思考和练习

1 如何描述受力物体内一点的应力状态？为什么？

2 已知受力物体内一点的应力状态分别为

$$\sigma_{ij}=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&0\end{bmatrix}(MPa)\quad;\quad\sigma_{ij}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}(MPa)$$

（1）求外法线方向与三个坐标轴等倾斜截面上的应力分量；

（2）求该点的应力张量不变量；

（3）求该点的主应力，并画出主应力简图；

（4）求主偏应力，并画出主偏应力简图；

（5）求最大切应力

（6）求等效应力。

3 已知受力物体内一点的应力状态分别为

$$\sigma_{ij}=\begin{bmatrix}10&0&15\\0&20&-15\\15&-15&0\end{bmatrix}(MPa)\quad;\quad\sigma_{ij}=\begin{bmatrix}50&30&-80\\30&0&-30\\-80&-30&110\end{bmatrix}(MPa)$$

试将其分解为应力偏张量及应力球张量，并计算应力偏张量的第二不变量。

4 为什么说应力张量的第一、第二和第三不变量I_1、I_2、I_3与坐标的选择无关？

5 等效应力具有哪些特点？

6 已知受力物体内的应力场为：$\sigma_x=-6xy^2+c_1x^3$，$\sigma_y=-\frac{3}{2}c_2xy^2$，$\tau_{xy}=-c_2y^3-c_3x^2y$，

$\sigma_z=\tau_{yz}=\tau_{zx}=0$，试求系数$c_1$、$c_2$、$c_3$。

7 真应变与工程应变有哪些特点？

8 主应变简图有几种形式，为什么？

9 证明体积不变条件可表示为$\dot{\varepsilon}_x+\dot{\varepsilon}_y+\dot{\varepsilon}_z=0$。

10 判断下列应变场能否存在：

（1）$\varepsilon_x=xy^2$，$\varepsilon_y=x^2y$，$\varepsilon_z=xy$，$\gamma_{xy}=0$，$\gamma_{yz}=\frac{1}{2}\left(z^2+y\right)$，$\gamma_{zx}=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$；

（2）$\varepsilon_x=c\left(x^2+y^2\right)$，$\varepsilon_y=cx^2$，$\gamma_{xy}=2xy$，$\varepsilon_z=\gamma_{yz}=\gamma_{zx}=0$。

11 为什么说应变增量更能准确地反映受力物体的变形情况？

12 试述塑性加工时工具的工作速度、位移速度以及应变速率的区别与联系。

参考答案

1 受力物体内一点的应力状态，用过一点相互垂直的三个平面上的九个应力分量来描述。因为过该点其它截面的应力均可以用这九个应力分量来求出。

2

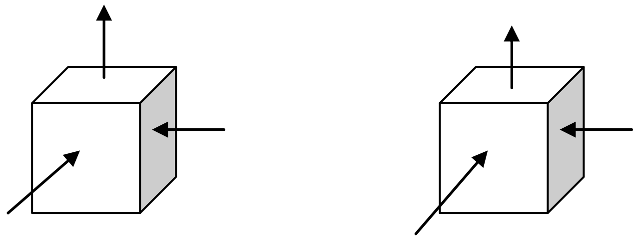
（1）$\sigma_N=2(MPa)$，$\tau_N=\sqrt{2}(MPa)$；$\sigma_N=3(MPa)$，$\tau_N=0$

（2）$I_1=4,\quad I_2=-3,\quad I_3=0$；$I_1=3,\quad I_2=0,\quad I_3=0$

（3）$\sigma_1 = 3(MPa)$， $\sigma_2 = 1(MPa)$， $\sigma_3 = 0$；$\sigma_1 = 3(MPa)$， $\sigma_2 = 0$， $\sigma_3 = 0$

（4）$\sigma_1' = \frac{5}{3}(MPa)$， $\sigma_2' = -\frac{1}{3}(MPa)$， $\sigma_3' = -\frac{4}{3}(MPa)$

$\sigma_1' = 2(MPa)$， $\sigma_2' = -1(MPa)$， $\sigma_3' = -1(MPa)$



（5）$\frac{3}{2}(MPa)$； $\frac{3}{2}(MPa)$

（6）$\sqrt{7}(MPa)$； $3(MPa)$

3

$$\sigma_{ij}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 15 \\ 0 & 10 & -15 \\ 15 & -15 & -10 \end{bmatrix}; \quad \sigma_m \delta_{ij} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$I_2' = 550$

$$\sigma_{ij}' = \begin{bmatrix} -10/3 & 30 & -80 \\ 30 & -160/3 & -30 \\ -80 & -30 & 170/3 \end{bmatrix}; \quad \sigma_m \delta_{ij} = \begin{bmatrix} 160/3 & 0 & 0 \\ 0 & 160/3 & 0 \\ 0 & 0 & 160/3 \end{bmatrix}$$

$I_2' = 33700/3$

4 由于主应力数值与坐标的选择无关，，因此特征方程中的系数与坐标的选择无关。

5 （1）等效应力是一个不变量；（2）等效应力在数值上等于单向均匀拉伸（或压缩）时的拉伸（或压缩）应力，即当$\sigma_2 = \sigma_3 = 0$时，$\bar{\sigma} = \sigma_1$；（3）等效应力不是作用在某特定平面上的应力，因此，不能在某一截面上表示出来；（4）等效应力可以理解为一点应力状态中应力偏张量的综合作用。

6 $c_1 = 1$、$c_2 = -2$、$c_3 = 3$

7 （1）工程应变不能反映变形的实际情况；（2）对数应变具有可加性，而工程应变不具有

可加性；（3）对数应变为可比应变，工程应变为不可比应变；（4）工程应变计算简单。

8 主应变简图有三种形式，是由于体积不变条件决定的。

9 由应变增量体积不变条件表达式除以时间增量。

10 （1）不存在；（2）当 c=1 时，存在。

11 变形过程终了时的全量应变不一定取决于当时的应力状态。使得全量应变在塑性变形研究中的作用受到了很大的限制。应变增量与瞬时的应力状态相对应了。

12 $\dot{\varepsilon}=\dfrac{\dot{u}_0}{l}$

练习与思考题

1 试述屈服准则的几何意义。

2 试述米塞斯屈服准则与屈雷斯加屈服准则的特点。

3 何谓π 平面，为什么说在π 平面上有六个对称轴？

4 已知应力张量

$$\sigma_{ij}=\begin{bmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C \end{bmatrix}$$

（C 为正的常数），试问当恰好发生屈服时，按米塞斯屈服准则和屈雷斯加屈服准则，$C=?$。

5 在棱边为 1×1×1mm 立方体的一个面上施加$10\sqrt{7}$ N 的压缩载荷，正好使该立方体发生屈服，如果在其它两个面上分别作用有 10N 和 20N 的压缩载荷时，则该平面上需要作用多大载荷，才能使该立方体发生屈服？假设接触面上的摩擦可以忽略。

6 已知具有半球形端部的薄壁圆筒（如图 1 所示），平均半径为 r，壁厚为 t，受内压力 p 作用，试求此时薄壁圆筒的屈服条件（按米塞斯屈服准则和屈雷斯加屈服准则）。

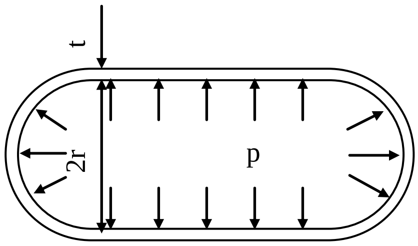


图 1 具有半球形端部的薄壁圆筒

7 在 x、y、z 坐标系下，试推导出$\sigma_z=\sigma_y$、$\tau_{zx}=\tau_{yz}=0$条件下的米塞斯（Mises）屈服准则的表达式。

8 为什么说描述塑性范围内的应力-应变关系比弹性范围内的要复杂得多？

9 试述全量理论与增量理论的区别。

10 应力应变顺序对应规律包含哪些基本内容？在应用上有何意义？

11 等效应力-等效应变单一曲线假设有什么意义？

12 等效应力-等效应变曲线的简化模型有哪些？分别写出其数学表达式。

13 已知$\sigma_1=\dfrac{\sigma_s}{2}$，$\sigma_2=-\dfrac{\sigma_s}{2}$，$\sigma_3=0$，$d\varepsilon_1^p=a$（$a$ 为常数），试求相应的应变增量$d\varepsilon_2^p$、

$d\varepsilon_3^p$。

14 已知下列三种应力状态三个主应力为：1）$\sigma_1=\sigma$，$\sigma_2=0$，$\sigma_3=-\sigma/2$；2）$\sigma_1=2\sigma$，$\sigma_2=\sigma$，$\sigma_3=0$；3）$\sigma_1=60$，$\sigma_2=30$，$\sigma_3=0$。求应变增量的比值。

参考答案

1 在主应力空间中，屈雷斯加屈服准则为一与三个坐标轴等倾斜的六棱柱面；米塞斯屈服准在主应力空间为一与三个坐标轴等倾斜的圆柱面。

2.（a）屈雷斯加屈服准则：$\sigma_s = 2k$；米塞斯屈服准则：$\sigma_s = \sqrt{3}k$。

（b）与坐标的选择无关

（c）在屈雷斯加屈服准则中，没有考虑中间主应力对材料屈服的影响。而米塞斯屈服准则由于考虑了中间主应力对屈服的影响。

（d） 静水压力对两种屈服准则没有影响。

（e） 在主应力空间中，屈雷斯加屈服准则为一与三个坐标轴等倾斜的六棱柱面在π平面上为一正六边形，称为屈雷斯加六边形。米塞斯屈服准在主应力空间为一与三个坐标轴等倾斜的圆柱面，在π平面上为一个圆，称为米塞斯圆。

（f）应用上的限制

在主应力顺序已知时，屈雷斯加屈服准则是主应力分量的线性函数，使用起来非常方便，在工程设计中常常被采用。而米塞斯屈服准则显得复杂。但是，当主应力顺序未知时，屈雷斯加屈服准则为六次方程，显然比米塞斯屈服准则复杂得多。

3 过原点且与等倾斜轴垂直的平面，称为π平面。由于假设材料的屈服与坐标的选择无关，因此，可以得到三个对称轴，由材料的拉压性能相同，可以得到另外三个对称轴。

4 按米塞斯屈服准则：$C = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_s$；屈雷斯加屈服准则：$C = \frac{1}{2}\sigma_s$。

5 40N，或－10N。

6 按米塞斯屈服准则：$\frac{\sqrt{3}pr}{2t} = \sigma_s$；按屈雷斯加屈服准则：$\frac{pr}{t} = \sigma_s$。

7 $\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_s^2$

8 由弹性应力应变关系可知，应力应变的关系是线性的，并可用虎克定律来描述，应变可由应力唯一确定。但是，在塑性变形范围内，应力与应变的关系是非线性的，应变不能由应力唯一确定，而是与变形历史有关。这是由于随着变形的发生与发展，材料原有的组织和性能也随之发生变化，而且塑性变形是永久变形，每一微小阶段的塑性变形所导致的组织和性能变化都要保留下来，并影响下一阶段的变形过程，因此，各个微小变形阶段的应力应变关系都是不同的。

9 增量理论：应力与应变增量之间关系。全量理论：应力与全量应变之间关系的。二者的区别在于：表达式、假设条件不同。

10 应力应变顺序对应规律包括应力应变顺序对应关系和应力应变的中间关系。应力应变顺序对应规律，既可以根据应变的顺序确定应力的顺序，也可以根据应力顺序确定应变的顺序。

11 根据单一曲线假设，就可以采用最简单的实验方法来确定材料的等效应力与等效应变曲线。

12 理想弹塑性材料模型、理想刚塑性材料模型、幂指数硬化材料模型、刚塑性非线性硬化材料模型、弹塑性线性硬化材料模型、刚塑性线性硬化材料模型。

13 1：(-1)：0

14 （1）1：(-1)：0；（2）1： 0：(-1)；（3）1： 0：(-1)。

练习与思考体

1 塑性加工问题的精确解需要满足哪些条件？

2 对于平面应变问题，试证塑性区内每点的应力状态可用平均应力σ_m和最大切应力 k 来表示。即：$\sigma_1=\sigma_m+k$；$\sigma_2=\sigma_m$；$\sigma_3=\sigma_m-k$。

3 试述平面问题、轴对称问题的变形特点。

4 对于塑性加工而言，假设库仑摩擦定律中的摩擦系数为常数，问摩擦系数的最大值为多少？为什么？

5 试述主应力法求解塑性加工问题的特点。如图 2 所示，已知：1）侧向均布载荷$q=\frac{1}{3}\sigma_s$；2）接触面上的摩擦切应力$\tau_f=\frac{1}{2}\sigma_s$。试求如图 2 所示的圆柱体压缩时的单位压力 p 。

$$p=\frac{4}{3}\sigma_S+\frac{\sigma_S}{h}\left(R-r\right)$$

6 判断α 、β 滑移线的规则是什么？

7 汉盖应力方程有何意义？由此可以得到滑移线场的哪些特性？

8 滑移线场有哪些典型的应力边界条件？

9 试述盖林格尔速度方程的用途。

10 何谓滑移线场的速度矢端图，滑移线与速度矢端曲线之间有何关系？

11 为什么说沿着同一条滑移线，速度不连续量的大小保持不变，其方向随滑移线方向而改变？

12 已知某滑移线场如图 3 所示，点 C 的等静压力为 900MPa，剪切屈服应力 k =600MPa，求点 B、D 的应力状态。

13 已知顶角为 2γ 的刚性楔体压入半无限空间时的滑移线场如图 4 所示，求当楔体压入深度为 h 时所需要的总的变形力 P。设接触摩擦切应力为零。

14 试述上限法求解塑性加工问题的基本要点，如何使所得到的上限解逼近于真实的速度场？

15 无摩擦的平面应变挤压过程如图 5 所示，求挤压压力 p/2k 的上限解，画出 p/2k—θ 的关系曲线，求出 p/2k 的极小值。

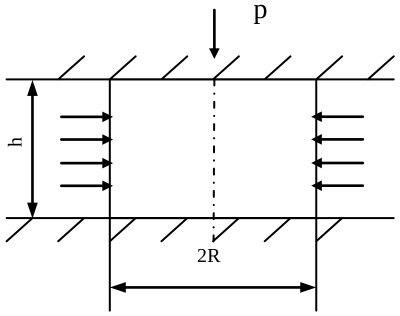


图 2 圆柱体镦粗问题

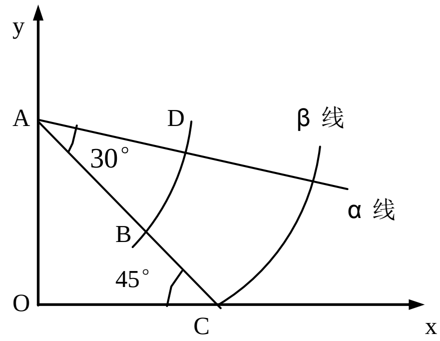


图 3 已知的滑移线场

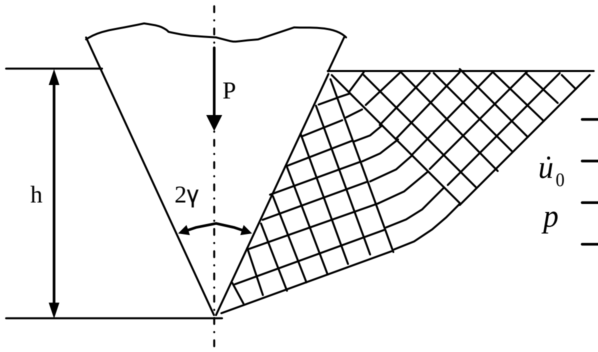


图 4 刚性楔体压入半无限空间时的滑移线场

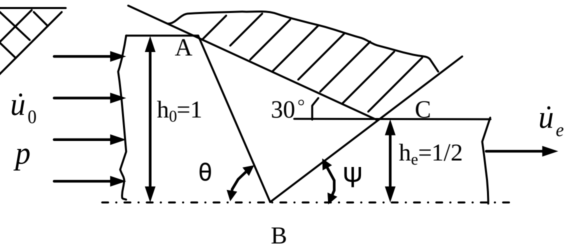


图 5 无摩擦的平面应变挤压

16 无摩擦的平面应变拉拔过程如图 6 所示，三角形中∠ABC=∠CDE=60°，AB 和 CD 与水平轴垂直，求挤压压力 p/2k 的上限解。

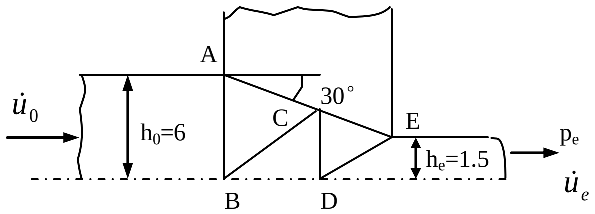


图 6 无摩擦的平面应变拉拔过程

参考答案

1 对于弹塑性变形物体：需满足 16 个方程；对于刚塑性变形物体：需满足 17 个方程；

2 当主应力顺序 $\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \sigma_3$ 已知时，由

$$k = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)，\quad \sigma_m = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_m + k \\ \sigma_2 &= \sigma_m \\ \sigma_3 &= \sigma_m - k \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_m + k \\ \sigma_2 &= \sigma_m \\ \sigma_3 &= \sigma_m - k\end{aligned}\right\} \tag{8-5}$$

3

（1）平面应变问题特点：当变形体内各点的位移分量与某一坐标轴无关，并且沿该坐标轴方向上的位移分量为零时，则将这一变形过程称为平面应变问题。假设变形体内各点沿 z 坐标轴方向上的位移分量为零。

（2）平面应力问题特点：当变形体内所有应力分量与某一坐标轴无关，在与该坐标轴垂直平面上的所有应力分量为零，

（3）轴对称问题特点：如果变形体的几何形状、物理性质以及外载荷都对称于某一坐标轴，通过该坐标轴的任一平面都是对称面，则变形体内的应力、应变、位移也对称于此坐标轴。

4 按米塞斯屈服准则：$\mu_{\max} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$；屈雷斯加屈服准则：$\mu_{\max} = 0.5$。

5 $p = \dfrac{4}{3}\sigma_S + \dfrac{\sigma_S}{h}\left(R - r\right)$

6 若 α 线与 β 线形成一右手坐标系，则最大主应力（按代数值）应位于此坐标系的第一和第三象限。

7 汉盖应力方程给出了同一条滑移线上平均应力 σ_m 与转角 φ 之间的关系。若滑移线场已确定，则转角 φ 也就被确定了，已知某一条滑移线上一点的平均应力 σ_m，则沿该条滑移线上任意一点的平均应力均可求出。由于两族滑移线是相互正交的，因此，整个塑性区内各点的平均应力均可以求出，确定出整个塑性区内各点的应力状态。

8 自由表面、无摩擦的接触表面、摩擦切应力达到最大值 k 的接触表面、当 $0 < \tau_f < k$ 时的接触表面。

9 已知滑移线场，可以根据盖林格尔速度方程求出速度场。

10 滑移线场的速度矢端图：滑移线上各点的速度矢端曲线。移线与速度平面上的速度矢端曲线在相应点上彼此正交。

11 由于速度间断线就是滑移线，因此，在速度间断线 L 两侧都必须满足盖林格尔速度方程式，设速度间断线为α线，则有

$$d\dot{u}_{1t} - \dot{u}_{1n} d\varphi = 0$$
$$d\dot{u}_{2t} - \dot{u}_{2n} d\varphi = 0$$

由于法向速度是连续的，即 $\dot{u}_{1n} = \dot{u}_{2n}$，因此，将上两式相减，可得 $d\dot{u}_{1t} = d\dot{u}_{2t}$，即

$$\Delta\dot{u}_t = \dot{u}_{2t} - \dot{u}_{1t} = 常数$$

即沿同一条滑移线的速度间断值为常数。

12 已知某滑移线场如图 3 所示，点 C 的等静压力为 900MPa，剪切屈服应力 k =600MPa，求点 B、D 的应力状态。

$\sigma_{xB} = 1500 \quad (MPa)$ $\qquad$ $\sigma_{xD} = 1200 - 200\pi \quad (MPa)$

$\sigma_{yB} = 300 \quad (MPa)$ $\qquad$ $\sigma_{yD} = 600 - 200\pi \quad (MPa)$

$\tau_{xyB} = 0$ $\qquad$ $\tau_{xyD} = k\cos 2\varphi_D = 300\sqrt{3} \quad (MPa)$

13 单位长度上的变形力 $P = 4kh(1+\gamma)tg\gamma$

14 试述上限法求解塑性加工问题的基本要点，如何使所得到的上限解逼近于真实的速度场？

采用上限法求解塑性加工问题，通常包括以下几个步骤，即：（a）根据材料流动规律设定一个运动许可的速度场，该速度场可以包含一个或多个待定参数，但需要满足速度边界条件和体积不变条件；（b）根据所设定的速度场，由几何方程确定应变速率场和等效应变速率，并利用式(8-130)确定各上限功率；（c）求总功率的极小值。使总功率对于设定速度场中各待定参数进行最小化处理，以便从速度场中所包含的无限多个上限解中得到一个最小的上限解，再由这个最小功率求出相应的工作载荷。但是，应该注意到，由此所得到的最小上限解并不是精确解，因为所设定的运动许可速度场往往不能包含真实的速度场。

为了设计出尽可能接近于真实情况的运动许可的速度场，使所得到的上限解逼近于真实解，需要根据相关的基础理论，结合实际经验对材料流动规律进行直观的分析和逻辑判断。

15 $\dfrac{p}{2k} = \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{1}{\sin\theta\sin(\theta-30^\circ)} + \dfrac{1}{\sin\psi\sin(30^\circ+\psi)}\right]$。

16 p/2k＝1.732。

练习与思考题

1 试述粉末材料的变形特点。

2 粉末成形大致可以分为哪几个阶段？

3 粉末颗粒之间的联结力通常有哪些类型？

4 粉体制品烧结的目的是什么？

5 为什么说粉体材料具有低屈服强度和低延伸率的特点？

6 粉末材料的屈服准则与致密材料的屈服准则有什么不同？为什么？

7 粉末材料塑性变形时的应力应变关系有哪些特点？

8 何谓复合材料？复合材料有哪些特点？

9 组成复合材料的基体与增强相的作用是什么？

10 复合材料的界面有哪些功能？

11 影响复合材料性能的因素有哪些？

12 控制界面反应的方法有哪些？

参考答案

1 粉体材料的变形是由基体变形和孔隙的变形所构成的，即变形与致密是同时进行的，力总是通过基体来传递的。基体的变形是主动的，遵循致密体变形的一切规律。基体材料的应力、应变状态除与外加载荷有关外，还与孔洞的形状、大小以及方位有关。孔洞的变形由孔洞的形状变化和体积变化两部分组成，其变形是被动的。即孔洞变形是通过基体的塑性变形产生的，也就是说，基体与孔洞的变形是相互关联的。

由于粉体材料在成形过程中同时产生变形和致密，遵循着质量不变条件，其体积是不断减少的，塑性变形时消耗了部分能量来减少粉末材料的孔隙，所以，粉体材料与致密体相比具有较小的横向流动

2 (a) 第一阶段：粉末颗粒的重新排列阶段；(b) 第二阶段：弹性变形与塑性变形阶段；(c) 第三阶段：粉末颗粒断裂阶段。
3 粉体预成形坯之所以有一定的强度，是因为粉末颗粒之间的联结力作用的结果。粉末颗粒之间的联结力大致可分为两种：a) 粉末颗粒之间的机械啮合力；b) 粉末颗粒表面原子之间的引力。
4 烧结的目的是为了合金化或成分更均匀，提高预成形坯的密度和力学性能。烧结还可以进一步降低制品的含氧量。
5 粉末材料中的孔隙存在以及颗粒之间粘结力低，因此屈服强度低。粉体材料中的孔隙对拉应力是非常敏感的，因此，粉体材料在拉应力状态下，具有低塑性、低韧性的特点。
6 二者的最大区别在于等静压力影响粉末材料的屈服。对于粉末材料变形与致密同时进行。
7 粉末材料塑性变形时的应力应变关系有哪些特点？

由此可知：a) 对于稳定的材料($\sigma_i=\sigma_s$已知)，当三个主应变$d\varepsilon_1$、$d\varepsilon_2$、$d\varepsilon_3$已知时，由式(9-35)可以求出主应力值，这一点与致密材料是不一样的，对于致密材料而言，当$d\varepsilon_1$、$d\varepsilon_2$、$d\varepsilon_3$已知时，只能求得应力偏量分量或正应力之差：$\sigma_1-\sigma_2$、$\sigma_2-\sigma_3$、$\sigma_3-\sigma_1$、，一般不能求出σ_1、σ_2、σ_3，因为平均应力仍是未知数；b) 若两正应力相等，则相应的应变增量也相同，反之亦然；c) 若某一方向的应变增量例如$d\varepsilon_2$为零，则相应的应力$\sigma_2=\nu(\sigma_1+\sigma_3)$。可见由于相对密度的影响，$\sigma_2\neq\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_3)$，这一点与致密材料也是不同的。

8 复合材料是一种多相材料，凡是由两种或两种以上的物理和化学本质不同的材料，以微观或宏观的形式组合而成的材料，均可称为复合材料。复合材料一般是由强度和模量都较高，但脆性大的增强剂与韧性好但强度和模量均较低的基体组成。因此，复合材料具有比强度、比模量、抗疲劳、耐高温性能优良、减振性能好，并且可按照构件的结构和受力要求，给出预定的、分布合理的配套性能，进行最佳的结构设计等一系列的特点。
9 在复合材料中，通常有一相为连续相，称为基体，主要起粘结或连接作用，例如金属、聚合物、陶瓷；另一相为分散相，称为增强相，增强相可以提高材料的强度、刚度、抗冲击能力以及耐热性等，常用的增强材料有连续长纤维、短纤维、晶须以及颗粒等。复合材料的组分材料虽然保持着其相对独立性，但复合材料的性能却不是各组分材料性能的简单叠加，而是有着重要的改进。基体材料和增强材料以及二者之间的界面的性质及其相互作用，决定着复合材料的性能。
10 传递效应、分割效应、阻断效应、不连续效应、散射和吸收效应、诱导效应。
11 界面结构和性质。
12 界面优化的目标是形成可以有效传递载荷、调节应力分布、阻断裂纹扩展、形成稳定的界面结构。主要途径有增强体的表面涂层处理、金属基体合金化及优化制备工艺参数等。