第 9 章　量子力学基础

习 题 解 答

1. 若电子的波长为$1\times10^{-10}\,\mathrm{m}$，计算该电子的动能（用 J 作单位）。

解：$\upsilon=\dfrac{h}{m\lambda}$

$$T=\frac{1}{2}m\upsilon^2=\frac{1}{2m}\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2\times9.109\times10^{-31}\,\mathrm{kg}}\left(\frac{6.626\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}}{1\times10^{-10}\,\mathrm{m}}\right)^2=2.41\times10^{-17}\,\mathrm{J}$$

2. 计算下述粒子的德布罗意波的波长。(1) 射出的子弹(质量为$0.01\,\mathrm{kg}$，速度为$1\times10^{3}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$)；(2) 空气中的尘埃(质量为$1\times10^{-10}\,\mathrm{kg}$，速度为$0.01\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$)；(3) 分子中的电子(动能为$1\times10^{-24}\,\mathrm{J}$)；(4) 经$1\times10^{4}\,\mathrm{V}$电场加速的显像管(真空)中的电子。

解：(1) $\lambda=\dfrac{h}{p}=\dfrac{h}{m\upsilon}=\dfrac{6.626\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}}{0.01\,\mathrm{kg}\times1\times10^{3}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}=6.6\times10^{-35}\,\mathrm{m}$

(2) $\lambda=\dfrac{h}{m\upsilon}=\dfrac{6.626\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}}{1\times10^{-10}\,\mathrm{kg}\times0.01\mathrm{m\cdot s^{-1}}}=6.6\times10^{-22}\,\mathrm{m}$

(3) $\lambda=\dfrac{h}{p}=\dfrac{h}{\sqrt{2mT}}=\dfrac{6.626\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}}{\sqrt{2\times9.109\times10^{-31}\,\mathrm{kg}\times1\times10^{-24}\,\mathrm{J}}}$

$=4.9\times10^{-7}\,\mathrm{m}$

(4) $\lambda=\dfrac{h}{\sqrt{2mT}}$

$$=\frac{6.626\times10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}}{\sqrt{2\times9.109\times10^{-31}\,\text{kg}\times1.602\times10^{-19}\,\text{C}\times1\times10^{4}\,\text{V}}}$$

$$=1.23\times10^{-11}\,\text{m}$$

3. 假定题 2.(1)、(2)和(3)中各粒子运动速度的不确定度$\Delta\upsilon_x$为各自速度的 10%，试问这些粒子的坐标能否被确定。

解：(1) $\Delta x=\dfrac{h}{m\cdot\Delta\upsilon_x}=\dfrac{6.626\times10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}}{0.01\,\text{kg}\times10\%\times1\times10^{3}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}=6.6\times10^{-34}\,\text{m}$

就子弹的大小（线度约为$1\times10^{-2}\,\text{m}$）而言，如此小的坐标不确定度完全可以忽略。所以子弹的坐标完全可以被确定。

(2) $\Delta x=\dfrac{h}{m\cdot\Delta\upsilon_x}=\dfrac{6.626\times10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}}{1\times10^{-10}\,\text{kg}\times10\%\times0.01\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}=6.6\times10^{-21}\,\text{m}$

尘埃的线度约为$1\times10^{-9}\,\text{m}$，如(1)理由，其坐标可被确定。

(3) $\Delta x=\dfrac{h}{m\cdot\Delta\upsilon_x}=\dfrac{h}{10\%\sqrt{2mT}}$

$$=\frac{6.626\times10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}}{10\%\times\sqrt{2\times9.109\times10^{-31}\,\text{kg}\times1\times10^{-24}\,\text{J}}}$$

$$=4.9\times10^{-6}\,\text{m}$$

分子中的电子运动范围只有$1\times10^{-10}\,\text{m}$，而其坐标不确定度大于此值，说明电子的坐标完全不确定。

4. 在$1\times10^{3}\,\text{V}$电场中加速的电子，能否用普通光学光栅(栅线间距为$10^{-6}\,\text{m}$)观察到电子的衍射现象？若用晶体作为光栅(晶面间距为$10^{-11}\,\text{m}$)，又如何？

解：$\lambda = \dfrac{h}{p} = \dfrac{h}{\sqrt{2mT}}$

$$= \frac{6.626\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}}{\sqrt{2\times9.109\times10^{-31}\,\mathrm{kg}\times1.602\times10^{-19}\,\mathrm{C}\times1\times10^{3}\,\mathrm{V}}}$$

$$= 3.9\times10^{-11}\,\mathrm{m}$$

该波长数量级与光学光栅的栅线间距数量级相差甚远，所以不能用普通光学光栅观察到这类电子的衍射现象。该波长与晶体中晶面间距数量级相同，晶体可作为它的天然光栅，所以此时能观察到电子的衍射现象。

5. 下列哪些算符为线性算符？x^2, $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2$, sin, $\sqrt{\ }$, log。试予以证明。

解：假设 u 和 υ 均为 x 的函数

$x^2(u+\upsilon) = x^2u + x^2\upsilon$　　∴ x^2 是线性算符

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u+\upsilon) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\upsilon$　　∴ $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 是线性算符

$\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(u+\upsilon) = \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}u + \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\upsilon$　　∴ $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ 是线性算符

$\sin(u+\upsilon) \neq \sin u + \sin\upsilon$　　∴sin 不是线性算符

$\sqrt{u+\upsilon} \neq \sqrt{u} + \sqrt{\upsilon}$　　∴ $\sqrt{\ }$ 不是线性算符

$\log(u+\upsilon) \neq \log u + \log\upsilon$　　∴log 不是线性算符

6. 下列哪些函数是算符 $\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2$ 的本征函数？若是，试求出本征值。e^x，$\sin x$，$2\cos x$，x^3，$\sin x + \cos x$。

解：若 $\hat{F}u(x) = \lambda u(x)$，则 $u(x)$ 是 $\hat{F}$ 的本征函数，λ 是 $\hat{F}$ 的本征值。

$\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x$　　∴ e^x 是本征函数，本征值为 1。

$\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\sin x = -\sin x$　　∴$\sin x$ 是本征函数，本征值为−1。

$\frac{d^2}{dx^2}2\cos x = -2\cos x$　　∴ $2\cos x$ 是本征函数，本征值为−1。

$\frac{d^2}{dx^2}x^3 = 6x$　　∴ x^3 不是本征函数。

$\frac{d^2}{dx^2}[\sin x + \cos x] = -[\sin x + \cos x]$　　∴ $\sin x + \cos x$ 是本征函数，本征值为−1。

7. 已知函数 $\psi = x\mathrm{e}^{-\alpha x^2}$ 为算符 $[\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2 - 4\alpha^2 x^2]$ 的本征函数，求本征值。

解： $\left[\frac{d^2}{dx^2} - 4\alpha^2 x^2\right]x\mathrm{e}^{-\alpha x^2} = \frac{d^2}{dx^2}\left(x\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\right) - 4\alpha^2 x^3 \mathrm{e}^{-\alpha x^2}$

$$= -2\alpha x\mathrm{e}^{-\alpha x^2} - 4\alpha x\mathrm{e}^{-\alpha x^2} + 4\alpha^2 x^3\mathrm{e}^{-\alpha x^2} - 4\alpha^2 x^3\mathrm{e}^{-\alpha x^2}$$

$$= -6\alpha x\mathrm{e}^{-\alpha x^2}$$

所以本征值为 -6α 。

8. 试求能使 $\mathrm{e}^{-\alpha x^2}$ 为算符 $[\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2 - Bx^2]$ 的本征函数的 α 值，并求本征值。

解： $\left[\frac{d^2}{dx^2} - Bx^2\right]\mathrm{e}^{-\alpha x^2} = 4\alpha^2 x^2\mathrm{e}^{-\alpha x^2} - 2\alpha\mathrm{e}^{-\alpha x^2} - Bx^2\mathrm{e}^{-\alpha x^2}$

$$= \left(4\alpha^2 x^2 - 2\alpha - Bx^2\right)\mathrm{e}^{-\alpha x^2}$$

若 $\mathrm{e}^{-\alpha x^2}$ 是算符的本征函数

则

$$4\alpha^2 x^2 - 2\alpha - Bx^2 = \text{常数}$$

即　$4\alpha^2 x^2 - Bx^2 = 0$

$$\alpha = \pm\sqrt{B}/2$$

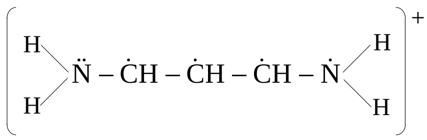
本征值为 $\mp\sqrt{B}$ 。

9. 长度为 l 的一维势箱中粒子运动的波函数为 $\psi = C\sin(n\pi x/l)$，试求常数 C 。

解：$$P = \int_0^l \psi^2 \mathrm{d}x = \int_0^l C^2 \sin^2 \frac{n\pi x}{l} \mathrm{d}x$$
$$= C^2 \int_0^l \frac{1-\cos(2n\pi x/l)}{2} \mathrm{d}x$$
$$= C^2 \left[\frac{1}{2}x - \frac{l}{4n\pi} \sin \frac{2n\pi x}{l} \right]_0^l$$
$$= C^2 \cdot \frac{l}{2} = 1$$

∴　$C = \sqrt{2/l}$

10. 在右面的分子离子中运动的 6 个 π 电子，可近似作为一维势箱中的粒子，若假定该分子离子中共轭链长为 0.8 nm。试求该分子离子由基态跃迁至第一激发态时(相当于电子从 $n=3$ 的轨道跃迁到 $n=4$ 的轨道)，吸收光的波长（实验值为 309 nm)。



解：$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E} = hc \frac{8ml^2}{(n'^2 - n^2)h^2}$$

分子中有 6 个 π 电子，基态是 $n_1^2\, n_2^2\, n_3^2$，第一激发态是 $n_1^2\, n_2^2\, n_3^1\, n_4^1$，所以 $n' = 4$， $n = 3$

$$\lambda = \frac{8ml^2c}{(n'^2 - n^2)h}$$
$$= \frac{8 \times 9.109 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg} \times (0.8 \times 10^{-9}\,\mathrm{m})^2 \times 2.998 \times 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}}{(4^2 - 3^2) \times 6.626 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}}$$
$$= 3.01 \times 10^{-7}\,\mathrm{m} = 301\,\mathrm{nm}$$

11. 计算氢原子基态到第一激发态跃迁时，吸收光的谱线的波数和

波长(折合质量 $\mu = 9.104\times10^{-31}\mathrm{kg}$，实验值 $\tilde{\nu} = 82259.56\ \mathrm{cm^{-1}}$，$\lambda = 121.5664\ \mathrm{nm}$)。

解：$\tilde{\nu} = \dfrac{\Delta E}{hc} = -\dfrac{\mu e^4}{hc\cdot 8\varepsilon_0^2 h^2}\left(\dfrac{1}{n_2^2 - n_1^2}\right)$

$$= -\frac{9.104\times10^{-31}\,\mathrm{kg}\times\left(1.602\times10^{-19}\,\mathrm{C}\right)^4}{\left(6.626\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}\right)^3\times2.998\times10^{8}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$$

$$\times\frac{1}{8\times\left(8.854\times10^{-12}\,\mathrm{C^2\cdot N^{-1}\cdot m^{-2}}\right)^2}\times\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{1^2}\right)$$

$$= 8.172\times10^{6}\,\mathrm{m^{-1}} = 8.172\times10^{4}\,\mathrm{cm^{-1}}$$

$$\lambda = \frac{1}{\tilde{\nu}} = 1.224\times10^{-7}\,\mathrm{m} = 122.4\ \mathrm{nm}$$

12. 计算氢原子和氦离子在 1s 态时电子离核的平均距离。利用 Γ－函数积分公式 $\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = (n-1)!$ 。

解：$\psi_{1\mathrm{s}} = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\dfrac{Z}{a_0}\right)^{3/2}\mathrm{e}^{-Zr/a_0}$

$$\langle r\rangle = \int\psi_{1\mathrm{s}}^{*} r\psi_{1\mathrm{s}}\,\mathrm{d}\tau = \int\psi_{1\mathrm{s}}^{2} r\,\mathrm{d}\tau = \iiint\frac{Z^3}{\pi a_0^3}\mathrm{e}^{-2Zr/a_0}\,r\left(r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\right)$$

$$= \frac{Z^3}{\pi a_0^3}\int_0^\infty r^3\mathrm{e}^{-2Zr/a_0}\mathrm{d}r\int_0^\pi\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi$$

$$= \left(\frac{Z^3}{\pi a_0^3}\int_0^\infty r^3\mathrm{e}^{-2Zr/a_0}\mathrm{d}r\right)\left[-(-1-1)\right](2\pi-0)$$

$$= \frac{4Z^3}{a_0^3}\int_0^\infty r^3\mathrm{e}^{-2Zr/a_0}\mathrm{d}r = \frac{Z^3}{a_0^3}\left(\frac{a_0}{2Z}\right)^4\cdot(4-1)! = \frac{3}{2}\cdot\frac{a_0}{Z}$$

氢原子　$Z=1$，$\langle r\rangle = \dfrac{3}{2}a_0$

氦离子　$Z=2$，$\langle r\rangle = \dfrac{3}{4}a_0$

13. 氢原子的基态波函数为$\psi_{1s}=(1/\sqrt{\pi a_0^3})e^{-r/a_0}$，求 x、y、z 均为 $a_0 \to 1.01a_0$ 的小体积内电子出现的概率（该体积内ψ可近似当作常数）。

解：$P=\int \psi_{1s}^2 d\tau=\psi_{1s}^2\int d\tau=\psi_{1s}^2\iiint_{a_0}^{1.01a_0} dxdydz=\psi_{1s}^2\left(0.01a_0\right)^3$

其中　$\psi_{1s}^2=\dfrac{1}{\pi a_0^3}e^{-2r/a_0}=\dfrac{1}{\pi a_0^3}\cdot e^{-2\sqrt{x^2+y^2+z^2}/a_0}=\dfrac{1}{\pi a_0^3}\cdot e^{-2\sqrt{3}}$

所以　$P=\dfrac{1}{\pi a_0^3}\cdot e^{-2\sqrt{3}}\cdot\left(0.01a_0\right)^3=\dfrac{1}{\pi}\cdot e^{-2\sqrt{3}}\cdot\left(0.01\right)^3=10.0\times10^{-9}$

14. 已知氢原子$2p_z$轨道波函数为

$$\psi_{2p_z}=\left(4\sqrt{2\pi a_0^3}\right)^{-1}\left(r/a_0\right)\exp\left(-r/2a_0\right)\cos\theta$$

(1) 求该轨道能级E；

(2) 求轨道角动量的绝对值$|M|$；

(3) 求该轨道角动量$\boldsymbol{M}$与 z 轴的夹角；

(4) 求该轨道节面的形状和位置。

解：(1) $E=-13.60\text{eV}/n^2=-13.60\,\text{eV}/2^2=-3.40\,\text{eV}$

(2) $M=\sqrt{l\,(l+1)}\,\hbar=\sqrt{2}\,\hbar$

(3) $M_z=m\hbar=0$，说明$\boldsymbol{M}$垂直于 z 轴，夹角为 90° 。

(4) 节面$\psi=0$，$\theta=90°$，即与 z 轴垂直的平面，由于$r=0$，说明该节面过原点，所以节面为 xy 平面。

15. 氢原子 1s 态本征函数$\psi(r)=Ne^{-\alpha r}$，其中N和α为常数。(1) 求归一化常数N和常数α（利用 12 题中的积分公式）；(2) 求该轨道能量本征值。

解：(1) $\int \psi^2 \mathrm{d}\tau = 1$

$$4\pi N^2 \int_0^\infty r^2 \mathrm{e}^{-2\alpha r}\mathrm{d}r = 4\pi N^2 \cdot \frac{2!}{(2\alpha)^3} = 4\pi N^2 \frac{2}{(2\alpha)^3} = \frac{\pi N^2}{\alpha^3} = 1$$

∴ $N = \sqrt{\dfrac{\alpha^3}{\pi}}$

$$\hat{H}\psi = 常数\psi$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)\psi - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\psi$$
$$= -\frac{\hbar^2}{2\mu}N\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\mathrm{e}^{-\alpha r}\right)(-\alpha) - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\psi$$
$$= \left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\alpha^2 - \frac{2\alpha}{r}\right) - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right]\psi$$

∴ $\dfrac{\alpha\hbar^2}{\mu r} - \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = 0$

$$\alpha = \frac{\pi e^2\mu}{\varepsilon_0 h^2} = \frac{1}{a_0}$$

$$N = \sqrt{\frac{1}{\pi a_0^3}}$$

(2) 本征值 $= -\dfrac{\alpha^2\hbar^2}{2\mu}$

$$= -\frac{h^2}{8\pi^2\mu a_0^2}$$

$$= -\frac{(6.626\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s})^2}{8\pi^2\times9.104\times10^{-31}\,\mathrm{kg}\times(52.92\times10^{-12}\,\mathrm{m})^2}$$

$$= -2.18\times10^{-18}\,\mathrm{J} = -13.6\,\mathrm{eV}$$

16. 已知某单电子原子轨道波函数 $\psi = Nf(r)(3\cos^2\theta - 1)$。求该轨道角动量本征值 $|M|$，并指出轨道角量子数之值。

解： $\hat{M}^2\psi = M^2\psi$

$$
\begin{aligned}
&-\hbar^2\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)Nf(r)(3\cos^2\theta - 1) \\
&\quad = -\hbar^2 Nf(r)\cdot 6\cdot\frac{1}{\sin\theta}\left(-\sin^3\theta + 2\sin\theta\cos^2\theta\right) \\
&\quad = 6\hbar^2 Nf(r)(3\cos^2\theta - 1) \\
&\quad = 6\hbar^2\psi
\end{aligned}
$$

∴　　$M = \sqrt{6}\hbar$，　角量子数　$l = 2$

17. 试求氢原子 ψ_{2p_z} 轨道电子云径向分布极大值离核的距离。已知该轨道的径向波函数为 $R = (2\sqrt{6})^{-1}(1/a_0)^{3/2}(r/a_0)\mathrm{e}^{-r/2a_0}$。

解： $D = r^2R^2 = \dfrac{1}{24}\left(\dfrac{1}{a_0}\right)^5 r^4\mathrm{e}^{-r/a_0}$

$$\frac{\partial}{\partial r}D = \frac{1}{24}\left(\frac{1}{a_0}\right)^5\left[4r^3 - \frac{1}{a_0}r^4\right]\mathrm{e}^{-r/a_0} = 0$$

∴　$r_{\max} = 4a_0$

18. 试写出硼离子 B^{2+} 薛定谔方程的表达式（不必考虑电子自旋），并说明哈密顿算符中各项的物理意义。

解： 硼离子 B^{2+} 的核电荷数为 5；核外电子数为 3。根据教材中的式(9-193)，其薛定谔方程可表达为

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\nabla_1^2+\nabla_2^2+\nabla_3^2\right)-\frac{5e^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{12}}+\frac{1}{r_{23}}+\frac{1}{r_{31}}\right)\right]\psi=E\psi$$

哈密顿算符中第一项$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\nabla_1^2+\nabla_2^2+\nabla_3^2\right)$为 3 个电子的动能项；

第二项$-\frac{5e^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)$为 3 个电子与核之间的吸引能项；

第三项$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{12}}+\frac{1}{r_{23}}+\frac{1}{r_{31}}\right)$为 3 个电子间的排斥能项。

19. 试推出钠原子和氟原子基态的原子光谱项和光谱支项；推出碳原子激发态（$1s^22s^22p^13p^1$）的原子光谱项和光谱支项。

解：钠原子基态 $Na(1s^22s^22p^63s^1)$，内层轨道电子全充满，对原子的量子数无贡献，只需考虑未充满的外层轨道中的电子，即$(3s^1)$：

$$L=0，\ S=1/2，\ J=1/2$$

原子光谱项为^2S；光谱支项为$^2S_{1/2}$。

氟原子基态 $F(2p^5)$，由于 3 个 p 轨道中有 2 个充满电子，所以其光谱项和支项与(p^1)组态是相同的：

$$L=1，\ S=1/2，\ J=3/2，\ J=1/2$$

原子光谱项为^2P；光谱支项为$^2P_{3/2}$和$^2P_{1/2}$。

碳原子激发态 $C(1s^22s^22p^13p^1)$：

$$L = 2、1、0，\ S = 0、1$$

原子光谱项	光谱支项
^3D（$J = 3、2、1$）	$^3D_3$，$^3D_2$，$^3D_1$
^1D（$J = 2$）	$^1D_2$
^3P（$J = 2、1、0$）	$^3P_2$，$^3P_1$，$^3P_0$
^1P（$J = 1$）	$^1P_1$
^3S（$J = 1$）	$^3S_1$
^1S（$J = 0$）	$^1S_0$

20. 写出铝原子基态（$3p^1$）和激发态（$3d^1$）的光谱项和光谱支项。

解：铝原子基态 Al（$3p^1$）：

$$L = 1，\ S = 1/2，\ J = 3/2，\ J = 1/2$$

原子光谱项 ^2P；光谱支项 $^2P_{3/2}$，$^2P_{1/2}$。

铝原子激发态 Al（$3d^1$）：

$$L = 2，\ S = 1/2，\ J = 5/2，\ J = 3/2$$

原子光谱项 ^2D；光谱支项 $^2D_{5/2}$，$^2D_{3/2}$。