

第9章 回复和再结晶题解

1. 纯金属在不同温度加热后在水中淬火，它的电阻率比缓慢冷却时的高 $\Delta\rho_0$ ， $\Delta\rho_0$ 正比于空位浓度。

如果忽略了淬火过程中消失在阱中的空位，根据图9-48的实验数据求出空位形成能。

该金属经700°C加热淬火并在不同温度恒温退火后，测得电阻变化 $\Delta\rho/\Delta\rho_0$ ($\Delta\rho_0$ 是淬火后电阻的增加值， $\Delta\rho$ 是退火后的电阻和不经淬火的电阻差) 数据如下： $\Delta\rho/\Delta\rho_0 = 2 \times 10^{-2}$ 时，在165°C及140°C退火分别需要保温时间为17.65min和61.76min； $\Delta\rho/\Delta\rho_0 = 5 \times 10^{-2}$ 时，在165°C、140°C及118°C退火分别需要保温时间为13.24min、46.16min及167.65min，求出电阻回复的激活能。

这种金属的自扩散激活能有多大？

解：宏观热膨胀及微观热膨胀所引起的体积变化为 $3\Delta L/L$ 及 $3\Delta a/a$ ，这两种变化的差异是由空位的存在引起的，所以空位浓度 x_v 是

$$x_v = 3\left(\frac{\Delta L}{L} - \frac{\Delta a}{a}\right)$$

在 T_1 和 T_2 两个温度下的空位浓度 x_{v1} 和 x_{v2} 之比为

$$\frac{x_{v1}}{x_{v2}} = \frac{\exp(-Q/kT_1)}{\exp(-Q/kT_2)}$$

由图量出在650°C时 $(\Delta L/L - \Delta a/a) = 0.303 \times 10^{-3}$ ，在600°C时 $(\Delta L/L - \Delta a/a) = 0.167 \times 10^{-3}$ ，即在650°C和600°C温度下的空位浓度分别为 $3 \times 0.303 \times 10^{-3}$ 和 $3 \times 0.167 \times 10^{-3}$ 。

其中 Q 是空位形成能。按上式得

$$\frac{0.303}{0.167} = \exp\left[-\frac{Q}{k}\left(\frac{1}{923} - \frac{1}{873}\right)\right]$$

如果 Q 的单位为eV，则 $k = 8.61 \times 10^{-5}$ (eV/K)。上式两边取对数，整理得

$$Q = -8.61 \times 10^{-5} \frac{\ln(0.303/0.167)}{(1/923 - 1/873)} \text{ eV} = 0.83 \text{ eV}$$

电阻回复动力学是一型动力学，电阻的相对变化 $\Delta\rho/\Delta\rho_0$ 随时间的变化率 $d(\Delta\rho/\Delta\rho_0)/dt$ 符合如下关系

$$\frac{d(\Delta\rho/\Delta\rho_0)}{dt} = \frac{a}{t} = A \exp\left(-\frac{Q}{kT}\right)$$

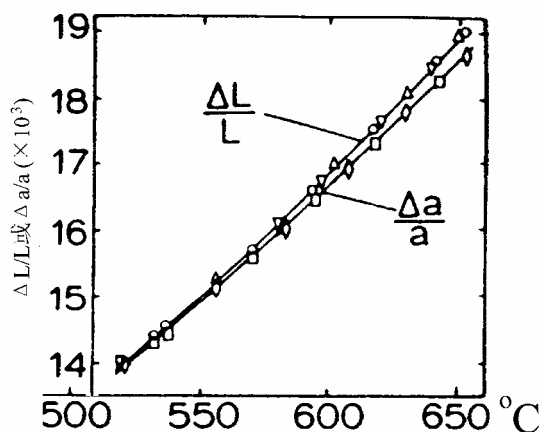
式中 a 和 A 是常数， t 是回复时间， Q 是回复激活能。若电阻相对变化 $\Delta\rho/\Delta\rho_0$ 一定，在 T_1 和 T_2 下回复所需时间为 t_1 和 t_2 ，则

$$\ln \frac{t_1}{t_2} = \frac{Q}{k} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right)$$

现知 $\Delta\rho/\Delta\rho_0 = 2 \times 10^{-2}$ 时，在165°C及140°C退火分别需要保温时间为17.65min和61.76min； $\Delta\rho/\Delta\rho_0 = 5 \times 10^{-2}$ 时，在165°C、140°C及118°C退火分别需要保温时间为13.24min、46.16min及167.65min。根据上式，当 $\Delta\rho/\Delta\rho_0 = 2 \times 10^{-2}$ 时

$$\ln \frac{61.76}{17.65} = \frac{Q(\text{eV})}{8.61 \times 10^{-5}} \left(\frac{1}{413} - \frac{1}{438} \right) = \frac{Q(\text{eV})}{8.61 \times 10^{-5}} 1.382 \times 10^{-4}$$

$$\text{即 } Q = \frac{0.861}{1.382} \times \ln \frac{61.76}{17.65} = 0.78 \text{ eV}$$



当 $\Delta\rho/\Delta\rho_0 = 5 \times 10^{-2}$ 时

$$\ln \frac{167.65}{13.34} = \frac{Q(\text{eV})}{8.61 \times 10^{-5}} \left(\frac{1}{391} - \frac{1}{438} \right) = \frac{Q(\text{eV})}{8.61 \times 10^{-5}} 2.744 \times 10^{-4}$$

$$\text{即 } Q = \frac{0.861}{2.744} \times \ln \frac{167.65}{13.34} = 0.79 \text{eV}$$

在两种回复程度的激活能基本是一样的，说明在这回复范围的回复机制是相同的。

因为电阻的大小主要取决于空位浓度，电阻的降低是空位散逸的结果，这个过程是空位移动，即其激活能应与空位移动激活能相当。金属的自扩散激活能是空位形成能和空位移动激活能（换位机制）之和，故自扩散激活能为 $(0.83+0.78)\text{eV}=1.61\text{eV}$ 。

2. 如图 9-49 所示，1 个单晶体经弯曲后，估计导致弯曲的同号刃位错的总柏氏矢量的大小。

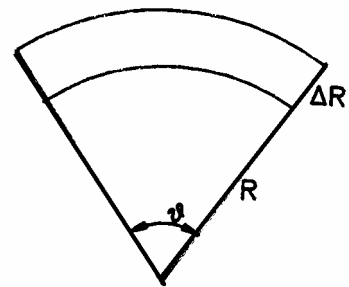
求这些位错的位错密度。（设单个位错的柏氏矢量为 b ）

解：根据右图知弯曲的上边和下边长度之差为 $\theta\Delta R$ （ θ 为对应圆心角的弧度数），所以一定有同号正刃位错存在，由于每个位错的柏氏矢量为 b ，所以共有位错的数目 $n=\theta\Delta R/b$ 。用单位面积穿过的位错数目表示位错密度 ρ_s ，现在面积 S 为

$$S=\theta[(R+\Delta R)^2-R^2]/2=\theta[2R\Delta R+(\Delta R)^2]/2$$

故位错密度 ρ_s 为

$$\rho_s = \frac{2\theta\Delta R}{b\theta\Delta R(2R+\Delta R)} = \frac{2}{b(2R+\Delta R)}$$



3. 多边形化后形成的亚晶界包含 n 个刃位错，亚晶间的取向差为 10^{-3} 弧度。设多边形化前位错间无交互作用，问多边形化后释放了多少能量（以百分数表示）。（晶界能 $E_B=E_0\theta(A-\ln\theta)$ ，设其中 A 等于 0.5）。

如果 2 个这样的亚晶界合并形成 1 个新的亚晶界，问取向差加大多少？合并前后释放能量多少？

解：亚晶间的取向差 θ 与位错柏氏矢量 b 以及位错间距 D 的关系是 $D=b/\theta$ 。讨论 1×1 面积的晶界，因包含 n 个位错，故

$$n = \frac{1}{D} = \frac{\theta}{b}$$

多边形化前位错无交互作用，即和独立存在时的能量一样，假设位错是刃型位错，这 n 个位错单独存在时，它们的总能量 E_1 为 nE_e ， E_e 是单位长度刃位错的能量：

$$E_1 = nE_e = \frac{\theta}{b} \frac{Gb^2}{4\pi(1-\nu)} \ln \frac{R}{r_0} \approx 10\theta E_0$$

式中 $E_0 = \frac{Gb}{4\pi(1-\nu)}$ ，并用了 $\ln \frac{R}{r_0} \approx 10$ 的近似。多边形化后， n 个位错构成的这个面积为

单位面积的晶界的能量 E_b 为

$$E_b = E_0\theta(0.5 - \ln\theta)$$

多边形化前后单位面积晶界释放的能量相对 $\Delta E/E_1$ 为

$$\frac{\Delta E}{E_1} = \frac{E_1 - E_b}{E_1} = \frac{10\theta E_0 - E_0\theta(0.5 - \ln\theta)}{10\theta E_0} = \frac{10 - 0.5 + \ln 10^{-3}}{10} = 25.9\%$$

如果 2 个这样的亚晶界合并形成 1 个新的亚晶界，晶界上的位错密度增加一倍，取向差与位错密度成正比，即取向差为 $2\theta=2\times10^{-3}$ 弧度。合并后的单位面积晶界能量为 $2\theta E_0(A-\ln 2\theta)$ 。合并前两个晶界的能量为 $2\theta E_0(A-\ln \theta)$ ，合并前后释放能量相对变化 ΔE 为

$$\begin{aligned}\Delta E &= \frac{2\theta E_0(A-\ln \theta) - 2\theta E_0(A-\ln 2\theta)}{2\theta E_0(A-\ln \theta)} = \frac{\ln 2\theta - \ln \theta}{0.5 - \ln \theta} \\ &= \frac{\ln(2\times10^{-3}) - \ln 10^{-3}}{0.5 - \ln 10^{-3}} = 9.35\%\end{aligned}$$

4. 经大形变量的冷加工的铜块，储存能为 $2\times10^6 \text{J}\cdot\text{m}^{-2}$ ，大角度界面能的典型值为 $0.5 \text{J}\cdot\text{m}^{-2}$ 。如果按照经典的均匀形核理论，形成再结晶临界晶核尺寸有多大？若储存能主要由位错贡献，建立位错密度和临界核心尺寸的关系。如果形成 1 个半径为 2nm 的核心，要求形核处的位错密度多大？评论经典形核的可能性。（ $G\approx 4\times 10^{10} \text{Pa}$ ， $b\approx 0.25 \text{nm}$ ）

解：按经典形核理论，临界核心半径 $r^*=2\gamma/\Delta G$ ，其中 γ 是界面能， ΔG 是提供形核的驱动能。现在 ΔG 应是单位体积的储存能。把界面能及储存能代入，得

$$r^* = \frac{2\gamma}{\Delta G} = \frac{2\times 0.5}{2\times 10^6} \text{m} = 5\times 10^{-7} \text{m}$$

单位长度位错的能量约为 $Gb^2/2$ ，设位错密度为 ρ ，单位体积的位错能量为 $\rho Gb^2/2$ 。如果储存能 E 主要是由位错贡献，则临界晶核半径与位错密度的关系为

$$r^* = \frac{4\gamma}{\rho Gb^2}$$

如果形成一个半径为 2nm 的核心，要求的位错密度 ρ 为：

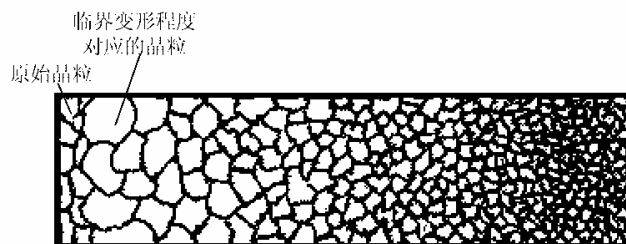
$$\rho = \frac{4\gamma}{r^* Gb^2} = \frac{4\times 0.5}{2\times 10^{-9} \times 4\times 10^{10} \times (0.25\times 10^{-9})^2} \text{m}^{-2} = 4\times 10^{17} \text{m}^{-2}$$

大加工量的金属材料的位错密度大约为 10^{16}m^{-2} ，这样大小的邻接半径核心基本上是不可能形成，上面讨论的经典形核的临界核心半径为 $5\times 10^{-7} \text{m}$ ，即 500nm，显然是不可能用经典形核的方式形核的。

5. 厚度为 40mm 厚的铝板，轧制成一侧为 20mm 另一侧仍保持为 40mm 的楔形板，经再结晶退火后，画出从 20mm 的一侧到 40mm 一侧的截面的组织示意图。并说明。

厚度为 40mm 厚的铝板，轧制成一侧为 20mm 另一侧仍保持为 40mm 的楔形板，经再结晶退火后，画出从 20mm 的一侧到 40mm 一侧的截面的组织示意图。并说明。

解：这铝板轧制后，沿板长度的变形量是不同的，在轧成 20mm 一侧的变形量最大，而在 40mm 一侧变形量为 0。因此。在靠近 40mm 一侧在临界变形量（大约为百分之几）的地方在再结晶退火后获得最大的晶粒，在小于临界变形量的地方，晶粒尺寸和未再结晶（未变形）时的一样；在大于临界变形量的一侧，晶粒尺寸随变形量加大而逐渐减小。组织示意图如下图所示



6. 厚度为 $5 \times 10^{-4} \text{m}$ 的铁硅合金板，其中的晶粒已穿透合金板的厚度。一个表面为 $\{110\}$ 在板面上截面为圆形的圆柱体晶粒，被表面为 $\{100\}$ 的基体所包围，若 $\{100\}$ 表面能比 $\{110\}$ 表面能高 $0.1 \text{J} \cdot \text{m}^{-2}$ ，大角度晶界能为 $0.5 \text{J} \cdot \text{m}^{-2}$ ，估计圆柱体晶粒能长大的最小半径。

解：设表面为 $\{110\}$ 的圆柱体晶粒的圆柱半径为 r ，这个晶粒的表面能和界面能总和 G 为

$$G = 2\pi r h \gamma_b + 2\pi r^2 \gamma_{s(110)}$$

这个晶粒移动时，移动部分的表面由 $\{110\}$ 转变为 $\{100\}$ ，这部分表面的比表面能变化为 $\gamma_{s(100)} - \gamma_{s(110)}$ 。所以，圆柱晶粒的晶界移动引起的能量变化率 dG/dr 为

$$\frac{dG}{dr} = 2\pi h \gamma_b + 4\pi r (\gamma_{s(100)} - \gamma_{s(110)})$$

当这变化率为 0 时，晶粒不能移动，这时的半径 r^* 就是圆柱体晶粒能长大的最小半径。即

$$r^* = \frac{h \gamma_b}{2(\gamma_{s(100)} - \gamma_{s(110)})} = \frac{5 \times 10^{-4} \times 0.5}{2 \times 0.1} \text{m} = 1.25 \times 10^{-3} \text{m}$$

7. 高纯度铜经冷加工后，其屈服强度提高 4 倍，经不同温度再结晶退火，获得 50% 再结晶的时间 t 和退火温度的关系如下

温度/ $^{\circ}\text{C}$	50	80	110	140	170
时间	$1.47 \times$	$2.8 \times$	$1.02 \times$	$5.93 \times$	$5.07 \times$
t/min	10^8	10^6	10^5	10^3	10^2

它们符合 $\ln t = A + \frac{B}{T}$ 关系。其中 A 和 B 为常数， T 是热力学温度。

上述材料制成电器元件分别在 100°C 及 140°C 下工作，若零件设计时要求强度为完全再结晶时的强度，并且用的安全系数为 2，求元件的寿命。（性能恢复大体正比于再结晶量）。

解：根据再结晶动力学方程 $X = 1 - \exp(-Bt^k)$ ，设再结晶晶粒是块状长大， k 近似为 4。

两种再结晶量 X_1 和 X_2 所对应的再结晶时间 t_1 和 t_2 ，则

$$\left[\frac{t_1}{t_2} \right]^4 = \frac{\ln(1 - X_1)}{\ln(1 - X_2)}$$

因为理论上的时间为无限大，所以假设再结晶量为 0.9999 时为“完全再结晶”，这样完全再结晶时间 t 和 0.5 再结晶时间 $t_{0.5}$ 的关系是

$$t = \left[\frac{\ln 0.00001}{\ln 0.5} \right]^{1/4} t_{0.5} = 2.02 t_{0.5} \approx 2 t_{0.5}$$

即完全再结晶时间是 50% 再结晶时间的一倍。高纯度铜经冷加工后制成的电器元件在 100°C 及 140°C 下工作时会发生再结晶，使其强度下降，下降量与再结晶量成正比。若零件设计时要求强度为完全再结晶时的强度，但安全系数为 2，即恰好在再结晶 50% 的时间时达到元件要求的最低强度，即 50% 再结晶时间是元件的寿命。

因为获得 50% 再结晶的时间 t 和退火温度 T 的关系是 $\ln t = A + B/T$ ，根据给出的数据，把温度换成热力学温度的倒数，时间取对数，得

$1/T \times 10^{-3}$	3.10	2.83	2.61	2.42	2.66
$\ln t / \ln(\text{min})$	18.8	14.8	11.5	8.69	6.23
)	1	5	3		

对上列数据画图（右图），并进行线性回归，得

$$\ln t = -27.95 + 15.13 \times 10^3 (1/T)$$

相关系数是 0.9999。上式又可写成

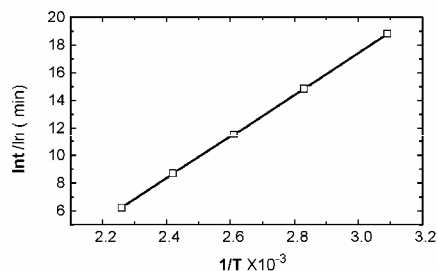
$$t = \exp[-27.95 + 15.13 \times 10^3 (1/T)]$$

在 100°C 下的寿命为

$$\begin{aligned} t &= \exp[-27.95 + 15.13 \times 10^3 (1/373)] \\ &= 300440 \text{ min} = 5007.3 \text{ h} \end{aligned}$$

在 140°C 下的寿命为

$$\begin{aligned} t &= \exp[-27.95 + 15.13 \times 10^3 (1/413)] \\ &= 5910 \text{ min} = 98.5 \text{ h} \end{aligned}$$



8. 下面是在不同温度下保温晶粒长大实验所测得的数据，如果忽略了晶粒开始长大时的尺寸，问晶粒界移动速度是否和驱动力成正比。求出晶界迁移的激活能。

保温时间/h		0.25	0.5	1	2
平均晶粒尺寸 / 10 ⁻³ cm	475°C	1.1	1.5	2.1	3.0
	500°C	1.6	2.2	3.2	4.5
	600°C	2.8	3.9	5.5	7.8
	650°C	3.3	4.7	6.6	9.4

解：如果忽略了晶粒开始长大时的尺寸，晶粒界移动速度和驱动力成正比时，晶粒长大的等温动力学方程是

$$\bar{D}^2 = Kt$$

式中 \bar{D} 为晶粒平均直径，在恒温下， K 是常数；但它是温度的函数： $K = B \exp(-Q/RT)$ ， Q 是晶界移动激活能。为了验证晶粒界移动速度是否和驱动力成正比，把上式写成

$$\bar{D} = K' t^n$$

式中 $K' = K^n$ 。如果求得 n 为 0.5，则说明晶粒界移动速度是和驱动力成正比。两端取对数，得

$$\ln \bar{D} = \ln K' + n \ln t$$

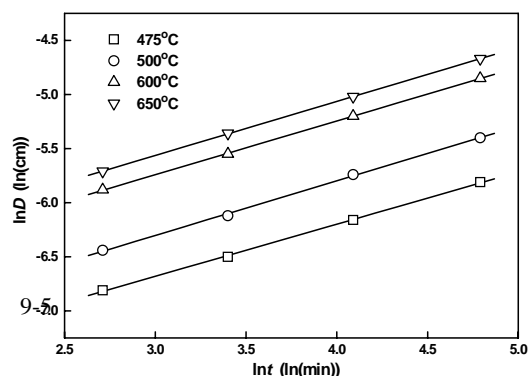
把给出的数据换成对数，得

ln t / ln (min)		2.71	3.40	4.09	4.79
平均晶粒尺寸 / 10 ⁻³ cm	475°C	-6.81	-6.50	-6.16	-5.81
	500°C	-6.44	-6.12	-5.74	-5.40
	600°C	-5.88	-5.55	-5.20	-4.85
	650°C	-5.71	-5.36	-5.02	-4.67

对四个温度的 $\ln \bar{D}$ 与 $\ln t$ 画图，如下图所示。进行线性回归，得

T (°C)	475	500	600	650
$1/T$ (1/K)	0.00134	0.00130	0.00115	0.00108
$\ln K'$	-8.126	-7.817	-7.23	-7.06
n	0.482	0.505	0.496	0.499

求得的 n 值都非常接近 0.5，说明晶粒移动速度和驱动力成正比。因为 $K' = K^n$ ，现在 $n = 0.5$ ，即 $K'^2 = K$ 。而 $K = B \exp(-Q/RT)$ ，即 $K'^2 = B \exp(-Q/RT)$ 。把这个式子两端取对数，得



$$\ln K' = \ln B - Q/2RT$$

把 $\ln K'$ 与 $1/T$ 的数据也列于上表，作图，如下图所示。对数据进行线性回归，得斜率为 -4010，相关系数为 0.988。由上式可知，斜率等于 $-Q/2R$ ，故晶界移动激活能 Q 为

$$Q = 2R \times 4010 = 2 \times 8.314 \times 4010 \text{ J/mol} = 66678 \text{ J/mol}$$

