

## 第 8 章 晶体的塑性形变题解

1. 细铜棒两端固定，从  $100^{\circ}\text{C}$  冷却到  $0^{\circ}\text{C}$ ，问发生的内应力有多大？铜的热膨胀系数  $=1.5 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ ，弹性模量  $E=1.103 \times 10^{11} \text{ Pa}$ 。

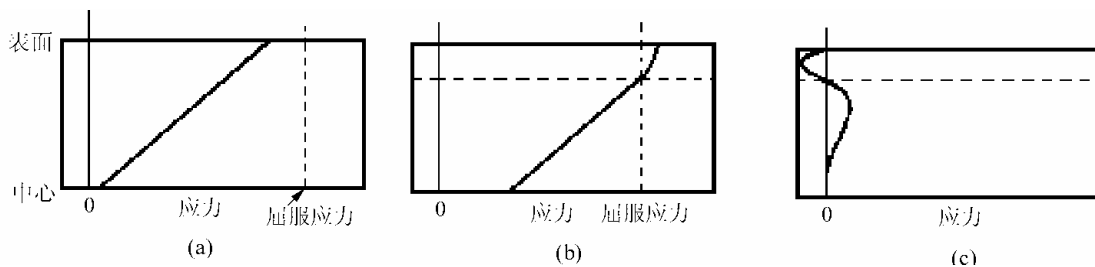
解：设棒长为 1，热膨胀系数  $\alpha=1.5 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ ，从  $100^{\circ}\text{C}$  冷却到  $0^{\circ}\text{C}$  棒收缩量  $\Delta L=\alpha\Delta T=1.5 \times 10^{-6} \times 100=1.5 \times 10^{-4}$ ，如果棒仍保持弹性范围，根据胡克定律，内应力  $\sigma$  应为：

$$\sigma = E\varepsilon = 1.103 \times 10^{11} \times 1.5 \times 10^{-4} \text{ Pa} = 1.65 \times 10^7 \text{ Pa}$$

2. 板材轧制时，设弹性变形量从表面到中心是线性的。(a)压下量不大时，表面仍处在弹性范围，画出加载及卸载时从表面到中心的应力分布；(b)表面发生了塑性形变，但中心仍处于弹性范围，画出加载及卸载时从表面到中心的应力分布。

解：(a)当压下量不大表面仍处在弹性范围时，因表面变形量最大，所以整个板处于弹性范围，加载时，应力与应变成正比，所以应力从表面到中心亦呈线性分布，如下图(a)所示。卸载后，弹性应变完全回复，板内无应力存在。

(b)当表面发生了塑性形变但中心仍处于弹性范围时，表面层已屈服，它的应力与应变关系不再符合胡克定律，所以表层应力的增加斜率降低，如下图(b)所示；卸载后，表层的塑性形变不能回复，内部的弹性变形要回复，因此，表层受内部收缩而产生压应力，因表层留下的永久变形不能回复而使内部产生拉伸应力，这些残余应力的分布如下图(c)所示。

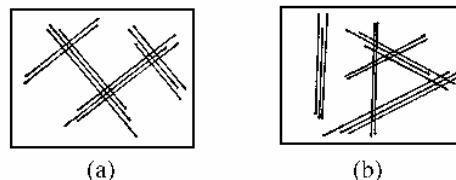


3. 体心立方晶体可能的滑移面是  $\{110\}$ 、 $\{112\}$  及  $\{123\}$ ，若滑移方向为  $[\bar{1}\bar{1}1]$ ，具体的滑移系是哪些？

解：一个具体的滑移系的滑移方向必在滑移面上，根据晶带定律可知，滑移方向为  $[\bar{1}\bar{1}1]$  时，对于  $\{110\}$  滑移面，可能的滑移面是  $(110)$ 、 $(011)$  和  $(10\bar{1})$ 。对于  $\{112\}$  滑移面，可能的滑移面是  $(121)$ 、 $(21\bar{1})$  和  $(\bar{1}12)$ 。对于  $\{123\}$  滑移面，可能的滑移面是  $(132)$ 、 $(231)$ 、 $(32\bar{1})$ 、 $(\bar{1}23)$ 、 $(\bar{2}13)$  和  $(31\bar{2})$ 。

4. 铜单晶表面平行于  $(001)$  面，若晶体可以在各个滑移系滑移，画出表面出现的滑移线的痕迹，求出滑移线间的角度。若铜晶体表面平行于  $(111)$  面，情况又如何？

解：铜的晶体结构是 fcc，滑移系是  $\{111\} \langle \bar{1}10 \rangle$ 。当滑移方向（柏氏矢量）与表面不平行时，位错滑出此表面就会留下滑移痕迹，这个痕迹是表面与开动的滑移面的交线。



对于  $(001)$  表面， $(001)$  面与四个  $\{111\}$  面只有两个交线，它们的方向是  $[110]$  与  $[\bar{1}\bar{1}0]$ ，这两个方向的夹角为  $90^{\circ}$ ，故在  $(001)$  面上的滑移痕迹如右图(a)所示。

对于(111)面，六个{110}方向中只有[110]、[011]和[101]三个方向与它不平行，它们分别处于除(111)面外的三个{111}面上，即在 $(\bar{1}\bar{1}1)$ 、 $(1\bar{1}\bar{1})$ 和 $(11\bar{1})$ 上。这三个面与(111)面的交线分别为 $[1\bar{1}0]$ 、 $[01\bar{1}]$ 和 $[10\bar{1}]$ ，它们间互相的交角都为  $60^\circ$ ，故在(001)面上的滑移痕迹如上图(b)所示。

5. 铝的临界分切应力为  $2.40 \times 10^5 \text{ Pa}$ ，当拉伸轴为[001]时，引起屈服所需要的拉伸应力是多大？

解：拉伸应力 $\sigma$ 与滑移系上的分切应力 $\tau$ 间的关系为  $\tau = \sigma \cos \lambda \cos \varphi$ ，其中 $\lambda$ 和 $\varphi$ 分别是拉伸方向与滑移方向以及滑移面法向的夹角。铝的晶体结构是 fcc，滑移系是{111}<110>。拉伸轴是[001]时，因它与[110]及 $[\bar{1}\bar{1}0]$ 垂直，所以由它组成的滑移系上的分切应力为 0，它们不会开动。而[001]轴对其它的滑移系的集合关系是等同的，在它们的分切应力相等。以 $(\bar{1}\bar{1}1)[0\bar{1}1]$ 滑移系为例计算引起屈服所需要的拉伸应力。[001]与滑移面法线 $[\bar{1}\bar{1}1]$ 夹角 $\varphi$ 的余弦  $\cos \varphi$ 以及[001]与滑移方向 $[0\bar{1}1]$ 夹角 $\lambda$ 的余弦  $\cos \lambda$ 分别是

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \cos \lambda = \frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

当临界分切应力 $\tau_c$ 为  $2.40 \times 10^5 \text{ Pa}$  时对应的应力 $\sigma_c$ 就是屈服应力：

$$\sigma_c = \frac{\tau_c}{\cos \varphi \cos \lambda} = 2.4 \times 10^5 \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} \text{ Pa} = 5.89 \times 10^5 \text{ Pa}$$

6. 一个简单立方晶系的双晶，它们滑移系为{100}<100>，双晶体的取向及力轴取向如图 8-64 所示，问哪一个晶体首先滑移？在哪个滑移系滑移？

解：简单立方晶系的滑移系是{100}<100>。从图可知，对于II晶体，拉伸应力垂直于[001]与[100]共面的(010)面，即拉伸方向是[010]。[010]方向不是与{100}面平行就是与{100}面垂直，所以这个方向上的拉伸应力在任何一个滑移系上的分切应力都为 0，II晶体不能滑移。对于I晶体，拉伸应力垂直于[100]与 $[0\bar{1}\bar{1}]$ 共面的(011)面，即拉伸方向是[011]。[011]与(100)面垂直，故在以(100)为滑移系的滑移系上的分切应力为 0，它们不能开动；[011]又与(010)面平行，故在以(010)为滑移系的滑移系上的分切应力为 0，它们也不能开动；这样，拉伸轴为[011]时只有(010)[001]和(001)[010]两个滑移系上的分切应力不为 0。由于[011]轴与这两个滑移系的几何关系等效，故分切应力相等。在拉伸应力足够大时，可以在这两个滑移系开动。

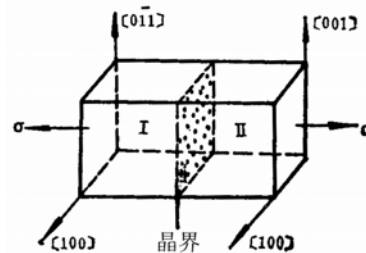
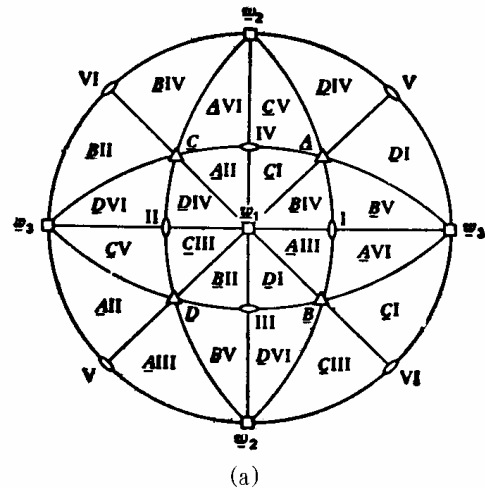


图 8-64

7. 面心立方晶体拉伸时，力轴处在[001]及[110]组成的面上，它的等效滑移系有几个？是哪些？

解：[001]及[110]组成的面是 $(1\bar{1}0)$ ，当力轴在 $(1\bar{1}0)$ 面上时，可能的方向很多。看[001]标准极射投影图（见右图），其中 A： $(\bar{1}\bar{1}1)$ 面，B： $(111)$ 面，C： $(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$ 面，D： $(1\bar{1}\bar{1})$ 面。I： $[011]$ 极点，II： $[0\bar{1}\bar{1}]$ 极点，III： $[101]$ 极点，IV： $[\bar{1}01]$ 极点，V： $[1\bar{1}0]$ 极点，VI： $[110]$ 。以 $[1\bar{1}0]$ 为法线的面迹是右图圆的 VI-C- $w_1$ -B-VI 线（直径）。如果力轴处于 VI 极点方向，它的等效滑移系为 CI、CIII、BIV 和 BII，这四个滑移系可以开动；如果力轴处于 VI-C 线上的极点方向，它的等效滑移系为 BIV 和 BII，这两个滑移系可以开动；如果力轴处于 C 极点方向，它的等效滑移系为 BII、BIV、AII、AIV、DIV 和 DVI，这六

个滑移系可以开动；如果力轴处于  $C-w_1$  线上的极点方向，它的等效滑移系为  $DIV$  和  $AII$ ，这两个滑移系可以开动；如果力轴处于  $w_1$  极点  $([001])$  方向，它的等效滑移系为  $DIV$ 、 $AII$ 、 $CI$ 、 $CIII$ 、 $BII$ 、 $BIV$ 、 $DI$  和  $AIII$ ，这八个滑移系可以开动；如果力轴处于  $w_1-B$  线上的极点方向，它的等效滑移系为  $DI$  和  $AIII$ ，这两个滑移系可以开动；如果力轴处于  $B$  的极点方向，它的等效滑移系为  $DI$ 、 $AIII$ 、 $AVI$ 、 $DVI$ 、 $CI$  和  $CIII$ ，这六个滑移系可以开动。如果力轴处于  $B-VI$  线上的极点方向，它的等效滑移系为  $CI$ 、 $CIII$ ，这两个滑移系可以开动。



8. 面心立方晶体拉伸时，力轴为  $[1\bar{1}0]$ ，写出滑移的等效的滑移系。

解：力轴为  $[1\bar{1}0]$  相当上题极图上的  $V$  点，从图看出，它的等效滑移系  $AII$ 、 $AIII$ 、 $DI$  和  $DIV$ ，即  $(\bar{1}11)[0\bar{1}1]$ 、 $(\bar{1}11)[101]$ 、 $(1\bar{1}1)[011]$  和  $(1\bar{1}1)[\bar{1}01]$ 。

9. 面心立方晶体沿  $[131]$  轴拉伸，确定如下滑移系的分切应力： $(111)[0\bar{1}1]$ 、 $(111)[10\bar{1}]$ 、 $(111)[1\bar{1}0]$ 。拉伸应力为  $6.9 \times 10^5 \text{ Pa}$ 。

解：根据拉伸应力  $\sigma$  与滑移系上的分切应力  $\tau$  间的关系为  $\tau = \sigma \cos \lambda \cos \varphi$ ，对于  $(111)[0\bar{1}1]$  滑移系， $[131]$  与滑移面法线  $[111]$  夹角  $\varphi$  的余弦  $\cos \varphi$  以及  $[131]$  与滑移方向  $[0\bar{1}1]$  夹角  $\lambda$  的余弦  $\cos \lambda$  分别是

$$\cos \varphi = \frac{1+3+1}{\sqrt{1+1+1}\sqrt{1+3^2+1}} = \frac{5}{\sqrt{3}\sqrt{11}} = 0.870$$

$$\cos \lambda = \frac{-3+1}{\sqrt{1+1}\sqrt{1+3^2+1}} = \frac{-2}{\sqrt{2}\sqrt{11}} = -0.426$$

故  $\tau = \sigma \cos \lambda \cos \varphi = -6.9 \times 10^5 \times 0.426 \times 0.870 \text{ Pa} = -2.56 \times 10^5 \text{ Pa}$

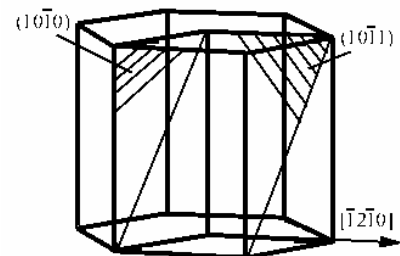
对于  $(111)[10\bar{1}]$  滑移系， $[131]$  与滑移方向  $[10\bar{1}]$  垂直，所以这个滑移系的分切应力为 0。

10. Mg 可在  $\{10\bar{1}0\}$  及基面间交滑移，又可在  $\{10\bar{1}1\}$  及基面间交滑移；

(a) 以一单胞表示出这两种交滑移的可能性。

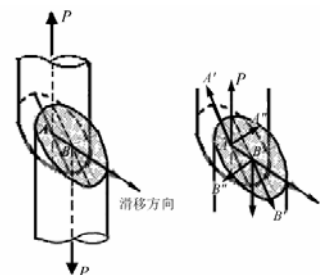
(b) 在  $(10\bar{1}0)$  及  $(10\bar{1}1)$  间能否交滑移？说明之。

解：Mg 的晶体结构是 hcp，滑移方向是  $\langle 11\bar{2}0 \rangle$ 。从右图的例子可以看出， $(10\bar{1}0)$  面和基面  $(0001)$  以及  $(10\bar{1}1)$  面和基面  $(0001)$  都共有  $[\bar{1}2\bar{1}0]$  方向，所以它们之间可以交滑移。同样  $(10\bar{1}0)$  面和  $(10\bar{1}1)$  面共有  $[\bar{1}2\bar{1}0]$  方向，所以他们之间也可以较滑移。



11. 分析单晶体拉伸时所发生的转动方向，说明原因。

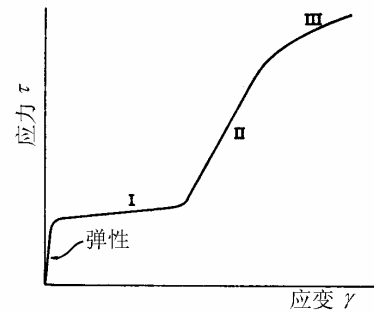
解：设一个圆柱体两端受拉伸力，拉伸时，滑移面两侧晶体相对于滑移方向滑动，这样，滑移面两侧的力轴错开不再在一直线上，上下力轴错开了如右图中的  $AB$  距离。滑移面上下的力在滑移面的法线方向的分力分别为  $AA'$  和



$BB'$ ，他们构成一对力偶，使滑移面向平行轴向的方向转动。滑移面上下面的力在滑移面上的分力分别为  $AA''$  和  $BB''$ ，他们也构成一对力偶，使滑移方向向滑移面椭圆截面的长轴方向转动。上述的两种转动综合的结果是使滑移方向向力轴方向转动。

12. 示意画出单晶的应力-应变 ( $\tau-\gamma$ ) 曲线，并表出各阶段。铝 (层错能约为  $200\text{mJ/m}^2$ ) 和不锈钢 (层错能约为  $10\text{mJ/m}^2$ ) 哪一种材料形变第 III 阶段开始得更早? 这两种材料滑移特征有什么区别?

解：右图是单晶的应力-应变 ( $\tau-\gamma$ ) 曲线的示意图。  
第 III 阶段是动态回复阶段，主要的机制是在塞积群中的螺位错交滑移，使得塞积群前的应力集中得以松弛，从而使硬化率下降。所以越容易交滑移的材料第 III 阶段开始越早。铝的层错能很高，位错一般不能扩展，所以其螺位错容易交滑移；而不锈钢的层错能很低，位错通常都会扩展，所以螺位错不容易交滑移。所以铝在受力时更早进入第 III 阶段。



13. 一个圆柱形面心立方单晶，晶体的原始取向是  $[517]$  平行于圆柱中心轴线。(a) 在  $(001)$  标准极射赤面投影图上标出加载轴线的起始位置；(b) 开始滑移的滑移系是什么？(c) 确定第一次超射的加载轴线位置。(d) 在这一阶段形变中，晶体转动角度有多大？(e) 计算在第一次超射时的切应变变量。

解：设在  $(001)$  标准极射赤面投影图上以  $(001)$  极点到  $(100)$  极点的线为  $y$  坐标轴， $(001)$  极点到  $(010)$  极点的线为  $x$  坐标轴，轴长都为 1。计算加载轴  $[517]$  极点在这个坐标下的坐标  $(x, y)$  来标出它的位置。 $(x, y)$  为

$$x = \frac{[1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta]^{1/2}}{1 + \cos \alpha}$$

$$y = \frac{\cos \beta}{1 + \cos \alpha}$$

其中  $\alpha$  是  $[517]$  与  $[001]$  的夹角， $\beta$  是  $[517]$  与  $[100]$  的夹角。 $\cos \alpha$  和  $\cos \beta$  分别为

$$\cos \alpha = \frac{7}{\sqrt{5^2 + 1^2 + 7^2} \sqrt{1}} = \frac{7}{\sqrt{75}} = 0.808$$

$$\cos \beta = \frac{5}{\sqrt{5^2 + 1^2 + 7^2} \sqrt{1}} = \frac{5}{\sqrt{75}} = 0.577$$

$[517]$  极点的  $x$ 、 $y$  分别是

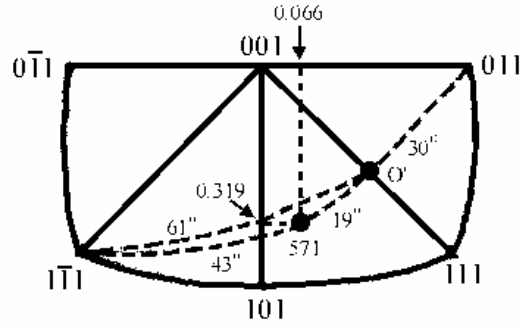
$$x = \frac{[1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta]^{1/2}}{1 + \cos \alpha} = \frac{[1 - 0.808^2 - 0.577^2]^{1/2}}{1 + 0.808} = 0.066$$

$$y = \frac{\cos \beta}{1 + \cos \alpha} = \frac{0.577}{1 + 0.808} = 0.319$$

在  $(001)$  标准极射赤面投影图上标出  $[517]$  极点的位置 (见下图)，它处于第 7 题给出的  $(001)$  极图的  $DI$  区，开动的滑移系是  $(\bar{1}\bar{1}1)[011]$ 。这个滑移系开动伴随  $[517]$  向  $[011]$  方向转动，转动的轨迹是  $[517]$  和  $[011]$  组成的面在极图上的迹痕，如图所示。当转动到  $w-B$  线上时，即力轴和  $(\bar{1}\bar{1}0)$  面重合时 (下图中的  $O'$  点)，有两个等效滑移系  $(\bar{1}\bar{1}1)[011]$  和  $(\bar{1}\bar{1}1)[101]$  可以开动，这个位置就是第一次超射的加载轴线位置。用吴氏网量出  $[517]$  到这个极点间的角度是  $19^\circ$ 。

如果知道拉伸轴原始位置与滑移面及滑移方向的夹角 $\chi_0$ 和 $\lambda_0$ 以及转动后拉伸轴与滑移面及滑移方向的夹角 $\chi_1$ 和 $\lambda_1$ 的话,则产生的切应变 $\gamma$ 可以按下式计算

$$\gamma = \frac{\cos \lambda_1}{\sin \chi_1} - \frac{\cos \lambda_0}{\sin \chi_0}$$



在吴氏网上量出[517]极点与 $[1\bar{1}1]$ 极点间的

的角度为  $43^\circ$ , 即拉伸轴原始方向与滑移面 $(1\bar{1}1)$ 的夹角是 $\chi_0=90^\circ-43^\circ=47^\circ$ ; 在吴氏网上量出[517]极点与滑移方向[011]极点间的角度 $\lambda_0$ 为  $49^\circ$ 。另外, 再在吴氏网上量出转动到开始发生超射的极点与 $[1\bar{1}1]$ 极点间的角度为  $61^\circ$ , 即此方向与滑移面的夹角 $\chi_1=90^\circ-61^\circ=29^\circ$ ; 在吴氏网上量出开始发生超射的极点与滑移方向[011]极点间的角度为 $\lambda_1=30^\circ$ 。把 $\chi_0$ 、 $\lambda_0$ 、 $\chi_1$ 和 $\lambda_1$ 代入上式, 求得在发生超射前的切应变 $\gamma$

$$\gamma = \frac{\cos \lambda_1}{\sin \chi_1} - \frac{\cos \lambda_0}{\sin \chi_0} = \frac{\cos 30^\circ}{\sin 29^\circ} - \frac{\cos 49^\circ}{\sin 47^\circ} = 0.889$$

上面所述的过程也可以不用画图而用计算的方法得出结果。因开始滑移的滑移系是 $(1\bar{1}1)[011]$ , 变形时[517]向[011]转动, 即拉伸轴在[517]和[011]组成的面 $(\bar{6}55)$ 面上转动。当拉伸轴转动到 $(\bar{1}10)$ 面上时发生超射, 这个超射的位置的方向应该是 $(\bar{6}55)$ 面与 $(\bar{1}10)$ 的交线的方向, 计算出 $(\bar{6}55)$ 面与 $(\bar{1}10)$ 的交线的方向是 $[5511]$ , 即超射的位置的方向是 $[5511]$ 。力轴原始取向[517]与发生超射的取向 $[5511]$ 间夹角 $\theta$ 是

$$\cos \theta = \frac{5 \times 5 + 5 + 7 \times 11}{\sqrt{5^2 + 1 + 7^2} \sqrt{5^2 + 5^2 + 11^2}} = \frac{107}{\sqrt{75} \sqrt{171}} = 0.949$$

$$\theta = 19.1^\circ$$

即力轴转到开始发生超射位置时已经转了  $65.48^\circ$ 。

力轴原始取向[517]与开动滑移系的滑移面 $(1\bar{1}1)$ 面法线的夹角 $\varphi_0$ 是

$$\cos \varphi = \frac{5 - 1 + 7}{\sqrt{5^2 + 1 + 7^2} \sqrt{3}} = \frac{11}{\sqrt{75} \sqrt{3}} = 0.7333$$

$$\varphi = 42.83^\circ$$

而原始取向[517]与开动滑移系的滑移面 $(\bar{1}\bar{1}1)$ 面法线的夹角 $\chi_0$ 是  $90^\circ - \varphi_0 = 47.17^\circ$ 。原始取向[517]与开动滑移系的滑移方向[011]的夹角 $\lambda_0$ 是

$$\cos \lambda_0 = \frac{1 + 7}{\sqrt{5^2 + 1 + 7^2} \sqrt{1 + 1}} = \frac{8}{\sqrt{75} \sqrt{2}} = 0.653$$

$$\lambda_0 = 49.22^\circ$$

超射的位置的方向 $[5511]$ 与开动滑移系的滑移面 $(1\bar{1}1)$ 面法线的夹角 $\varphi_1$ 是

$$\cos \varphi_1 = \frac{5 - 5 + 11}{\sqrt{5^2 + 5^2 + 11^2} \sqrt{3}} = \frac{11}{\sqrt{171} \sqrt{3}} = 0.486$$

$$\varphi_1 = 60.94^\circ$$

即超射的位置的方向 $[5511]$ 与开动滑移系的滑移面 $(1\bar{1}1)$ 面的夹角 $\chi_1$ 是  $90^\circ - \varphi_1 = 29.06^\circ$ ,

超射的位置的方向 $[5511]$ 与开动滑移系的滑移方向[011]的夹角 $\lambda_1$ 是

$$\cos \lambda_1 = \frac{5 + 11}{\sqrt{5^2 + 5^2 + 11^2} \sqrt{2}} = \frac{16}{\sqrt{171} \sqrt{2}} = 0.865$$

$$\lambda_1 = 30.09^\circ$$

在发生超射前的切应变 $\gamma$

$$\gamma = \frac{\cos \lambda_1}{\sin \chi_1} - \frac{\cos \lambda_0}{\sin \chi_0} = \frac{\cos 30.09^\circ}{\sin 29.06^\circ} - \frac{\cos 49.22^\circ}{\sin 47.17^\circ} = \frac{0.865}{0.486} - \frac{0.653}{0.733} = 0.889$$

这和上面用吴氏网测量的结果是吻合的。

14. 面心立方金属孪生的  $K_1$  和  $K_2$  都是  $\{111\}$ ，在一个特定的  $\{111\}$  面，例如  $(111)$  面有几种产生孪晶的方法，写出它们的  $\eta_1$  的方向指数。

面心立方金属孪生的孪生方向  $\eta_1$  是  $\langle 11\bar{2} \rangle$  方向， $\eta_1$  必在  $K_1$  面上。如果在  $(111)$  面上发生孪晶，根据晶带定律，在  $(111)$  面上的  $\eta_1$  是  $[11\bar{2}]$ 、 $[\bar{1}21]$  和  $[2\bar{1}1]$  三种。

15. 计算 Be 和 Zr 孪生时的切应变变量。Be 和 Zr 的孪生元素如下：

Be:  $c/a=1.5847$ ,  $K_1=\{10\bar{1}2\}$ ,  $K_2=\{\bar{1}012\}$

Zr:  $c/a=1.589$ ,  $K_1=\{11\bar{2}2\}$ ,  $K_2=\{11\bar{2}\bar{4}\}$

解：对于 Be，以孪生面  $K_1$  为  $(10\bar{1}2)$ 、 $K_2$  面为  $(\bar{1}012)$  讨论，它们的三轴坐标指数分别为  $(102)$  和  $(10\bar{2})$ ，设  $(102)$  面为  $(h_1k_1l_1)$ 、 $(10\bar{2})$  面为  $(h_2k_2l_2)$ ，它们的夹角  $\alpha$  是

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{4[h_1h_2 + (h_1k_2 + h_2k_1)/2 + k_1k_2]/3 + l_1l_2a^2/c^2}{[4(h_1^2 + h_1k_1 + k_1^2)/3 + l_1^2a^2/c^2]^{1/2}[4(h_2^2 + h_2k_2 + k_2^2)/3 + l_2^2a^2/c^2]^{1/2}} \\ &= \frac{4[1+0]/3 - 2 \times 2 \times (1/1.5847)^2}{[4/3 + 4 \times (1/1.5847)^2]^{1/2}[4/3 + 4 \times (1/1.587)^2]^{1/2}} = \frac{-0.2595}{2.926} = -0.0886 \end{aligned}$$

$$\alpha = 95.08^\circ$$

孪生切变  $S$  为

$$S = 2 \cot \alpha = 2 \cot 95.08^\circ = -0.178$$

对于 Zr，以孪生面  $K_1$  为  $(11\bar{2}2)$ 、 $K_2$  面为  $(11\bar{2}\bar{4})$  讨论，它们的三轴坐标指数分别为  $(112)$  和  $(11\bar{4})$ ，设  $(112)$  面为  $(h_1k_1l_1)$ 、 $(11\bar{4})$  面为  $(h_2k_2l_2)$ ，它们的夹角  $\alpha$  是

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{4[h_1h_2 + (h_1k_2 + h_2k_1)/2 + k_1k_2]/3 + l_1l_2a^2/c^2}{[4(h_1^2 + h_1k_1 + k_1^2)/3 + l_1^2a^2/c^2]^{1/2}[4(h_2^2 + h_2k_2 + k_2^2)/3 + l_2^2a^2/c^2]^{1/2}} \\ &= \frac{4[1 + (1+1)/2 + 1]/3 - 2 \times 4 \times (1/1.589)^2}{[4(1+1+1)/3 + 4 \times (1/1.589)^2]^{1/2}[4(1+1+1)/3 + 16 \times (1/1.589)^2]^{1/2}} = \frac{0.832}{7.597} = 0.1095 \end{aligned}$$

$$\alpha = 83.71^\circ$$

孪生切变  $S$  为

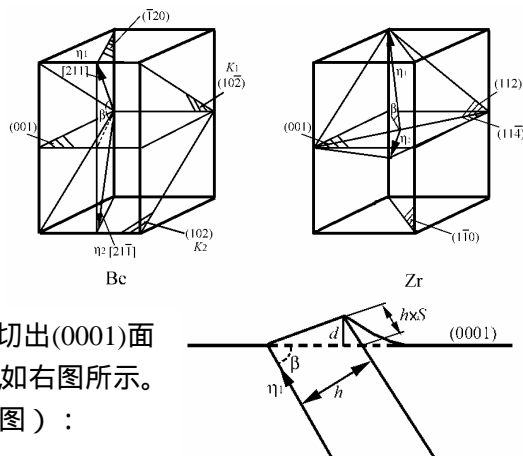
$$S = 2 \cot \alpha = 2 \cot 83.71^\circ = 0.2203$$

Be 和 Zr 的  $K_1$ 、 $K_2$ 、 $\eta_1$  和  $\eta_2$  与基面  $(0001)$  间的关系如右图所示：

以垂直于  $K_1$  和  $K_2$  面（也垂直于  $(0001)$  面）并包含  $\eta_1$  和  $\eta_2$  的面来看发生孪生时的情况。对于 Be 这个面是  $(\bar{1}2\bar{1}0)$  面，对于 Zr 这个面是  $(1\bar{1}00)$  面。在这个面上  $\eta_1$  与  $(0001)$  面的夹角  $\beta$  也是  $K_1$  面与  $(0001)$  面的夹角。若表面是  $(0001)$  面，当产生孪晶时切出  $(0001)$  面的距离为孪晶厚度  $h$  和孪生切变  $S$  的乘积 如右图所示。这样，孪生凸初表面的高度  $d$  应是（见右图）：

$$d = h \times S \sin \beta$$

Be 的  $K_1$  面  $(102)$  与基面  $(001)$  的夹角  $\beta_1$  为



$$\cos \beta_1 = \frac{2 \times (1/1.5847)^2}{[4/3 + 4 \times (1/1.5847)^2]^{1/2} [(1/1.5847)^2]^{1/2}} = \frac{0.796}{1.0794} = 0.7374$$

$$\beta_1 = 42.48^\circ$$

Zr 的  $K_1$  面(112)与基面(001)的夹角  $\beta_2$  为

$$\cos \beta_2 = \frac{2 \times (1/1.589)^2}{[4(1+1+1)/3 + 4 \times (1/1.589)^2]^{1/2} [(1/1.589)^2]^{1/2}} = \frac{0.792}{1.4871} = 0.5326$$

$$\beta_2 = 57.82^\circ$$

把  $\beta$  代入计算  $d$  的式子, 得 Be 和 Zr 孪生后在(0001)表面的浮凸的高度  $d_1$  和  $d_2$  :

$$d_1 = h \times S \sin \beta = h \times 0.178 \sin 42.48^\circ = 0.1205h$$

$$d_2 = h \times S \sin \beta = h \times 0.2203 \sin 57.82^\circ = 0.1865h$$

注意, Be 和 Zr 孪生的切变方向相反, 上面的切变示意图上应该是一个向外切动, 一个向内切动, 但作为计算其式子是一样的。

16.  $c/a=1.800$  的 hcp 金属, 它最可能的滑移系是什么? 如图 8-65 的三种取向及加载方式, 确定哪一种方式会产生滑移, 哪一种方式会产生孪生 (只考虑  $\{10\bar{1}2\}$  的孪生)。

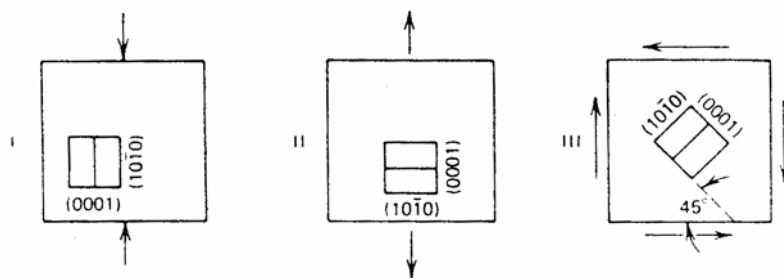
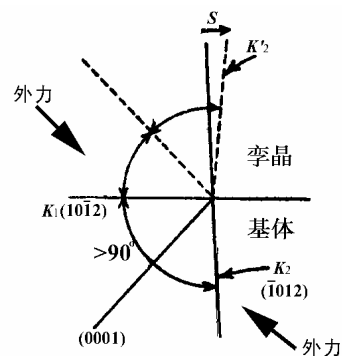


图 8-65

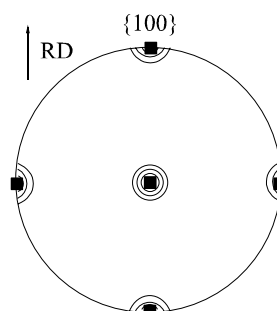
解:  $c/a=1.800$  的 hcp 晶体, 开动的滑移系是  $\{0001\} \langle 11\bar{2}0 \rangle$ 。上图 I 的(0001)面与力轴垂直, 图 II 的(0001)面与力轴平行, 所以在滑移系的分切应力都为 0, 这两种情况都不能滑移。图 III 的应力状态相当于在  $45^\circ$  对角线方向上受拉伸应力, 这时力轴和(0001)面平行, 相当于图 II 的情况, 所以也不能滑移。

$c/a=1.800$  的 hcp 晶体, 孪生元素  $K_1$  为  $\{10\bar{1}2\}$ ,  $\eta_1$  为  $\langle 10\bar{1}1 \rangle$ 。上图 I 的压缩力在  $(10\bar{1}2)$  面及上有分切应力, 又因  $c/a > \sqrt{3}$ , 分切应力的方向必须如右图的  $S$  方向。现加的外力是垂直(0001)面的压应力, 从图看出, 它在  $K_1$  面的分切应力的方向是可以产生孪晶的, 如果所加的力足够大, 可以发生孪生。上图 II 的拉伸力平行于(0001)面, 拉伸也可形成孪晶。上图 III 的受力情况与图 II 的等效, 所以也能产生孪晶。



17. 画出立方系(100)[001]轧制织构的(100)极图的示意图。

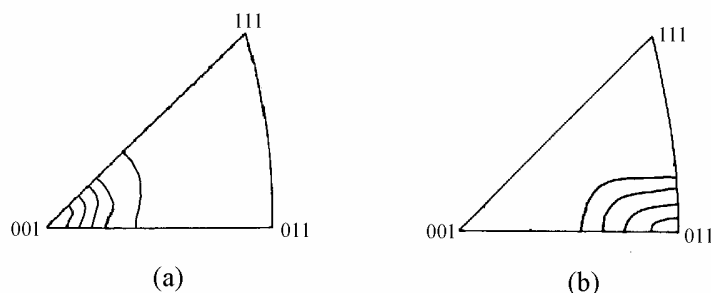
解: 极图是表示被测材料中各个晶粒的某一选定晶面  $\{hkl\}$  的取向分布的图形。对于轧制织构的  $\{hkl\}$  极图, 以轧向 RD、横向 TD 和轧面法线 ND 作坐标架, 以轧面作为投影面, 作出各晶粒某晶面  $\{hkl\}$  极点在球面上极密度分布的投影。立方系



(100)[001]轧制织构在(100)极图表现为晶粒的{100}面极点密集于(100)极图上的{100}极点上，如右示意图所示

18.画出铝的[100]拔丝织构及铁的[110]拔丝织构的反极图。

解：反极图是描述多晶体材料中平行于材料的某一外观特征方向的晶向在晶体坐标架的空间分布的图形，参考坐标架的3个轴一般取晶体的3个晶轴（或低指数的晶向）。铝的[100]拔丝织构是各晶粒的[100]方向趋向平行于拉拔轴，以3个晶轴为坐标，在(001)极图上把拉拔轴相对于各晶粒的取向密度画出，得反极图如下图(a)所示。按同样道理，铁的[110]拔丝织构的反极图如下图(b)所示。



19.对低碳钢测得不同晶粒大小的下屈服点数据如下：

$d/\mu\text{m}$	250	111	37	18	10	6.9	5.4	3.0
$\sigma_s/\text{MPa}$	103	131	193	207	275	303	341	428

问  $d$  和  $\sigma_s$  间是否符合 Hall-Petch 关系?用最小二乘法求出 Hall-Petch 关系中的常数。

解：Hall-Petch 关系是

$$\sigma_s = \sigma_0 + k_y d^{-1/2}$$

为了处理方便，把上表  $d$  的数据变换成  $d^{-1/2}$ ：

$d^{-1/2}/\mu\text{m}^{-1/2}$	0.0632	0.0949	0.104	0.236	0.316	0.381	0.430	0.577
$\sigma_s/\text{MPa}$	103	131	193	207	275	303	341	428

把上表数据画图，并进行线性

回归，得

$$\sigma_s = 72.86 + 617.84 d^{-1/2} \text{ (Mpa)}$$

其中  $d$  的单位是  $\mu\text{m}$ 。回归所得方程的相关系数  $R=0.996$ ，说明  $d$  和  $\sigma_s$  间是符合 Hall-Petch 关系的。

