考研数学重要定理、性质及公式证明总结

1. 证明一元函数可微、可导及连续的关系 ：

⑴ 函数$y=f(x)$在点x_0处可微的充分必要条件是函数 $y=f(x)$在点x_0处可导，且当函数$y=f(x)$在点x_0处可微时，有$dy=f'(x_0)\Delta x=f'(x_0)dx$；

⑵ 如果函数$y=f(x)$在点x_0处可导，则函数函数$y=f(x)$在点x_0处必连续，反之不一定．

证明：（1）参看同济教材七版上册 111页；

（2）参看同济教材七版上册 82页．

2. 证明费马定理 ：

设函数$f(x)$在$x=x_0$处可导且取极值，则$f'(x_0)=0$.

证明：参看同济教材七版上册 125页．

3. 证明罗尔定理 ：

设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$f(a)=f(b)$，则至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=0$.

证明：参看同济教材七版上册 126页．

4. 证明柯西中值定理 ：

设$f(x)$、$g(x)$在$[a,b]$上连续，(a,b)内可导，且$g'(x)\neq 0$，则$\exists\xi\in(a,b)$，使得$\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

证明：参看同济教材七版上册 130页．

5. 证明洛必达法则 ：

设$f(x)$，$g(x)$在点x_0的某去心邻域内可导，且$g'(x)\neq 0$，又满足：

（1）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$，（2）极限$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在或为$\infty$；则$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

证明：参看同济教材七版上册 133页．

6. 证明函数单调性的充分判别法 ：

设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$f'(x)>0\ (<0)$，

则$f(x)$在$[a,b]$上单调增加（单调减少）．

证明：参看同济教材七版上册 144页．

7. 证明曲线凹凸性的充分判别法 ：

设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内二阶可导，且$f''(x)>0\ (<0)$，

则$f(x)$在$[a,b]$上的图形是凹的（凸的）．

证明：参看同济教材七版上册 148页．

8. 证明极值点的充分条件 ：

设$f(x)$在$x=x_0$处二阶可导，$f'(x_0)=0$，若$f''(x_0)>0\ (<0)$，则$x=x_0$是极小（大）值点．

证明：参看同济教材七版上册 155页．

9. 证明拐点的必要条件及充分条件：

（1）设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处二阶可导，且点 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $f(x)$ 的拐点，则 $f''(x_0)=0$；

（2）设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处三阶可导，$f''(x_0)=0$，若 $f'''(x_0)\neq 0$，则点 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $f(x)$ 的拐点．

证明：（1）设 $f''(x_0)\exists \Rightarrow f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域可导，因 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线的拐点

$\Rightarrow f(x)$ 在 $x=x_0$ 的两侧凹凸性相反 $\Rightarrow f'(x)$ 在 $x=x_0$ 的两侧单调性相反，又 $f'(x)$ 在 $x=x_0$ 连续

$\Rightarrow x=x_0$ 是 $f'(x)$ 的极值点，对 $f'(x)$ 使用费马定理，得 $f''(x_0)=0$.

（2）$f'''(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f''(x)}{x-x_0}>0$ 或 $<0 \Rightarrow f''(x)$ 在 $x=x_0$ 两侧异号

$\Rightarrow (x_0, f(x_0))$ 是曲线 $f(x)$ 的拐点．

10. 证明积分中值定理：

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.

证明：参看同济教材七版上册 242页例6.

11. 证明变限积分函数的连续性：

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则对 $\forall x_0\in[a,b]$，有 $F(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上连续．

证明：因 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，则可设 $|f(x)|\le M\,(x\in[a,b])$．

又 $\forall x, x+\Delta x\in[a,b]$，有 $|\Delta F|=|F(x+\Delta x)-F(x)|=\left|\int_{x_0}^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_{x_0}^{x} f(t)dt\right|=\left|\int_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt\right|$

$\le\left|\int_{x}^{x+\Delta x}|f(t)|dt\right|\le\left|\int_{x}^{x+\Delta x} Mdt\right|=M\Delta x$，因此，当 $x, x+\Delta x\in[a,b]$ 时，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta F=0$，即 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续．

12. 证明牛顿 — 莱布尼茨公式：

设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数，则 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

证明：参看同济教材七版上册 240页．

13. 证明二元函数可微的必要条件：

设 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微，则 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可导，且 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的全微分 $dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy$.

证明：参看同济教材七版下册 73页．

14. 证明二元函数可微的充分条件：

设 $z=f(x,y)$ 的两个偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x,y) 处都连续，则 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微．

证明：参看同济教材七版下册 74页．

15. 证明比值判别法（数一数三）:

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，设 $\rho = \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$，则 $\begin{cases} \rho<1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{收敛} \\ \rho>1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{发散} \\ \rho=1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{可能收敛也可能发散} \end{cases}$

证明：参看同济教材七版下册 262页.

16. 证明阿贝尔定理（数一数三）:

如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 当 $x = x_0\ (x_0 \neq 0)$ 时收敛，那么满足 $|x| < |x_0|$ 的一切 x 都使该幂级数绝对收敛；反之，如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 当 $x = x_0$ 时发散，那么满足 $|x| > |x_0|$ 的一切 x 都使该幂级数发散.

证明：参看同济教材七版下册 274页.

17. 证明格林公式（数一）:

设区域 D 由分段光滑的闭曲线 L 围成，函数 $P(x,y)$ 及 $Q(x,y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数，则 $\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$

证明：参看同济教材七版下册 205页.

18. 证明曲线积分与路径无关问题（数一）:

我们已知：设 $P(x,y), Q(x,y)$ 在区域 D 上连续，则曲线积分 $\int_L Pdx + Qdy$ 在 D 内与路径无关 $\Leftrightarrow$ 对区域 D 内 ? 分段光滑闭曲线 C，有 $\oint_C Pdx + Qdy = 0.$

证明：设区域 D 是一个单连通区域，函数 $P(x,y), Q(x,y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数，则曲线积分 $\int_L Pdx + Qdy$ 在 D 内与路径无关 $\Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}\ ((x,y) \in D).$

证明：参看同济教材七版下册 209页.

证明：设区域 D 是一个单连通区域，函数 $P(x,y), Q(x,y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数，则 $Pdx + Qdy$ 在 D 内是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分 $\Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}\ ((x,y) \in D).$

（这里的 $u(x,y)$ 也称为 $Pdx + Qdy$ 的一个原函数）

证明：参看同济教材七版下册 211页.