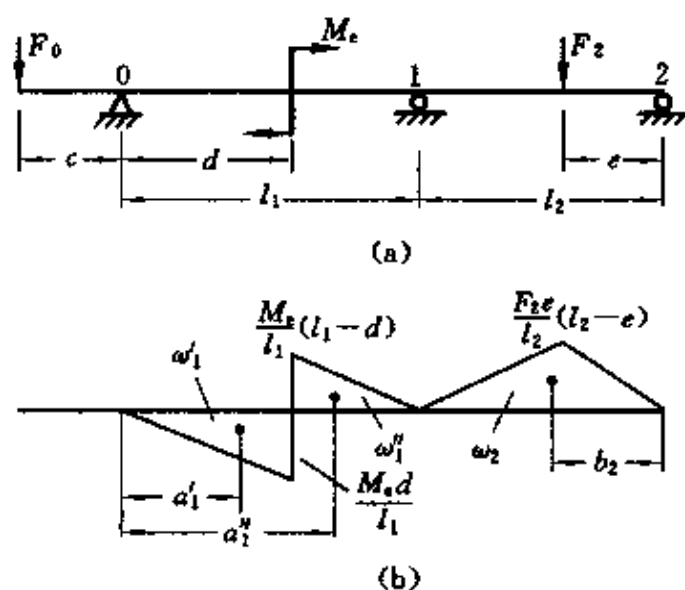
$$\Delta_n = \frac{X_{n-1}l_n}{6EI} + \frac{X_n l_n}{3EI} + \frac{\omega_n a_n}{EI l_n}$$

因支座 n 为固定端,故 $\Delta_n = 0$ 。于是上式化为

$$X_{n-1}l_n + 2X_n l_n = -6\omega_n a_n / l_n$$

这就是由于右端固定增加的方程式。如设想从支座 n 向右延伸一个虚拟的跨度 l_{n+1} ,如题 14.19 图(b)中虚线所示。对 l_n 和 l_{n+1} 写出三弯矩方程,然后使 l_{n+1} 趋于零,则同样可求出①式。可见,固定端相当于一个以零为极限的跨度。

14.20 在有三个轴承的轴上,载荷如题 14.20 图(a)所示。试求轴在支座 1 截面上的弯矩 M_1 。



题 14.20 图

解 把跨度 l_1 和 l_2 分别作为简支梁,外载荷引起的弯矩图如题 14.20 图(b)所示。在跨度 l_1 内,弯矩图面积 ω_1 由符号不同的两部分 ω_1' 和 ω_1'' 所组成。当计算静矩 $\omega_1 a_1$ 时,要分成两部分计算。即

$$\begin{aligned}\omega_1 a_1 &= \omega_1' a_1' + \omega_1'' a_1'' \\ &= -\frac{1}{2} \times \frac{M_c}{l_1} d \times d \times \frac{2}{3} d\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \frac{M_e}{l_1} (l_1 - d)(l_1 - d) \left(\frac{l_1 - d}{3} + d \right) \\
 & = \frac{M_e}{6} (l_1^2 - 3d^2)
 \end{aligned}$$

在跨度 l_2 内,

$$\omega_2 b_2 = \frac{1}{2} \times \frac{F e (l_2 - e)}{l_2} \times l_2 \times \frac{l_2 + e}{3} = \frac{F_2 e}{6} (l_2^2 - e^2)$$

此外,由左端的外伸部分又可求得

$$M_0 = -F_0 c$$

将以上结果代入三弯矩方程式,得

$$\begin{aligned}
 & -F_0 c l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + 0 \times l_2 \\
 & = -\frac{6}{l_1} \times \frac{M_e}{6} (l_1^2 - 3d^2) - \frac{6}{l_2} \frac{F_2 e (l_2^2 - e^2)}{6}
 \end{aligned}$$

由上式解得

$$M_1 = \frac{1}{2(l_1 + l_2)} \left[F_0 c l_1 - \frac{M_e}{l_1} (l_1^2 - 3d^2) - \frac{F_2 e (l_2^2 - e^2)}{l_2} \right]$$

14.21 作题14.21图所示各梁的剪力图和弯矩图。设 EI = 常量。

解 (A) 支座编号如题14.21图A(a)所示,静定基为三个简支梁,如题14.21图A(b)所示, $l_1 = 6 \text{ m}$, $l_2 = 10 \text{ m}$, $l_3 = 5 \text{ m}$,简支梁在外载荷作用下的弯矩图如题14.21图A(c)所示。

$$\omega_1 = \left(\frac{2}{3} \times 36 \times 6 \right) \text{ N} \cdot \text{m}^2 = 144 \text{ N} \cdot \text{m}^2$$

$$\omega_2 a_2 = \omega_2' a_2' + \omega_2'' a_2''$$

$$\begin{aligned}
 & = \left(\frac{1}{2} \times 30 \times 10 \times \frac{10 + 2.5}{3} + \frac{1}{2} \times 60 \times 10 \times \frac{10 + 5}{3} \right) \text{ N} \cdot \text{m}^3 \\
 & = 2125 \text{ N} \cdot \text{m}^3
 \end{aligned}$$

$$\omega_2 b_2 = (\omega_1' + \omega_2'') l_2 - \omega_2 a_2$$

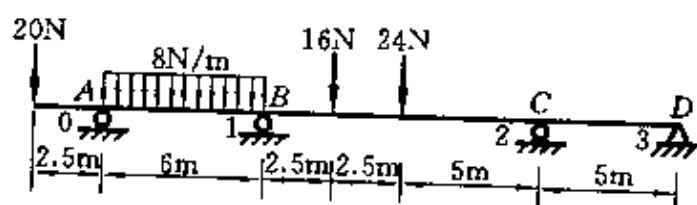
$$\begin{aligned}
 & = \left[\left(\frac{1}{2} \times 30 \times 10 + \frac{1}{2} \times 60 \times 10 \right) \times 10 - 2125 \right] \text{ N} \cdot \text{m}^3 \\
 & = 2375 \text{ N} \cdot \text{m}^3
 \end{aligned}$$

$$\omega_3 = 0, \quad a_1 = 3 \text{ m}$$

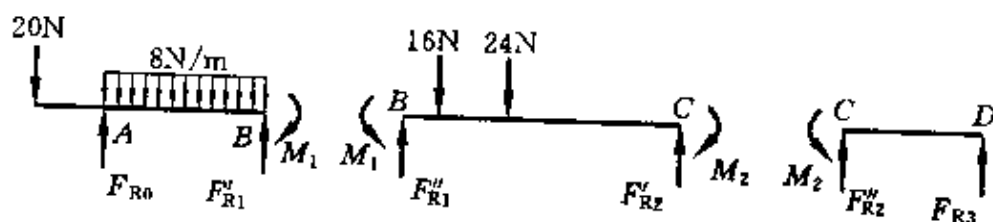
对 1、2 跨用三弯矩方程

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = -\frac{6\omega_n a_n}{l_n} - \frac{6\omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}}$$

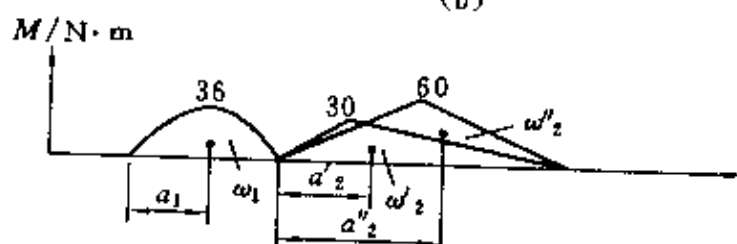
$$n=1 \text{ 时} \quad M_0 = (-20 \times 2.5) \text{ N} \cdot \text{m} = -50 \text{ N} \cdot \text{m}$$



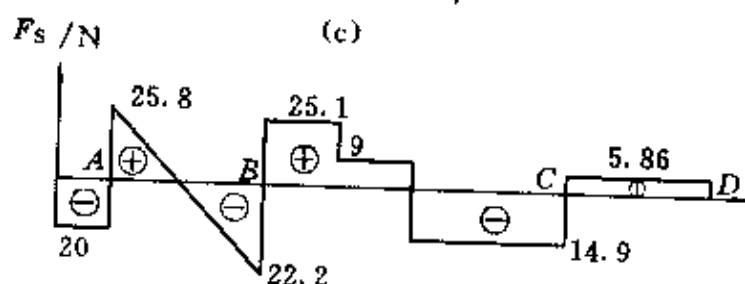
(a)



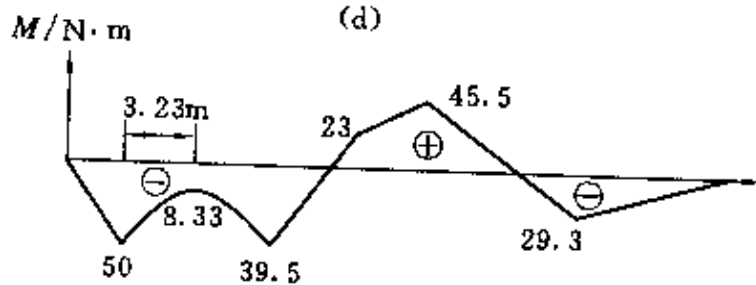
(b)



(c)



(d)



(e)

题 14.21 图 A

$$M_0 l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 l_2 = -\frac{6\omega_1 a_1}{l_1} - \frac{6\omega_2 b_2}{l_2}$$

即 $(-50) \times 6 + 2M_1(6 + 10) + M_2 \times 10$
 $= -\frac{6 \times 144 \times 3}{6} - \frac{6 \times 2375}{10}$ ①

$n=2$ 时 $M_3=0$

$$M_1 l_2 + 2M_2(l_2 + l_3) + M_3 l_3 = -\frac{6\omega_2 a_2}{l_2} - \frac{6\omega_3 b_3}{l_3}$$

即 $M_1 \times 10 + 2M_2(10 + 5) = -\frac{6 \times 2125}{10}$ ②

将①、②式化简得
$$\begin{cases} 32M_1 + 10M_2 = -1557 \\ M_1 + 3M_2 = -127.5 \end{cases}$$

解上面的方程组得

$$M_1 = -39.5 \text{ N} \cdot \text{m}, \quad M_2 = -29.3 \text{ N} \cdot \text{m}$$

利用平衡条件计算出支座反力(题14.21图A(b))

$$F_{RA} = F_{R0} = 45.8 \text{ N} (\uparrow)$$

$$F_{NB} = F_{R1} = F'_{R1} + F''_{R1} = (22.25 + 25.02) \text{ N} = 47.3 \text{ N} (\uparrow)$$

$$F_{RC} = F_{R2} = F'_{R2} + F''_{R2} = (14.98 + 5.86) \text{ N} = 20.8 \text{ N} (\uparrow)$$

$$F_{RD} = F_{R3} = -5.86 \text{ N} (\downarrow)$$

作剪力图和弯矩图,如题14.21图A(d)、(e)所示。

(B) 如题14.21图B(a)所示。利用题14.19的方法,设想支座向左延伸一个虚拟跨度 l_1 ,如题14.21图B(b)所示。选取静定基,如题14.21图B(c)所示,列三弯矩方程:

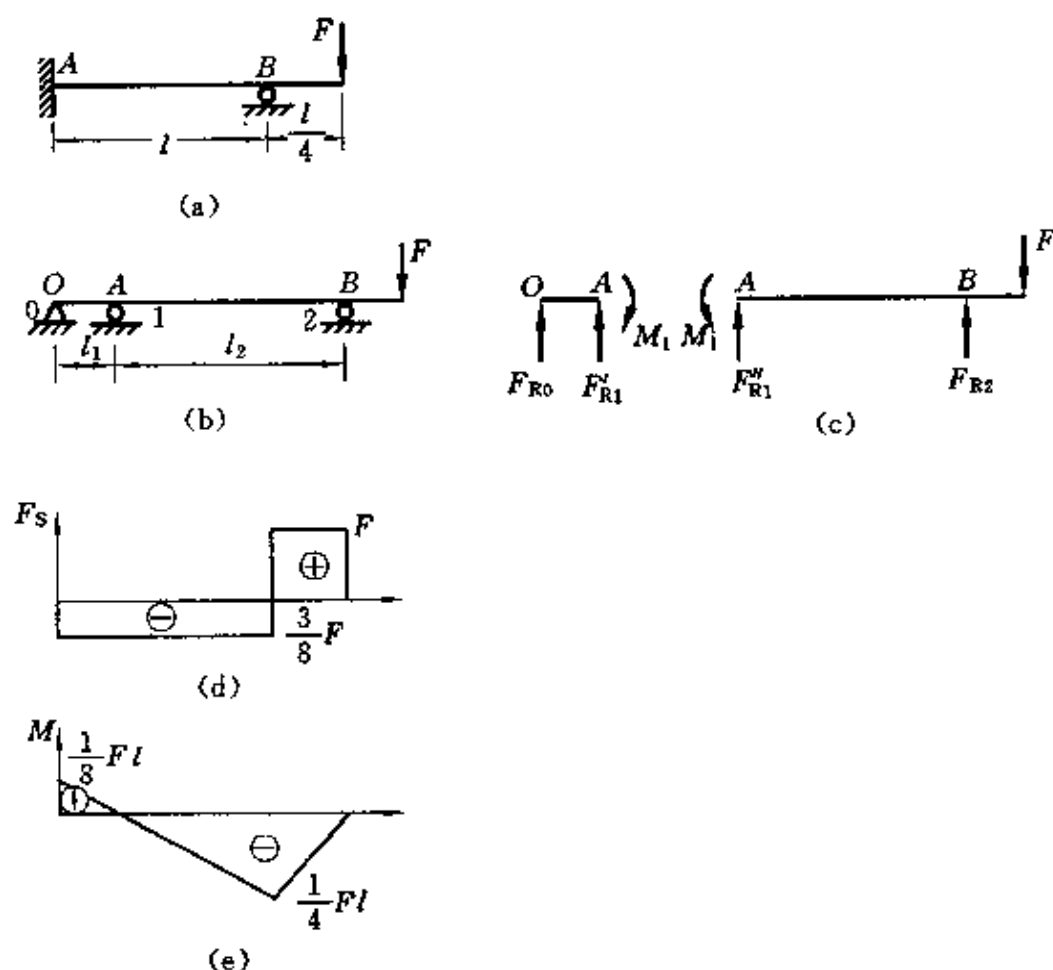
$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} \\ = -6\omega_n a_n/l_n - 6\omega_{n+1} b_{n+1}/l_{n+1}$$

$n=1$ 时 $M_0 = 0, \quad M_2 = -Fl/4, \quad l_1 = 0, \quad l_2 = l$

$$M_0 l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 l_2 = -6\omega_1 a_1/l_1 - 6\omega_2 b_2/l_2$$

即 $2M_1(0 + l) + M_2 l = 0$

解得 $M_1 = \frac{Fl}{8}, \quad M_A = M_1$



题 14.21 图 B

利用平衡条件按题 14.21 图 B(a)可求得支座反力

$$F_{RA} = -\frac{3F}{8} (\downarrow), \quad F_{RB} = \frac{11}{3}F (\uparrow)$$

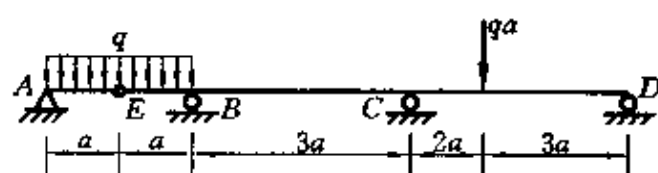
作剪力图和弯矩图如题 14.21 图 B(c)、(d)所示。

(C) 题 14.21 图 C(a)所示的 AE 段受力图如题 14.21 图 C(b)所示,由平衡条件求得

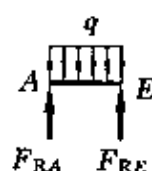
$$F_{RA} = F_{RE} = \frac{1}{2}qa$$

原系统(题 14.21 图 C(a))可用题 14.21 图 C(c)代替。

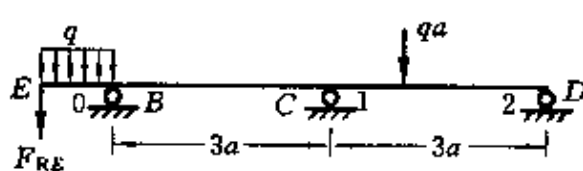
支座编号如题 14.21 图 C(c)所示, $l_1 = 3a$, $l_2 = 3a$, 静定基如题 14.21 图 C(d)所示。外载荷作用下的弯矩图如题 14.21 图 C(e)所



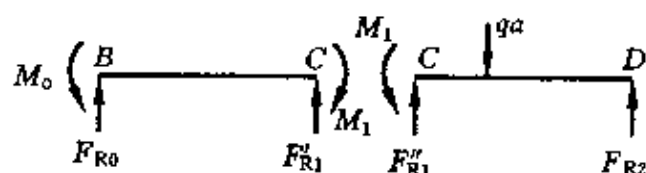
(a)



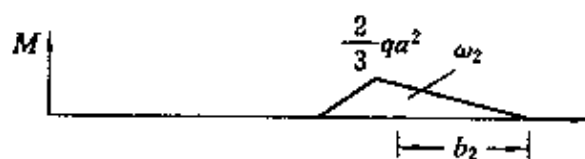
(b)



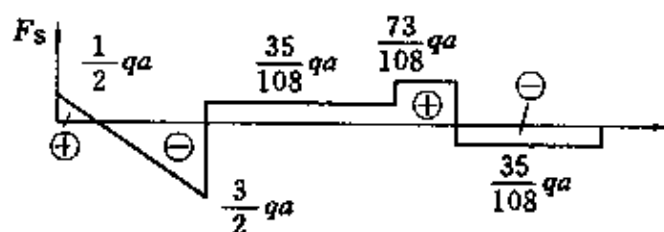
(c)



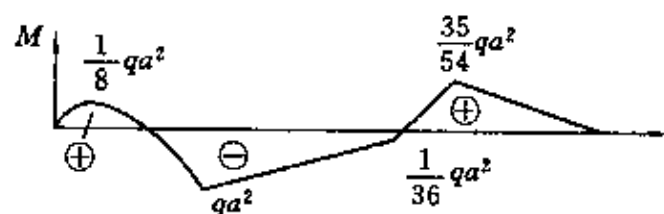
(d)



(e)



(f)



(g)

题 14.21 图 C

示。弯矩图面积及其形心位置分别为

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \frac{1}{2} \times 3a \times \frac{2}{3}qa^2 = qa^3, \quad b_2 = \frac{3a + 2a}{3} = \frac{5}{3}a$$

三弯矩方程为

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} \\ = -6\omega_n a_n/l_n - 6\omega_{n+1} b_{n+1}/l_{n+1}$$

$$n=1 \text{ 时} \quad M_0 = -qa^2, \quad M_2 = 0$$

$$M_0 l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 l_2 = -6\omega_1 a_1/l_1 - 6\omega_2 b_2/l_2$$

$$\text{即 } (-qa^2) \times 3a + 2M_1(3a + 3a) = -6qa^3 \times (5a/3)/(3a)$$

$$\text{解上式得} \quad M_1 = -\frac{1}{36}qa^2$$

由平衡条件解得支座反力为(题 14.21 图 C(d))

$$F_{RA} = \frac{1}{2}qa \quad (\uparrow)$$

$$F_{RB} = F_{R0} = \frac{197}{108}qa \quad (\uparrow)$$

$$F_{RC} = F'_{R1} + F''_{R1} = -\frac{35}{108}qa + \frac{73}{108}qa = \frac{19}{54}qa \quad (\uparrow)$$

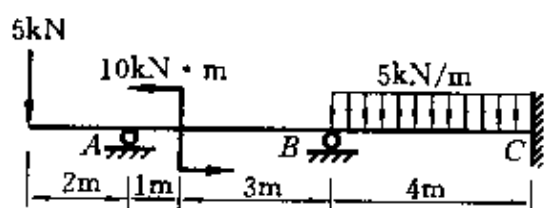
$$F_{RD} = \frac{35}{108}qa \quad (\uparrow)$$

作剪力图和弯矩图如题 14.21 图 C(f)、(g)所示。

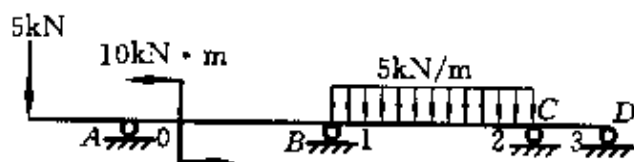
(D) 题 14.21 图 D(a)所示的固定端可处理成如题 14.21 图 D(b)所示。

支座编号如题 14.21 图 D(b)所示。 $l_1=4\text{ m}$, $l_2=4\text{ m}$, $l_3=0$ 。静定基如题 14.21 图 D(c)所示,外载荷作用下的弯矩图如题 14.21 图 D(e)所示。

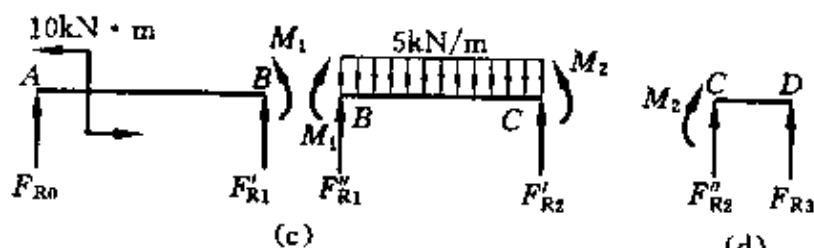
$$\begin{aligned} \omega_1 a_1 &= \omega'_1 a'_1 + \omega''_1 a''_1 \\ &= \left[\frac{1}{2} \times 2.5 \times 1 \times \frac{2}{3} \times 1 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \times 7.5 \times 3 \times \left(4 - \frac{2}{3} \times 3 \right) \right] \text{ kN} \cdot \text{m}^3 \\ &= -\frac{65}{3} \text{ kN} \cdot \text{m}^3 \end{aligned}$$



(a)

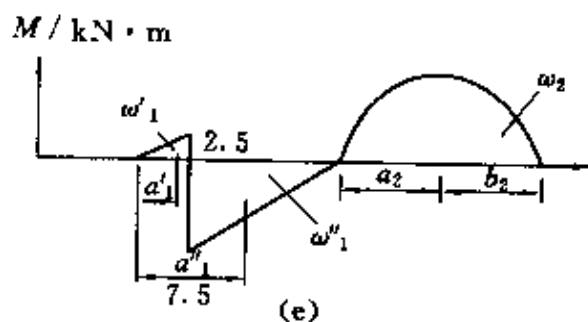


(b)

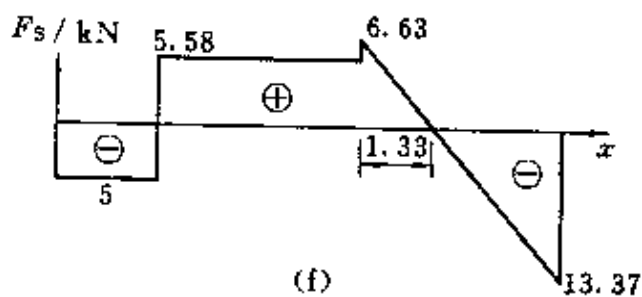


(c)

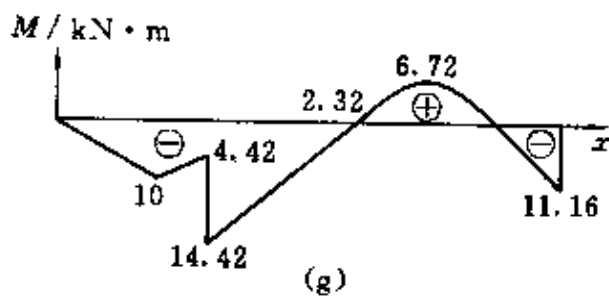
(d)



(e)



(f)



(g)

题 14.21 图 D

$$\omega_2 = \left(\frac{2}{3} \times 4 \times 10 \right) \text{ kN} \cdot \text{m}^3 = \frac{80}{3} \text{ kN} \cdot \text{m}^3$$

$$\omega_3 = 0, \quad a_2 = 2 \text{ m}, \quad b_2 = 2 \text{ m}$$

对 1、2 跨列三弯矩方程

$$\begin{aligned} M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} \\ = -6\omega_n a_n/l_n - 6\omega_{n+1} b_{n+1}/l_{n+1} \end{aligned}$$

$$n=1 \text{ 时} \quad M_0 = -10 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\begin{aligned} M_0 l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 l_2 \\ = -6\omega_1 a_1/l_1 - 6\omega_2 b_2/l_2 (-10) \times 4 + 2M_1(4 + 4) + M_2 \times 4 \\ = -[6 \times (80/3) \times 2]/4 - 6(-65/3)/4 \end{aligned} \quad (1)$$

$$n=2 \text{ 时} \quad M_3 = 0$$

$$\begin{aligned} M_1 l_2 + 2M_2(l_2 + l_3) + M_3 l_3 = -6\omega_2 a_2/l_2 - 6\omega_3 b_3/l_3 \\ M_1 \times 4 + 2M_2 \times 4 = -(6 \times 80/3 \times 2)/4 \end{aligned} \quad (2)$$

将①、②式化简为

$$4M_1 + M_2 = -\frac{15}{8}, \quad M_1 + 2M_2 = -20$$

解上两式得

$$M_1 = 2.32 \text{ kN} \cdot \text{m}, \quad M_2 = -11.16 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

由平衡条件解得

$$F_{RA} = F_{R0} = 10.6 \text{ kN} (\uparrow)$$

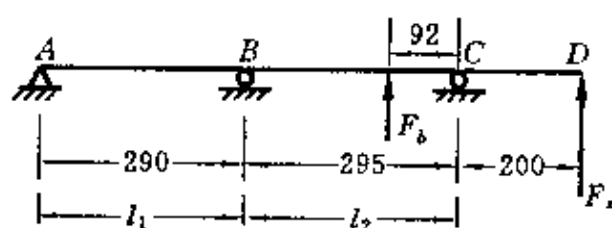
$$F_{RB} = F'_{R1} + F''_{R1} = (-5.58 + 6.63) \text{ kN} = 1.05 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$F_{RC} = F'_{R2} = 13.4 \text{ kN} (\uparrow)$$

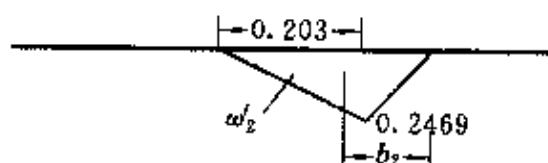
作剪力图和弯矩图如题 14.21 图 D(f)、(g) 所示。

14.22 车床的主轴简化成直径为 $d=90 \text{ mm}$ 的等截面当量轴,轴有三个轴承,在垂直平面内的受力情况如题 14.22 图(a)所示。 F_b 和 F_z 分别是传动力和切削力简化到轴线上的分力,且 $F_b=3.9 \text{ kN}$, $F_z=2.64 \text{ kN}$ 。若 $E=200 \text{ GPa}$,试求 D 点的挠度。

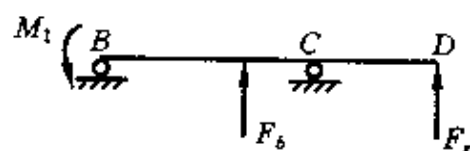
解 把跨度 l_1 和 l_2 分别作为简支梁,外载荷引起的弯矩图如题 14.22 图(b)所示,在跨度 l_1 内



(a)



(b)



(c)

题 14.22 图

$$l_1 = 0.29 \text{ m}, \quad \omega_1 = 0, \quad M_0 = 0$$

在跨度 l_2 内 $l_2 = 0.295 \text{ m}$

$$\omega_2 = -\frac{1}{2} \times 0.2469 \times 0.295 \text{ kN} \cdot \text{m}^2 = -0.03642 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

$$b_2 = \frac{0.295 + 0.092}{3} \text{ m} = 0.129 \text{ m}$$

由右端可求出 $M_2 = (2.64 \times 0.2) \text{ kN} \cdot \text{m} = 0.528 \text{ kN} \cdot \text{m}$

将以上值代入三弯矩方程

$$\begin{aligned} M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} \\ = -6\omega_n a_n/l_n - 6\omega_{n+1} b_{n+1}/l_{n+1} \end{aligned}$$

$n=1$ 时, 三弯矩方程为

$$M_0 l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 l_2 = -6\omega_1 a_1/l_1 - 6\omega_2 b_2/l_2$$

即 $2M_1(0.29 + 0.295) + 0.528 \times 0.295$

$$= (6 \times 0.03642 \times 0.129)/0.295$$

由上式解得 $M_1 = -0.0515 \text{ kN} \cdot \text{m}$

求D点的挠度时,可把梁看成如题14.22图(c)所示。查附录二可得在 F_b 、 F_z 、 M_1 的联合作用下,在右支座处梁截面的转角为

$$\begin{aligned}\theta_c &= -\frac{M_1 l_2}{6EI} - \frac{F_b \times 0.203 \times 0.092 \times (0.295 + 0.203)}{6EI \times 0.295} \\ &\quad + \frac{F_z \times 0.2 \times 0.295}{3EI} \\ &= \frac{1}{EI} \left(-\frac{51.5 \times 0.295}{6} - \frac{3900 \times 0.203 \times 0.092 \times 0.498}{6 \times 0.295} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2640 \times 0.2 \times 0.295}{3} \right) \\ &= \frac{28.9}{EI}\end{aligned}$$

D点的挠度

$$\begin{aligned}w_D &= \theta_c \times 0.2 + \frac{F_z \times 0.2^3}{3EI} \\ &= \left[\frac{64}{200 \times 10^9 \times \pi \times 0.09^4} \right. \\ &\quad \left. \times \left(28.9 \times 0.2 + \frac{2640 \times 0.2^3}{3} \right) \right] \text{ m} \\ &= 0.0199 \text{ mm } (\uparrow)\end{aligned}$$

第十五章 平面图形的几何性质(附录 I)

知识要点

1. 静矩、形心

(1) 简单平面图形面积的静矩和形心

$$\text{对 } y \text{ 轴的静矩} \quad S_y = \int_A z dA = z_c A$$

$$\text{对 } z \text{ 轴的静矩} \quad S_z = \int_A y dA = y_c A$$

$$\text{形心的坐标} \quad y_c = \frac{S_z}{A}, \quad z_c = \frac{S_y}{A}$$

(2) 组合平面图形面积的静矩和形心

$$\text{对 } y \text{ 轴的静矩} \quad S_y = \sum_{i=1}^n A_i (z_c)_i$$

$$\text{对 } z \text{ 轴的静矩} \quad S_z = \sum_{i=1}^n A_i (y_c)_i$$

$$\text{形心的坐标} \quad y_c = \frac{\sum A_i (y_c)_i}{\sum A_i}$$

$$z_c = \frac{\sum A_i (z_c)_i}{\sum A_i}$$

静矩的特征:

① 平面面积的静矩是对某一坐标轴而定义的。

② 静矩的量纲为长度的三次方,单位为 m^3 。

③ 静矩的数值可能为正,也可能为负,也可能等于零。若面积对某一轴的静矩为零,则该轴必通过面积的形心;反之,若某一轴通过形心,则面积对该轴的静矩必等于零。

2. 惯性矩、惯性半径、惯性积

(1) 惯性矩

对 y 轴的惯性矩 $I_y = \int_A z^2 dA$

对 z 轴的惯性矩 $I_z = \int_A y^2 dA$

惯性矩的特征：

- ① 平面面积的惯性矩是对某一坐标轴而定义的。
- ② 惯性矩的量纲为长度的四次方，单位为 m^4 。
- ③ 惯性矩的数值恒为正值。

(2) 极惯性矩

平面面积对坐标原点的极惯性矩为

$$I_p = \int_A \rho^2 dA$$

极惯性矩的特征：

- ① 平面面积的极惯性矩是对某一极点而定义的。
- ② 极惯性矩的量纲为长度的四次方，单位为 m^4 。
- ③ 极惯性矩的数值恒为正值，其数值等于对以该点为坐标原点的任意一对正交的坐标轴的惯性矩之和

$$I_p = \int_A \rho^2 dA = \int_A (z^2 + y^2) dA = I_y + I_z$$

(3) 惯性半径

① 对 y 轴的惯性半径 $i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$

② 对 z 轴的惯性半径 $i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$

惯性半径的特征：

- ① 惯性半径是对某一坐标轴面定义的。
- ② 惯性半径的量纲为长度，单位为 m 。
- ③ 惯性半径的数值恒为正值。

(4) 惯性积

图形对 y, z 轴的惯性积为

$$I_{yz} = \int_A yz dA$$

惯性积的特征:

- ① 平面面积的惯性积是对某一对坐标轴而定义的。
- ② 惯性积的量纲为长度的四次方, 单位为 m^4 。
- ③ 惯性积的数值可能为正, 也可能为负, 也可能等于零。若一对坐标轴中有一条是面积的对称轴, 则面积对这一对坐标轴的惯性积必等于零。但若面积对某一对坐标轴的惯性积为零, 则这一对坐标轴中却不一定有面积的对称轴。

3. 平行移轴公式

若平面图形的面积为 A , 对形心轴 y_c, z_c 的惯性矩为 I_{y_c}, I_{z_c} , 惯性积为 $I_{y_c z_c}$, 和形心轴平行的轴 y, z 与 y_c, z_c 间的距离分别为 a, b , 则

$$I_y = I_{y_c} + a^2 A$$

$$I_z = I_{z_c} + b^2 A$$

$$I_{yz} = I_{y_c z_c} + abA$$

平行移轴公式的讨论:

- ① 距离 a, b 的正负号, 可以 y, z 或 y_c, z_c 为参考坐标系加以确定。
- ② y_c, z_c 为面积的形心轴, 在一组相互平行的坐标轴中, 面积对形心轴的惯性矩为最小。

4. 转轴公式、主惯性轴

(1) 转轴公式

设图形的面积为 A , 对坐标轴 y, z 的惯性矩为 I_y, I_z , 坐标轴 y, z 绕坐标原点 O 转动 α 角后, 得新坐标轴 y_1, z_1 , 则

$$I_{y_1} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\alpha - I_{yz} \sin 2\alpha$$

$$I_{z_1} = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\alpha + I_{yz} \sin 2\alpha$$

$$I_{y_1 z_1} = \frac{I_y - I_z}{2} \sin 2\alpha + I_{yz} \cos 2\alpha$$

转轴公式的讨论：

- ① 角度 α 的正负号，从原坐标轴量起，以逆时针转向为正。
- ② 转轴公式与面积的形心无关。
- ③ 通过同一坐标原点的任意一对坐标轴的两惯性矩之和为常数，等于面积对坐标原点的极惯性矩，即

$$I_{y_1} + I_{z_1} = I_y + I_z = I_p$$

(2) 主惯性轴与主惯性矩

① 主惯性轴——若面积对 y_0, z_0 的惯性积为零 ($I_{y_0 z_0} = 0$)，则坐标轴 y_0, z_0 称为面积的主惯性轴。

② 主惯性轴的方位——若面积对 y, z 轴的 I_y, I_z, I_{yz} 为已知，则主惯性轴的方位由下式确定

$$\tan 2\alpha_0 = - \frac{2I_{yz}}{I_y - I_z}$$

③ 主惯性矩——面积对主惯性轴的惯性矩

$$I_{y_0} = \frac{I_y + I_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}$$

$$I_{z_0} = \frac{I_y + I_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}$$

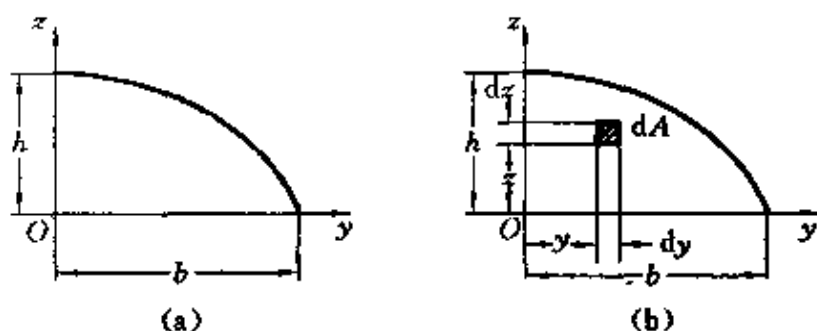
主惯性矩是面积对通过同一原点 O 所有轴的惯性矩中的最大值和最小值。

(3) 形心主惯性轴与形心主惯性矩

- ① 形心主惯性轴——通过面积形心的一对主惯性轴。
- ② 形心主惯性矩——面积对形心主惯性轴的惯性矩。

习题详解

15.1 在例题 1.1(文献 1)中,取微面积 $dA = dydz$,用面积分重解该题。



题 15.1 图

解 如题 15.1 图(a)所示。

抛物线方程为

$$z = h(1 - y^2/b^2) \quad \text{或} \quad y = b\sqrt{\frac{h-z}{h}}$$

取如题 15.1 图(b)所示的微面积 $dA = dzdy$,图形的面积和对 z 轴的静矩分别为

$$A = \int_A dA = \int_0^b dy \int_0^{h(1-y^2/b^2)} dz = \frac{2}{3}bh$$

$$S_z = \int_A y dA = \int y dy dz = \int_0^h dz \int_0^y y dy = \int_0^h \frac{1}{2} y^2 dz$$

将 $y = \sqrt{b^2(h-z)/h}$ 代入上式,有

$$S_z = \int_0^h \frac{b^2}{2h} (h-z) dz = \frac{b^2}{2h} \left(h^2 - \frac{h^2}{2} \right) = \frac{b^2 h}{4}$$

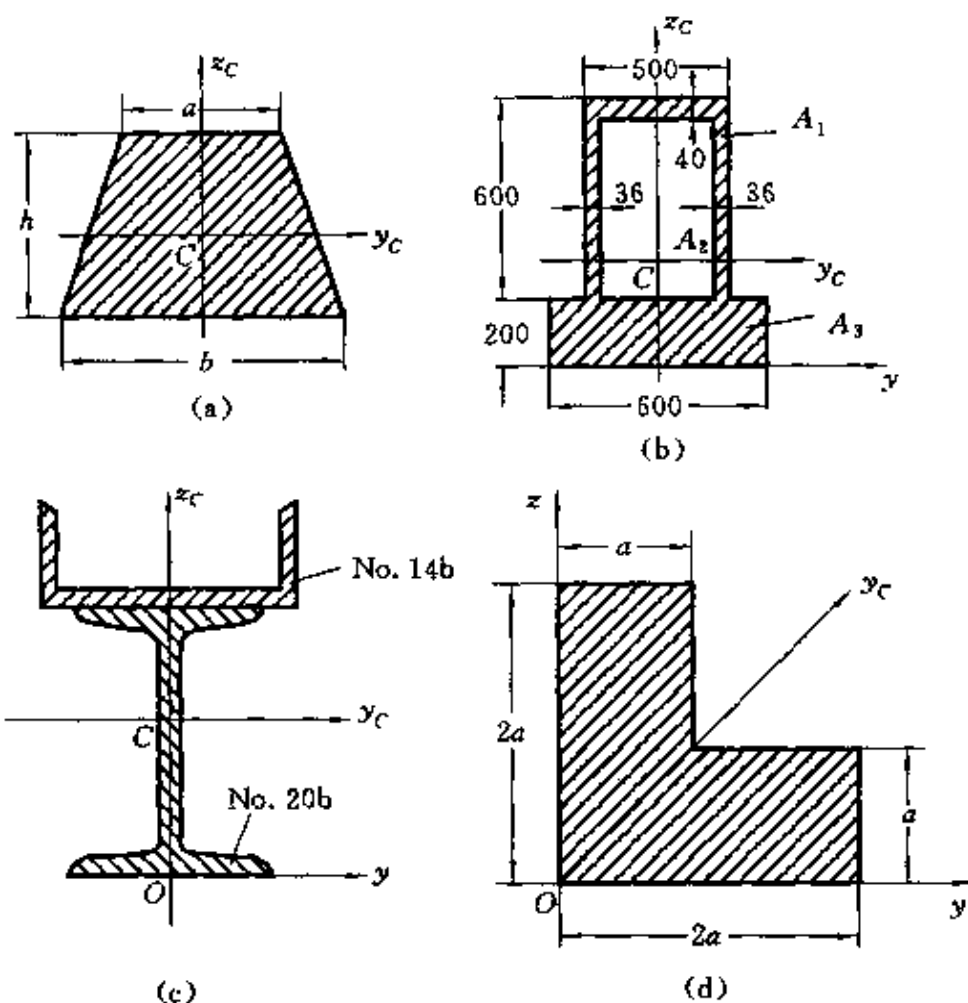
$$\text{又} \quad S_y = \int_A z dA = \int z dy dz = \int_0^b dy \int_0^{h(1-y^2/b^2)} z dz$$

$$= \int_0^b \frac{h^2}{2} \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right)^2 dy = \frac{h^2}{2b^4} \left(b^5 + \frac{b^5}{5} - \frac{2b^5}{3} \right) = \frac{4}{15}bh^2$$

所以其形心的坐标为

$$\bar{y} = \frac{S_x}{A} = \frac{3}{8}b, \quad \bar{z} = \frac{S_y}{A} = \frac{2}{5}h$$

15.2 确定题 15.2 图所示各图形形心的位置。



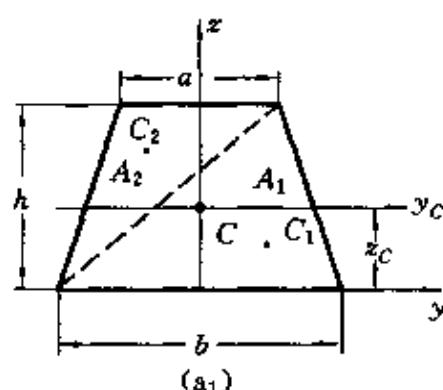
题 15.2 图

解 (a) 如题 15.2 图(a)所示。

平面图形对称于 z 轴, 形心 C 必在 z 轴上, 故 $y_c = 0$ 。将此图形分成二部分, 坐标系如题 15.2 图(a₁)所示。

$$A_1 = \frac{1}{2}bh, \quad A_2 = \frac{1}{2}ah$$

$$\begin{aligned}
 z_{C_1} &= \frac{1}{3}h, \quad z_{C_2} = \frac{2}{3}h \\
 z_C &= \frac{\sum A_i z_{C_i}}{\sum A_i} \\
 &= \frac{\frac{1}{2}bh \times \frac{1}{3}h + \frac{1}{2}ah \times \frac{2}{3}h}{\frac{1}{2}bh + \frac{1}{2}ah} \\
 &= \frac{h(2a+b)}{3(a+b)}
 \end{aligned}$$



续题 15.2 图

(b) 如题 15.2 图(b)所示。

平面图形面积对称于 z 轴, 形心 C 必在 z 轴上, 故 $y_C = 0$ 。将平面图形分为三部分。

$$A_1 = 500 \times 600 \text{ mm}^2 = 3 \times 10^5 \text{ mm}^2, \quad z_{C_1} = 500 \text{ mm}$$

$$\begin{aligned}
 A_2 &= -(500 - 36 \times 2) \times (600 - 40) \text{ mm}^2 = -2.4 \times 10^5 \text{ mm}^2, \\
 z_{C_2} &= 480 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

$$A_3 = 200 \times 600 \text{ mm}^2 = 1.2 \times 10^5 \text{ mm}^2, \quad z_{C_3} = 100 \text{ mm}$$

$$\begin{aligned}
 z_C &= \frac{\sum A_i z_{C_i}}{\sum A_i} = \frac{A_1 z_{C_1} + A_2 z_{C_2} + A_3 z_{C_3}}{A_1 + A_2 + A_3} \\
 &= \frac{3 \times 10^5 \times 500 - 2.4 \times 10^5 \times 480 + 1.2 \times 10^5 \times 100}{3 \times 10^5 - 2.4 \times 10^5 + 1.2 \times 10^5} \text{ mm} \\
 &= 260 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

(c) 如题 15.2 图(c)所示。

因平面图形面积对称于 z 轴, 故 $y_C = 0$, 查附录三型钢表得 (题 15.2 图(c₁))

$$A_1 = 21.316 \text{ cm}^2, \quad z_{0_1} = 1.67 \text{ cm}$$

$$A_2 = 39.578 \text{ cm}^2, \quad z_{0_2} = 0$$

$$z_{C_1} = 20 + z_{0_1}, \quad z_{C_2} = 20/2 + z_{0_2}$$

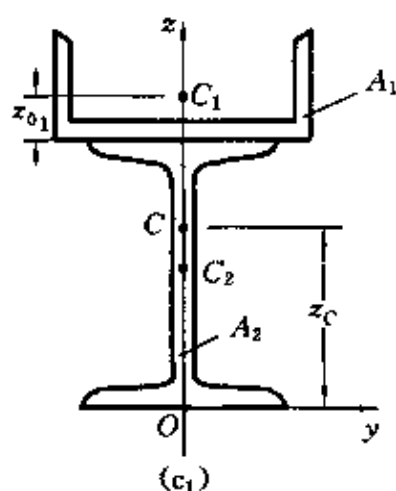
$$z_C = \frac{A_1 z_{C_1} + A_2 z_{C_2}}{A_1 + A_2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{21.316 \times (20 + 1.67)}{21.316 + 39.578} \\
 &\quad + \frac{39.578 \times \left(\frac{20}{2} + 0\right)}{21.316 + 39.578} \text{ cm} \\
 &= 14.1 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

(d) 如题 15.2 图(d)所示。

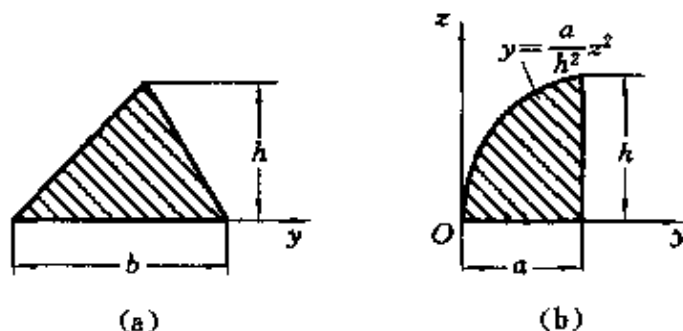
将题 15.2 图(d)所示图形的面积, 视为一个 $2a \times 2a$ 的大正方形面积挖去一个 $a \times a$ 的小正方形面积, 所以

$$z_c = y_c = \frac{a \times 4a^2 - \frac{3}{2}a \times a^2}{4a^2 - a^2} = \frac{5}{6}a$$



续题 15.2 图

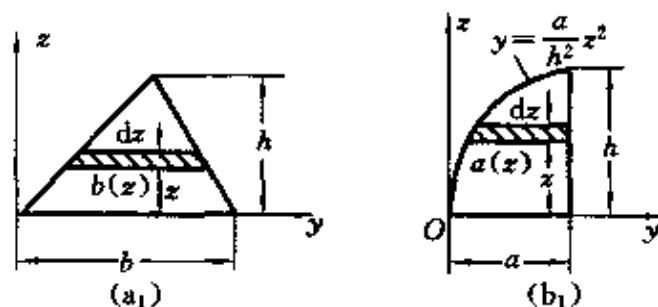
15.3 试用积分法求题 15.3 图(a)、(b)所示各图形的 I_y 值。



题 15.3 图

解 (a) 如题 15.3 图(a)所示。

取微面积 dA (题 15.3 图(a₁))



续题 15.3 图

$$dA = b(z)dz = \frac{b}{h}(h - z)dz$$

$$I_y = \int_A z^2 dA = \frac{b}{h} \int_0^h z^2 (h - z) dz = \frac{bh^3}{12}$$

(b) 如题 15.3 图(b)所示。

取微面积 dA (题 15.3 图(b₁))

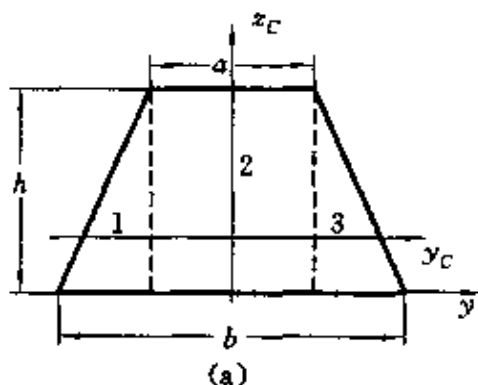
$$dA = a(z)dz = \left(a - \frac{a}{h^2} z^2 \right) dz = a \left(1 - \frac{z^2}{h^2} \right) dz$$

$$I_y = \int_A z^2 dA = a \int_0^h z^2 \left(1 - \frac{z^2}{h^2} \right) dz = \frac{2}{15} ah^3$$

15.4 试计算题 15.2 中各平面图形对形心轴 y_c 的惯性矩。

解 (a) 如题 15.4 图(a)所示。将图形分成三部分：一个矩形，两个相同的直角三角形，则其对 y 轴的惯性矩为

$$\begin{aligned} I_y &= 2I_{y_1} + I_{y_2} \\ &= 2 \times \frac{1}{12} \left(\frac{b-a}{2} \right) h^3 \\ &\quad + \frac{1}{12} ah^3 + ah \left(\frac{h}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{12} bh^3 + \frac{1}{4} ah^3 \end{aligned}$$



题 15.4 图

由题 15.2(a) 的答案知，图形的 $z_c = \frac{h(2a+b)}{3(a+b)}$ ，所以图形对形心轴的惯性矩为

$$\begin{aligned} I_{y_c} &= I_y - z_c^2 A = \frac{1}{12} bh^3 + \frac{1}{4} ah^3 - \frac{h^2(2a+b)^2}{9(a+b)^2} \times \frac{1}{2} h(a+b) \\ &= \frac{h^3(a^2 + 4ab + b^2)}{36(a+b)} \end{aligned}$$

(b) 如题 15.2 图(b)所示，将图形视为三个矩形的组合：

矩形 1

$$A_1 = 500 \times 600 \text{ mm}^2$$

$$I_{C_1} = \left[\frac{1}{12} \times 500 \times 600^3 + (500 - 260)^2 \times 500 \times 600 \right] \text{mm}^4$$

$$= 2.63 \times 10^{10} \text{mm}^4$$

矩形 2

$$A_2 = (500 - 72) \times 560 \text{mm}^2$$

$$I_{C_2} = \left[\frac{1}{12} \times (500 - 72) \times 560^3 + (480 - 260)^2 \right.$$

$$\left. \times (500 - 72) \times 560 \right] \text{mm}^4$$

$$= 1.79 \times 10^{10} \text{mm}^4$$

矩形 3

$$A_3 = 200 \times 600 \text{mm}^2$$

$$I_{C_3} = \left[\frac{1}{12} \times 600 \times 200^3 + 200 \times 600 \times (260 - 100)^2 \right] \text{mm}^4$$

$$= 0.347 \times 10^{10} \text{mm}^4$$

$$I_C = I_{C_1} + I_{C_3} - I_{C_2} = (2.63 + 0.347 - 1.79) \times 10^{10} \text{mm}^4$$

$$= 1.19 \times 10^{10} \text{mm}^4$$

(c) 查附录三型钢表得 No. 14b 槽钢的 (题 15.4 图 (b))

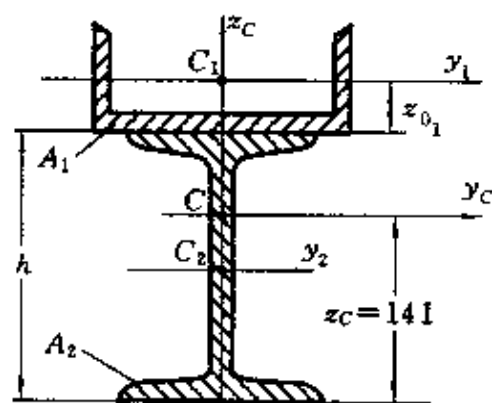
$$A_1 = 21.31 \text{cm}^2$$

$$z_{0_1} = 1.67 \text{cm}$$

$$I_{y_1} = 61.1 \text{cm}^4$$

No. 20b 工字钢的

$$A_2 = 39.6 \text{cm}^2, \quad I_{y_2} = 2500 \text{cm}^4$$



(b)

续题 15.4 图

$$I_{y_c} = [I_{y_1} + (h + z_{0_1} - z_c)^2 A_1] + [I_{y_2} + (z_c - h/2)^2 A_2]$$

$$= \{ [61.1 + (20 + 1.67 - 14.1)^2 \times 21.31]$$

$$+ [2500 + (14.1 - 10)^2 \times 39.6] \} \text{cm}^4$$

$$= 4.45 \times 10^{-5} \text{m}^4$$

(d) 如题15.2图(d)所示。将图形视为一个 $2a \times 2a$ 的大正方形面积挖去一个 $a \times a$ 的小正方形面积,所以(见附录一)

$$I_{yc} = \frac{1}{12}(2a)^4 - \frac{1}{12}a^4 = \frac{5}{4}a^4$$

15.5 薄圆环的平均半径为 r ,厚度为 δ ($r \gg \delta$)。试证薄圆环对任意直径的惯性矩为 $I = \pi r^3 \delta$,对圆心的极惯性矩为 $I_p = 2\pi r^3 \delta$ 。

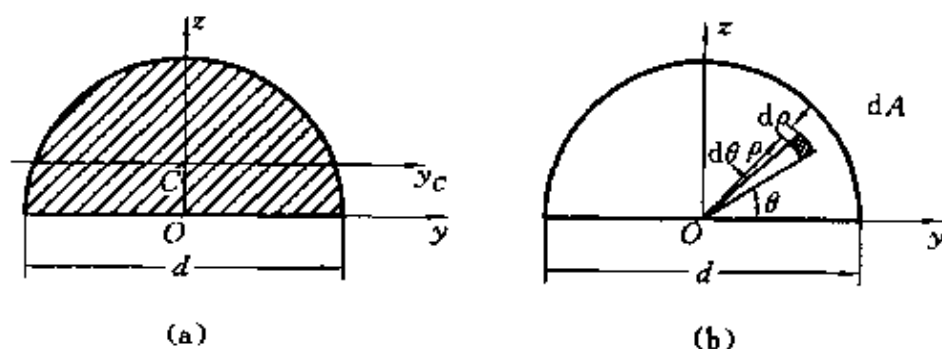
解 内半径为 $(r - 0.5\delta)$,外半径为 $(r + 0.5\delta)$,故

$$I_y = \frac{\pi}{4}[(r + 0.5\delta)^4 - (r - 0.5\delta)^4] = \pi r^3 \delta + \frac{1}{4}\pi \delta^3 r$$

因 $\delta \ll r$,第二项与第一项相比较,可略去不计,所以

$$I_x = I_y = \pi r^3 \delta, \quad I_p = I_x + I_y = 2\pi r^3 \delta$$

15.6 计算半圆形(题15.6图(a))对形心轴 y_c 的惯性矩。



题15.6图

解 在题15.6图(b)中取微面积 $dA = \rho d\rho d\theta$,所以

$$S_y = \int z dA = \int \rho^2 \sin\theta d\rho d\theta = \int_0^r \rho^2 d\rho \int_0^\pi \sin\theta d\theta = \frac{2}{3}r^3$$

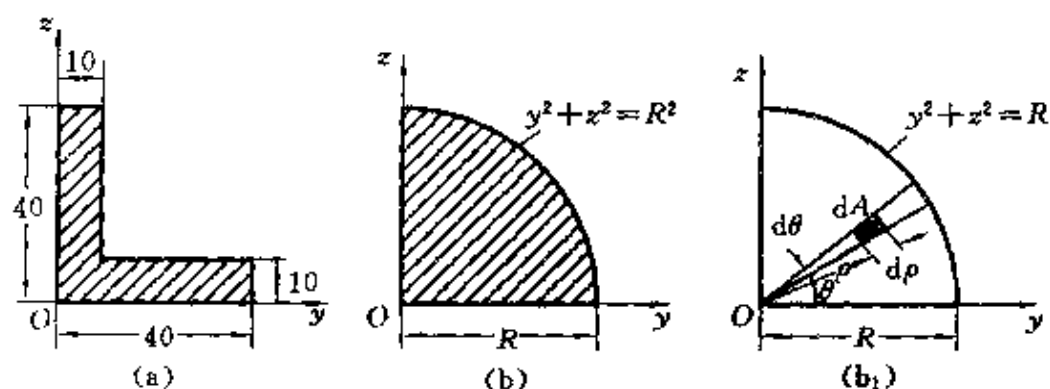
$$y_c = \frac{S_y}{A} = \frac{2}{3}r^3 \left(\frac{\pi r^2}{2} \right)^{-1} = \frac{4r}{3\pi}$$

$$I_y = \int_A z^2 dA = \int_A (\rho \sin\theta)^2 \rho d\theta d\rho = \int_0^r \rho^3 d\rho \int_0^\pi \sin^2\theta d\theta = \frac{\pi r^4}{8}$$

$$I_{yc} = I_y - \frac{1}{2}\pi r^2 \left(\frac{4r}{3\pi} \right)^2 = 0.11r^4$$

15.7 计算题15.7图(a)、(b)所示图形对 y 、 z 轴的惯性积 I_{yz} 。

解 (a) 如题15.7图(a)所示。



题 15.7 图

$$I_{yz} = (20 \times 20 \times 40^2 - 25 \times 25 \times 30^2) \text{ mm}^4 \\ = 7.75 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

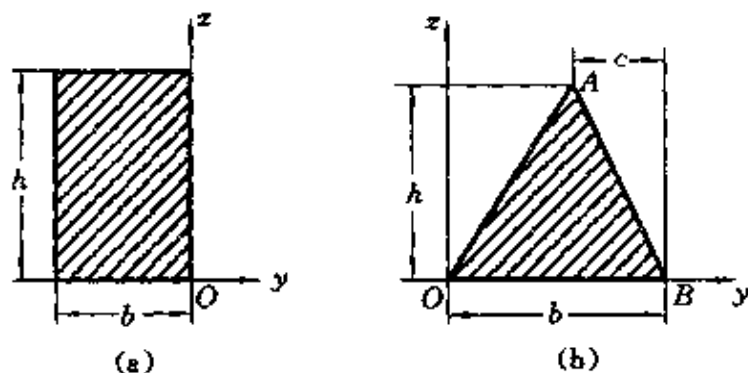
(b) 如题 15.7 图(b)所示。

在题 15.7 图(b₁)中,取微面积 dA,

$$dA = \rho d\theta d\rho$$

$$I_{yz} = \int_A yz dA = \int_0^R \int_0^{\pi/2} (\rho \cos \theta)(\rho \sin \theta)(\rho d\rho d\theta) \\ = \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{1}{8} R^4$$

15.8 计算下列图形对 y、z 轴的惯性矩 I_y 、 I_z 以及惯性积 I_{yz} 。



题 15.8 图

解 (a) 如题 15.8 图(a)所示。

$$I_y = \frac{1}{12} b h^3 + b h \left(\frac{h}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} b h^3$$

$$I_z = \frac{1}{12}hb^3 + bh\left(-\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}hb^3$$

$$I_{yz} = \left(-\frac{b}{2}\right) \times \left(\frac{h}{2}\right) \times bh = -\frac{h^2b^2}{4}$$

(b) 如题 15.8 图(b)所示。

$$OA \text{ 直线方程} \quad y = \frac{b-c}{h}z$$

$$AB \text{ 直线方程} \quad y = \frac{bh-cz}{h}$$

$$\begin{aligned} I_z &= \int_A y^2 dA = \int_A y^2 dy dz = \int_0^h dz \int_{(b-c)z/h}^{(bh-cz)/h} y^2 dy \\ &= \int_0^h \frac{1}{3} \left[\left(\frac{bh-cz}{h} \right)^3 - \left(\frac{b-c}{h}z \right)^3 \right] dz \\ &= \frac{1}{12}bh(3b^2 - 3bc + c^2) \end{aligned}$$

$$I_y = \frac{1}{12}bh^3 \quad (\text{见题 15.3 解})$$

$$\begin{aligned} I_{yz} &= \int_A yz dA = \int_A yz dy dz = \int_0^h z dz \int_{(b-c)z/h}^{(bh-cz)/h} y dy \\ &= \int_0^h \frac{1}{2} \left[\left(\frac{bh-cz}{h} \right)^2 - \left(\frac{b-c}{h}z \right)^2 \right] z dz \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{b^2h^2}{4} - \frac{bch^2}{6} \right] = \frac{1}{24}bh^2(3b - 2c) \end{aligned}$$

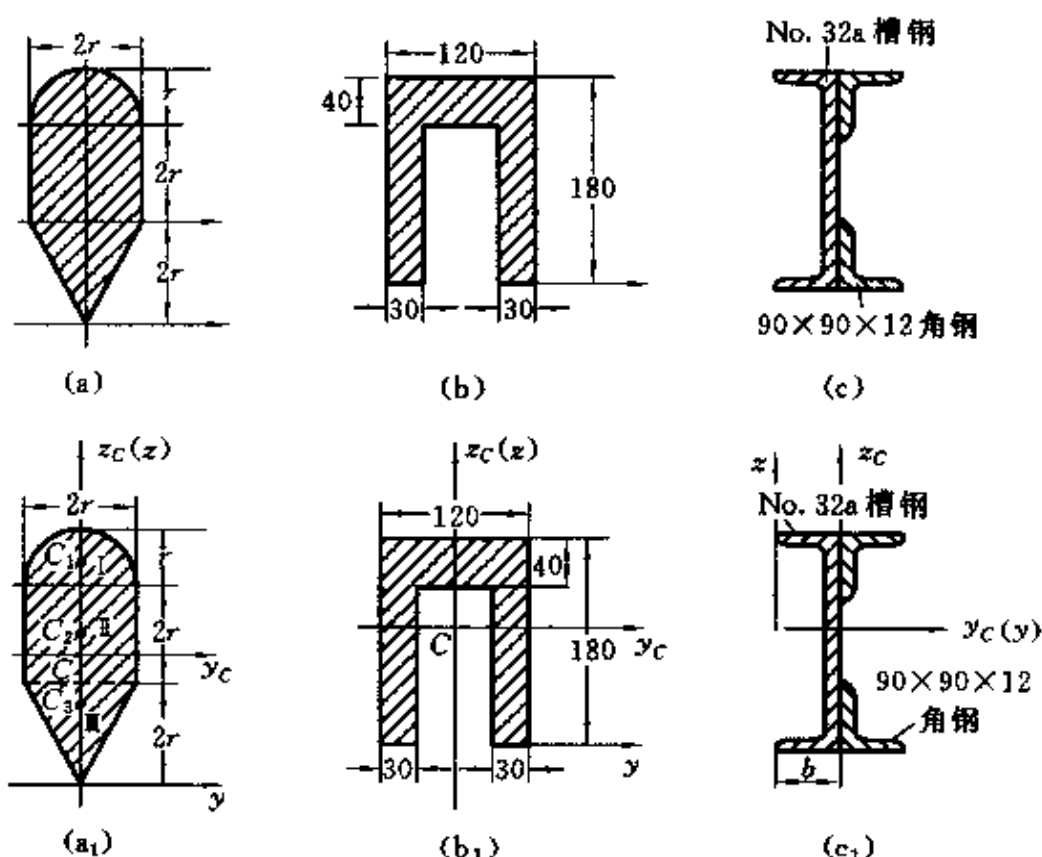
15.9 试确定题 15.9 图(a)、(b)、(c)所示平面图形的形心主惯性轴的位置,并求形心主惯性矩。

解 (a) 如题 15.9 图(a)所示。

z 轴是组合图形的对称轴,故 $y_c = 0$,所以该图形的形心主惯性轴一条为 z 轴,另一条是过其形心与 z 轴垂直的轴。选取题 15.9 图(a₁)所示坐标系,并将图形视为三个小图形的组合,它们的面积和形心坐标为(题 15.9 图(a₁))

图形 I (半圆)

$$A_1 = 0.5\pi r^2, \quad y_{c_1} = 4r + \frac{4r}{3\pi} = 4.42r$$



题 15.9 图

图形 I (矩形)

$$A_2 = 2r \times 2r = 4r^2, \quad y_{C_2} = r + 2r = 3r$$

图形 II (三角形)

$$A_3 = \frac{1}{2} \times 2r \times 2r = 2r^2, \quad y_{C_3} = \frac{4}{3}r = 1.33r$$

$$\begin{aligned} z_C &= \frac{A_1 y_{C_1} + A_2 y_{C_2} + A_3 y_{C_3}}{A_1 + A_2 + A_3} \\ &= \frac{0.5\pi r^2 \times 4.42r + 4r^2 \times 3r + 2r^2 \times 1.33r}{0.5\pi r^2 + 4r^2 + 2r^2} = 2.85r \end{aligned}$$

A_1 、 A_2 、 A_3 对各自形心轴的惯性矩:

图形 I (半圆)

$$I_{y_{C_1}} = 0.11r^4 \quad (\text{见题 15.6 解})$$

图形 I (矩形)

$$I_{yc_2} = \frac{1}{12}(2r)^4 = 1.33r^4$$

图形 II (三角形)

$$I_{yc_3} = \frac{1}{12}(2r)^4 - \frac{1}{2} \times 2r \times 2r \times \left(\frac{2}{3}r\right)^2 = 0.444r^4$$

应用平行移轴定理, 将以上三个图形对各自的形心轴的惯性矩转化为对组合图形的形心轴的惯性矩后再叠加

$$\begin{aligned} I_{yc} &= 0.11r^4 + (4.42r - 2.85r)^2 \times \frac{1}{2}\pi r^2 + 1.33r^4 \\ &\quad + (3r - 2.85r)^2 \times 4r^2 + 0.444r^4 \\ &\quad + (2.85r - 1.33r)^2 \times 2r^2 \\ &= 10.5r^4 \end{aligned}$$

求 I_{z_c} 之前, 先求三个图形面积 A_1 、 A_2 、 A_3 分别对 z 轴的惯性矩:

半圆形 (见题 15.9 图 (a₂))

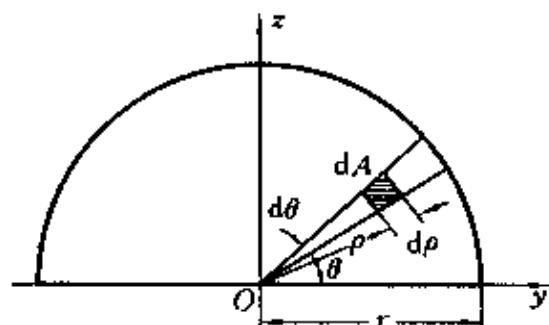
$$I_{z_1} = \int_A y^2 dA = \int_A (\rho \cos \theta)^2 \rho d\theta d\rho = \int_0^r \rho^3 d\rho \int_0^\pi \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{8}\pi r^4$$

矩形

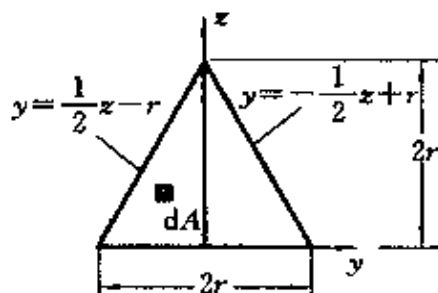
$$I_{z_2} = \frac{1}{12}(2r)^4 = \frac{4}{3}r^4$$

三角形 (见题 15.9 图 (a₃))

$$I_{z_3} = \int_A y^2 dA = \int_0^{2r} dz \int_{(z-2r)/2}^{(2r-z)/2} y^2 dy$$



(a₂)



(a₃)

续题 15.9 图

$$= \int_0^{2r} \frac{1}{3} \left[\left(\frac{2r-z}{2} \right)^3 - \left(\frac{z-2r}{2} \right)^3 \right] dz = \frac{1}{3} r^4$$

因三个小图形有共同的形心轴 z_c , 所以组合图形对 z_c 轴的惯性矩为

$$I_{z_c} = I_{z_1} + I_{z_2} + I_{z_3} = \left(\frac{1}{8}\pi + \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \right) r^4 = 2.06r^4$$

(b) 如题 15.9 图(b)所示。

因 z 是对称轴, 故形心必在 z 轴上, 即

$$y_c = 0$$

$$z_c = \frac{90 \times 180 \times 120 - [(180 - 40)/2] \times 60 \times 140}{180 \times 120 - 140 \times 60} \text{ mm} \\ = 103 \text{ mm}$$

y_c 轴的位置如题 15.9 图(b₁)所示。

$$I_{y_c} = \left[\frac{1}{12} \times 180^3 \times 120 + (103 - 90)^2 \times 180 \times 120 \right. \\ \left. - \frac{1}{12} \times 140^3 \times 60 - (103 - 70)^2 \times 140 \times 60 \right] \text{ mm}^4 \\ = 3.91 \times 10^{-5} \text{ m}^4$$

$$I_{z_c} = \left(\frac{1}{12} \times 180 \times 120^3 - \frac{1}{12} \times 140 \times 60^3 \right) \text{ mm}^4 \\ = 2.34 \times 10^{-5} \text{ m}^4$$

(c) 如题 15.9 图(c)所示。

查附录三型钢表 No. 32a 槽钢, 可获得(题 15.9 图(c₂))

$$I_{z_1} = 552 \text{ cm}^4, \quad I_{y_{c_1}} = 7600 \text{ cm}^4, \quad h = 320 \text{ mm}$$

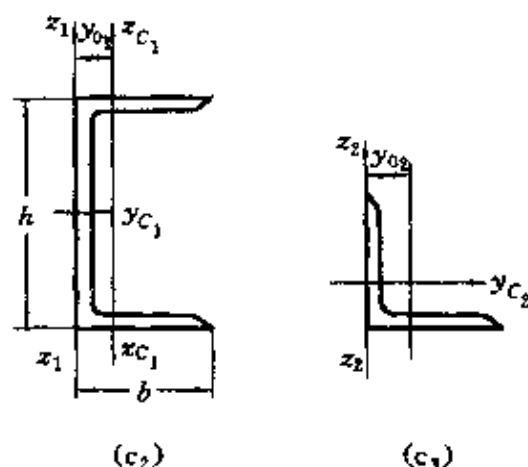
$$b = 88 \text{ mm}, \quad y_{0_1} = 22.4 \text{ mm}, \quad A_1 = 48.513 \text{ cm}^2$$

查附录三型钢表 90×90×12 角钢, 可获得(题 15.9 图(c₃))

$$I_{z_2} = 293.76 \text{ cm}^4, \quad I_{y_{c_2}} = 149.22 \text{ cm}^4$$

$$y_{0_2} = 26.7 \text{ mm}, \quad A_2 = 20.306 \text{ cm}^2$$

因 y 轴是对称轴, 故形心必在 y 轴上, 即



续题 15.9 图

$$z_c = 0$$

$$y_c = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2 \times 2}{A_1 + A_2} = \frac{(b - y_{01}) A_1 + (b + y_{02}) A_2 \times 2}{A_1 + A_2}$$

$$= \frac{(88 - 22.4) \times 48.513 \times 10^4 + (88 + 26.7) \times 20.306 \times 10^4 \times 2}{(48.513 + 2 \times 20.306) \times 10^4} \text{ mm}$$

$$= 88 \text{ mm}$$

$$I_{xc} = \left[I_{xc_2} + \left(\frac{h}{2} - y_{02} \right)^2 A_2 \right] \times 2 + I_{xc_1}$$

$$= \{ [149.22 + (16 - 2.67)^2 \times 20.306] \times 2 + 7600 \} \text{ cm}^4$$

$$= 1.51 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

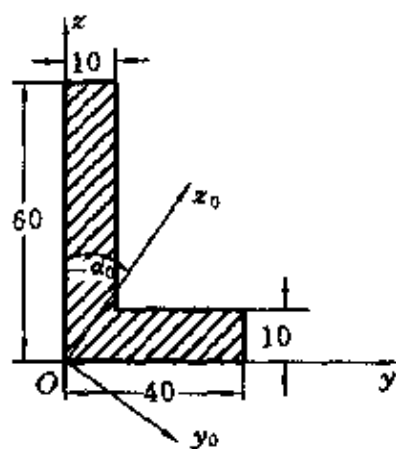
$$= I_{x_1} + I_{x_2} \times 2 = (552 + 293.76 \times 2) \text{ cm}^4$$

$$= 1.14 \times 10^{-5} \text{ m}^4$$

$y_c = 88 \text{ mm}$ 说明 z_c 轴与槽钢和角钢的交接面重合, 如题 15.9 图 (c₁) 所示。

15.10 试确定题 15.10 图所示图形通过坐标原点 O 的主惯性轴的位置, 并计算主惯性矩 I_{y_0} 和 I_{z_0} 的值。

解 选取题 15.10 图所示的坐标系。



题 15.10 图

$$I_y = \left[\left(\frac{1}{12} \times 30 \times 10^3 + 5^2 \times 30 \times 10 \right) + \left(\frac{1}{12} \times 10 \times 60^3 + 30^2 \times 10 \times 60 \right) \right] \text{mm}^4$$

$$= 7.3 \times 10^5 \text{mm}^4$$

$$I_z = \left\{ \left(\frac{1}{12} \times 60 \times 10^3 + 5^2 \times 60 \times 10 \right) + \left[\frac{1}{12} \times 30^3 \times 10 + (10 + 15)^2 \times 10 \times 30 \right] \right\} \text{mm}^4$$

$$= 2.3 \times 10^5 \text{mm}^4$$

$$I_{yz} = [30 \times 5 \times 60 \times 10 + (10 + 15) \times 5 \times 30 \times 10] \text{mm}^4$$

$$= 1.28 \times 10^5 \text{mm}^4$$

主惯性轴的方向

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{-2I_{yz}}{I_y - I_z} = -\frac{2 \times 1.28}{7.3 - 2.3} = -0.51$$

$$\alpha_0 = -13.5^\circ$$

主惯性轴 y_0, z_0 如题 15.10 图所示。

主惯性矩

$$I_{y_0} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\alpha_0 - I_{yz} \sin 2\alpha_0$$

$$= \left[\frac{7.3 \times 10^5 + 2.3 \times 10^5}{2} + \frac{7.3 \times 10^5 - 2.3 \times 10^5}{2} \right. \\ \left. \times \cos(-27^\circ) - 1.28 \times 10^5 \sin(-27^\circ) \right] \text{mm}^4$$

$$= 7.61 \times 10^5 \text{mm}^4$$

$$I_{z_0} = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\alpha_0 + I_{yz} \sin 2\alpha_0$$

$$= \left[\frac{7.3 \times 10^5 + 2.3 \times 10^5}{2} - \frac{7.3 \times 10^5 - 2.3 \times 10^5}{2} \right. \\ \left. \times \cos(-27^\circ) + 1.28 \times 10^5 \sin(-27^\circ) \right] \text{mm}^4$$

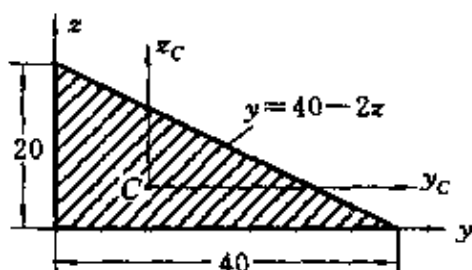
$$=1.99 \times 10^5 \text{ mm}^4$$

两个主惯性矩也就是最大和最小惯性矩,在本题中

$$I_{\max} = I_{y_0} = 7.61 \times 10^5 \text{ mm}^4$$

$$I_{\min} = I_{x_0} = 1.99 \times 10^5 \text{ mm}^4$$

15.11 求题15.11图所示三角形的形心主惯性矩,并确定形心主惯性轴的位置。



题15.11图

解 形心坐标为 $C\left(\frac{20}{3}, \frac{40}{3}\right)$

$$\begin{aligned} I_{y_c} &= \left[\frac{1}{12} \times 40 \times 20^3 - \left(\frac{20}{3} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. \times \frac{1}{2} \times 20 \times 40 \right] \text{ mm}^4 \\ &= 8.89 \times 10^3 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{z_c} &= \left[\frac{1}{12} \times 20 \times 40^3 - \left(\frac{40}{3} \right)^2 \times \frac{1}{2} \times 20 \times 40 \right] \text{ mm}^4 \\ &= 3.56 \times 10^4 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{y_c z_c} &= \int_A yz dA - \frac{20}{3} \times \frac{40}{3} \times \frac{1}{2} \times 20 \times 40 \\ &= \int_0^{20} z dz \int_0^{(-2z+40)} y dy - \frac{20}{3} \times \frac{40}{3} \times \frac{1}{2} \times 20 \times 40 \\ &= \int_0^{20} z \times \frac{1}{2} \times (40 - 2z)^2 dz - \frac{6.4 \times 10^5}{18} \\ &= \left[2 \left(\frac{1}{2} \times 400 \times 20^2 - 40 \times \frac{1}{3} \times 20^3 + \frac{1}{4} \times 20^4 \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{6.4 \times 10^5}{18} \right] \text{ mm}^4 \\ &= -8.89 \times 10^3 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

形心主惯性轴的方向

$$\tan 2\alpha_0 = - \frac{2I_{yz}}{I_{y_c} - I_{z_c}} = \frac{2 \times 8.89 \times 10^3}{8.89 \times 10^3 - 3.56 \times 10^4} = -0.665$$

所以

$$\alpha_0 = -16.8^\circ$$

形心主惯性矩

$$\begin{aligned} I_{x_0} &= \frac{I_{y_c} + I_{z_c}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_{y_c} - I_{z_c})^2 + 4I_{y_c z_c}^2} \\ &= \left[\frac{8.89 \times 10^3 + 3.56 \times 10^4}{2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sqrt{[(8.89 - 35.6) \times 10^3]^2 + 4(8.89 \times 10^3)^2} \text{ mm}^4 \right] \\ &= 3.83 \times 10^4 \text{ mm}^4 \\ I_{y_0} &= \frac{I_{y_c} + I_{z_c}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_{y_c} - I_{z_c})^2 + 4I_{y_c z_c}^2} \\ &= \left[\frac{8.89 \times 10^3 + 3.56 \times 10^4}{2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sqrt{[(8.89 - 35.6) \times 10^3]^2 + 4(8.89 \times 10^3)^2} \right] \text{ mm}^4 \\ &= 6.2 \times 10^3 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

15.12 确定题 15.10 中图形的形心主惯性矩及形心主惯性轴。

解 将角形截面视为两个矩形截面之和, 如题 15.12 图所示。它们的面积和形心坐标分别为

$$A_1 = (30 \times 10) \text{ mm}^2 = 300 \text{ mm}^2$$

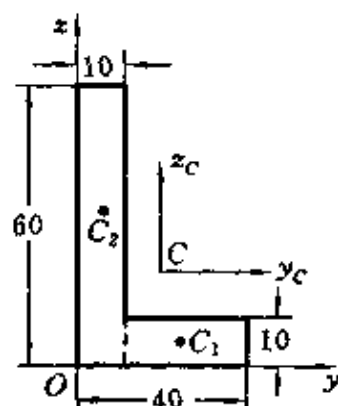
$$A_2 = (60 \times 10) \text{ mm}^2 = 600 \text{ mm}^2$$

$$y_1 = 25 \text{ mm}, \quad z_1 = 5 \text{ mm}$$

$$y_2 = 5 \text{ mm}, \quad z_2 = 30 \text{ mm}$$

角形截面形心的坐标

$$\begin{aligned} y_c &= \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2} \\ &= \frac{30 \times 10 \times 25 + 60 \times 10 \times 5}{10 \times 30 + 10 \times 60} \text{ mm} \\ &= \frac{35}{3} \text{ mm} \end{aligned}$$



题 15.12 图

$$z_c = \frac{A_1 z_1 + A_2 z_2}{A_1 + A_2} = \frac{30 \times 10 \times 5 + 60 \times 10 \times 30}{10 \times 30 + 10 \times 60} \text{ mm}$$

$$= \frac{65}{3} \text{ mm}$$

求对形心轴 y_c 和 z_c 的惯性矩和惯性积：

$$I_{y_c} = \left[\frac{1}{12} \times 10 \times 60^3 + \left(\frac{65}{3} - 30 \right)^2 \times 600 \right. \\ \left. + \frac{1}{12} \times 30 \times 10^3 + \left(\frac{65}{3} - 5 \right)^2 \times 300 \right] \text{ mm}^4$$

$$= 3.08 \times 10^5 \text{ mm}^4$$

$$I_{z_c} = \left[\frac{1}{12} \times 60 \times 10^3 + \left(\frac{35}{3} - 5 \right)^2 \times 600 + \frac{1}{12} \times 10 \times 30^3 \right. \\ \left. + \left(\frac{35}{3} - 25 \right)^2 \times 300 \right] \text{ mm}^4$$

$$= 1.08 \times 10^5 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_c z_c} = \left[600 \times \left(\frac{65}{3} - 30 \right) \left(\frac{35}{3} - 5 \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{65}{3} - 5 \right) \left(\frac{35}{3} - 25 \right) \times 300 \right] \text{ mm}^4$$

$$= -1.0 \times 10^5 \text{ mm}^4$$

形心主惯性矩和形心主轴的方向：

$$I_{y_0} = \frac{I_{y_c} + I_{z_c}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_{y_c} - I_{z_c})^2 + 4I_{y_c z_c}^2}$$

$$= \left[\frac{(3.08 + 1.08) \times 10^5}{2} + \frac{1}{2} \right. \\ \left. \times \sqrt{[(3.08 - 1.08) \times 10^5]^2 + 4(-1.0 \times 10^5)^2} \right] \text{ mm}^4$$

$$= 34.9 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

$$I_{z_0} = \frac{I_{y_c} + I_{z_c}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_{y_c} - I_{z_c})^2 + 4I_{y_c z_c}^2}$$

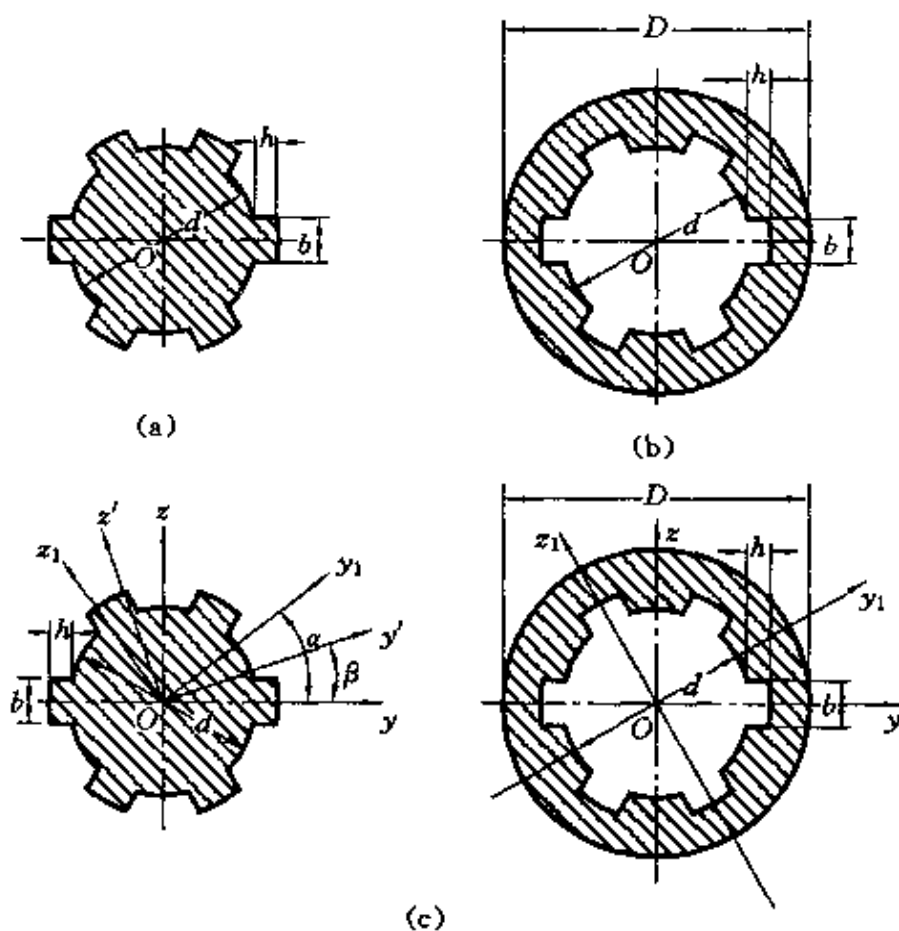
$$= \left[\frac{(3.08 + 1.08) \times 10^5}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{[(3.08 - 1.08) \times 10^5]^2 + 4(-1.0 \times 10^5)^2} \right] \text{mm}^4$$

$$= 6.66 \times 10^4 \text{mm}^4$$

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2I_{y_c z_c}}{I_{y_c} - I_{z_c}} = -\frac{2 \times (-1.0 \times 10^5)}{(3.08 - 1.08) \times 10^5} = 1$$

$$\alpha_0 = 22.5^\circ$$

15.13 花键轴截面及带有花键孔的轴截面如题 15.13 图 (a)、(b) 所示。试证通过形心的任一坐标轴都是形心主惯性轴, 且形心主惯性矩等于常量。并问任意正多角形是否也有相同的性质?



题 15.13 图

解 原坐标系 zOy 的二坐标轴为图形的对称轴, 所以有

$$I_{yz} = 0$$

我们还可以再找到另外两条对称轴 y_1 和 z_1 , 对 y_1 和 z_1 轴的惯性积也为零, 即

$$I_{y_1 z_1} = \frac{I_y - I_z}{2} \sin 2\alpha + I_{yz} \cos 2\alpha = 0$$

上式中, 因 $I_{yz} = 0, \sin 2\alpha \neq 0$, 所以有

$$I_y = I_z$$

作经过形心 O 的任意两条坐标轴 y', z' , 则图形的惯性积为

$$I_{y' z'} = \frac{I_y - I_z}{2} \sin 2\beta + I_{yz} \cos 2\beta$$

因 $I_y = I_z, I_{yz} = 0$, 故 $I_{y' z'} = 0$

所以证明了经过形心轴的任意坐标系都是形心主惯性轴, 并且有

$$I_{y_1} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\alpha - I_{yz} \sin 2\alpha = I_y = I_z$$

$$I_{z_1} = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\alpha + I_{yz} \sin 2\alpha = I_y = I_z$$

上述结果说明形心主惯性矩等于常量。应用相同的方法可证任意正多角形也有相同的性质。

15.14 试计算题 15.13 图(a)所示花键轴截面的形心主惯性矩。设 $h \ll d$ 。

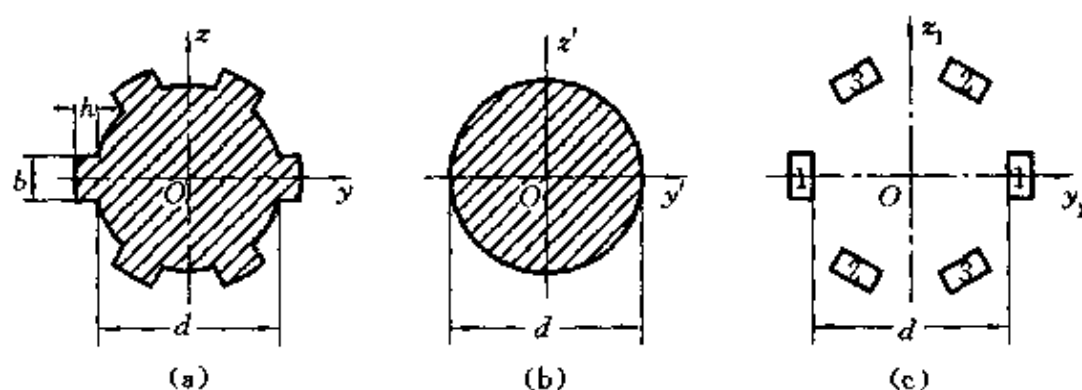
解 花键轴截面面积可近似地看作由直径为 d 的圆截面面积与 6 个小矩形截面面积的组合, 如题 15.14 图(b)、(c)所示。由题 15.13 可知, 花键轴截面主惯性矩等于常量, 故只要求出 I_y 便可。

圆面积的惯性矩

$$I_y = \frac{\pi d^4}{64}$$

矩形 1 面积的惯性矩

$$I_{y_1} = \left(\frac{1}{12} b^3 h \right) \times 2 = \frac{1}{6} b^3 h$$



题 15.14 图

$$I_{z_1} = \left[\frac{1}{12}bh^3 + bh \left(\frac{d}{2} + \frac{h}{2} \right)^2 \right] \times 2 = \frac{1}{6}bh^3 + 2bh \left(\frac{d}{2} + \frac{h}{2} \right)^2$$

矩形 2、3 面积对 y_1 轴的惯性矩可用矩形 1 面积的惯性矩转 60° 求得

$$\begin{aligned} I_{y_3} = I_{y_2} &= \frac{I_{y_1} + I_{z_1}}{2} + \frac{I_{y_1} - I_{z_1}}{2} \cos(2 \times 60^\circ) = \frac{I_{y_1} + 3I_{z_1}}{4} \\ &= \frac{1}{4} \times \left[\frac{1}{6}b^3h + 6 \times bh \left(\frac{d}{2} + \frac{h}{2} \right)^2 + \frac{1}{12}bh^3 \right] \end{aligned}$$

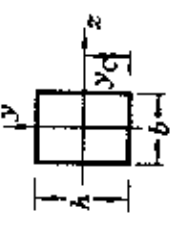
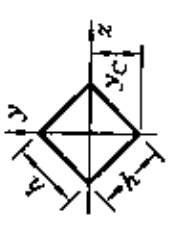
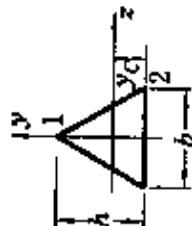
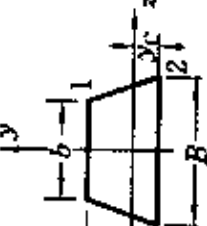
利用 $h \ll d$ 的条件, 略去 h 的二阶以上项, 得

$$I_{y_2} = I_{y_3} = \frac{1}{24}b^3h + \frac{3bhd^2}{8}$$

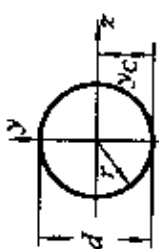
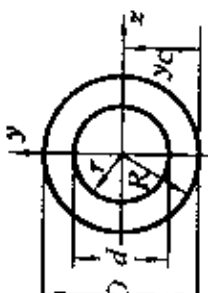
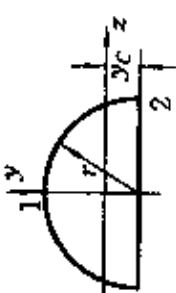
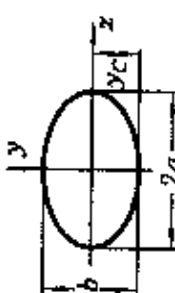
题 15.14 图 (a) 所示花键轴对形心主轴的惯性矩为

$$\begin{aligned} I_y = I_{y_1} + I_{y_2} + I_{y_3} + I_{y'} &= \frac{b^3h}{6} + \left(\frac{b^3h}{24} + \frac{3bhd^2}{8} \right) \times 2 + \frac{\pi d^4}{64} \\ &= \frac{1}{4}bh(h^3 + 3d^2) + \frac{\pi d^4}{64} \end{aligned}$$


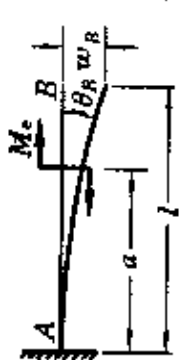
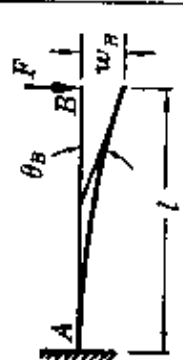
附录一 平面面积的几何特性

截面图形	面积	形心位置	惯性矩	抗弯截面模量	回转半径
	bh	$y_c = \frac{h}{2}$	$I_z = \frac{bh^3}{12}$ $I_y = \frac{hb^3}{12}$	$W_z = \frac{bh^2}{6}$ $W_y = \frac{hb^2}{6}$	$i_z = \frac{h}{\sqrt{12}}$ $i_y = \frac{b}{\sqrt{12}}$
	h^2	$y_c = \frac{h}{\sqrt{2}}$	$I_z = I_y = \frac{h^4}{12}$	$W_z = W_y = \frac{h^3}{\sqrt{12}}$	$i_z = i_y = \frac{h}{\sqrt{12}}$
	$\frac{bh}{2}$	$y_c = \frac{h}{3}$	$I_z = \frac{bh^3}{36}$ $I_y = \frac{hb^3}{48}$	$W_{z1} = \frac{bh^2}{24}$ $W_{z2} = \frac{bh^2}{12}$ $W_y = \frac{hb^2}{24}$	$i_z = \frac{h}{\sqrt{18}}$ $i_y = \frac{b}{\sqrt{24}}$
	$\frac{(B+b)h}{2}$	$y_c = \frac{B+2b}{3(B+b)}h$	$I_z = \frac{B^3+4Bb+b^3}{36(B+b)}h^3$	$W_{z1} = \frac{B^2+4Bb+b^2}{12(2B+b)}h^2$ $W_{z2} = \frac{B^3+4Bb+b^3}{12(B+2b)}h^2$	$i_z = \frac{\sqrt{B^2+4Bb+b^2}}{\sqrt{18(B+b)}}h$

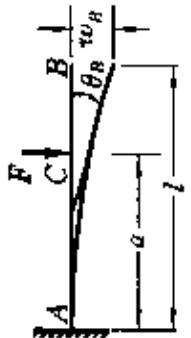
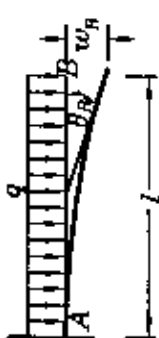
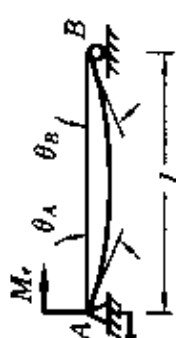
续表

截面图形	面积	形心位置	惯性矩	抗弯截面模量	回转半径
	$\pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}$	$y_c = r = \frac{d}{2}$	$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}$	$W_x = W_y = \frac{\pi r^3}{4} = \frac{\pi d^3}{32}$	$i_x = i_y = \frac{r}{2} = \frac{d}{4}$
	$\pi(R^2 - r^2)$ $= \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$	$y_c = R = \frac{D}{2}$	$I_x = I_y$ $= \frac{\pi}{4}(R^4 - r^4)$ $= \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$	$W_x = W_y$ $= \frac{\pi}{4R}(R^4 - r^4)$ $= \frac{\pi}{32D}(D^4 - d^4)$	$i_x = i_y = \frac{1}{2} \sqrt{R^2 + r^2}$ $= \frac{1}{4} \sqrt{D^2 + d^2}$
	$\frac{\pi r^2}{2}$	$y_c = \frac{4r}{3\pi}$ $\approx 0.424r$	$I_x = \left(\frac{1}{8} - \frac{8}{9\pi^2} \right) \pi r^4$ $\approx 0.110r^4$ $I_y = \frac{\pi r^4}{8}$	$W_{x1} \approx 0.191r^3$ $W_{x2} \approx 0.259r^3$ $W_y = \frac{\pi r^3}{8}$	$i_x \approx 0.264r$ $i_y = \frac{r}{2}$
	πab	$y_c = b$	$I_x = \frac{\pi ab^3}{4}$ $I_y = \frac{\pi ba^3}{4}$	$W_x = \frac{\pi ab^2}{4}$ $W_y = \frac{\pi ba^2}{4}$	$i_x = \frac{b}{2}$ $i_y = \frac{a}{2}$


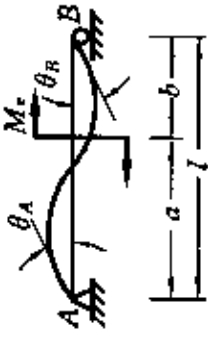
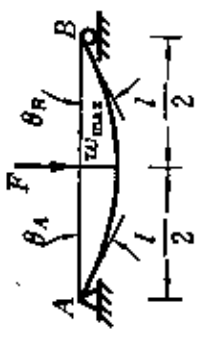
附录二 梁在简单载荷作用下的变形

序号	梁的简图	挠曲线方程	端截面转角	最大挠度
1		$w = -\frac{M_e x^2}{2EI}$	$\theta_B = -\frac{M_e l}{EI}$	$w_B = -\frac{M_e l^2}{2EI}$
2		$w = -\frac{M_e x^2}{2EI}, 0 \leq x \leq a$ $w = -\frac{M_e a}{EI} \left[(x-a) + \frac{a}{2} \right],$ $a \leq x \leq l$	$\theta_B = -\frac{M_e a}{EI}$	$w_B = -\frac{M_e a}{EI} \left(l - \frac{a}{2} \right)$
3		$w = -\frac{F x^2}{6EI} (3l - x)$	$\theta_B = -\frac{F l^2}{2EI}$	$w_B = -\frac{F l^3}{3EI}$

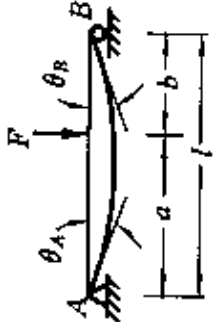
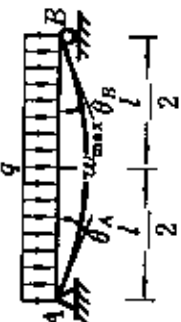
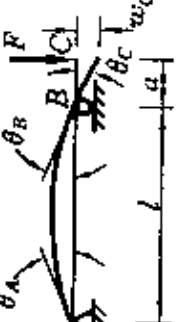
续表

序号	梁的简图	挠曲线方程	端截面转角	最大挠度
4		$w = -\frac{Fx^2}{6EI}(3a-x), 0 \leq x \leq a$ $w = -\frac{Fa^2}{6EI}(3x-a), a \leq x \leq l$	$\theta_B = -\frac{Fa^2}{2EI}$	$w_B = -\frac{Fa^2}{6EI}(3l-a)$
5		$w = -\frac{qx^2}{24EI}(x^2 - 4lx + 6l^2)$	$\theta_B = -\frac{ql^3}{6EI}$	$w_B = -\frac{ql^4}{8EI}$
6		$w = -\frac{M_ex}{6EI}(l-x)(2l-x)$	$\theta_A = -\frac{M_el}{3EI}$ $\theta_B = \frac{M_el}{6EI}$	$x = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)l$ $w_{\max} = -\frac{M_el^2}{9\sqrt{3}EI}$ $x = \frac{l}{2}$ $w_{l/2} = -\frac{M_el^2}{16EI}$


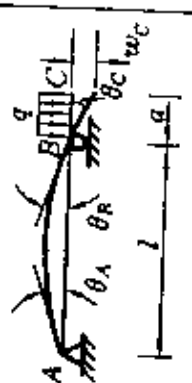
续表

序号	梁的简图	挠曲线方程	端截面转角	最大挠度
7		$w = -\frac{M_c x}{6EI} (l^2 - x^2)$	$\theta_A = -\frac{M_c l}{6EI}$ $\theta_B = \frac{M_c l}{3EI}$	$x = \frac{l}{\sqrt{3}}$ $w_{\max} = -\frac{M_c l^2}{9\sqrt{3}EI}$ $x = \frac{l}{2}, w_{l/2} = -\frac{M_c l^2}{6EI}$
8		$w = \frac{M_c x}{6EI} (l^2 - 3b^2 - x^2),$ $0 \leq x \leq a$ $w = \frac{M_c}{6EI} [-x^3 + 3l(x-a)^2 + (l^2 - 3b^2)x],$ $a \leq x \leq l$	$\theta_A = \frac{M_c}{6EI} (l^2 - 3b^2)$ $\theta_B = \frac{M_c}{6EI} (l^2 - 3a^2)$	
9		$w = -\frac{Fx}{48EI} (3l^2 - 4x^2),$ $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$	$\theta_A = -\theta_B = -\frac{Fl^2}{16EI}$	$w = -\frac{Fl^3}{48EI}$

续表

序号	梁的简图	挠曲线方程	端截面转角	最大挠度
10		$w = -\frac{Fbx}{6EI}(l^2 - x^2 - b^2),$ $0 \leq x \leq a$ $w = -\frac{Fb}{6EI} \left[\frac{l}{b}(x-a)^3 + (l^2 - b^2)x - x^3 \right],$ $a \leq x \leq l$	$\theta_A = -\frac{Fab(l+b)}{6EI}$ $\theta_B = \frac{Fab(l+a)}{6EI}$	设 $a > b$, 在 $x = \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}}$ 处, $w_{\max} = -\frac{Fb(l^2 - b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}EI}$ 在 $x = \frac{l}{2}$ 处, $w_{l/2} = -\frac{Fb(3l^2 - 4b^2)}{48EI}$
11		$w = -\frac{qx}{24EI}(l^3 - 2lx + x^3)$	$\theta_A = -\theta_B = -\frac{ql^3}{24EI}$	$w_{\max} = -\frac{5ql^4}{384EI}$
12		$w = \frac{Fax}{6EI}(l^2 - x^2),$ $0 \leq x \leq l$ $w = -\frac{F(x-l)}{6EI}[(3x-l) - (x-l)^2],$ $l \leq x \leq l+a$	$\theta_A = -\frac{1}{2}\theta_B = \frac{Fal}{6EI}$ $\theta_C = -\frac{Fa}{6EI}(2l+3a)$	$w_c = -\frac{Fa^2}{3EI}(l+a)$

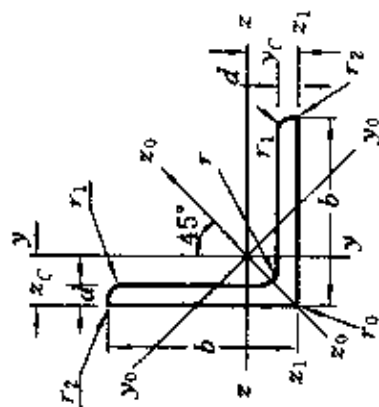
续表

序号	梁的简图	挠曲线方程	端截面转角	最大挠度
13		$w = -\frac{M_c x}{6EI} (x^2 - l^2), \quad 0 \leq x \leq l$ $w = -\frac{M_c}{6EI} (3x^2 - 4xl + l^2), \quad l \leq x \leq l+a$	$\theta_A = -\frac{1}{2} \theta_B = \frac{M_c l}{6EI}$ $\theta_C = -\frac{M_c}{3EI} (l+3a)$	$w_C = -\frac{M_c a}{6EI} (2l+3a)$
14		$w = \frac{qa^2 x}{12EI} (l^2 - x^2), \quad 0 \leq x \leq l$ $w = -\frac{qa^2 x}{12EI} \times \left[x^2 - \frac{(2l+a)(x-l)^3}{ax} - \frac{l(x-l)^4}{2a^2 x} - l^2 \right], \quad l \leq x \leq l+a$	$\theta_A = -\frac{\theta_B}{2} = \frac{qa^2 l}{12EI}$ $\theta_C = -\frac{qa^2}{6EI} (l+a)$	$w_C = -\frac{qa^3}{24EI} (3a+4l)$

附录三 型钢规格表

1. 热轧等边角钢 (GB 700-79)

符号意义:

 b —边宽; d —边厚; r —内圆弧半径; r_1 —一端内圆弧半径; r_2 —一端外圆弧半径; r_0 —顶端圆弧半径; I —惯性矩; i —惯性半径; W —截面系数; y_c —重心距离。

角钢 号数	尺 寸 (mm)		截面 面积 ($\times 10^2$) mm^2	理论 重量 ($\times 9.8$) N/m	外表 面积 m^2/m	参考数值												y_c ($\times 10$) mm
	b	d				r	$z-z$			z_0-z_0			y_0-y_0			z_1-z_1 I_{z_1} ($\times 10^4$) mm^4		
							I_z ($\times 10^4$) mm^4	i_z ($\times 10$) mm	W_z ($\times 10^3$) mm^3	I_{z_0} ($\times 10^4$) mm^4	i_{z_0} ($\times 10$) mm	W_{z_0} ($\times 10^3$) mm^3	I_{y_0} ($\times 10^4$) mm^4	i_{y_0} ($\times 10$) mm	W_{y_0} ($\times 10^3$) mm^3			
2	20	3	1.132	0.889	0.078	0.40	0.59	0.29	0.63	0.75	0.45	0.17	0.39	0.20	0.81	0.60		
		4	1.459	1.145	0.077	0.50	0.58	0.36	0.78	0.73	0.55	0.22	0.38	0.24	1.09	0.64		
2.5	25	3	1.432	1.124	0.098	0.82	0.76	0.46	1.29	0.95	0.73	0.34	0.49	0.33	1.57	0.73		
		4	1.859	1.459	0.097	1.03	0.74	0.59	1.62	0.93	0.92	0.43	0.48	0.40	2.11	0.76		

续表

角钢 号数	尺 寸 (mm)			截面 面积 ($\times 10^2$) mm^2	理论 重量 ($\times 9.8$) N/m	外表 面积 m^2/m	参考数值												y_c ($\times 10$) mm	
	b	d	r				$z-z$				z_0-z_0				y_0-y_0					z_1-z_1
							I_z ($\times 10^4$) mm^4	i_z ($\times 10$) mm	W_z ($\times 10^3$) mm^3	I_{z_0} ($\times 10^4$) mm^4	i_{z_0} ($\times 10$) mm	W_{z_0} ($\times 10^3$) mm^3	I_{y_0} ($\times 10^4$) mm^4	i_{y_0} ($\times 10$) mm	W_{y_0} ($\times 10^3$) mm^3	I_{z_1} ($\times 10^4$) mm^4				
3.0	30	3	4.5	1.749	1.373	0.117	1.46	0.91	0.68	2.31	1.15	1.09	0.61	0.59	0.51	2.71	0.85			
		4		2.276	1.786	0.117	1.84	0.90	0.87	2.92	1.13	1.37	0.77	0.58	0.62	3.63	0.89			
3.6	36	3	5	2.109	1.656	0.141	2.58	1.11	0.99	4.09	1.39	1.61	1.07	0.71	0.76	4.68	1.00			
		4		2.756	2.163	0.141	3.29	1.09	1.28	5.22	1.38	2.05	1.37	0.70	0.93	6.25	1.04			
4	40	5	5	3.382	2.654	0.141	3.95	1.08	1.56	6.24	1.36	2.45	1.65	0.70	1.09	7.84	1.07			
		3		2.359	1.852	0.157	3.59	1.23	1.23	5.69	1.55	2.01	1.49	0.79	0.96	6.41	1.09			
4.5	45	4	6	3.086	2.422	0.157	4.60	1.22	1.60	7.29	1.54	2.58	1.91	0.79	1.19	8.56	1.13			
		5		3.791	2.976	0.156	5.53	1.21	1.96	8.76	1.52	3.10	2.30	0.78	1.39	10.74	1.17			
4.5	45	3	6	2.659	2.088	0.177	5.17	1.40	1.58	8.20	1.76	2.58	2.14	0.90	1.24	9.12	1.22			
		4		3.486	2.736	0.177	6.65	1.38	2.05	10.56	1.74	3.32	2.75	0.89	1.54	12.18	1.26			
4.5	45	5	6	4.292	3.369	0.176	8.04	1.37	2.51	12.74	1.72	4.00	3.33	0.88	1.81	15.25	1.30			
		6		5.076	3.985	0.176	9.33	1.36	2.95	14.76	1.70	4.64	3.89	0.88	2.06	18.36	1.33			

注:1.各栏内的读数乘以括号中的数便是相应的几何量。例如2号角钢 $I_z=0.4 \times 10^4 \text{mm}^4$

2.根据(GB700-79) $z-z$ 轴原为 $x-x$ 轴,此地为了教学需要改为 $z-z$ 轴。

续表

角钢 号数	尺 寸 (mm)			截面 面积 ($\times 10^2$) mm ²	理论 重量 ($\times 9.8$) N/m	外表 面积 m ² /m	参 考 数 值												y _c ($\times 10$) mm
	b	d	r				z-z			z ₀ -z ₀				y ₀ -y ₀				z ₁ -z ₁	
							I _z ($\times 10^4$) mm ⁴	i _z ($\times 10$) mm	W _z ($\times 10^3$) mm ³	I _{z0} ($\times 10^4$) mm ⁴	i _{z0} ($\times 10$) mm	W _{z0} ($\times 10^3$) mm ³	I _{y0} ($\times 10^4$) mm ⁴	i _{y0} ($\times 10$) mm	W _{y0} ($\times 10^3$) mm ³	I _{z1} ($\times 10^4$) mm ⁴			
5.0	50	3	5.5	2.971	2.332	0.197	7.18	1.55	1.96	11.37	1.96	3.22	2.98	1.00	1.57	12.50	1.34		
		4		3.897	3.059	0.197	9.26	1.54	2.56	14.70	1.94	4.16	3.82	0.99	1.96	16.69	1.38		
		5		4.803	3.770	0.196	11.21	1.53	3.13	17.79	1.92	5.03	4.64	0.98	2.31	20.90	1.42		
		6		5.688	4.465	0.196	13.05	1.52	3.68	20.68	1.91	5.85	5.42	0.98	2.63	25.14	1.46		
5.6	56	3	6	3.343	2.624	0.221	10.19	1.75	2.48	16.14	2.20	4.08	4.24	1.13	2.02	17.56	1.48		
		4		4.390	3.446	0.220	13.18	1.73	3.24	20.92	2.18	5.28	5.46	1.11	2.52	23.43	1.53		
		5		5.415	4.251	0.220	16.02	1.72	3.97	25.42	2.17	6.42	6.61	1.10	2.98	29.33	1.57		
		8		8.367	6.568	0.219	23.63	1.68	6.03	37.37	2.11	9.44	9.89	1.09	4.16	47.24	1.68		
6.3	63	4	7	4.978	3.907	0.248	19.03	1.96	4.13	30.17	2.46	6.78	7.89	1.26	3.29	33.35	1.70		
		5		6.143	4.822	0.248	23.17	1.94	5.08	36.77	2.45	8.25	9.57	1.25	3.90	41.73	1.74		
		6		7.288	5.721	0.247	27.12	1.93	6.00	43.03	2.43	9.66	11.20	1.24	4.46	50.14	1.78		
		8		9.515	7.469	0.247	34.46	1.90	7.75	54.56	2.40	12.25	14.33	1.23	5.47	67.11	1.85		
		10		11.657	9.151	0.246	41.09	1.88	9.39	64.85	2.36	14.56	17.33	1.22	6.36	84.31	1.93		

续表

角钢 号数	尺 寸 (mm)		截面 面积 ($\times 10^2$) mm^2	理论 重量 ($\times 9.8$) N/m	外表 面积 m^2/m	参考数值													y_c ($\times 10$) mm
						$z-z_0$			y_0-y_1			z_1-z_1							
	b	d				r	I_z ($\times 10^4$) mm^4	i_z ($\times 10$) mm	W_z ($\times 10^3$) mm^3	I_{z_0} ($\times 10^4$) mm^4	i_{z_0} ($\times 10$) mm	W_{z_0} ($\times 10^3$) mm^3	I_{y_0} ($\times 10^4$) mm^4	i_{y_0} ($\times 10$) mm	W_{y_0} ($\times 10^3$) mm^3	I_{x_1} ($\times 10^4$) mm^4			
7	70	4	8	5.570	4.372	0.275	26.39	2.18	5.14	41.80	2.74	8.44	10.99	1.40	4.17	45.74	1.86		
		5		6.875	5.397	0.275	32.21	2.16	6.32	51.08	2.73	10.32	13.34	1.39	4.95	57.21	1.91		
		6		8.160	6.406	0.275	37.77	2.15	7.48	59.93	2.71	12.11	15.61	1.38	5.67	68.73	1.95		
		7		9.424	7.398	0.275	43.09	2.14	8.59	68.35	2.69	13.81	17.82	1.38	6.34	80.29	1.99		
		8		10.667	8.373	0.274	48.17	2.12	9.68	76.37	2.68	15.43	19.98	1.37	6.98	91.92	2.03		
(7.5)	75	5	9	7.367	5.818	0.295	39.97	2.33	7.32	53.30	2.92	11.94	16.63	1.50	5.77	70.56	2.04		
		6		8.797	6.905	0.294	46.95	2.31	8.64	74.38	2.90	14.02	19.51	1.49	6.67	84.55	2.07		
		7		10.160	7.976	0.294	53.57	2.30	9.93	84.96	2.89	16.02	22.18	1.48	7.44	98.71	2.11		
		8		11.503	9.030	0.294	59.96	2.28	11.20	95.07	2.88	17.93	24.86	1.47	8.19	112.97	2.15		
		10		14.126	11.089	0.293	71.98	2.26	13.64	113.92	2.84	21.48	30.05	1.46	9.56	141.71	2.22		
8	80	5	9	7.912	6.211	0.315	48.79	2.48	8.34	77.33	3.13	13.67	20.25	1.60	6.66	85.36	2.15		
		6		9.397	7.376	0.314	57.35	2.47	9.87	90.98	3.11	16.08	23.72	1.59	7.65	102.50	2.19		
		7		10.860	8.525	0.314	65.58	2.46	11.37	104.07	3.10	18.40	27.09	1.58	8.58	119.70	2.23		
		8		12.303	9.658	0.314	73.49	2.44	12.83	116.60	3.08	20.61	30.39	1.57	9.46	136.97	2.27		
		10		15.126	11.874	0.313	88.43	2.42	15.64	140.09	3.04	24.76	36.77	1.56	11.08	171.74	2.35		

续表

角钢 号数	尺 寸 (mm)		截面 面积 ($\times 10^3$) mm ²	理 论 重 量 ($\times 9.8$) N/m	外表 面积 m ² /m	参 考 数 值												y_c ($\times 10$) mm	
	b	d				$z-z$				z_0-z_0				y_0-y_0					z_1-z_1
						I_z ($\times 10^4$) mm ⁴	i_z ($\times 10$) mm	W_z ($\times 10^3$) mm ³	I_{z_0} ($\times 10^4$) mm ⁴	i_{z_0} ($\times 10$) mm	W_{z_0} ($\times 10^3$) mm ³	I_{y_0} ($\times 10^4$) mm ⁴	i_{y_0} ($\times 10$) mm	W_{y_0} ($\times 10^3$) mm ³	I_{z_1} ($\times 10^4$) mm ⁴				
9	90	6	10.637	8.350	0.354	82.77	2.79	12.61	131.26	3.51	20.63	34.28	1.80	9.95	145.87	2.44			
		7	12.301	9.656	0.354	94.83	2.78	14.54	150.47	3.50	23.64	39.18	1.78	11.19	170.30	2.48			
		8	13.944	10.946	0.353	106.47	2.76	16.42	168.97	3.48	26.55	43.97	1.78	12.35	194.80	2.52			
		10	17.167	13.476	0.353	128.58	2.74	20.07	203.90	3.45	32.04	53.26	1.76	14.52	244.07	2.59			
		12	20.306	15.940	0.352	149.22	2.71	23.57	236.21	3.41	37.12	62.22	1.75	16.49	293.76	2.67			
10	100	6	11.932	9.366	0.393	114.95	3.10	15.68	181.98	3.90	25.74	47.92	2.00	12.69	200.07	2.67			
		7	13.796	10.830	0.393	131.86	3.09	18.10	208.97	3.89	29.55	54.74	1.99	14.26	233.54	2.71			
		8	15.638	12.276	0.393	148.24	3.08	20.47	235.07	3.88	33.24	61.41	1.98	15.75	267.09	2.76			
		10	19.261	15.120	0.392	179.51	3.05	25.06	284.68	3.84	40.26	74.35	1.96	18.54	334.48	2.84			
		12	22.800	17.898	0.391	208.90	3.03	29.48	330.95	3.81	46.80	86.84	1.95	21.08	402.34	2.91			
		14	26.256	20.611	0.391	236.53	3.00	33.73	374.06	3.77	52.90	99.00	1.94	23.44	470.75	2.99			
		16	29.627	23.257	0.390	262.53	2.98	37.82	414.16	3.74	58.57	110.89	1.94	25.63	539.80	3.06			

续表

角钢 号数	尺寸 (mm)		截面 面积 ($\times 10^2$) mm^2	理论 重量 ($\times 9.8$) N/m	外表 面积 m^2/m	参考数值												y_c ($\times 10$) mm
						$z-z_0$			z_0-z_0						y_0-y_0			
	I_z ($\times 10^4$) mm^4	i_z ($\times 10$) mm				W_z ($\times 10^3$) mm^3	I_{z_0} ($\times 10^4$) mm^4	i_{z_0} ($\times 10$) mm	W_{z_0} ($\times 10^3$) mm^3	I_{y_0} ($\times 10^4$) mm^4	i_{y_0} ($\times 10$) mm	W_{y_0} ($\times 10^3$) mm^3	I_{e_1} ($\times 10^4$) mm^4	z_1-z_1				
11	110	7	15.196	11.928	0.433	177.16	3.41	22.05	280.94	4.30	36.12	73.38	2.20	17.51	310.64	2.96		
		8	17.238	13.532	0.433	199.46	3.40	24.95	316.49	4.28	40.69	82.42	2.19	19.39	355.20	3.01		
		10	21.261	16.690	0.432	242.19	3.38	30.60	384.39	4.25	49.42	99.98	2.17	22.91	444.65	3.09		
		12	25.200	19.782	0.431	282.55	3.35	36.05	448.17	4.22	57.62	116.93	2.15	26.15	534.60	3.16		
12.5	125	14	29.056	22.809	0.431	320.71	3.32	41.31	508.01	4.18	65.31	133.40	2.14	29.14	625.16	3.24		
		8	19.750	15.504	0.492	297.03	3.88	32.52	470.89	4.88	53.28	123.16	2.50	25.86	521.01	3.37		
		10	24.373	19.133	0.491	361.67	3.85	39.97	573.89	4.85	64.93	149.46	2.48	30.62	651.93	3.45		
		12	28.912	22.696	0.491	423.16	3.83	41.17	671.44	4.82	75.96	174.88	2.46	35.03	783.42	3.53		
14	140	14	33.367	26.193	0.490	481.65	3.80	54.16	763.73	4.78	86.41	199.57	2.45	39.13	915.61	3.61		
		10	27.373	21.488	0.551	514.65	4.34	50.58	817.27	5.46	82.56	212.04	2.78	39.20	915.11	3.82		
		12	32.512	25.522	0.551	603.68	4.31	59.80	958.79	5.43	96.85	248.57	2.76	45.02	1099.28	3.90		
		14	37.567	29.490	0.550	688.81	4.28	68.75	1093.56	5.40	110.47	284.06	2.75	50.45	1284.22	3.98		
		16	42.539	33.393	0.549	770.24	4.26	77.46	1221.81	5.36	123.42	318.67	2.74	55.55	1470.07	4.06		

续表

角钢 号数	尺 寸 (mm)		截面 面积 ($\times 10^2$) mm^2	理论 重量 ($\times 9.8$) N/m	外表 面积 m^2/m	参考数值										y_c ($\times 10$) mm
						$z-z$			z_0-z_0			y_0-y_0				
	I_x ($\times 10^4$) mm^4	i_x ($\times 10$) mm				W_z ($\times 10^3$) mm^3	I_{x_0} ($\times 10^4$) mm^4	i_{x_0} ($\times 10$) mm	W_{z_0} ($\times 10^3$) mm^3	I_{y_0} ($\times 10^4$) mm^4	i_{y_0} ($\times 10$) mm	W_{y_0} ($\times 10^3$) mm^3	I_{z_1} ($\times 10^4$) mm^4			
16	160	10	31.502	24.729	0.630	779.53	4.98	66.70	1237.30	6.27	109.36	321.76	3.20	52.76	1365.33	4.31
		12	37.441	29.391	0.630	916.58	4.95	78.98	1455.68	6.24	128.67	377.49	3.18	60.74	1639.57	4.39
		14	43.296	33.987	0.629	1048.36	4.92	90.95	1665.02	6.20	147.17	431.70	3.16	68.24	1914.68	4.47
		16	49.067	38.518	0.629	1175.08	4.89	102.63	1865.57	6.17	164.89	484.59	3.14	75.31	2190.82	4.55
18	180	12	42.241	33.159	0.710	1321.35	5.59	100.82	2100.10	7.05	165.00	542.61	3.58	78.41	2332.80	4.89
		14	48.896	33.383	0.709	1514.48	5.56	116.25	2407.42	7.02	189.14	621.53	3.56	88.38	2723.48	4.97
		16	55.467	43.542	0.709	1700.99	5.54	131.13	2703.37	6.98	212.40	698.60	3.55	97.83	3115.29	5.05
		18	61.955	48.634	0.708	1875.12	5.50	145.64	2988.24	6.94	234.78	762.01	3.51	105.14	3502.43	5.13
20	200	14	54.642	42.894	0.788	2103.55	6.20	144.70	3343.26	7.82	236.40	863.83	3.98	111.82	3734.10	5.46
		16	62.013	48.680	0.788	2366.15	6.18	163.65	3760.89	7.79	265.93	971.41	3.96	123.96	4270.39	5.54
		18	69.301	54.401	0.787	2620.64	6.15	182.22	4164.54	7.75	294.48	1076.74	3.94	135.52	4808.13	5.62
		20	76.505	60.056	0.787	2867.30	6.12	200.42	4554.55	7.72	322.06	1180.04	3.93	146.55	5347.51	5.69
		24	90.661	71.168	0.785	3338.25	6.07	236.17	5294.97	7.64	374.41	1381.53	3.90	166.55	6457.16	5.87

注: 1. $r_1 = \frac{1}{3}d, r_2 = 0, r_0 = 0$

2. 角钢长度: 钢号 2~4 号, 4.5~8 号, 9~14 号, 16~20 号; 长度 3~9 米, 4~12 米, 4~19 米, 6~19 米
 3. 一般采用材料: A2, A3, A5, A3F

2. 热轧普通工字钢 (GB 706-65)

符号意义:

h —高度;

b —腿宽;

d —腰厚;

t —平均腿厚;

r —内圆弧半径;

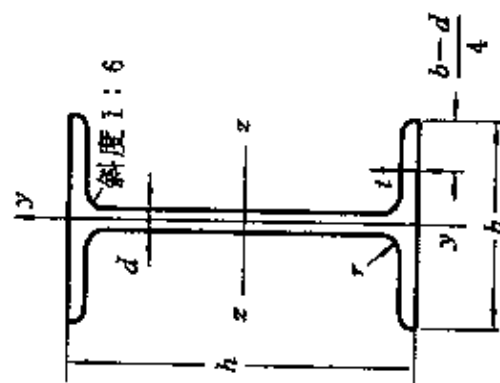
r_1 —腿端圆弧半径;

I —惯性矩;

W —截面系数;

i —惯性半径;

S —半截面的静力矩。



型 号	尺 寸						截 面 面 积 ($\times 10^2$)	理 论 重 量 ($\times 9.8$)	参 考 数 值						
	mm								z-z			y-y			
									I_z ($\times 10^4$)	W_z ($\times 10^3$)	i_z ($\times 10$)	I_y ($\times 10^4$)	W_y ($\times 10^3$)	i_y ($\times 10$)	
10	100	68	4.5	7.6	6.5	3.3	14.3	11.2	245	49	4.14	8.59	33	9.72	1.52
12.6	126	74	5	8.4	7	3.5	18.1	14.2	488.43	77.529	5.195	10.85	46.906	12.677	1.609
14	140	80	5.5	9.1	7.5	3.8	21.5	16.9	712	102	5.76	12	64.4	16.1	1.73
16	160	88	6	9.9	8	4	26.1	20.5	1130	141	6.58	13.8	93.1	21.2	1.89
18	180	94	6.5	10.7	8.5	4.3	30.6	24.1	1660	185	7.36	15.4	122	26	2

型 号	尺 寸						截 面 面 积 ($\times 10^2$)	理 论 重 量 ($\times 9.8$)	参 考 数 值					
	mm								z-z			y-y		
									I_z ($\times 10^4$)	W_z ($\times 10^3$)	i_z ($\times 10$)	I_y ($\times 10^4$)	W_y ($\times 10^3$)	i_y ($\times 10$)
	h	b	d	t	r	r_1	mm ²	N/m	mm ⁴	mm ³	mm	mm ⁴	mm ³	mm
20a	200	100	7	11.4	9	4.5	35.5	27.9	2370	237	8.15	158	31.5	2.12
20b	200	102	9	11.4	9	4.5	39.5	31.1	2500	250	7.96	169	33.1	2.06
22a	220	110	7.5	12.3	9.5	4.8	42	33	3400	309	8.99	225	40.9	2.31
22b	220	112	9.5	12.3	9.5	4.8	46.4	36.4	3570	325	8.78	239	42.7	2.27
25a	250	116	8	13	10	5	48.5	38.1	5023.54	401.88	10.18	21.58	48.283	2.403
25b	250	118	10	13	10	5	53.5	42	5283.96	422.72	9.938	21.27	52.423	2.404
28a	280	122	8.5	13.7	10.5	5.3	55.45	43.4	7114.14	508.15	11.32	24.62	56.565	2.495
28b	280	124	10.5	13.7	10.5	5.3	61.05	47.9	7480	534.29	11.08	24.24	61.209	2.493
32a	320	130	9.5	15	11.5	5.8	67.05	52.7	11075.5	692.2	12.84	27.46	70.758	2.619
32b	320	132	11.5	15	11.5	5.8	73.45	57.7	11621.4	726.33	12.58	27.09	75.989	2.614
32c	320	134	13.5	15	11.5	5.8	79.95	62.8	12167.5	760.47	12.34	26.77	81.166	2.608
36a	360	136	10	15.8	12	6	76.3	59.9	15760	875	14.4	30.7	81.2	2.69
36b	360	138	12	15.8	12	6	83.5	65.6	16530	919	14.1	30.3	84.3	2.64
36c	360	140	14	15.8	12	6	90.7	71.2	17310	962	13.8	29.9	87.4	2.6
40a	400	142	10.5	16.5	12.5	6.3	86.1	67.6	21720	1090	15.9	34.1	93.2	2.77
40b	400	144	12.5	16.5	12.5	6.3	94.1	73.8	22780	1140	15.6	33.6	96.2	2.71
40c	400	146	14.5	16.5	12.5	6.3	102	80.1	23850	1190	15.2	33.2	99.6	2.65
45a	450	150	11.5	18	13.5	6.8	102	80.4	32240	1430	17.7	38.6	114	2.89
45b	450	152	13.5	18	13.5	6.8	111	87.4	33760	1500	17.4	38	118	2.84
45c	450	154	15.5	18	13.5	6.8	120	94.5	35280	1570	17.1	37.6	122	2.79

续表

型 号	尺 寸						截 面 面 积 ($\times 10^2$)	理 论 重 量 ($\times 9.8$)	参 考 数 值						
	mm								z-z			y-y			
									I_z ($\times 10^4$)	W_z ($\times 10^3$)	i_z ($\times 10$)	I_y ($\times 10^4$)	W_y ($\times 10^3$)	i_y ($\times 10$)	
h	b	d	t	r	r_1	mm ²	N/m	mm ⁴	mm ³	mm	mm ⁴	mm ³	mm		
50a	500	158	12	20	14	7	119	93.6	46470	1860	19.7	42.8	1120	142	3.07
50b	500	160	14	20	14	7	129	101	48560	1940	19.4	42.4	1170	146	3.01
50c	500	162	16	20	14	7	139	109	50640	2080	19	41.8	1220	151	2.96
56a	560	166	12.5	21	14.5	7.3	135.25	106.2	65585.6	2342.31	22.02	47.73	1370.16	165.08	3.182
56b	560	168	14.5	21	14.5	7.3	146.45	115	68512.5	2446.69	21.63	47.17	1486.75	174.25	3.162
56c	560	170	16.5	21	14.5	7.3	157.85	123.9	71439.4	2551.41	21.27	46.66	1558.39	183.34	3.158
63a	630	176	13	22	15	7.5	154.9	121.6	93916.2	2981.47	24.62	54.17	1700.55	193.24	3.314
63b	630	178	15	22	15	7.5	167.5	131.5	98083.6	3163.98	24.2	53.51	1812.07	203.6	3.289
63c	630	180	17	22	15	7.5	180.1	141	102251.1	3298.42	23.82	52.92	1924.91	213.88	3.268

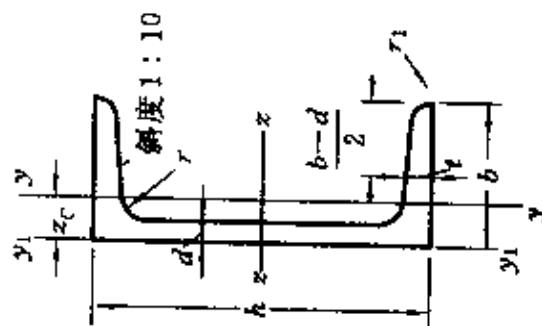
注:1. 工字钢长度:10~18号,长5~19米;20~63号,长6~19米

2. 一般采用材料:A2,A3,A5,A3F

3. 热轧普通槽钢(GB 707-65)

符号意义:

h —高度;
 b —腿宽;
 d —腰厚;
 t —平均腿厚;
 r —内圆弧半径;
 r_1 —腿端圆弧半径;
 I —惯性矩;
 W —截面系数;
 i —惯性半径;
 z_c — y - y 与 y_1 - y_1 轴线间距离。



型 号	尺 寸						理 论 重 量 ($\times 9.8$)	截 面 面 积 ($\times 10^2$)	参 考 数 值							
	mm								z-z			y-y			y_1-y_1 I_{y_1} ($\times 10^4$)	z_c ($\times 10$)
									W_z ($\times 10^3$)	I_z ($\times 10^4$)	i_z ($\times 10$)	W_y ($\times 10^3$)	I_y ($\times 10^4$)	i_y ($\times 10$)		
5	50	37	4.5	7	7	3.5	N/m	mm ²	mm ³	mm ⁴	mm	mm ³	mm ⁴	mm	mm	
6.3	63	40	4.8	7.5	7.5	3.75	5.44	6.93	10.4	26	1.94	3.55	8.3	1.1	1.35	
							6.63	8.444	16.123	50.786	2.453		11.872	1.185	1.36	

续表

型 号	尺 寸						截 面 积 ($\times 10^2$)	理 论 重 量 ($\times 9.8$)	参 考 数 值																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																	
	h	b	d	t	r	r ₁			z-z				y-y																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
									W _z ($\times 10^3$)	I _z ($\times 10^4$)	i _z ($\times 10$)	W _y ($\times 10^3$)	I _y ($\times 10^4$)	i _y ($\times 10$)	y ₁ -y ₁																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
															I _{y₁} ($\times 10^4$)																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
		mm						mm ²	N/m	mm ³	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm	mm ⁴	mm</

续表

型 号	尺 寸						截 面 积 ($\times 10^2$)	理 论 重 量 ($\times 9.8$)	参 考 数 值									
	mm								z-z			y-y			y ₁ -y ₁		z _c ($\times 10$)	
									W _z ($\times 10^3$)	I _z ($\times 10^4$)	i _z ($\times 10$)	W _y ($\times 10^3$)	I _y ($\times 10^4$)	i _y ($\times 10$)	I _{y₁} ($\times 10^4$)			
h	b	d	t	r	r ₁	mm ²	N/m	W _z ($\times 10^3$)	I _z ($\times 10^4$)	i _z ($\times 10$)	W _y ($\times 10^3$)	I _y ($\times 10^4$)	i _y ($\times 10$)	mm ⁴	mm ⁴	mm		
25c	250	82	11	12	12	6	44.91	35.32	295.236	3690.45	9.065	35.926	218.415	2.206	384.133	1.921		
28a	280	82	7.5	12.5	12.5	25	40.02	31.42	340.328	4764.59	10.91	35.718	217.989	2.333	387.566	2.097		
28b	280	84	9.5	12.5	12.5	25	45.62	35.81	366.46	5130.45	10.6	37.929	242.144	2.304	427.589	2.016		
28c	280	86	11.5	12.5	12.5	25	51.22	40.21	392.594	5496.32	10.35	40.301	267.602	2.286	426.597	1.951		
32a	320	88	8	14	14	7	48.7	38.22	474.879	7598.06	12.49	46.473	304.787	2.502	552.31	2.242		
32b	320	90	10	14	14	7	55.1	43.25	509.012	8144.2	12.15	49.157	336.332	2.471	592.933	2.158		
32c	320	92	12	14	14	7	61.5	48.28	543.145	8690.33	11.88	52.642	374.175	2.467	643.299	2.092		
36a	360	96	9	16	16	8	60.89	47.8	659.7	11874.2	13.97	63.54	455	2.73	818.4	2.44		
36b	360	98	11	16	16	8	68.09	53.45	702.9	12651.8	13.63	66.85	496.7	2.7	880.4	2.37		
36c	360	100	13	16	16	8	75.29	50.1	746.1	13429.4	13.36	70.02	536.4	2.67	947.9	2.34		
40a	400	100	10.5	18	18	9	75.05	58.91	878.9	17577.9	15.30	78.83	592	2.81	1067.7	2.49		
40b	400	102	12.5	18	18	9	83.05	65.19	932.2	18644.5	14.98	82.52	640	2.78	1135.6	2.44		
40c	400	104	14.5	18	18	9	91.05	71.47	985.6	19711.2	14.71	86.19	687.8	2.75	1220.7	2.42		

注:1.槽钢长度:5~8号,长5~12米;10~18号,长5~19米;20~40号,长6~19米

2.一般采用材料:A2、A3、A5、A3F

附录四 交变应力图表

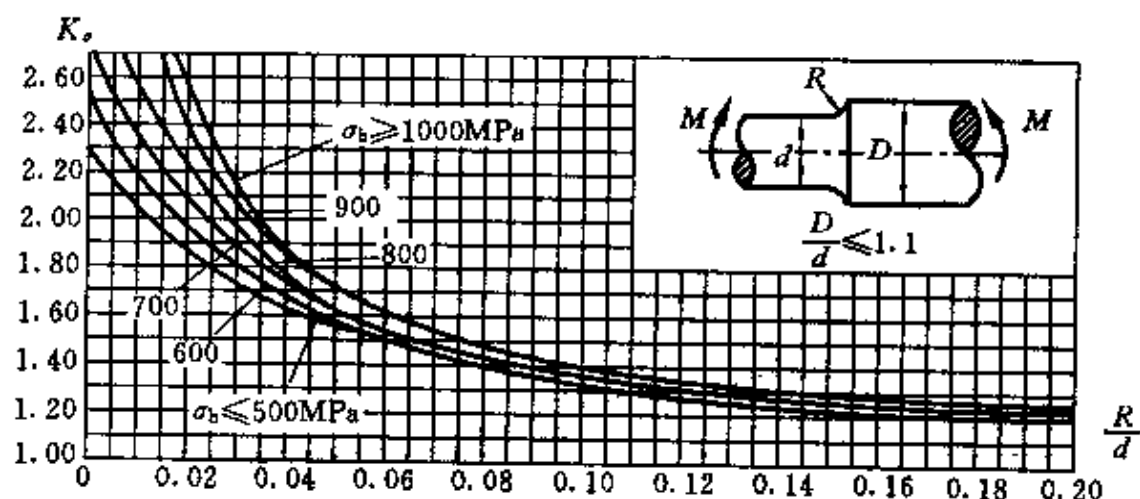


图 1

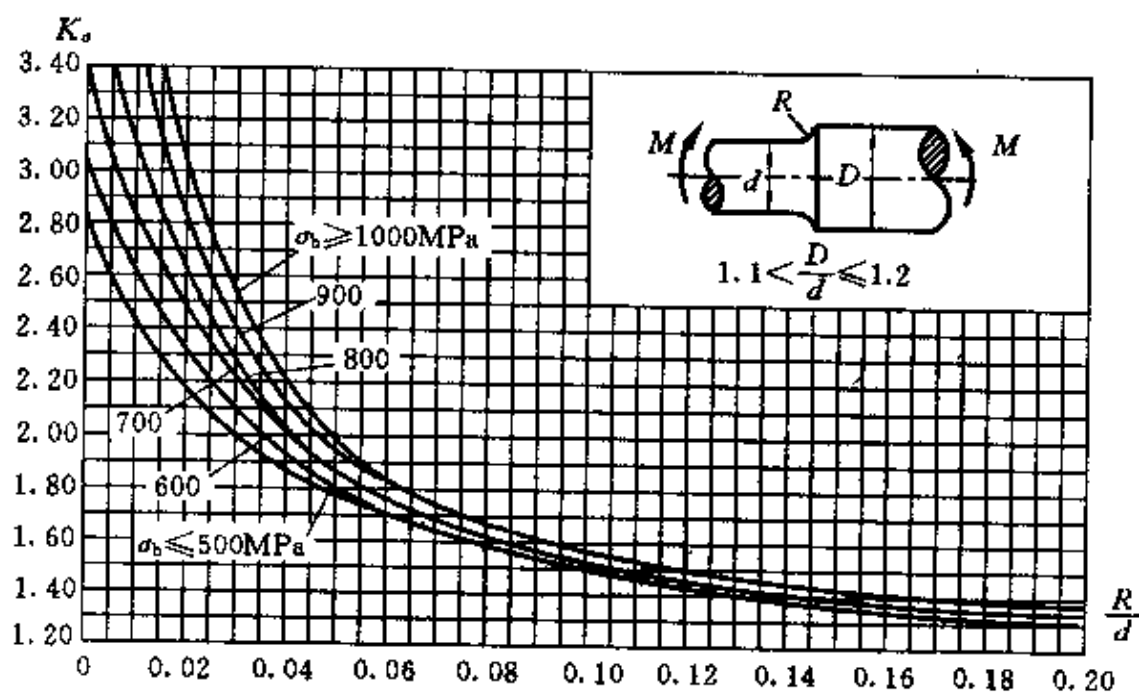


图 2

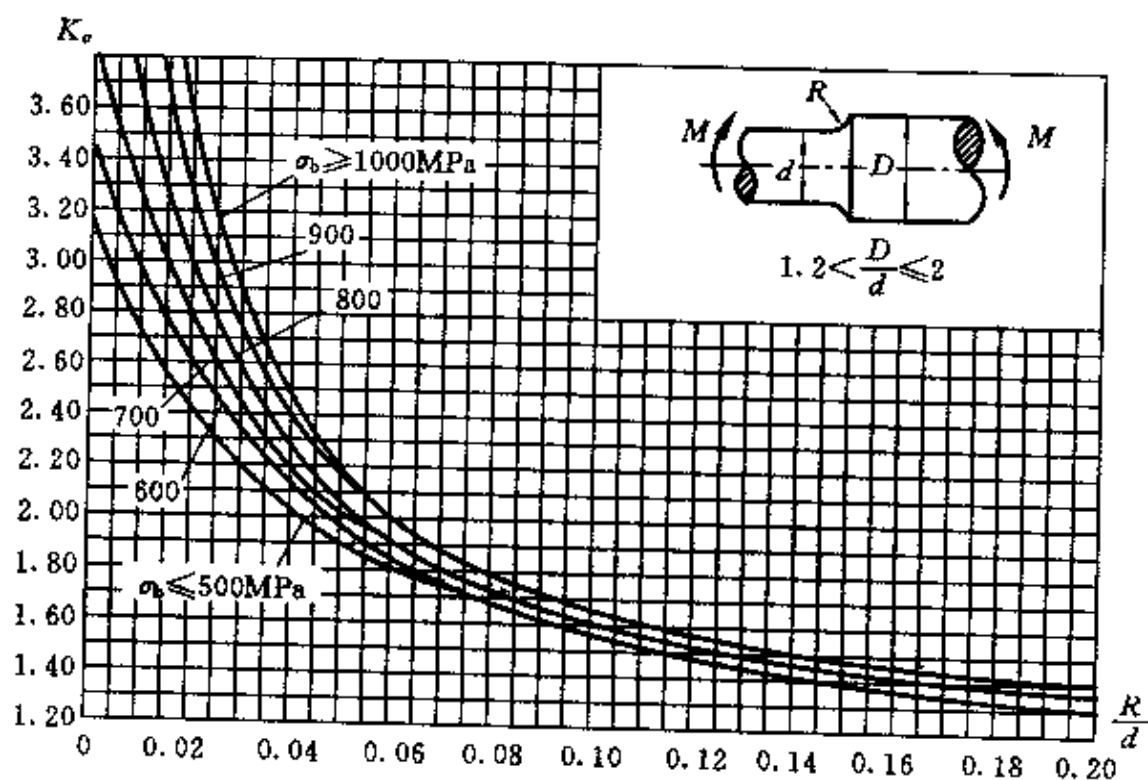


图 3

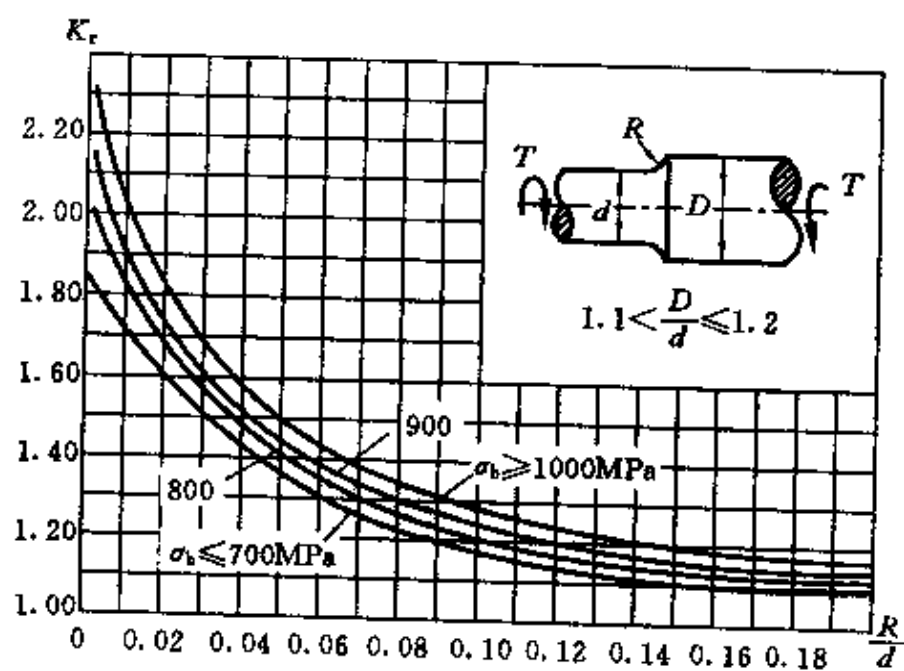


图 4

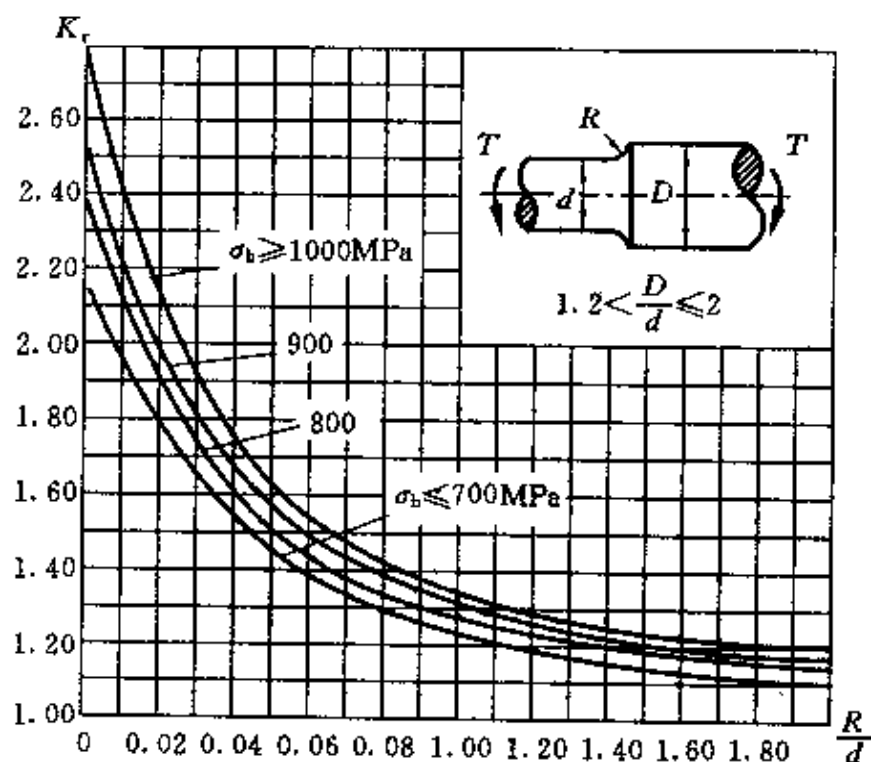


图 5

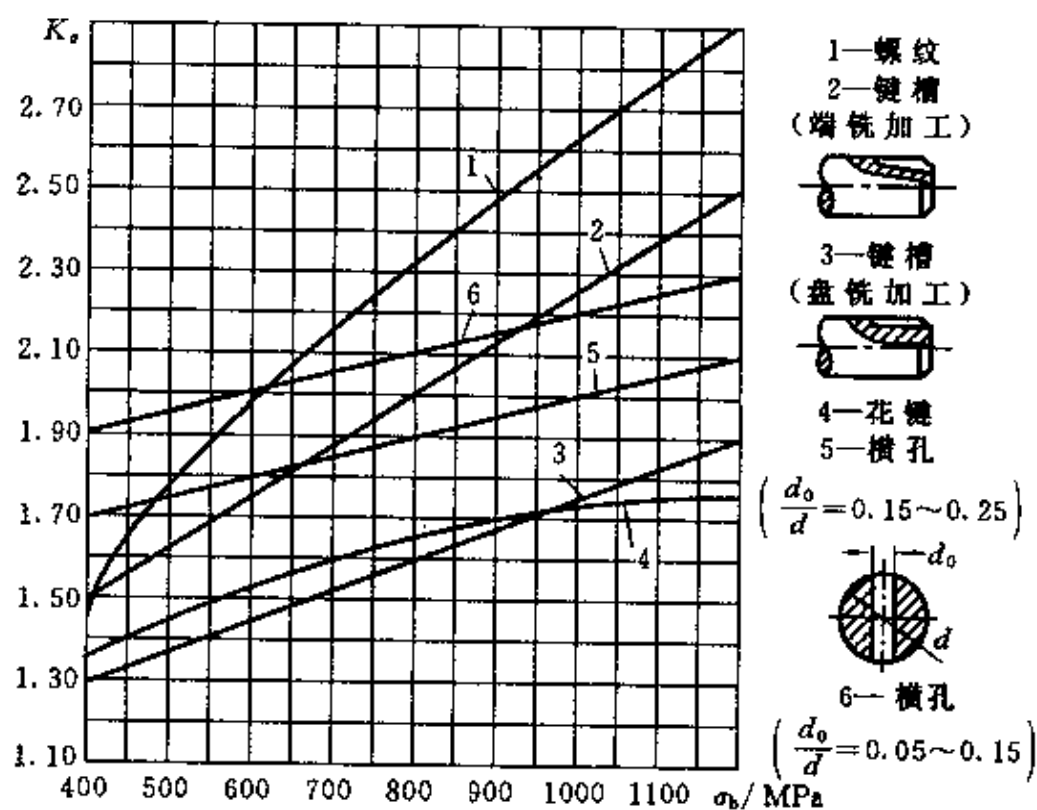


图 6

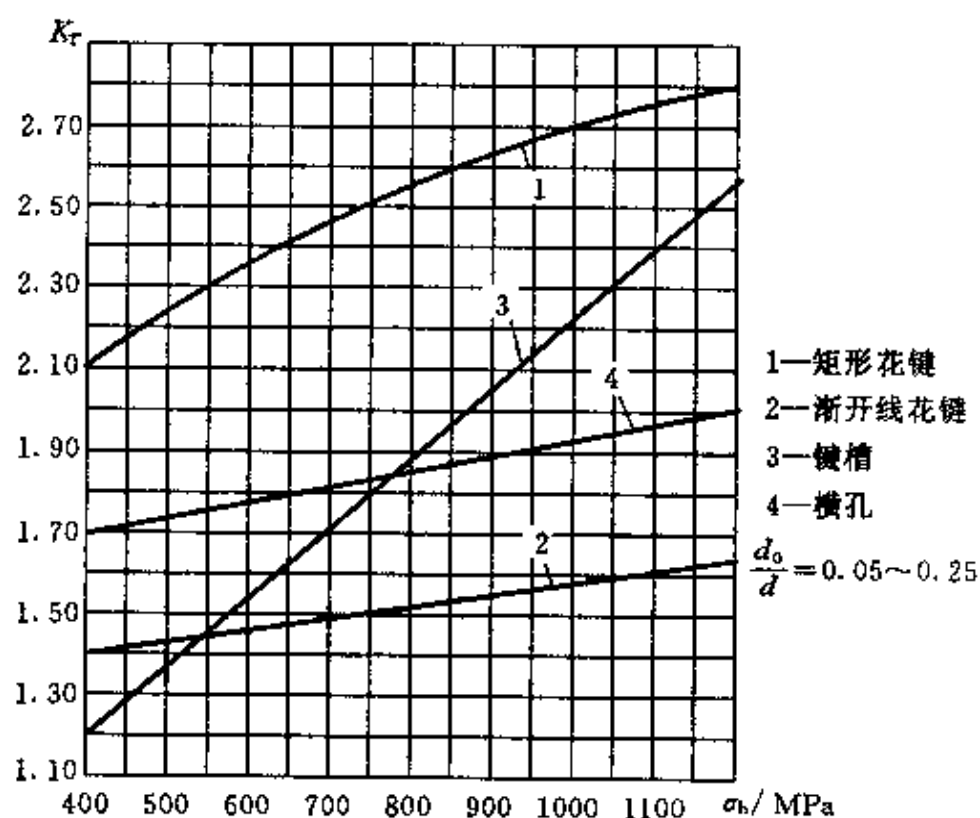


图 7

表 1 尺寸因数

直径 (mm)	ϵ_d		ϵ_r
	碳钢	合金钢	各种钢
>20~30	0.91	0.83	0.89
>30~40	0.88	0.77	0.81
>40~50	0.84	0.73	0.78
>50~60	0.81	0.70	0.76
>60~70	0.78	0.68	0.74
>70~80	0.75	0.66	0.73
>80~100	0.73	0.64	0.72
>100~120	0.70	0.62	0.70
>120~150	0.68	0.60	0.68
>150~500	0.60	0.54	0.60

表2 不同表面粗糙度的表面质量因数 β

加工方法	轴表面粗糙度	σ_b/MPa		
		400	800	1200
磨削	0.4~0.2	1	1	1
车削	3.2~0.8	0.95	0.90	0.80
粗车	25~6.3	0.85	0.80	0.85
未加工表面	∞			

表3 各种强化处理的表面质量因数 β

强化方法	心部强度 σ_b/MPa	β		
		光轴	低应力集中轴 $K_s \leq 1.5$	高应力集中轴 $K_s \geq 1.8 \sim 2$
高频淬火	600~800	1.5~1.7	1.6~1.7	2.4~2.8
	800~1000	1.3~1.5		
氮化	900~120	1.1~1.25	1.5~1.7	1.7~2.1
渗碳	400~600	1.8~2.0	3	
	700~800	1.4~1.5		
	1000~1200	1.2~1.3	2	
喷丸硬化	600~1500	1.1~1.25	1.5~1.6	1.7~2.1
滚子滚压	600~1500	1.1~1.2	1.3~1.5	1.6~2.0

表4 普通钢的敏感因数

ψ	静应力强度极限 $\sigma_b(\text{MPa})$				
	350~550	520~750	700~1000	1000~1200	1200~1400
拉压弯曲 ψ_σ	0	0.05	0.10	0.20	0.25
扭转 ψ_τ	0	0	0.05	0.10	0.15

附录五 矩形截面杆扭转时的系数 α 、 β 和 ν

h/b	1.0	1.2	1.5	2.0	2.5	3.0	4.0	6.0	8.0	10.0	∞
α	0.208	0.219	0.231	0.246	0.258	0.267	0.282	0.299	0.307	0.313	0.333
β	0.141	0.166	0.196	0.229	0.249	0.263	0.281	0.299	0.307	0.313	0.333
ν	1.000	0.930	0.858	0.796	0.767	0.753	0.745	0.743	0.743	0.743	0.743

主要参考文献

1. 刘鸿文主编. 材料力学(第四版). 北京:高等教育出版社,2004.
2. 国家教育委员会高等教育司编. 高等学校本科基础课程教学基本要求(1995年修订版). 北京:高等教育出版社,1995.
3. 胡增强等编. 材料力学800题. 徐州:中国矿业大学出版社,1994.
4. 苏翼林主编. 材料力学难题分析. 北京:高等教育出版社,1988.

