

考研数学阅卷人点拨 600 题

(数学一、数学二适用)

何英凯 编著

Preface 前言

题海茫茫，漫无边际，对于只有一年多复习时间的考研学子，该做多少题目，该做哪些题目，这是一个很大的问题。面对着书店里令人眼花缭乱的考研图书，又该做出怎样的选择，这是一个很难的问题。

基于此，作者从浩如烟海的数学习题中精心挑选了 600 个题目，选择题、填空题、解答题各 200 个，其中微积分 300 题，线性代数、概率论与数理统计各 150 题，每种题型都按照微积分、线性代数、概率论与数理统计的前后顺序依次安排。这些题目具有广泛的代表性，覆盖了考研数学大纲规定的所有内容，包括各种考研题型，是真正的重点，真正的精品。题目是无穷的，但题型是有限的，题不在多而在精，本书将无穷的题目浓缩在这 600 题之中，将有限的题型展开在这 600 题之中，对每一道题目都进行了详细解答，逐一分析，尽可能给出多种解题方法，总结解题规律，使考生开阔眼界、提高能力。对于同种类型且有一定难度的题目，又以小结的方式加以总结，使考生更好地掌握各种综合题型的分析思路、处理方法和各种可能的知识延伸。考生只要认真研读这 600 个题目，就会以一当十，就会有惊人的进步。

三道题做一遍不如一道题做三遍，解答数学题目，切忌蜻蜓点水、浅尝辄止。一道题做三遍，不是简单重复，而是一个不断提高的过程。第一遍做题，许多考生还会处于朦胧状态，知识还掌握得不牢，会经常翻书查找，即使做对了，也没有深刻理解。第二遍做题，则要尽量不翻阅教材，独立完成。对于多数考生来说，完全脱离教材是很困难的，要尽量尝试，当某个公式或定理记不准的时候，要在草纸上推导或努力回忆，当无论如何也想不起要用的内容时才去查找，切忌一遇困难就翻书、稍有难度就看答案。有书是为了不用书，必须尽早实现这种转变。第三遍做题，思考的时间要多于动笔的时间，总结的时间要多于做题的时间，达到举一反三，融会贯通，形成知识网络，升华到一个新境界。

如果已经做过三遍，为了取得绝对高分，可以适当增加题量，有选择地做一些难题。



每位考生都会有一本考研数学教材，教材的例题和习题再加上本书的 600 个题目，总量会超过 2000 个，对于多数考生来说已经足够了，对这些题目反复研读、充分理解，就会不断进步，取得理想的成绩。

本书带“*”号的内容数学二不作要求。

为了博采众家之长，作者在本书的编写过程中参考了许多著作和教材，为本书充实了许多内容，由于无法一一列出，谨向有关作者表示衷心感谢！

虽然经过了认真校对，仍难免有不完善和疏漏之处，敬请广大考生和同行批评指正。

祝同学们学习进步，考研成功！

何英凯

Contents 目录

前言	1
----------	---

第一部分 阅卷人点拨 600 题习题演练

选择题	3
高等数学	3
线性代数	15
概率论与数理统计*	20
填空题	27
高等数学	27
线性代数	33
概率论与数理统计*	38
解答题	43
高等数学	43
线性代数	50
概率论与数理统计*	54

第二部分 阅卷人点拨 600 题习题详解

选择题	63
高等数学	63



线性代数	85
概率论与数理统计*	95
填空题	105
高等数学	105
线性代数	140
概率论与数理统计*	158
解答题	177
高等数学	177
线性代数	235
概率论与数理统计*	260



第一部分

阅卷人点拨600题习题演练







::::: 选 择 题 :::::

高等数学

【1】若 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln\left[3 + \frac{f(x)}{x^2}\right]}{x^k} = k \ (k > 0)$, 则必有().

- (A) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ 存在且不为 0 (B) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^k}$ 存在且不为 0
 (C) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^2}$ 存在且不为 0 (D) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^{2+k}}$ 存在且不为 0

【2】当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列 4 个无穷小阶数最高的是().

- (A) $x^2 + x^4$ (B) $\sqrt{1 + \sin x} - 1$
 (C) $\frac{\sin x}{x} - 1$ (D) $\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}$

【3】设 $f(x) = u(x) + v(x)$, $g(x) = u(x) - v(x)$, 并设 $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0} v(x)$ 都不存在, 则下列论断正确的是().

- (A) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 必存在
 (B) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 必不存在
 (C) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 必不存在
 (D) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 必存在

【4】设 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 不是无穷大, 则下述结论正确的是().

- (A) 设 $x \rightarrow x_0$ 时, $g(x)$ 是无穷小, 则 $f(x)g(x)$ 必是无穷小
 (B) 设 $x \rightarrow x_0$ 时, $g(x)$ 不是无穷小, 则 $f(x)g(x)$ 必不是无穷小
 (C) 设在 $x = x_0$ 的某邻域 $g(x)$ 无界, 则 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)g(x)$ 必是无穷大
 (D) 设在 $x = x_0$ 的某邻域 $g(x)$ 有界, 则 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)g(x)$ 必不是无穷大

【5】曲线 $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ 渐近线的条数为().

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

【6】设 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0, \end{cases}$ 则在点 $x = 0$ 处间断的函数是().

- (A) $\max\{f(x), g(x)\}$ (B) $\min\{f(x), g(x)\}$



(C) $f(x) - g(x)$

(D) $f(x) + g(x)$

【7】设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 均为非负数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$, 则必有().

(A) $a_n < b_n$ 对于任意 n 成立

(B) $b_n < c_n$ 对于任意 n 成立

(C) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 不存在

(D) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 不存在

【8】设 $f(x)$ 为不恒等于零的奇函数, 且 $f'(x)$ 存在, 则函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ ().

(A) 在 $x=0$ 处左极限不存在

(B) 有跳跃间断点 $x=0$

(C) 在 $x=0$ 处右极限不存在

(D) 有可去间断点 $x=0$

【9】设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$, 讨论函数的间断点, 其结论为().

(A) 不存在间断点

(B) 存在间断点 $x=1$

(C) 存在间断点 $x=0$

(D) 存在间断点 $x=-1$

【10】设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义, 且 $f(x)$ 在点 x_0 处间断, 则在点 x_0 处必定间断的函数为().

(A) $f(x) \sin x$

(B) $f(x) + \sin x$

(C) $f^2(x)$

(D) $|f(x)|$

【11】设 $f(x) = \int_0^{1-\cos x} \sin t^2 dt$, $g(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6}$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的().

(A) 低阶无穷小

(B) 高阶无穷小

(C) 等价无穷小

(D) 同阶但不等价无穷小

【12】当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1 - bx)$ 是等价无穷小, 则().

(A) $a=1, b=-\frac{1}{6}$

(B) $a=1, b=\frac{1}{6}$

(C) $a=-1, b=-\frac{1}{6}$

(D) $a=-1, b=\frac{1}{6}$

【13】设 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x) = ax^3 + bx$ 与 $g(x) = \int_0^{\sin x} (e^{x^2} - 1) dx$ 等价, 则().

(A) $a=\frac{1}{3}, b=1$

(B) $a=3, b=0$

(C) $a=\frac{1}{3}, b=0$

(D) $a=1, b=0$

【14】设 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x) = \ln(1+x^2) - \ln(1+\sin^2 x)$ 是 x 的 n 阶无穷小, 则正整数 n 等于().

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

【15】设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2)}{x^2} = 1$, 则().

(A) $f(0)=0$ 且 $f'(0)$ 存在

(B) $f(0)=1$ 且 $f'(0)$ 存在

(C) $f(0)=0$ 且 $f'_+(0)$ 存在

(D) $f(0)=1$ 且 $f'_+(0)$ 存在

【16】设函数 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处().



- (A) 极限不存在 (B) 极限存在但不连续
(C) 连续但不可导 (D) 可导

【17】设函数 $f(x) = |x^3 - 1|\varphi(x)$, 其中 $\varphi(x)$ 在 $x=1$ 处连续, 则 $\varphi(1)=0$ 是 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导的().

- (A) 充分必要条件 (B) 充分但非必要条件
(C) 必要但非充分条件 (D) 既非充分又非必要条件

【18】设周期函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 周期为 4, 又 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-x)}{2x} = -1$, 则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(5, f(5))$ 处的切线斜率为().

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) 0 (C) -1 (D) -2

【19】设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有定义, 并且 $|f(x)| \leq 1 - \cos x$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处().

- (A) 极限不存在 (B) 极限存在但不连续
(C) 连续但不可导 (D) 可导

【20】设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数, 且 $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量, Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分, 若 $\Delta x > 0$, 则().

- (A) $0 < dy < \Delta y$ (B) $0 < \Delta y < dy$ (C) $\Delta y < dy < 0$ (D) $dy < \Delta y < 0$

【21】设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 (a, b) 上可导, 考虑下列叙述:

- (1) 若 $f(x) > g(x)$, 则 $f'(x) > g'(x)$.
(2) 若 $f'(x) > g'(x)$, 则 $f(x) > g(x)$.

则().

- (A) (1)、(2)都正确 (B) (1)、(2)都不正确
(C) (1)正确, 但(2)不正确 (D) (2)正确, 但(1)不正确

【22】两曲线 $y = \frac{1}{x}$ 与 $y = ax^2 + b$ 在点 $(2, \frac{1}{2})$ 处相切, 则().

- (A) $a = -\frac{1}{16}, b = \frac{3}{4}$ (B) $a = \frac{1}{16}, b = \frac{1}{4}$
(C) $a = -1, b = \frac{9}{2}$ (D) $a = 1, b = -\frac{7}{2}$

【23】设函数 $f(x)$ 处处可导, 则().

- (A) 当 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ 时, 必有 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$
(B) 当 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$ 时, 必有 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
(C) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ 时, 必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$
(D) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$ 时, 必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

【24】若 $f(x)$ 在 x_0 点可导, 则 $|f(x)|$ 在 x_0 点().

- (A) 必可导 (B) 连续但不一定可导
(C) 一定不可导 (D) 不连续



【25】设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有界且可导, 则().

- (A) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 时, 必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$
 (B) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在时, 必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$
 (C) 当 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ 时, 必有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$
 (D) 当 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ 存在时, 必有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$

【26】设 $f'(x)$ 在 $x=a$ 处连续, 又 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{x-a} = -1$, 则().

- (A) $x=a$ 是 $f(x)$ 的极小值点
 (B) $x=a$ 是 $f(x)$ 的极大值点
 (C) $(a, f(a))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点
 (D) $x=a$ 不是 $f(x)$ 的极值点, $(a, f(a))$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

【27】设 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f'(a) > 0$, $f'(b) < 0$, 则下列结论中错误的是().

- (A) 至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$, 使得 $f(x_0) > f(a)$
 (B) 至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$, 使得 $f(x_0) > f(b)$
 (C) 至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$, 使得 $f'(x_0) = 0$
 (D) 至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$, 使得 $f(x_0) = 0$

【28】设函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 点导数存在且不为零, 则当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 点的微分是函数的增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 的().

- (A) 等价无穷小 (B) 同阶但不等价无穷小
 (C) 高阶无穷小 (D) 低阶无穷小

【29】设 $g(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导, 且 $g(0) = g'(0) = 0$, 设

$$f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处().

- (A) 不连续 (B) 连续但不可导
 (C) 可导, 但导函数不连续 (D) 可导, 导函数连续

【30】设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^{2n}}$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内().

- (A) 处处可导 (B) 有 1 个不可导点
 (C) 有 2 个不可导点 (D) 至少有 3 个不可导点

【31】设函数 $f(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)$, 其中 n 为正整数, 则 $f'(0) =$ ().

- (A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$ (B) $(-1)^n(n-1)!$
 (C) $(-1)^{n-1}n!$ (D) $(-1)^nn!$

【32】已知 $f(0) = 0$, 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导的充要条件为().

- (A) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(1 - \cosh h)$ 存在 (B) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f(1 - e^h)$ 存在



(C) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(h - \sin h)$ 存在

(D) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(2h) - f(h)]$ 存在

【33】曲线 $y = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点是().

(A) (1, 0)

(B) (2, 0)

(C) (3, 0)

(D) (4, 0)

【34】设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = 2$, 则函数 $f(x)$ 在 $x=0$

处().

(A) 不可导

(B) 可导且 $f'(0) = 2$

(C) 取得极大值

(D) 取得极小值

【35】设函数 $f(x)$ 有二阶连续导数, 且 $f'(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{|x|} = 1$, 则().

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(C) $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, $(0, f(0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

【36】设 $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) > 0$, 且 $f(x)$ 在 x_0 点的某邻域内有三阶连续导数, 则下列选项正确的是().

(A) $f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 的极大值

(B) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(C) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(D) $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

【37】若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 x_0 点取得极小值, 则函数 $F(x) = f(x) + g(x)$ 在 x_0 点().

(A) 必取得极小值

(B) 必取得极大值

(C) 不可能取得极值

(D) 可能取得极大值, 也可能取得极小值

【38】设 $f(x)g(x)$ 在 x_0 点可导, $f(x_0) = g(x_0) = 0$, $f'(x_0)g'(x_0) > 0$, 且 $f''(x_0)$, $g''(x_0)$ 存在, 则().

(A) x_0 不是 $f(x)g(x)$ 的驻点

(B) x_0 是 $f(x)g(x)$ 的驻点, 但不是极值点

(C) x_0 是 $f(x)g(x)$ 的驻点, 且是它的极小值点

(D) x_0 是 $f(x)g(x)$ 的驻点, 且是它的极大值点

【39】设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处满足

$$f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 0, \quad f^{(n+1)}(0) > 0,$$

则().

(A) 当 n 为偶数时, $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点

(B) 当 n 为偶数时, $x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点

(C) 当 n 为奇数时, $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点

(D) 当 n 为奇数时, $x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点



【40】设常数 $k > 0$, 函数 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + k$ 在 $(0, +\infty)$ 内零点个数为().

- (A) 0 个 (B) 1 个 (C) 2 个 (D) 3 个

【41】设 $f(x)$ 是连续的偶函数, 则其原函数 $F(x)$ 一定().

- (A) 是偶函数 (B) 是奇函数
(C) 是非奇非偶函数 (D) 有一个是奇函数

【42】设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数, “ $M \Leftrightarrow N$ ”表示 M 的充要条件是 N , 则必有().

- (A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数
(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数
(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数
(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数

【43】设 $f(x)$ 是以 l 为周期的周期函数, 则 $\int_{a+kl}^{a+(k+1)l} f(x) dx$ 之值().

- (A) 仅与 a 有关 (B) 仅与 a 无关
(C) 与 a 及 k 都无关 (D) 与 a 及 k 都有关

【44】设 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2} \cos^6 x dx$, $N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 x + \cos^6 x) dx$, $P = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^2 \sin x - \cos^6 x) dx$, 则().

- (A) $N < P < M$ (B) $M < P < N$ (C) $N < M < P$ (D) $P < M < N$

【45】设 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin x dx$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cot x dx$, $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x dx$, 则 I, J, K 的大小关系为().

- (A) $I < J < K$ (B) $I < K < J$ (C) $J < I < K$ (D) $K < J < I$

【46】设 $I_k = \int_0^{k\pi} e^{x^2} \sin x dx$ ($k = 1, 2, 3$), 则有().

- (A) $I_1 < I_2 < I_3$ (B) $I_3 < I_2 < I_1$ (C) $I_2 < I_3 < I_1$ (D) $I_2 < I_1 < I_3$

【47】曲线 $r = ae^{b\theta}$ ($a > 0, b > 0$) 从 $\theta = 0$ 到 $\theta = \pi$ 的一段弧长为().

- (A) $\int_0^\pi ae^{b\theta} \sqrt{1+b^2} d\theta$ (B) $\int_0^\pi \sqrt{1+abe^{b\theta}} d\theta$
(C) $\int_0^\pi \sqrt{1+(ae^{b\theta})^2} d\theta$ (D) $\int_0^\pi abe^{b\theta} \sqrt{1+(abe^{b\theta})^2} d\theta$

【48】矩形闸门的一边恰与水面平齐, 闸门垂直于水面, 过闸门的中心作水平线将矩形分为面积相等的上、下两部分, 设上部所受的压力为 P_1 , 下部所受的压力为 P_2 , 则 $\frac{P_1}{P_2} =$ ().

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{2}{3}$

【49】 x 轴上有一根线密度为常数 μ , 长度为 l 的细杆, 右端点为坐标原点. 有一质量为 m 的质点在 x 轴的正半轴上, 距原点距离为 a , 若引力系数为 k , 则质点和细杆之



间的引力大小为().

(A) $\int_{-l}^0 \frac{km\mu dx}{(a-x)^2}$ (B) $\int_0^l \frac{km\mu dx}{(a-x)^2}$ (C) $\int_{-\frac{l}{2}}^0 \frac{km\mu dx}{(a-x)^2}$ (D) $\int_0^l \frac{km\mu dx}{(a-x)^2}$

【50】* 直线 $L: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{1}$ 与平面 $\Pi: x-y+2z+4=0$ 的夹角为().

(A) π (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{6}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

【51】* 直线 $L: \begin{cases} x+3y+2z+1=0, \\ 2x-y-10z+3=0 \end{cases}$ 与平面 $\Pi: 4x-2y+z-2=0$ 的关系为().

(A) L 平行于 Π (B) L 在 Π 上 (C) L 垂直于 Π (D) L 与 Π 斜交

【52】* 直线 $L_1: \frac{x}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z}{4}$ 与直线 $L_2: \begin{cases} x=1+t, \\ y=-2+t, \\ z=2+2t \end{cases}$ 之间的关系是().

(A) 垂直 (B) 平行 (C) 相交但不垂直 (D) 为异面直线

【53】* 两条平行直线 $L_1: \begin{cases} x=1+t, \\ y=-1+2t, \\ z=t, \end{cases} L_2: \begin{cases} x=2+t, \\ y=-1+2t, \\ z=1+t \end{cases}$ 之间的距离为().

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ (C) 1 (D) 2

【54】极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$ ().

(A) 不存在 (B) 等于 2 (C) 等于 $\frac{1}{2}$ (D) 等于 0

【55】二元函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 在点 $(0, 0)$ 处().

(A) 连续, 偏导数存在 (B) 连续, 偏导数不存在
(C) 不连续, 偏导数存在 (D) 不连续, 偏导数不存在

【56】二元函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 在点 $(0, 0)$ 处().

(A) 两个偏导数都不存在 (B) 两个偏导数存在但不可微
(C) 偏导数连续 (D) 可微但偏导数不连续

【57】若函数 $z=f(x, y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2$, 且 $f(x, 1)=x+2$, $f'_y(x, 1)=x+1$, 则 $f(x, y)=()$.

(A) $y^2+(x-1)y+2$ (B) $y^2+(x+1)y+2$
(C) $y^2+(x-1)y-1$ (D) $y^2+(x+1)y-2$

【58】* 二元函数 $f(x, y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(0, 0)$ 处().

(A) 不连续 (B) 偏导数存在



(C) 可微

(D) 沿任意方向的方向导数存在

【59】* 在曲线 $x=t, y=-t^2, z=t^3$ 的所有切线中, 与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线().

(A) 只有一条

(B) 有两条

(C) 至少有三条

(D) 不存在

【60】* 曲线 $S: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=2, \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 在点 $(1, -1, 0)$ 处的切线方程为().

(A) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}$

(B) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$

(C) $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$

(D) $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-2}$

【61】* 曲面 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=4$ 上任一点的切平面在三个坐标轴上的截距的平方和为().

(A) 48

(B) 64

(C) 36

(D) 16

【62】设 $u(x, y)$ 在平面有界闭区域 D 上具有二阶连续偏导数, 且 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \neq 0, \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = 0$, 则 $u(x, y)$ 的().

(A) 最大值点和最小值点必定都在 D 的内部

(B) 最大值点和最小值点必定都在 D 的边界上

(C) 最大值点在 D 的内部, 最小值点在 D 的边界上

(D) 最小值点在 D 的内部, 最大值点在 D 的边界上

【63】设 $f(x, y)$ 连续, 且 $f(x, y) = xy + \iint_D f(u, v) du dv$, 其中 D 是由 $y=0, y=x^2, x=1$ 所围区域, 则 $f(x, y) = ()$.

(A) xy

(B) $2xy$

(C) $xy + \frac{1}{8}$

(D) $xy + 1$

【64】设 $a = \iint_D \cos \sqrt{x^2+y^2} d\sigma, b = \iint_D \cos(x^2+y^2) d\sigma, c = \iint_D \cos(x^2+y^2)^2 d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) | x^2+y^2 \leq 1\}$, 则().

(A) $c > b > a$

(B) $a > b > c$

(C) $b > a > c$

(D) $c > a > b$

【65】设 $f(x, y)$ 为有界闭区域 $D: x^2+y^2 \leq a^2$ 上连续可导函数, 则 $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\pi a^2} \iint_D f(x, y) d\sigma = ()$.

(A) 不存在

(B) $=f(0, 0)$

(C) $=f(1, 1)$

(D) $=f'(0, 0)$

【66】设 $D: |x|+|y| \leq 1$, 则 $\iint_D (|x|+y) dx dy = ()$.

(A) 0

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{2}{3}$

(D) 1

【67】设 D 是平面直角坐标系中以 $(1, 1), (-1, 1), (-1, -1)$ 三点为顶点的三角



形区域, D_1 是第一象限的部分, 则 $\iint_D (xy + \cos x \sin y) dx dy = (\quad)$.

(A) $2 \iint_{D_1} \cos x \sin y dx dy$

(B) $2 \iint_{D_1} xy dx dy$

(C) $4 \iint_{D_1} (xy + \cos x \sin y) dx dy$

(D) 0

【68】* 设空间有界闭区域 Ω 由平面 $x+y+z+1=0$, $x+y+z+2=0$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ 围成, $I_1 = \iiint_{\Omega} [\ln(x+y+z+3)]^2 dv$, $I_2 = \iiint_{\Omega} (x+y+z)^2 dv$, 则 (\quad) .

(A) $I_1 < I_2$

(B) $I_1 > I_2$

(C) $I_1 \leq I_2$

(D) $I_1 \geq I_2$

【69】* 设 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧, 下面 4 个结论:

(1) $\oiint_{\Sigma} x^2 dy dz = 0$

(2) $\oiint_{\Sigma} y^2 dy dz = 0$

(3) $\oiint_{\Sigma} x dy dz = 0$

(4) $\oiint_{\Sigma} y dy dz = 0$

中, 正确的个数为 (\quad) .

(A) 1 个

(B) 2 个

(C) 3 个

(D) 4 个

【70】设函数 $f(x, y)$ 为连续函数, 则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr = (\quad)$.

(A) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$

(B) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$

(C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$

(D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$

【71】* 设曲线积分

$$\int_L [f(x) - e^x] \sin y dx - f(x) \cos y dy$$

与路径无关, 其中 $f(x)$ 具有一阶连续导数, 且 $f(0)=0$, 则 $f(x)=(\quad)$.

(A) $\frac{1}{2}(e^{-x} - e^x)$

(B) $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

(C) $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) - 1$

(D) $1 - \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

【72】 $\int_0^1 dx \int_x^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$ 化为极坐标系中的累次积分为 (\quad) .

(A) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2 \sin \theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$

(B) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sin \theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$

(C) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2 \cos \theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$

(D) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos \theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$

【73】* 设 Σ 为球面 $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 1$, 则第一型曲面积分

$$\oiint_{\Sigma} (2x + 3y + z) ds = (\quad)$$

(A) 4π

(B) 2π

(C) π

(D) 0

【74】* 设 L 是摆线 $\begin{cases} x = t - \sin t - \pi, \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ 上从 $t=0$ 到 $t=2\pi$ 的一段, 则



$$\int_L \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2 + y^2} = ().$$

- (A) $-\pi$ (B) π (C) 2π (D) -2π

【75】设区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$, $f(t)$ 为 D 上的正值连续函数, a, b 为常数, 则 $\iint_D \frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} dx dy = ().$

- (A) $ab\pi$ (B) $\frac{ab}{2}\pi$ (C) $(a+b)\pi$ (D) $\frac{a+b}{2}\pi$

【76】极坐标的累次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr = ().$

- (A) $\int_0^2 dx \int_0^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$ (B) $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy$
(C) $\int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x, y) dx$ (D) $\int_0^2 dx \int_0^2 f(x, y) dy$

【77】若 $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$, 则积分区域 $D = ().$

- (A) $x^2 + y^2 \leq a^2$ (B) $x^2 + y^2 \leq a^2 (x \geq 0)$
(C) $x^2 + y^2 \leq ax (x > 0)$ (D) $x^2 + y^2 \leq ax (x < 0)$

【78】累次积分 $\int_0^1 dx \int_x^1 f(x, y) dy + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x, y) dx$ 可写成 $().$

- (A) $\int_0^2 dx \int_x^{2-x} f(x, y) dy$ (B) $\int_0^1 dy \int_y^{2-y} f(x, y) dx$
(C) $\int_0^1 dx \int_x^{2-x} f(x, y) dy$ (D) $\int_0^1 dy \int_y^{2-y} f(x, y) dx$

【79】交换积分 $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy$ 的积分次序得 $().$

- (A) $\int_0^e dy \int_0^{\ln y} f(x, y) dx$ (B) $\int_e^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx$
(C) $\int_0^{\ln e} dy \int_1^{e^y} f(x, y) dx$ (D) $\int_0^1 dy \int_e^1 f(x, y) dx$

【80】设非齐次线性微分方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ 有两个不同的解 $y_1(x), y_2(x)$, C 为任意常数, 则该方程通解为 $().$

- (A) $C[y_1(x) - y_2(x)]$ (B) $y_1(x) + C[y_1(x) - y_2(x)]$
(C) $C[y_1(x) + y_2(x)]$ (D) $y_1(x) + C[y_1(x) + y_2(x)]$

【81】 $y = f(x)$ 是方程 $y'' - 2y' + 4y = 0$ 的一个解, 若 $f(x_0) > 0, f'(x_0) = 0$, 则函数 $y = f(x)$ $().$

- (A) 在 x_0 点取得极大值 (B) 在 x_0 点某邻域内单调增加
(C) 在 x_0 点取得极小值 (D) 在 x_0 点某邻域内单调减少

【82】若平面曲线 C 在各点的切线恒垂直于切点与原点的连线, 则此曲线的方程为 $().$

- (A) $y = kx + b$ (B) $x^2 + y^2 = c$ (C) $y = e^x$ (D) $y^2 = 2px$



【83】一曲线在其上任一点的切线的斜率为 $-\frac{2x}{y}$, 则此曲线是().

- (A) 直线 (B) 抛物线 (C) 椭圆 (D) 圆

【84】已知 $y=x$, $y=x^2$, $y=e^x$ 是方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 的三个特解, 则该方程的通解是().

- (A) $y=C_1x+C_2x^2+e^x$ (B) $y=C_1x^2+C_2e^x+x$
(C) $y=C_1(x-x^2)+C_2(x-e^x)+x$ (D) $y=C_1(x-x^2)+C_2(x-e^x)$

【85】方程 $y''-2y'=xe^{2x}$ 的特解形式为().

- (A) $y=axe^{2x}$ (B) $y=(ax+b)e^{2x}$
(C) $y=x(ax+b)e^{2x}$ (D) $y=x^2(ax+b)e^{2x}$

【86】方程 $y''-3y'+2y=e^x+1+\cos 2x$ 的特解形式为().

- (A) $y=ae^x+b+A\cos 2x$ (B) $y=ae^x+b+A\cos 2x+B\sin 2x$
(C) $y=axe^x+b+A\cos 2x+B\sin 2x$ (D) $y=axe^x+b+x(A\cos 2x+B\sin 2x)$

【87】在下列微分方程中, 以 $y=C_1e^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$ (C_1, C_2, C_3 为任意常数) 为通解的是().

- (A) $y''' + y'' - 4y' - 4y = 0$ (B) $y''' + y'' + 4y' + 4y = 0$
(C) $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$ (D) $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$

【88】满足方程 $\int_0^1 f(tx)dt = nf(x)$ (n 为大于 1 的自然数) 的可导函数 $f(x)$ 是().

- (A) $Cx^{\frac{1-n}{n}}$ (B) Cx (C) $C\sin nx$ (D) $\cos nx$

【89】* 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则必收敛的级数为().

- (A) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{u_n}{n}$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$
(C) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1})$

【90】* 设有以下命题:

①若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

②若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1000}$ 收敛.

③若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

④若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛.

以上命题正确的是().

- (A) ①, ② (B) ②, ③ (C) ③, ④ (D) ①, ④

【91】* 当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 都收敛时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n$ ().



- (A) 一定条件收敛 (B) 一定绝对收敛
(C) 一定发散 (D) 可能收敛, 也可能发散

【92】* 设 α 是常数, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos n\alpha}{n^2} - \frac{1}{n} \right)$ ().

- (A) 发散 (B) 绝对收敛
(C) 条件收敛 (D) 收敛与否与 α 有关

【93】* 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n n^a \sin \frac{\pi}{n^2}$ (a 为常数) ().

- (A) 绝对收敛 (B) 条件收敛
(C) 发散 (D) 敛散性与 a 有关

【94】* 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 则 ().

- (A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 必收敛 (B) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 必发散
(C) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 必收敛 (D) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 必发散

【95】* 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 ().

- (A) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛 (B) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛
(C) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$ 收敛 (D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ 收敛

【96】* 设 $u_n \neq 0$ ($n=1, 2, \dots$), 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{u_n} = 1$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \right)$ ().

- (A) 发散 (B) 绝对收敛
(C) 条件收敛 (D) 收敛性由所给条件无法确定

【97】* 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ 与 $\frac{1}{3}$, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{b_n^2} x^n$ 的收敛半径为 ().

- (A) 5 (B) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{5}$

【98】* 已知幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-a)^n}{n}$ 在 $x > 0$ 时发散, 在 $x = 0$ 处收敛, 则常数 $a =$ ().

- (A) 0 (B) -1 (C) 1 (D) 2

【99】* 已知幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x=2$ 处条件收敛, 则该幂级数 ().

- (A) 收敛半径为 2 (B) 收敛区间为 $(0, 2]$
(C) 收敛区域为 $(0, 2]$ (D) 收敛区间为 $(0, 2)$

【100】* 下列命题:



①设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_1 和 R_2 , 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$ 的收敛半径为 $R = \min\{R_1, R_2\}$.

②若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R , 则必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R$.

③若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R , 则必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$.

④若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R$, 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ 的收敛半径为 \sqrt{R} .

其中正确的有().

- (A) 1个 (B) 2个 (C) 3个 (D) 4个

线性代数

【101】设 A 为三阶方阵, A^* 是其伴随矩阵, $|A| = \frac{1}{3}$, 则 $|4A - (3A^*)^{-1}| = ()$.

- (A) $\frac{1}{3}$ (B) 3 (C) 6 (D) 9

【102】已知 $2n$ 阶行列式 D 的某一行元素及其余子式都等于 a , 则 $D = ()$.

- (A) 0 (B) a^2 (C) $-a^2$ (D) na^2

【103】设 A 为三阶方阵, A^* 是其伴随矩阵, 已知 A 的每行元素之和为 k , A^* 的每行元素之和为 m , 则 $|A| = ()$.

- (A) km (B) $(-1)^n km$ (C) $\frac{m}{k}$ (D) $(-1)^n \frac{k}{m}$

【104】设 A 为三阶方阵, 其中 $a_{11} \neq 0, A_{ij} = a_{ij}, i=1, 2, 3, j=1, 2, 3$, 其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式, 则 $|2A^T| = ()$.

- (A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 8

【105】设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $n \times m$ 矩阵, 且 $n > m$, 则必有().

- (A) $|AB| = 0$ (B) $|BA| = 0$
(C) $|AB| = |BA|$ (D) $||AB|AB| = |AB| |AB|$

【106】设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ 均为 4 维列向量, $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1], B = [\alpha_3, \alpha_1, \alpha_2, \beta_2]$, 且 $|A| = 1, |B| = 2$, 则 $|A+B| = ()$.

- (A) 9 (B) 6 (C) 3 (D) 1

【107】设 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 是三阶矩阵, 则 $|A| = ()$.

- (A) $|\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1|$ (B) $|\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1|$
(C) $|\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2|$ (D) $|\alpha_1, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2|$

【108】设 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma$ 均为 3 维列向量, 且行列式

$$|\alpha_1, \beta_1, \gamma| = |\alpha_1, \beta_2, \gamma| = |\alpha_2, \beta_1, \gamma| = |\alpha_2, \beta_2, \gamma| = 3,$$



则 $|-2\gamma, \alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + 2\beta_2| = (\quad)$.

- (A) -18 (B) -36 (C) 64 (D) -96

【109】设 n 阶矩阵 A 与 B 等价, 则必有 ().

- (A) 当 $|A| = a$ ($a \neq 0$) 时, $|B| = a$ (B) 当 $|A| = a$ ($a \neq 0$) 时, $|B| = -a$
(C) 当 $|A| \neq 0$ 时, $|B| = 0$ (D) 当 $|A| = 0$ 时, $|B| = 0$

【110】若 A 为 n 阶方阵, E 是单位矩阵, 且满足 $AA^T = E$, $|A| = -1$, 则 $|A+E| = (\quad)$.

- (A) 1 (B) -1 (C) 0 (D) 以上都不对

【111】 A 为 n ($n \geq 3$) 阶方阵, A^* 是其伴随矩阵, k 为常数, 且 $k \neq 0, \pm 1$, 则 $(kA)^* = (\quad)$.

- (A) kA^* (B) $k^{n-1}A^*$ (C) k^nA^* (D) $k^{-1}A^*$

【112】设 A 为 3 阶矩阵, 将 A 的第 2 行加到第 1 行得 B , 再将 B 的第一列的 -1 倍加到第 2 列得 C , 记 $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则 ().

- (A) $C = P^{-1}AP$ (B) $C = PAP^{-1}$ (C) $C = P^TAP$ (D) PAP^T

【113】设 A, B 都是 n 阶非零矩阵, 且 $AB = O$, 则 A 和 B 的秩 ().

- (A) 必有一个等于 0 (B) 都小于 n
(C) 一个小于 n , 一个等于 n (D) 都等于 n

【114】设 A, B 为 n 阶矩阵, A^*, B^* 分别为 A, B 对应的伴随矩阵, 分块矩阵 $C = \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$, 则 C 的伴随矩阵 $C^* = (\quad)$.

- (A) $\begin{bmatrix} |A|A^* & O \\ O & |B|B^* \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} |B|B^* & O \\ O & |A|A^* \end{bmatrix}$
(C) $\begin{bmatrix} |A|B^* & O \\ O & |B|A^* \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{bmatrix}$

【115】设 A, B 均为 n 阶可逆矩阵, 且 $(A+B)^2 = E$, 则 $(E+BA^{-1})^{-1} = (\quad)$.

- (A) $(A+B)B$ (B) $E+AB^{-1}$ (C) $A(A+B)$ (D) $(A+B)A$

【116】设 A, B 均为 n 阶矩阵, 且 $AB = A+B$, 下面 4 个命题:

- (1) 若 A 可逆, 则 B 可逆. (2) 若 B 可逆, 则 $A+B$ 可逆.
(3) 若 $A+B$ 可逆, 则 AB 可逆. (4) $A+E$ 恒可逆.

其中正确的有 ().

- (A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 4 个

【117】若 A, A^*, B 均是 n 阶非零矩阵, 且 $AB = O$, 则必有 $r(B) = (\quad)$.

- (A) 1 (B) 2 (C) $n-1$ (D) 无法确定

【118】设 $A = E - 2\xi\xi^T$, 其中 $\xi = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, 且有 $\xi^T\xi = 1$, 下面 4 个结论:

- (1) A 是对称阵. (2) A^2 是单位阵. (3) A 是正交阵. (4) A 是可逆阵.

其中正确的个数是 ().

- (A) 1个 (B) 2个 (C) 3个 (D) 4个

【119】设 A, B, C 均为 n 阶矩阵, E 为 n 阶单位矩阵, 若 $B=E+AB, C=A+CA$, 则 $B-C=(\quad)$.

- (A) E (B) $-E$ (C) A (D) $-A$

【120】设 A 为 n ($n \geq 2$) 阶可逆矩阵, 交换 A 的第 1 行与第 2 行得矩阵 B, A^*, B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵, 则 (\quad) .

- (A) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 B^* (B) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 B^*
(C) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 $-B^*$ (D) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 $-B^*$

【121】设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则下列向量组线性无关的是 (\quad) .

- (A) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$
(B) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3$
(C) $\alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_2 + 3\alpha_3, 3\alpha_3 + \alpha_1$
(D) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1 - 3\alpha_2 + 22\alpha_3, 3\alpha_1 + 5\alpha_2 - 5\alpha_3$

【122】若向量组 α, β, γ 线性无关; α, β, δ 线性相关, 则 (\quad) .

- (A) α 必可由 β, γ, δ 线性表示 (B) β 必不可由 α, γ, δ 线性表示
(C) δ 必可由 α, β, γ 线性表示 (D) δ 必不可由 α, β, γ 线性表示

【123】设向量 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示, 但不能由向量组 (I): $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$ 线性表示, 记向量组 (II): $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}, \beta$, 则 (\quad) .

- (A) α_m 不能由 (I) 线性表示, 也不能由 (II) 线性表示
(B) α_m 不能由 (I) 线性表示, 但可由 (II) 线性表示
(C) α_m 可由 (I) 线性表示, 也可由 (II) 线性表示
(D) α_m 可由 (I) 线性表示, 但不可由 (II) 线性表示

【124】设 A 是 $m \times n$ 矩阵, A 以列分块, 记 $A=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n)$, 在 A 中划去第 i 列得到的矩阵记为 $B, B=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$, 则 $r(A)=r(B)$ 是 α_i 可以由 B 的列向量线性表示的 (\quad) .

- (A) 充分条件 (B) 必要条件 (C) 充要条件 (D) 无关条件

【125】设 n 维向量组 (I) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, (II) $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性无关, 且 α_i ($i=1, 2, \dots, s$) 不能由 (II) 线性表示, β_j ($j=1, 2, \dots, t$) 不能由 (I) 线性表示, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ (\quad) .

- (A) 一定线性相关 (B) 一定线性无关
(C) 可能线性相关, 也可能线性无关 (D) 即线性相关, 又线性无关

【126】设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 向量 β_1 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 向量 β_2 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 则对任意常数 k 必有 (\quad) .

- (A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1 + \beta_2$ 线性无关 (B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1 + \beta_2$ 线性相关
(C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + k\beta_2$ 线性无关 (D) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + k\beta_2$ 线性相关

【127】设 n 阶方阵 $A=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), B=(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n), AB=(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, 记向量组 (I): $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, (II): $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, (III): $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 如果向量组 (III) 线性相关, 则 (\quad) .



- (A) 向量组(I)与(II)都线性相关
 (B) 向量组(I)线性相关
 (C) 向量组(II)线性相关
 (D) 向量组(I)与(II)至少有一个线性相关

【128】设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, 且满足 $AB=E$, 则必有().

- (A) A 的列向量组线性无关, B 的行向量组线性无关
 (B) A 的列向量组线性无关, B 的列向量组线性无关
 (C) A 的行向量组线性无关, B 的列向量组线性无关
 (D) A 的行向量组线性无关, B 的行向量组线性无关

【129】设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, 则线性方程组 $(AB)x=0$ ().

- (A) 当 $n>m$ 时仅有零解 (B) 当 $n>m$ 时必有非零解
 (C) 当 $m>n$ 时仅有零解 (D) 当 $m>n$ 时必有非零解

【130】设 A 是 n 阶矩阵, α 是 n 维列向量, 秩 $\begin{bmatrix} A & \alpha \\ -\alpha^T & O \end{bmatrix}$ = 秩 (A) , 则线性方程组().

- (A) $Ax=\alpha$ 必有无穷多解 (B) $Ax=\alpha$ 必有唯一解
 (C) $\begin{bmatrix} A & \alpha \\ -\alpha^T & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$ 仅有零解 (D) $\begin{bmatrix} A & \alpha \\ -\alpha^T & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$ 必有非零解

【131】设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 齐次线性方程组 $Ax=0$ 仅有零解的充分条件是().

- (A) A 的列向量线性无关 (B) A 的列向量线性相关
 (C) A 的行向量线性无关 (D) A 的行向量线性相关

【132】设 A 是 $m \times n$ 矩阵, $Ax=0$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 所对应的齐次线性方程组, 则下列结论正确的是().

- (A) 若 $Ax=0$ 仅有零解, 则 $Ax=b$ 有唯一解
 (B) 若 $Ax=0$ 有非零解, 则 $Ax=b$ 有无穷多个解
 (C) 若 $Ax=b$ 有无穷多个解, 则 $Ax=0$ 仅有零解
 (D) 若 $Ax=b$ 有无穷多个解, 则 $Ax=0$ 有非零解

【133】设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 4 元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的三个解向量, 且秩 $(A)=3$, $\alpha_1=(1, 2, 2, 3)^T$, $\alpha_2+\alpha_3=(2, 4, 6, 8)^T$, c 表示任意常数, 则线性方程组 $Ax=b$ 的通解为().

- (A) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$

【134】设 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵 $A^* \neq O$, 若 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的互不相等的解, 则对应的齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系().

- (A) 不存在 (B) 仅含一个非零向量
 (C) 含有两个线性无关的解向量 (D) 含有三个线性无关的解向量



【135】设 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系, 则 $Ax=0$ 的基础解系还可以是().

- (A) $\eta_1 - \eta_2, \eta_2 + \eta_3, \eta_3 - \eta_4, \eta_4 + \eta_1$ (B) $\eta_1 + \eta_2, \eta_2 + \eta_3 + \eta_4, \eta_1 - \eta_2 + \eta_3$
 (C) $\eta_1 - \eta_2, \eta_2 + \eta_3, \eta_3 + \eta_4, \eta_4 - \eta_1$ (D) $\eta_1 + \eta_2, \eta_2 - \eta_3, \eta_3 + \eta_4, \eta_4 + \eta_1$

【136】设 A 为 3 阶非零矩阵, 满足 $A^2=O$, 则非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有解时的线性无关的解向量的个数为().

- (A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 4 个

【137】齐次线性方程组 $Ax=0$ 和 $Bx=0$ 中 A, B 均为 $m \times n$ 矩阵, 现有 4 个命题:

- ①若 $Ax=0$ 的解均是 $Bx=0$ 的解, 则 $r(A) \geq r(B)$.
 ②若 $r(A) \geq r(B)$, 则 $Ax=0$ 的解均是 $Bx=0$ 的解.
 ③若 $Ax=0$ 和 $Bx=0$ 同解, 则 $r(A)=r(B)$.
 ④若 $r(A)=r(B)$, 则 $Ax=0$ 和 $Bx=0$ 同解.

其中正确的是().

- (A) ①② (B) ①③ (C) ②④ (D) ③④

【138】设 $A=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 是 4 阶矩阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, 若 $(1, 0, 1, 0)^T$ 是方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系, 则 $A^*x=0$ 的基础解系可以是().

- (A) α_1, α_3 (B) α_1, α_2 (C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (D) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

【139】设 A 为 n 阶矩阵, 且 $A^k=O$ (k 是自然数), 则().

- (A) $A=O$
 (B) A 的特征值全为 0
 (C) A 的特征值全不为 0
 (D) A 的特征值中 k 个为 0, $n-k$ 个不为 0

【140】 A 是 3 阶矩阵, 有特征值 1, -2, 4, E 是 3 阶单位矩阵, 则下列矩阵中可逆矩阵是().

- (A) $E-A$ (B) $A+2E$ (C) $2E-A$ (D) $A-4E$

【141】设 A 是 n 阶实对称矩阵, P 是 n 阶可逆矩阵. 已知 n 维列向量 α 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量, 则矩阵 $(P^{-1}AP)^T$ 属于特征值 λ 的特征向量是().

- (A) $P^{-1}\alpha$ (B) $P^T\alpha$ (C) $P\alpha$ (D) $(P^{-1})^T\alpha$

【142】设 A, B 为 n 阶矩阵, 且 A 与 B 相似, E 为 n 阶单位矩阵, 则().

- (A) $\lambda E - A = \lambda E - B$
 (B) A 与 B 有相同的特征值和特征向量
 (C) A 与 B 都相似于一个对角阵
 (D) 对任意常数 t , $tE - A$ 与 $tE - B$ 相似

【143】设 λ_1, λ_2 是矩阵 A 的两个不同的特征值, 对应的特征向量分别为 α_1, α_2 , 则 $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性无关的充要条件是().

- (A) $\lambda_1 \neq 0$ (B) $\lambda_2 \neq 0$ (C) $\lambda_1 = 0$ (D) $\lambda_2 = 0$

【144】设矩阵 A 相似于 B , 且 $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 $r(A-2E) + r(A-E) = ()$.



- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

【145】设 n 阶可逆方阵 A 与 B 相似, 下面 4 个结论:

- ① A^T 与 B^T 相似. ② A^{-1} 与 B^{-1} 相似.
③ AB 与 BA 相似. ④ $A+A^T$ 与 $B+B^T$ 相似.

其中正确的个数是().

- (A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 4 个

【146】设 A, B 为同阶可逆矩阵, 则().

- (A) $AB=BA$ (B) 存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP=B$
(C) 存在可逆矩阵 C , 使得 $C^TAC=B$ (D) 存在可逆矩阵 P 和 Q , 使得 $PAQ=B$

【147】对于 n 元二次型 $x^T Ax$, 下述命题中正确的是().

- (A) 化 $x^T Ax$ 为标准形的坐标变换是唯一的
(B) 化 $x^T Ax$ 为规范形的坐标变换是唯一的
(C) $x^T Ax$ 的标准形是唯一的
(D) $x^T Ax$ 的规范形是唯一的

【148】设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 A 与 B ().

- (A) 合同且相似 (B) 合同但不相似
(C) 不合同但相似 (D) 既不合同也不相似

【149】下列二次型中正定二次型是().

- (A) $f_1 = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2$
(B) $f_2 = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 + x_1)^2$
(C) $f_3 = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_3 - x_4)^2 + (x_4 - x_1)^2$
(D) $f_4 = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_3 + x_4)^2 + (x_4 - x_1)^2$

【150】设 A 是 n 阶实对称矩阵, 将 A 的 i 列和 j 列对换得到 B , 再将 B 的 i 行和 j 行对换的得到 C , 则 A 与 C ().

- (A) 等价但不相似 (B) 合同但不相似
(C) 相似但不合同 (D) 等价、合同且相似

概率论与数理统计*

【151】对于任意二事件 A 和 B , 与 $A \cup B = B$ 不等价的是().

- (A) $A \subset B$ (B) $\bar{B} \subset \bar{A}$ (C) $A\bar{B} = \emptyset$ (D) $\bar{A}B = \emptyset$

【152】设 A, B 为两个随机事件, 且 $P(B) > 0$, $P(A|B) = 1$, 则必有().

- (A) $P(A \cup B) > P(A)$ (B) $P(A \cup B) > P(B)$
(C) $P(A \cup B) = P(A)$ (D) $P(A \cup B) = P(B)$

【153】当事件 A 与 B 同时发生时, 事件 C 必发生, 则必有().

- (A) $P(C) = P(AB)$ (B) $P(C) = P(A \cup B)$

$$(C) P(C) \leq P(A) + P(B) - 1 \quad (D) P(C) \geq P(A) + P(B) - 1$$

【154】设 $P(A)=a$, $P(B)=b$, $P(A+B)=c$, 则 $P(A\bar{B})=(\quad)$.

$$(A) a-b \quad (B) c-b \quad (C) a(1-b) \quad (D) a(1-c)$$

【155】设 A, B, C 三个事件两两独立, 则 A, B, C 相互独立的充分必要条件是 (\quad) .

$$(A) A \text{ 与 } BC \text{ 独立} \quad (B) AB \text{ 与 } A \cup C \text{ 独立} \\ (C) AB \text{ 与 } AC \text{ 独立} \quad (D) A \cup B \text{ 与 } A \cup C \text{ 独立}$$

【156】将一枚硬币独立地掷两次, 引进事件: $A_1 = \{\text{掷第一次出现正面}\}$, $A_2 = \{\text{掷第二次出现正面}\}$, $A_3 = \{\text{正反面各出现一次}\}$, $A_4 = \{\text{正面出现两次}\}$, 则事件 (\quad) .

$$(A) A_1, A_2, A_3 \text{ 相互独立} \quad (B) A_2, A_3, A_4 \text{ 相互独立} \\ (C) A_1, A_2, A_3 \text{ 两两独立} \quad (D) A_2, A_3, A_4 \text{ 两两独立}$$

【157】设随机事件 A 与 B 互不相容, 且 $P(A)=p$, $P(B)=q$, 则 A 和 B 中恰有一个发生的概率为 (\quad) .

$$(A) p+q \quad (B) p+q-pq \\ (C) (1-p)(1-q) \quad (D) p(1-q)+q(1-p)$$

【158】设 A, B 是两个随机事件, 且 $0 < P(A) < 1$, $P(B) > 0$, $P(B|A) = P(B|\bar{A})$, 则必有 (\quad) .

$$(A) P(A|B) = P(\bar{A}|B) \quad (B) P(A|B) \neq P(\bar{A}|B) \\ (C) P(AB) = P(A)P(B) \quad (D) P(AB) \neq P(A)P(B)$$

【159】设 A, B 是两个随机事件, 且 $0 < P(A) < 1$, $0 < P(B) < 1$, 则 A, B 相互独立的充要条件是 (\quad) .

$$(A) P(A|B) + P(\bar{A}|B) = 1 \quad (B) P(A|B) + P(A|\bar{B}) = 1 \\ (C) P(A|B) + P(\bar{A}|\bar{B}) = 1 \quad (D) P(A|\bar{B}) + P(\bar{A}|\bar{B}) = 1$$

【160】连续抛掷一枚硬币, 第 k ($k \leq n$) 次正面向上在第 n 次抛掷时出现的概率为 (\quad) .

$$(A) C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad (B) C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (C) C_{n-1}^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad (D) C_{n-1}^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

【161】设随机变量 X 的密度函数为 $\varphi(x)$, 且 $\varphi(-x) = \varphi(x)$. $F(x)$ 是 X 的分布函数, 则对任意实数 a , 有 (\quad) .

$$(A) F(-a) = 1 - \int_0^a \varphi(x) dx \quad (B) F(-a) = \frac{1}{2} - \int_0^a \varphi(x) dx \\ (C) F(-a) = F(a) \quad (D) F(-a) = 2F(a) - 1$$

【162】设 X_1, X_2 为独立的连续型随机变量, 分布函数分别为 $F_1(x), F_2(x)$, 则一定是某一随机变量的分布函数的为 (\quad) .

$$(A) F_1(x) + F_2(x) \quad (B) F_1(x) - F_2(x) \\ (C) F_1(x)F_2(x) \quad (D) F_1(x)/F_2(x)$$

【163】设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 分别为随机变量 X_1 与 X_2 的分布函数. 为使 $F(x) = aF_1(x) - bF_2(x)$ 是某一随机变量的分布函数, a, b 的值应取 (\quad) .



- (A) $\frac{3}{5}, -\frac{2}{5}$ (B) $\frac{2}{3}, \frac{2}{3}$ (C) $-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ (D) $\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$

【164】设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 是两个分布函数, 其相应的概率密度 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 是连续函数, 则必为概率密度的是().

- (A) $f_1(x)f_2(x)$ (B) $2f_2(x)F_1(x)$
(C) $f_1(x)F_2(x)$ (D) $f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)$

【165】设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度, $f_2(x)$ 为 $[-1, 3]$ 上均匀分布的概率密度, 若 $f(x) = \begin{cases} af_1(x), & x \leq 0; \\ bf_2(x), & x > 0 \end{cases}$ ($a > 0, b > 0$) 为概率密度, 则 a, b 应满足().

- (A) $2a + 3b = 4$ (B) $3a + 2b = 4$ (C) $a + b = 1$ (D) $a + b = 2$

【166】下列 4 个函数:

① $F(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

② $F(x) = \frac{1}{\pi} \arctan x + \frac{1}{2}$.

③ $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 0.5, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$

④ $F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1; \\ \frac{1}{16}(5x+7), & -1 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$

是分布函数的有().

- (A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 4 个

【167】设离散型随机变量 X 的分布律为 $P\{X=k\} = b\lambda^k$ ($k=1, 2, \dots$), 且 $b > 0$, 则 λ 为().

- (A) 大于 0 的任意常数 (B) $b+1$
(C) $\frac{1}{b+1}$ (D) $\frac{1}{b-1}$

【168】设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$, 密度函数为 $f(x) = af_1(x) + bf_2(x)$, 其中 $f_1(x)$ 是正态分布 $N(0, \sigma^2)$ 的密度函数, $f_2(x)$ 是参数为 λ 的指数分布的密度函数, 已知 $F(0) = \frac{1}{8}$, 则().

- (A) $a=1, b=0$ (B) $a=\frac{3}{4}, b=\frac{1}{4}$ (C) $a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{2}$ (D) $a=\frac{1}{4}, b=\frac{3}{4}$

【169】设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$, 密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} Ax(1-x), & 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

其中 A 为常数, 则 $F\left(\frac{1}{2}\right) = ()$.

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{5}$

【170】设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$, 则下列函数中也是某随机变量密度函数的为().

- (A) $f(2x)$ (B) $f(2-x)$ (C) $f^2(x)$ (D) $f(x^2)$



【171】设随机变量 X 服从指数分布, 则随机变量 $Y = \min\{X, 2\}$ 的分布函数().

- (A) 是连续函数 (B) 至少有两个间断点
(C) 是阶梯函数 (D) 恰好有一个间断点

【172】设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则随 σ 的增大, 概率 $P\{|X - \mu| < \sigma\}$ ().

- (A) 单调增大 (B) 单调减小 (C) 保持不变 (D) 增减不定

【173】设随机变量 X 服从正态分布 $N(0, 1)$, 对给定的 $\alpha \in (0, 1)$, 数 u_α 满足 $P\{X > u_\alpha\} = \alpha$, 若 $P\{|X| < x\} = \alpha$, 则 x 等于().

- (A) $u_{\frac{\alpha}{2}}$ (B) $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ (C) $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$ (D) $u_{1-\alpha}$

【174】设随机变量 X 服从正态分布 $N(u_1, \theta_1^2)$, 随机变量 Y 服从正态分布 $N(u_2, \theta_2^2)$, 且 $P\{|X - u_1| < 1\} > P\{|Y - u_2| < 1\}$, 则必有().

- (A) $\theta_1 < \theta_2$ (B) $\theta_1 > \theta_2$ (C) $u_1 < u_2$ (D) $u_1 > u_2$

【175】设随机变量 X 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} Ae^{-x}, & x > \lambda; \\ 0, & x \leq \lambda, \end{cases}$ 则概率 $P\{\lambda < X < \lambda + a\}$ ($a > 0$) 的值().

- (A) 与 a 无关, 随 λ 增大而增大 (B) 与 a 无关, 随 λ 增大而减小
(C) 与 λ 无关, 随 a 增大而增大 (D) 与 λ 无关, 随 a 增大而减小

【176】设 X 为随机变量, EX, EX^2 存在, 则().

- (A) $EX^2 < EX$ (B) $EX^2 > EX$ (C) $EX^2 < (EX)^2$ (D) $EX^2 > (EX)^2$

【177】设 X 为随机变量, $EX = \mu > 0, DX = \sigma^2 > 0$, 则对于任意常数 C , 有().

- (A) $E(X - C)^2 = EX^2 - C^2$ (B) $E(X - C)^2 = E(X - \mu)^2$
(C) $E(X - C)^2 < E(X - \mu)^2$ (D) $E(X - C)^2 > E(X - \mu)^2$

【178】设随机向量 (X, Y) 的分布函数为 $F(x, y)$, 边缘分布为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$, 则概率 $P\{X > x, Y > y\} =$ ().

- (A) $1 - F(x, y)$ (B) $1 - F_X(x) - F_Y(y)$
(C) $F(x, y) - F_X(x) - F_Y(y) + 1$ (D) $F_X(x) + F_Y(y) + F(x, y) - 1$

【179】设随机向量 (X, Y) 的分布函数为 $F(x, y)$, 则概率 $P\{X > a, Y > b\} =$ ().

- (A) $1 - F(a, b)$
(B) $1 - F(a, +\infty) - F(+\infty, b)$
(C) $F(a, b) - F(a, +\infty) - F(+\infty, b) + 1$
(D) $F(a, b) + F(a, +\infty) + F(+\infty, b) - 1$

【180】设随机变量 X 和 Y 相互独立且同分布. 已知 $P\{X = k\} = pq^{k-1}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$), 其中 $0 < p < 1, q = 1 - p$, 则 $P\{X = Y\} =$ ().

- (A) $\frac{p}{2-p}$ (B) $\frac{1-p}{2-p}$ (C) $\frac{p}{1-p}$ (D) $\frac{2p}{1-p}$

【181】已知随机向量 (X_1, X_2) 的联合密度为 $f_1(x_1, x_2)$, 设 $Y_1 = 2X_1, Y_2 = \frac{1}{3}X_2$,



则随机向量 (Y_1, Y_2) 的联合密度为 $f_2(y_1, y_2) = (\quad)$.

- (A) $f_1\left(\frac{y_1}{2}, 3y_2\right)$ (B) $\frac{3}{2}f_1\left(\frac{y_1}{2}, 3y_2\right)$ (C) $f_1\left(2y_1, \frac{y_2}{3}\right)$ (D) $\frac{2}{3}f_1\left(2y_1, \frac{y_2}{3}\right)$

【182】设随机向量 (X, Y) 与 (U, V) 有相同的边缘分布, 则 (\quad) .

- (A) (X, Y) 与 (U, V) 有相同的联合分布
(B) (X, Y) 与 (U, V) 不一定有相同的联合分布
(C) $X+Y$ 与 $U+V$ 有相同的分布
(D) $X-Y$ 与 $U-V$ 有相同的分布

【183】已知随机向量 (X, Y) 在区域 $D = \{(x, y) | -1 < x < 1, -1 < y < 1\}$ 上服从均匀分布, 则 (\quad) .

- (A) $P\{X+Y \geq 0\} = \frac{1}{4}$ (B) $P\{X-Y \geq 0\} = \frac{1}{4}$
(C) $P\{\max\{X, Y\} \geq 0\} = \frac{1}{4}$ (D) $P\{\min\{X, Y\} \geq 0\} = \frac{1}{4}$

【184】设随机向量 (X, Y) 的联合密度为 $f(x, y) = \frac{1 + \sin x \cos y}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$, 则 (\quad) .

- (A) X 服从正态分布, Y 不服从正态分布
(B) X 不服从正态分布, Y 服从正态分布
(C) X 与 Y 都服从正态分布
(D) X 与 Y 都不服从正态分布

【185】将一枚硬币重复掷 n 次, 以 X 和 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数, 则 X 和 Y 的相关系数等于 (\quad) .

- (A) -1 (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

【186】设随机变量 X 和 Y 都服从正态分布, 且它们不相关, 则 (\quad) .

- (A) X 与 Y 一定独立 (B) (X, Y) 服从二维正态分布
(C) X 与 Y 未必独立 (D) $X+Y$ 服从一维正态分布

【187】设随机变量 X 和 Y 的方差存在且不等于0, 则 $D(X+Y) = DX + DY$ 是 X 和 Y (\quad) .

- (A) 不相关的充分条件, 但不是必要条件
(B) 独立的充分条件, 但不是必要条件
(C) 不相关的充分必要条件
(D) 独立的充分必要条件

【188】设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 1)$ 独立同分布, 方差 $\sigma^2 > 0$, 令 $Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 则 (\quad) .

- (A) $\text{cov}(X_1, Y) = \frac{\sigma^2}{n}$ (B) $\text{cov}(X_1, Y) = \sigma^2$
(C) $D(X_1, Y) = \frac{n+2}{n} \sigma^2$ (D) $D(X_1, Y) = \frac{n+1}{n} \sigma^2$

【189】设随机向量 (X, Y) 的联合密度 $f(x, y)$ 满足 $f(x, y) = f(-x, y)$, 且 ρ_{XY} 存在, 则 $\rho_{XY} = (\quad)$.

- (A) 1 (B) 0 (C) -1 (D) -1 或 1.

【190】在长为 a 的直线段上任取两点, 则两点间距离的数学期望是 (\quad) .

- (A) a (B) $\frac{a}{2}$ (C) $\frac{a}{3}$ (D) $\frac{a}{4}$

【191】设随机变量 X 和 Y 满足 $D(X+Y) = D(X-Y+1)$, ρ_{XY} 存在, 则 (\quad) .

- (A) X, Y 相互独立 (B) X 与 Y 不相关
(C) $D(X) = 0$ (D) $D(X), D(Y)$ 中至少一个为 0

【192】设随机向量 (X, Y) 服从二维正态分布, 其边缘分布为 $X \sim N(1, 1)$, $Y \sim N(2, 4)$, X 与 Y 的相关系数为 $\rho_{XY} = -\frac{1}{2}$, 且概率 $P\{aX + bY \leq 1\} = \frac{1}{2}$, 则 (\quad) .

- (A) $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{4}$ (B) $a = \frac{1}{4}, b = -\frac{1}{2}$
(C) $a = -\frac{1}{4}, b = \frac{1}{2}$ (D) $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{4}$

【193】设随机变量 X 和 Y 独立同分布, 方差存在且不为零. 记 $U = X - Y, V = X + Y$, 则随机变量 U 与 V 必然 (\quad) .

- (A) 不独立 (B) 独立
(C) 相关系数不为零 (D) 相关系数为零

【194】已知随机变量 $X_n (n=1, 2, \dots)$ 相互独立且都在 $(-1, 1)$ 上服从均匀分布, 根据独立同分布中心极限定理有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\sum_{i=1}^n X_i \leq \sqrt{n}\right\} = (\quad)$ (结果用标准正态分布函数表示).

- (A) $\varphi(0)$ (B) $\varphi(1)$ (C) $\varphi(\sqrt{3})$ (D) $\varphi(2)$

【195】设 X_n 表示将一枚硬币随意抛掷 n 次出现正面的次数, 则 (\quad) .

- (A) $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{X_n - n}{\sqrt{n}} \leq x\right\} = \varphi(x)$ (B) $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{X_n - 2n}{\sqrt{n}} \leq x\right\} = \varphi(x)$
(C) $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{2X_n - n}{\sqrt{n}} \leq x\right\} = \varphi(x)$ (D) $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{2X_n - 2n}{\sqrt{n}} \leq x\right\} = \varphi(x)$

【196】设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, \bar{X} 是样本均值, 记

$$S_1^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, \quad S_2^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2,$$

$$S_3^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2, \quad S_4^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2,$$

则服从自由度为 $n-1$ 的 t 分布的随机变量是 (\quad) .

- (A) $t = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S_1}{\sqrt{n-1}}}$ (B) $t = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S_2}{\sqrt{n-1}}}$ (C) $t = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S_3}{\sqrt{n}}}$ (D) $t = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S_4}{\sqrt{n}}}$



【197】设随机变量 X 和 Y 都服从标准正态分布, 则().

- (A) $X+Y$ 服从正态分布 (B) X^2+Y^2 服从 χ^2 分布
(C) X^2 和 Y^2 都服从 χ^2 分布 (D) X^2/Y^2 服从 F 分布

【198】设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, X_1, X_2, \dots, X_n 是取自总体的简单随机样本, 样本均值为 \bar{X} , 样本方差为 S^2 , 则服从 $\chi^2(n)$ 的随机变量为().

- (A) $\frac{\bar{X}^2}{\sigma^2} + \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ (B) $\frac{n\bar{X}^2}{\sigma^2} + \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$
(C) $\frac{(\bar{X}-\mu)^2}{\sigma^2} + \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ (D) $\frac{n(\bar{X}-\mu)^2}{\sigma^2} + \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$

【199】设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 其中 σ^2 已知, 当样本容量固定时, 总体均值 μ 的置信区间的长度 L 与置信度 $1-\alpha$ 的关系是().

- (A) 当 $1-\alpha$ 减小时, L 变小 (B) 当 $1-\alpha$ 减小时, L 增大
(C) 当 $1-\alpha$ 减小时, L 不变 (D) 当 $1-\alpha$ 减小时, L 增减不定

【200】设 X_1, X_2, \dots, X_n 是取自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, 若 $\sum_{i=1}^{n-1} C(X_{i+1} - X_i)^2$ 是 σ^2 的无偏估计量, 则 $C=()$.

- (A) $\frac{1}{n-1}$ (B) $\frac{1}{n}$ (C) $\frac{1}{2(n-1)}$ (D) $\frac{1}{2n}$



填空题

高等数学

【201】函数 $y = \frac{10^x + 10^{-x}}{10^x - 10^{-x}} + 1$ 的反函数为 $y =$ _____.

【202】设 $f\left(\sin \frac{x}{2}\right) = 1 + \cos x + \tan x$, 则 $f(x) =$ _____.

【203】设 $f(x)$ 满足方程 $a f(x) + b f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{c}{x}$, 其中 a, b, c 为常数, 且 $|a| \neq |b|$, 则 $f(x) =$ _____.

【204】已知 $f(x) = \sin x$, $f[\varphi(x)] = 1 - x^2$, 函数 $\varphi(x)$ 的定义域为 _____.

【205】设 $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ \frac{1}{x}, & x < 0, \end{cases}$ 则 $f[f(x)]$ 的表达式为 _____.

【206】极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}} =$ _____.

【207】极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^{2x})}{\ln(1+e^{3x})} =$ _____.

【208】极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} [(x+2)e^{\frac{1}{x}} - x] =$ _____.

【209】极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+a)^{x+a} (x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}} =$ _____.

【210】极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 + n} =$ _____.

【211】极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} \right) =$ _____.

【212】极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^3} \right) =$ _____.

【213】极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1 \cdot 3} \right) \left(1 + \frac{1}{2 \cdot 4} \right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n(n+2)} \right) =$ _____.

【214】设函数

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x < 0; \\ ax + b, & 0 \leq x \leq 1; \\ \arctan x - \frac{\pi}{4}, & x > 1 \end{cases}$$

在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 则 a, b 的值为 _____.

【215】设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^{2n-1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1}$ 为连续函数, 则 a, b 的值



为_____.

【216】设 $f'(x_0)$ 存在, 则极限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2\Delta x) - f(x_0 + 3\Delta x)}{\Delta x} =$ _____.

【217】设

$$f(x) = \varphi(a + bx) - \varphi(a - bx),$$

其中 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 且在 a 点可导, 则 $f'(0) =$ _____.

【218】设 $f(x) = \begin{cases} (e^{x^2} - 1) \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 则 $f'(0) =$ _____.

【219】设曲线 $y = ax^2$ 与 $y = \ln x$ 相切, 则切点坐标为_____.

【220】设 $y = x^{a^x} + a^{x^x} + x^{x^a}$, 则 $y' =$ _____.

【221】设函数 $y = f(x)$ 由方程 $x^y = y^x$ 确定, 则 $\frac{dy}{dx} =$ _____.

【222】设函数 $y = f(x)$ 由方程 $y - xe^y = 1$ 确定, 则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0} =$ _____.

【223】设函数 $y = f(x)$ 由方程 $y \ln y - x + y = 0$ 确定, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线方程为_____.

【224】设 $f(x) = \begin{cases} \ln(1+x), & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ \frac{\sin^2 x}{x}, & x < 0, \end{cases}$ 则 $f'(x) =$ _____.

【225】设 $f(x) = 3x^3 + x^2 |x|$, 则 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数为_____.

【226】极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \cos(x-1)}{1 - \sin \frac{\pi}{2} x} =$ _____.

【227】极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}} =$ _____.

【228】极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2} =$ _____.

【229】极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{x \ln x} =$ _____.

【230】已知 $a > 0, b > 0, c > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}}{3} \right)^n =$ _____.

【231】极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2} (a^x + b^x) \right]^{\frac{2}{x}} =$ _____.

【232】极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}} =$ _____.

【233】极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{1 - \sqrt{1-x^2}} =$ _____.

【234】假设某商品的需求量 Q 是单价 P (单位: 元) 的函数,

$$Q = 12000 - 80P,$$

商品的总成本 C 是需求量 Q 的函数:

$$C = 25000 + 50Q,$$

每单位商品需纳税 2 元. 则使销售利润最大的商品单价为_____.

【235】设 $a > 1$, $f(t) = a^t - at$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的驻点为 $t(a)$, 则使 $t(a)$ 最小的 a 值为_____.

【236】 $\int \frac{x}{x^4 + 2x^2 + 5} dx =$ _____.

【237】 $\int e^{e^x + x} dx =$ _____.

【238】 $\int \frac{1}{(\sqrt[3]{x} + 1)\sqrt{x}} dx =$ _____.

【239】 $\int \sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}} dx =$ _____.

【240】 $\int \frac{2^x}{1 + 2^x + 4^x} dx =$ _____.

【241】 $\int \frac{\ln \ln x}{x} dx =$ _____.

【242】 $\int e^x \sin x dx =$ _____.

【243】 $\int \sec^3 x dx =$ _____.

【244】 $\int \frac{x^{3n-1}}{(x^{2n} + 1)^2} dx =$ _____.

【245】 $\int \frac{x^{11}}{x^8 + 3x^4 + 2} dx =$ _____.

【246】* $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4n^2 - 1}} \right) + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - n^2}} =$ _____.

【247】 $\int_{-3}^2 \min(2, x^2) dx =$ _____.

【248】设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1}, & x \geq 0; \\ \frac{1}{1+e^x}, & x < 0, \end{cases}$ 则 $\int_0^2 f(x-1) dx =$ _____.

【249】设 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 都在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 且 $\int_1^{x^3} f(t) dt = \int_1^x \varphi(t) dt$ 恒成立, 则 $\varphi(t)$ 由 $f(t)$ 所表达的函数形式为_____.

【250】 $\int_0^{+\infty} \min(e^{-x}, \frac{1}{2}) dx =$ _____.

【251】 $\int_{\frac{1}{e}}^e \frac{1}{x \cdot \sqrt[3]{\ln x}} dx =$ _____.

【252】已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-a}{x+a} \right)^x = \int_a^{+\infty} 4x^2 e^{-2x} dx$, 则 $a =$ _____.



【253】极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{x^2}^x \frac{\sin(xt)}{t} dt}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【254】曲线 $y = \int_0^x \tan t dt$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$) 的弧长为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

【255】长度为 $2a$ 的细线棒的线密度为 μ , 在其垂直平分线上距细线棒的距离为 a 处有一质量为 m 的质点, 设引力系数为 k , 则细线棒对质点的引力为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

【256】* 设空间直线 $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{\lambda}$ 与 $L_2: x+1=y-1=z$ 相交于一点, 则 $\lambda = \underline{\hspace{2cm}}.$

【257】* 等分两平面 $x+2y-z-1=0$ 和 $x+2y+z+1=0$ 间的夹角的平面方程为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

【258】* 已知两直线方程为 $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{-1}$ 与 $L_2: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$, 则过 L_1 且与 L_2 平行的平面方程为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

【259】* 过直线 $\begin{cases} 4x+2y+3z-6=0, \\ 2x+y=0, \end{cases}$ 且与球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 相切的平面方程为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

【260】* 函数 $f(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^4$ 在点 $(1, -1, 0)$ 处方向导数的最大值与最小值的平方和为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

【261】* 函数 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ 在点 $(1, -1, 1)$ 处沿球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ 在该点的外法线方向的方向导数 $\frac{\partial f}{\partial l} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【262】* 曲面 $x^2 + y^2 + z^2 - xy - 3 = 0$ 上同时垂直于平面 $z=0$ 和平面 $x+y-1=0$ 的切平面方程为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

【263】* 过直线 $\begin{cases} x+2y+z-1=0, \\ x-y-2z+3=0 \end{cases}$ 且平行于曲线 $\begin{cases} x^2+y^2=\frac{z^2}{2}, \\ x+y+2z=4 \end{cases}$ 在点 $(1, -1, 2)$ 处的切线的平面方程为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

【264】* 函数 $u = \ln(x + \sqrt{y^2 + x^2})$ 在点 $A(1, 0, 1)$ 处沿点 A 指向点 $B(3, -2, 2)$ 的方向导数为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

【265】设二元函数 f 具有连续的偏导数, 且 $f(1, 1)=1$, $f'_x(1, 1)=2$, $f'_y(1, 1)=3$, 如果 $\varphi(x) = f(x, f(x, x))$, 则 $\varphi'(1) = \underline{\hspace{2cm}}.$

【266】旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 被平面 $x + y + z = 4$ 截成一椭圆, 则坐标原点与这个椭圆上点的最长和最短距离分别为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

【267】函数 $f(x, y, z) = xyz$ 在约束条件 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a}$ ($x > 0, y > 0, z > 0, a > 0$) 下的极值为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

【268】区域 D 是以 $O(0, 0)$, $A(1, 2)$, $B(2, 1)$ 为顶点的三角形区域, 则二重积分



$$\iint_D x dx dy = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【269】设 $f(x, y) = \begin{cases} x^2 y, & 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x; \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ 其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \geq 2x\}$,

则 $\iint_D f(x, y) dx dy = \underline{\hspace{2cm}}.$

【270】设 D 是由直线 $y=x$, $y=-1$ 及 $x=1$ 围成的. 则 $\iint_D y[1 + xe^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}] dx dy =$

$\underline{\hspace{2cm}}.$

【271】设 D 是由直线 $y=x$, $y=1$, $x=0$ 所围成的平面区域, 则二重积分

$$\iint_D \sqrt{y^2 - xy} dx dy = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【272】设 $D = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, 则二重积分 $\iint_D |y - x^2| dx dy$

$= \underline{\hspace{2cm}}.$

【273】设 D 是由圆 $x^2 + y^2 = 1$, $x=0$, $y=0$ 围成的第一象限部分, 则二重积分 $I =$

$$\iint_D \frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2} dx dy = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【274】设 $D = \{(x, y) | y \geq 0, x^2 + y^2 \geq 1, x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$, 则二重积分

$$I = \iint_D xy dx dy = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【275】* 设空间区域 Ω 是由曲线 $\begin{cases} y^2 = 2z, \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面与平面 $z =$

$2, z=8$ 所围的立体, 则 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv = \underline{\hspace{2cm}}.$

【276】* 设球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq z$ 的任一点处的密度等于该点到原点的距离的平方, 则此球质心的竖坐标为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

【277】* 设 Σ 是曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$ ($R > 0$) 的外侧, 则

$$\oiint_{\Sigma} xz dy dz + xy dz dx + yz dx dy = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【278】* 设 L 是从点 $O(0, 0)$ 到点 $A(1, 1)$ 且在 OA 连线下方的任意简单曲线, 它与直线 OA 所围图形的面积为 S , 则

$$\int_L (2x^2 - y) dx + y^2 dy = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【279】* 设曲线 L 的极坐标方程为 $\rho = \rho(\theta)$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, 方向沿 θ 增大的方向, 则

$$\int_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【280】* 由曲线 $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ 围成的均匀薄板 ($\mu=1$) 对坐标原点的转动惯量为 $\underline{\hspace{2cm}}.$



【281】* 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{2^n}$ (p 是常数) 的敛散性为_____.

【282】* 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(an^2 + bn + c)^k}$ ($a > 0, b > 0$) 发散, 则 k 的取值范围是_____.

【283】* 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$ 的敛散性为_____.

【284】* 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n^k}$ 收敛, 则 k 的取值范围是_____.

【285】* 设有两条抛物线 $y = nx^2 + \frac{1}{n}$ 和 $y = (n+1)x^2 + \frac{1}{n+1}$, 记它们交点的横坐标的绝对值为 a_n . 这两条抛物线所围成的平面图形的面积为 S_n , 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n}{a_n}$ 的和为_____.

【286】* 函数 $f(x) = 1$ ($0 \leq x \leq 1$) 的正弦级数为 $f(x) =$ _____.

【287】* 周期为 2π 的函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上定义为

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & -\pi \leq x < 0; \\ x - \pi, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

设 $f(x)$ 的傅立叶级数的和函数为 $S(x)$, 则 $S(2\pi) =$ _____.

【288】* 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数, 在 $[-1, 1]$ 上定义为

$$f(x) = \begin{cases} 2, & -1 < x \leq 0; \\ x^3, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

则 $f(x)$ 的傅立叶级数在 $x=1$ 处收敛于_____.

【289】方程 $(1+y^2)xdx + (1+x^2)ydy = 0$ 的通解为_____.

【290】微分方程 $xy \frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$ 满足条件 $y|_{x=e} = 2e$ 的特解为_____.

【291】已知连续函数 $f(x)$ 满足条件

$$f(x) = \int_0^{3x} f\left(\frac{t}{3}\right) dt + e^{2x},$$

则 $f(x) =$ _____.

【292】已知可微函数 $f(x)$ 满足

$$\int_1^x \frac{f(t)}{f^2(t) + t} dt = f(x) - 1,$$

则 $f(x) =$ _____.

【293】设函数 $y = y(x)$ 满足条件

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 4y = 0, \\ y(0) = 2, y'(0) = -4, \end{cases}$$

则广义积分 $\int_0^{+\infty} y(x) dx =$ _____.

【294】设函数 $y = y(x)$ 满足条件



$$\begin{cases} y'' - 7y' + 12y = 0, \\ y(0) = 1, y'(0) = 3, \end{cases}$$

则由曲线 $y=y(x)$, 直线 $x=0$, $y=e^3$ 所围成的平面图形的面积 $S=$ _____.

【295】设二阶常系数线性微分方程

$$y'' + ay' + by = ce^x$$

的一个特解为 $y=e^{2x}+(1+x)e^x$, 则常数 a, b, c 分别为_____.

【296】已知二阶常系数非齐次线性方程

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

有三个特解:

$$y_1 = xe^x + e^{2x}, \quad y_2 = xe^x + e^{-x}, \quad y_3 = xe^x + e^{2x} - e^{-x},$$

则常数 p, q 的值为_____.

【297】已知二阶常系数非齐次线性方程

$$y'' + \alpha y' + \beta y = \gamma e^x$$

有特解 $y=2e^{2x}+(1+x)e^x$, 则常数 α, β, γ 依次为_____.

【298】设 D 是由曲线 $y=4x^2$ 和 $y=x^2$ 在第一象限所围成的区域, 则 $\iint_D xe^{-y} dx dy =$ _____.

【299】设 D 为全平面, 且 $\iint_D A e^{-2x^2+2xy-y^2} dx dy = 1$, 则常数 $A =$ _____.

【300】设 $f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 则 $\int_0^1 \int_0^1 f_{xy}''(x, y) dx dy =$ _____.

线性代数

【301】 $n+1$ 阶行列式

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ c_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} \quad (a_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, n)$$

的值为_____.

【302】 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n & n \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【303】 n 阶行列式



$$D_n = \begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【304】方程

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & (n-1)-x \end{vmatrix} = 0$$

的根为_____.

【305】设 a, b, c 是方程 $x^3 + px + q = 0$ 的根, 则 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【306】设 $D = \begin{vmatrix} c & a & d & 1 \\ a & c & d & 1 \\ a & c & b & 1 \\ c & a & b & 1 \end{vmatrix}$, 则 $A_{11} + A_{21} + A_{31} + A_{41} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【307】设 $A, B, A+B$ 都是可逆矩阵, 则 $(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【308】设 A 为 n 阶方阵, 且 $2A(A-E) = A^3$, 则 $(E-A)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【309】设 A, B 分别为 m 阶和 n 阶方程, 且 $|A| = a, |B| = b, C = \begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}$, 则 $|C| = \underline{\hspace{2cm}}.$

【310】设 A 为三阶方阵, 且

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

则 A 的伴随矩阵 A^* 的逆矩阵 $(A^*)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【311】已知实矩阵 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ 满足条件: (1) $a_{ij} = A_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$), 其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式; (2) $a_{11} \neq 0$, 则 $|A| = \underline{\hspace{2cm}}.$

【312】设 A, B 都是 n 阶矩阵, 且 $ABA = B^{-1}$, 则 $r(E - AB) + r(E + AB) = \underline{\hspace{2cm}}.$

【313】设 A 为 n 阶可逆矩阵, 且 A 的各行元素之和都是常数 b ($b \neq 0$), 则 A^{-1} 的各行元素之和为_____.

【314】设 3 阶矩阵 A 满足 $A\alpha_i = i\alpha_i$ ($i = 1, 2, 3$), 其中 $\alpha_1 = (1, 2, 2)^T$, $\alpha_2 = (2, -2, 1)^T$, $\alpha_3 = (-2, -1, 2)^T$, 则 $A = \underline{\hspace{2cm}}.$

【315】设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix},$$

则 $A^{100} =$ _____.

【316】设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 n 阶矩阵, C 是 $n \times m$ 矩阵, 且 $AB=A$, $BC=O$, $r(A)=n$, 则行列式 $|CA-B|$ 的值为 _____.

【317】设 $\alpha_1 = (1, 1, 1)^T$, $\alpha_2 = (1, 2, 3)^T$, $\alpha_3 = (1, 3, t)^T$ 线性相关, 则 $t =$ _____.

【318】已知向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 2, 1)^T$, $\alpha_2 = (1, 0, 0, 2)^T$, $\alpha_3 = (-1, -4, -8, \lambda)^T$ 线性相关, 则 $\lambda =$ _____.

【319】设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 向量组 $l\alpha_2 - \alpha_1, m\alpha_3 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_3$ 线性无关, 则常数 l 与 m 之间的关系为 _____.

【320】设向量组 $\alpha_1 = (a, 2, 10)^T$, $\alpha_2 = (-2, 1, 5)^T$, $\alpha_3 = (-1, 1, 4)^T$, $\beta = (1, b, c)^T$, β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 但表示不唯一, 则 a, b, c 的关系为 _____.

【321】非齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = \lambda - 3, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = -2 \end{cases}$$

有无穷多解, 则 $\lambda =$ _____.

【322】非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 - x_2 - k_1x_3 + 15x_4 = 3, \\ x_1 - 5x_2 - 10x_3 + 12x_4 = k_2 \end{cases}$$

有无穷多解, 则 k_1, k_2 的值为 _____.

【323】已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0, \\ a^2x_1 + b^2x_2 + c^2x_3 = 0 \end{cases}$$

仅有零解, 则 a, b, c 的关系为 _____.

【324】设有四元线性方程组 $Ax=b$, 系数矩阵 A 的秩为 3, 又已知 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 为 $Ax=b$ 的三个解, 且 $\beta_1 = (2, 0, 0, 2)^T$, $\beta_2 + \beta_3 = (0, 2, 2, 0)^T$, 则 $Ax=b$ 的通解为 _____.

【325】已知非齐次线性方程组

$$(I) \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_4 = -6, \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 3, \end{cases} \quad (II) \begin{cases} x_1 + mx_2 - x_3 - x_4 = -5, \\ nx_2 - x_3 - 2x_4 = -11, \\ x_3 - 2x_4 = -t + 1 \end{cases}$$

同解, 则 m, n, t 的值为 _____.

【326】已知方程组



$$(I) \begin{cases} x_1 - 2x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + ax_3 - 5x_4 = b, \\ x_1 + x_2 + cx_3 - 2x_4 = d, \end{cases} \quad (II) \begin{cases} x_2 + x_4 = -1, \\ x_3 + x_4 = -1, \\ x_1 + ex_2 + x_3 + fx_4 = -4 \end{cases}$$

同解, 则 a, b, c, d, e, f 的值依次为_____.

【327】设

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 2 \\ 0 & a-1 & 1 \\ a & a & a+3 \end{bmatrix}.$$

若齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非零解, 则向量组

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (1, 1, 1, 3)^T, & \alpha_2 &= (1, 3, -5, -1)^T, \\ \alpha_3 &= (3, -1, 9, a+11)^T, & \alpha_4 &= (4, a, 6, 10)^T \end{aligned}$$

的线性相关性为_____.

【328】设矩阵 A 满足 $A^2 - 3A + 2E = O$, 其中 E 是单位矩阵, 则 A 的特征值为_____.

【329】设有 4 阶方阵 A 满足条件 $|\sqrt{2}E + A| = 0$, $AA^T = 2E$, $|A| < 0$, 则 A^* 的一个特征值为_____.

【330】设 A 为三阶实对称矩阵, 且 $A^2 + 2A = O$, 秩 $(A) = 2$, 则 A 的全部特征值为_____.

【331】已知 $\xi = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 是矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{bmatrix}$ 的一个特征向量, 则参数 a, b =_____.

【332】已知向量 $\alpha = (1, k, 1)^T$ 是矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

的逆矩阵 A^{-1} 的特征向量, 则常数 k 的值为_____.

【333】设矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{bmatrix},$$

且 $|A| = -1$, 又设 A 的伴随矩阵 A^* 有特征值 λ_0 , 属于 λ_0 的特征向量为 $\alpha = (-1, -1, 1)^T$, 则 a, b, c 及 λ_0 的值为_____.

【334】设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$ 可逆, 向量 $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{bmatrix}$ 是矩阵 A^* 的一个特征向量, λ 是 α

对应的特征值, 则 a, b 和 λ 的值为_____.

【335】设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & a & 3 \\ 6 & -6 & b \end{bmatrix}$ 有特征值 $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 4$, 则参数 a, b 的值为_____.

【336】设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量, 则 x, y 应满足的条件为_____.

【337】设三阶矩阵满足 $A\alpha_i = i\alpha_i$ ($i=1, 2, 3$), 其中 $\alpha_1 = (1, 2, 2)^T, \alpha_2 = (2, -2, 1)^T, \alpha_3 = (-2, -1, 2)^T$, 则矩阵 $A =$ _____.

【338】设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ x & 4 & y \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量, $\lambda = 2$ 是 A 的二重特征值, 则 x 和 y 的值为_____.

【339】设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -k & -1 & k \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ 可相似对角化, 则 $k =$ _____.

【340】已知 λ_0 是 $A = \begin{bmatrix} 1 & a & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ 的二重特征值, 则 a 与 λ_0 的值为_____.

【341】设矩阵 A 与 B 相似, 其中

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix},$$

则 x 和 y 的值为_____.

【342】设矩阵 A 与 B 相似, 其中

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ -3 & 3 & -1 \\ -15 & 8 & -6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix},$$

则 a, b, c 的值为_____.

【343】设 3 阶矩阵 A 的特征值分别为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$, 则行列式 $|A^3 - 5A^2|, |A - 5E|, |A^* - 2A|$ 分别为_____.

【344】设 A 为三阶实对称矩阵, 特征值分别为 1, 2, -1, 矩阵 A 的属于特征值 1, 2 的特征向量分别是 $\alpha_1 = (1, 1, 1)^T, \alpha_2 = (1, 0, -1)^T$, 向量 $\beta = (-1, 8, -1)^T$, 则 $A^{100}\beta =$ _____.

【345】 A 是 3 阶实对称矩阵, $A^2 = E$, 秩 $(A + E) = 2$, 则 A 的相似对角形矩阵为_____.

【346】设二次型



$$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\alpha x_1 x_2 + 2\beta x_2 x_3 + 2x_1 x_3$$

经正交变换 $\mathbf{X} = \mathbf{P}\mathbf{Y}$ 化成 $f = y_2^2 + 2y_3^2$, 其中 $\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3)^T$ 和 $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, y_3)^T$ 是三维列向量, \mathbf{P} 是三阶正交矩阵. 则常数 α, β 为_____.

【347】设二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X} = ax_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 2bx_1 x_3 \quad (b > 0),$$

其中二次型的矩阵 \mathbf{A} 的特征值之和为 1, 特征值之积为 -12, 则 a, b 的值为_____.

【348】已知二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2ax_2 x_3 \quad (a > 0)$$

通过正交变换化成标准形

$$f = y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2,$$

则参数 $a =$ _____.

【349】设二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 2\lambda x_1 x_2 - 2x_1 x_3 + 4x_2 x_3$$

为正定二次型, 则 λ 的取值范围是_____.

【350】设有 n 元实二次型

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 + a_1 x_2)^2 + (x_2 + a_2 x_3)^2 + \dots + (x_{n-1} + a_{n-1} x_n)^2 + (x_n + a_n x_1)^2,$$

其中 a_i ($i=1, 2, \dots, n$) 为实数. 已知二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为正定二次型, 则 a_1, a_2, \dots, a_n 满足的条件是_____.

概率论与数理统计*

【351】设两个相互独立的事件 A 与 B 至少有一个发生的概率为 $\frac{8}{9}$, A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等, 则 $P(A) =$ _____.

【352】事件 A, B, C 相互独立, $P(A)=a, P(B)=b$, 如果事件 C 发生必然导致 A 与 B 同时发生, 则 A, B, C 都不发生的概率为_____.

【353】设事件 A, B, C 两两独立, 且 3 个事件不能同时发生, 且它们的概率相等, 则 $P(A \cup B \cup C)$ 的最大值为_____.

【354】随机地将 15 名新生平均分配到三个班级中去, 这 15 名新生中有 3 名是优秀生, 则每个班级各分配到一名优秀生的概率为_____.

【355】从 0, 1, 2, 3, \dots , 9 十个数字中任意选出三个不同的数字, 则事件 $A_1 = \{\text{三个数字中不含 0 和 5}\}$, $A_2 = \{\text{三个数字中不含 0 或 5}\}$ 的概率分别为_____.

【356】考虑一元二次方程 $x^2 + Bx + C = 0$, 其中 B, C 分别是将一枚骰子接连掷两次先后出现的点数, 则该方程有实根的概率 $p =$ _____.

【357】设有大小相同、标号分别为 1, 2, 3, 4, 5 的 5 个球, 同时有标号为 1, 2, \dots , 10 的 10 个空盒, 将 5 个球放入这 10 个空盒中, 假设每个球放入任何一个盒子的可能性

都是一样的,并且每个空盒可以同时容纳5个以上的球,事件 $A=\{\text{某指定的五个盒子中各有一个球}\}$ 的概率为_____.

【358】任意取两个正的真分数,则它们的乘积不大于 $\frac{1}{4}$ 的概率为_____.

【359】在长度为 a 的线段内任取两点将其分成三段,它们可以构成一个三角形的概率为_____.

【360】将一枚硬币重复掷5次,则正面、反面都至少出现两次的概率为_____.

【361】已知每次试验“成功”的概率为 p ,现进行 n 次独立试验,则在全部失败的条件下,“成功”不止一次的概率为_____.

【362】设 X 服从参数为 λ 的指数分布,对 X 作3次独立重复观察,至少有一次观测值大于2的概率为 $\frac{7}{8}$,则 $\lambda=$ _____.

【363】设随机变量 $X \sim B(2, p)$, $Y \sim B(3, p)$,若 $P\{X \geq 1\} = \frac{5}{9}$,则 $P\{Y \geq 1\} =$ _____.

【364】设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma > 0$,则其分布函数 $F(x)$ 的曲线的拐点坐标必为_____.

【365】设随机变量 X 的密度函数 $f(x) = Ae^{-|x|}$ ($-\infty < x < +\infty$),则 $A =$ _____.

【366】设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ A \sin x + B, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2}; \\ 1, & x > \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

则 A, B 的值依次为_____.

【367】设随机变量 X 服从正态分布,其概率密度为

$$f(x) = ke^{-x^2+2x-1} \quad (-\infty < x < +\infty),$$

则常数 $k=$ _____.

【368】一射手对同一目标独立地进行了4次射击,以 X 表示命中目标的次数,如果 $P\{X \geq 1\} = \frac{80}{81}$,则 $P\{X=1\} =$ _____.

【369】假设一部机器在一天内发生故障的概率为0.2,机器发生故障时全天停止工作.若一周5个工作日里无故障,可获利润10万元;发生一次故障仍可获利润5万元;发生二次故障所获利润0元;发生三次或三次以上故障就要亏损2万元,则一周内期望利润为_____.

【370】某仪器装有3只独立工作的同型号电子元件,其寿命(单位:小时)都服从同一指数分布,分布密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{600}e^{-\frac{x}{600}}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$



则在仪器使用的最初 200 小时内,至少有一只电子元件损坏的概率 $\alpha =$ _____.

【371】设随机变量 X 在 $[2, 5]$ 上服从均匀分布,现在对 X 进行三次独立观测,则至少有两观测值大于 3 的概率为_____.

【372】设随机变量 X 和 Y 同分布, X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2, & 0 < x < 2; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

已知事件 $A = \{X > a\}$ 和事件 $B = \{Y > a\}$ 独立,且 $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$, 则常数 $a =$ _____.

【373】设连续型随机变量 X 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

则随机变量 $Y = \min\{X, 2\}$ 的分布函数为_____.

【374】设随机变量 X 在区间 $(1, 2)$ 上服从均匀分布,则 $Y = e^{2X}$ 的概率密度 $f(y) =$ _____.

【375】设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & \text{若 } x \in [1, 8]; \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

$F(x)$ 是 X 的分布函数,则随机变量 $Y = F(X)$ 的分布函数为_____.

【376】设随机变量 X 和 Y 均服从 $N(\mu, \sigma^2)$, 且

$$P\{\max\{X, Y\} > \mu\} = a \quad (0 < a < 1),$$

则

$$P\{\min\{X, Y\} \leq \mu\} = \text{_____}.$$

【377】设 (X, Y) 的联合密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} a \sin(x+y), & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{4}; \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

则 Y 的边缘密度 $f_Y(y) =$ _____.

【378】在区间 $(0, 1)$ 内随机地取两个数,则这两个数之差的绝对值小于 $\frac{1}{2}$ 的概率为_____.

【379】设随机变量 X 和 Y 的联合分布函数为

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-x} + e^{-y} + e^{-(x+y)}, & x > 0, y > 0; \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

则 X 和 Y 的联合密度函数 $f(x, y) =$ _____.

【380】设 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, X 与 Y 相互独立,则 $Z = X - Y$ 的概率密度函数 $f_Z(z) =$ _____.

【381】设随机变量 X 和 Y 均服从 $B\left(1, \frac{1}{2}\right)$, 且 $D(X+Y) = 1$, 则 X 与 Y 的相关系

数 $\rho =$ _____.

【382】设 (X, Y) 的联合密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |y| \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

则 $\text{cov}(X, Y) =$ _____.

【383】若 X_1, X_2, X_3 两两不相关, 且 $DX_i = 1$ ($i = 1, 2, 3$), 则 $D(X_1 + X_2 + X_3) =$ _____.

【384】要使 $E[Y - (aX + b)]^2$ 达到最小, 则常数 a, b 的值为 _____.

【385】假设随机变量 X_1, X_2, X_3, X_4 相互独立, 且同分布

$$P\{X_i = 0\} = 0.6, \quad P\{X_i = 1\} = 0.4 \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

则行列式 $X = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{vmatrix}$ 的概率分布为 _____.

【386】某箱装有 100 件产品, 其中一、二和三等品分别为 80、10 和 10 件, 现在从中随机抽取一件, 记

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{若抽到 } i \text{ 等品;} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3),$$

则随机变量 X_1 与 X_2 的联合分布为 _____.

【387】假设随机变量 X 和 Y 在圆域 $x^2 + y^2 \leq r^2$ 上服从联合均匀分布, 则 X 和 Y 的相关系数 $\rho =$ _____.

【388】设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 < x < y; \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

则随机变量 X 的密度 $f_X(x) =$ _____.

【389】设随机变量 X 在区间 $(0, 1)$ 上服从均匀分布, 在 $X = x$ ($0 < x < 1$) 的条件下, 随机变量 Y 在区间 $(0, x)$ 上服从均匀分布, 则随机变量 X 和 Y 的联合概率密度为 _____.

【390】设随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & |y| < x, 0 < x < 1; \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

则条件密度 $f(x|y) =$ _____.

【391】假设随机点 (X, Y) 在区域

$$G = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq a\}$$

上均匀分布, 则 X 的密度函数 $f_1(x) =$ _____.

【392】二维连续型随机向量 (X, Y) 服从区域 D 上的均匀分布, $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$. 令 $Z = \min\{X, Y\}$, 则 Z 的期望 $EZ =$ _____.

【393】设 X 与 Y 独立, 且都服从区间 $(0, a)$ 上的均匀分布, 则 $Z = X/Y$ 的分布密度 $f_Z(z) =$ _____.

【394】设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且分布密度分别为



$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, & 0 < x < +\infty; \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2}, & 0 < y < +\infty \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

则随机变量 $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ 的分布密度 $f_Z(z) =$ _____.

【395】设 $X \sim N(0, \sigma^2)$, $Y \sim N(0, \sigma^2)$, 且 X 与 Y 相互独立, 则 $E(\sqrt{X^2 + Y^2}) =$ _____.

【396】设总体 $X \sim N(0, 2^2)$, X_1, X_2, \dots, X_{15} 是来自总体 X 的样本, 则统计量

$$Y = \frac{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_{10}^2}{2(X_{11}^2 + X_{12}^2 + \dots + X_{15}^2)}$$

服从的分布是 _____.

【397】设 X_1, X_2, X_3, X_4 是来自正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, 则统计量

$$Y = \frac{X_3 - X_4}{\sqrt{(X_1 - \mu)^2 + (X_2 - \mu)^2}}$$

服从的分布是 _____.

【398】设总体 $X \sim N(a, 2)$, $Y \sim N(b, 2)$, 并且独立, 由分别来自总体 X 和 Y 的容量分别为 m 和 n 的简单随机样本得样本方差 S_X^2 和 S_Y^2 , 则统计量

$$T = \frac{1}{2}[(m-1)S_X^2 + (n-1)S_Y^2]$$

服从的分布是 _____.

【399】设 $\hat{\theta}_i = \hat{\theta}_i(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ($i=1, 2, \dots, k$) 都是总体 X 的分布中未知参数 θ 的无偏估计量, 如果 $\hat{\theta} = \sum_{i=1}^k C_i \hat{\theta}_i$ 也是 θ 的无偏估计量, 则常数 C_1, C_2, \dots, C_k 应满足的条件是 _____.

【400】设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 其中参数 σ^2 未知, 记

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, Q^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2,$$

则对假设 $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$, 在 μ 已知时使用 χ^2 统计量为 _____.



::::: 解 答 题 :::::

高等数学

【401】设 $f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 2x$, $x \neq 0$, $x \neq 1$, 求 $f(x)$.

【402】设 $f\left(\frac{2x+1}{2x-2}\right) - \frac{1}{2}f(x) = x$, 求 $f(x)$.

【403】设 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 1; \\ x, & x \geq 1, \end{cases} \varphi(x) = \begin{cases} x+2, & x < 0; \\ x^2-1, & x \geq 0, \end{cases}$ 求 $f[\varphi(x)]$.

【404】设 $f_n(x) = \underbrace{f(f(\cdots f(x)))}_{n \text{ 次}}$, 若 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 求 $f_n(x)$.

【405】求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(4\pi \sqrt{n^2+1})$.

【406】求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n}$, 其中 a_1, a_2, \cdots, a_m 是 m 个正数.

【407】求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} [(n+1)^k - n^k]$, $0 < k < 1$.

【408】已知 $0 < x_n < 1$, $n=1, 2, \cdots$, $x_{n+1} = -x_n^2 + 2x_n$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

【409】已知 $x_1 = \sqrt{a}$, $x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}$, \cdots , $x_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \cdots + \sqrt{a}}}$, $a > 0$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

【410】设 $a > 0$, $x_1 > 0$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

【411】求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sin^4 x}$.

【412】求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x) - x + \frac{1}{2}x^2}{x^2(e^{x+x^4} - 1)}$.

【413】设 $f(x)$ 在 $[0, 2a]$ 上连续, 且 $f(0) = f(2a)$, 证明: 在 $[0, a]$ 内至少存在一点 ξ , 使得 $f(\xi) = f(\xi+a)$.

【414】设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $a < c < d < b$, 证明: 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$mf(c) + nf(d) = (m+n)f(\xi),$$

其中 m, n 为任意正数.

【415】设

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$



函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导, 且 $F(x)=f[\varphi(x)]$, 求 $F'(0)$.

【416】设

$$f(x) = \begin{cases} \sin x + 2ae^x, & x < 0; \\ 9\arctan x + 2b(x-1)^3, & x \geq 0, \end{cases}$$

确定 a, b 的值, 使 $f'(0)$ 存在.

【417】设函数 $f(x)$ 可导且 $f(x) > 0$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} [\ln f(a + \frac{1}{n}) - \ln f(a)]$.

【418】求过点 $(2, 0)$ 且与曲线 $y=2x-x^3$ 相切的直线方程.

【419】求曲线 $y=x^2$ 与 $y=\frac{1}{x}$ 的公切线方程.

【420】设 $f(x) = \begin{cases} x^2 g(x), & x \leq 0; \\ \frac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x > 0, \end{cases}$ 其中 $g(x)$ 是可导函数, 求 $f'(x)$.

【421】确定 a, b, c , 使得当 $x \rightarrow 0$ 时, $ax \sin x + b \cos x + c$ 是与 x^4 等价的无穷小量.

【422】求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{4} - \arctan \frac{x+1}{x-1} \right)^{\frac{1}{x}}$.

【423】设 $f(x)$ 二阶连续可导, 已知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x + x^2 + \frac{f(x)}{x} \right)^{\frac{1}{x}} = e^3,$$

求 $f(0), f'(0), f''(0)$ 及 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{f(x)}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$.

【424】由方程 $x^3 + 2y^3 - 6axy = 0$ 确定的隐函数 $y=f(x)$ 满足 $f(2a)=2a$ ($a \neq 0$), 证明: $x=2a$ 为驻点, 并判定 $x=2a$ 是否为极值点, 如果是, 是何种极值点?

【425】设函数 $f(x)$ 满足条件: $af(x) + b f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{c}{x}$, 其中 a, b, c 为常数, 且 $|a| > |b|, c > 0$. 求 a, b 满足什么条件时 $f(x)$ 有极值, 并求出相应的极值点.

【426】设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续可微, 对 $[0, 1]$ 上每一个 x , $f(x)$ 的值都在 $(0, 1)$ 内, 且 $f'(x) \neq 1$, 证明: 在 $(0, 1)$ 内有且仅有一个 x , 使 $f(x)=x$.

【427】设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 内可导, 当 $x > a$ 时, $f'(x) > k > 0$ (k 为常数), 如果 $f(a) < 0$, 则方程 $f(x)=0$ 在 $\left[a, a - \frac{f(a)}{k}\right]$ 内有且仅有一个实根.

【428】设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0)=0, f\left(\frac{1}{2}\right)=1, f(1)=-1$, 求证: 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$.

【429】证明: $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) \geq \sqrt{1+x^2}$.

【430】设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, 且 $|f(x)| \leq a, |f''(x)| \leq b$, 其中 a, b 都是非负常数, c 是 $(0, 1)$ 内任意一点, 证明 $|f'(c)| \leq 2a + \frac{b}{2}$.

【431】计算 $\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}} dx$.



【432】计算 $\int \frac{dx}{x \ln x (\ln^2 x + 1)}$.

【433】计算 $\int \frac{1}{1 + \tan x} dx$.

【434】计算 $\int \frac{dx}{\sin(2x) + 2\sin x}$.

【435】计算 $\int \frac{x \cos^4 \frac{x}{2}}{\sin^3 x} dx$.

【436】计算 $\int e^x \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} dx$.

【437】设 $\frac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 求 $I = \int x^3 f'(x) dx$.

【438】设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数, 且当 $x \geq 0$ 时 $f(x)F(x) = \frac{x e^x}{2(1+x)^2}$, 已知 $F(0) = 1$, $F(x) > 0$, 求 $f(x)$.

【439】设 $f(\sin^2 x) = \frac{x}{\sin x}$, 求 $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} f(x) dx$.

【440】计算 $\int_0^x f(t)g(x-t)dt$. 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x$, 而 $g(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2}; \\ 0, & x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

【441】计算 $\int_{-1}^1 \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}} dx$.

【442】计算 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \arctan e^x dx$.

【443】计算定积分 $\int_0^{\pi} \frac{x \sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x} dx$.

【444】讨论广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} (|x| + ax)e^{-x} dx$ 的敛散性, 收敛时求出其值.

【445】已知 $f(x)$ 连续, $\int_0^x t f(x-t) dt = 1 - \cos x$, 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$.

【446】设 $f(x)$ 连续, $\int_0^x t f(2x-t) dt = \frac{1}{2} \arctan x^2$, 已知 $f(1) = 1$, 求 $\int_1^2 f(x) dx$.

【447】已知曲线 $y = a\sqrt{x}$ ($a > 0$) 与曲线 $y = \ln \sqrt{x}$ 在点 (x_0, y_0) 处有公共切线, 求:

- (1) 常数 a 及切点 (x_0, y_0) ;
- (2) 两曲线与 x 轴围成的平面图形面积 S ;
- (3) 此图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积 V_x .

【448】有一半径为 4 m 的半球形水池蓄满了水, 现在要将水全部抽到距水池原水面 6 m 高的水箱中, 求需做多少功.

【449】边长为 a 和 b 的矩形薄板 ($a > b$), 放置于与液面成 α 角的液体中, 长边平行于液面且位于深 h 处, 设液体的比重为 σ , 求薄板所受的压力.



【450】设有一均匀细杆质量为 M , 长为 l , 在与杆的一端垂直距离为 a 单位处有一质量为 m 的质点, 求细杆对质点的引力.

【451】已知 $f(x)$ 是在 $[a, b]$ 上递增的连续函数, 证明: 至少存在一点 $\xi \in [a, b]$, 使得

$$\int_a^b f(x) dx = f(a)(\xi - a) + f(b)(b - \xi).$$

【452】设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 且 $g(x) \geq 0$ (或 $g(x) \leq 0$), 证明:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx \quad (a \leq \xi \leq b).$$

【453】设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且 $g'(x)$ 连续, $g'(x) \geq 0$. 证明: 至少存在一点 $\xi \in [a, b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b)\int_a^b f(x)dx + g(a)\int_a^\xi f(x)dx.$$

【454】证明: $\int_0^{2\pi} f(|\cos x|)dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|)dx.$

【455】证明: $\int_0^1 \ln f(x+t)dt = \int_0^x \ln \frac{f(1+t)}{f(t)}dt + \int_0^1 \ln f(t)dt.$

【456】* 求过点 $M(-1, 0, 2)$, 平行于平面 $\pi: 3x-4y+z-5=0$ 且与直线 $L: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$ 相交的直线方程.

【457】* 判断下列两直线

$$L_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}, \quad L_2: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}$$

是否在同一平面上. 若在同一平面上则求交点, 若不在同一平面上则求两直线之间的最短距离.

【458】设 $z=f(x, y)$ 由方程 $F(u, v)=0$ 确定, 其中 $u=x+y+z, v=x^2+y^2+z^2$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}.$

【459】已知

$$xy = xf(z) + yg(z), \quad xf'(z) + yg'(z) \neq 0,$$

其中 $z=z(x, y)$ 是 x 和 y 的函数, 证明:

$$[x - g(z)] \frac{\partial z}{\partial x} = [y - f(z)] \frac{\partial z}{\partial y}.$$

【460】已知函数 $u=u(x, y)$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0.$$

(1) 试选择参数 α, β , 利用变换 $u(x, y) = v(x, y) \cdot e^{\alpha x + \beta y}$ 将原方程变形, 使新方程中不出现一阶偏导数项;

(2) 再令 $\xi = x+y, \eta = x-y$, 使新方程变换形式.



【461】求函数 $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2$ 在椭圆域 $D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1 \right\}$ 上的最大值和最小值.

【462】求由方程 $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8zy - z + 8 = 0$ 所确定的隐函数 $z = z(x, y)$ 的一个极大值和一个极小值.

【463】当 $x > 0, y > 0, z > 0$ 时, 求函数 $f(x, y, z) = \ln x + 2 \ln y + 3 \ln z$ 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 6R^2$ 上的最大值, 并由此证明: 当 a, b, c 为正实数时, 成立

$$ab^2c^3 \leq 108 \left(\frac{a+b+c}{6} \right)^6.$$

【464】* 计算三重积分 $I = \iiint_{\Omega} (x+y+z) dx dy dz$, 其中 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 及三个坐标平面所围成的区域.

【465】* 设 $\Omega = \left\{ (x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$, 计算 $\iiint_{\Omega} z^2 dv$.

【466】计算二重积分 $\iint_D y dx dy$, 其中积分区域 D 是由 x 轴、 y 轴及曲线 $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$ 围成的, $a > 0, b > 0$.

【467】计算二重积分 $\iint_D |y - \cos x| dx dy$, 其中

$$D = \left\{ (x, y) \mid -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq 1 \right\}.$$

【468】计算二重积分 $I = \int_1^2 dx \int_{\sqrt{x}}^x \sin \frac{\pi x}{2y} dy + \int_2^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 \sin \frac{\pi x}{2y} dy$.

【469】计算二重积分 $I = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dy \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} dx$.

【470】计算 $\iint_D y dx dy$, 其中 D 是由 $x = -2, y = 0, y = 2$ 以及曲线 $x = -\sqrt{2y - y^2}$ 所围成的平面区域.

【471】计算 $\iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2} d\sigma$, 其中 D 是由 $x^2 + y^2 = 1$ 的上半圆与 $x^2 + y^2 = 2y$ 的下半圆围成的区域.

【472】* 在过点 $O(0, 0)$ 和 $A(\pi, 0)$ 的曲线族 $y = a \sin x$ ($a > 0$) 中求一条曲线 L , 使沿该曲线从 O 到 A 的积分 $\int_L (1 + y^3) dx + (2x + y) dy$ 的值最小.

【473】* 计算曲线积分 $\int_L \sin 2x dx + 2(x^2 - 1)y dy$, 其中 L 是曲线 $y = \sin x$ 上从点 $(0, 0)$ 到点 $(\pi, 0)$ 的一段.

【474】* 确定常数 λ , 使在右半平面 $x > 0$ 上的向量

$$\mathbf{A}(x, y) = 2xy(x^4 + y^2)^{\lambda} \mathbf{i} - x^2(x^4 + y^2)^{\lambda} \mathbf{j}$$

为某二元函数 $u(x, y)$ 的梯度 $\mathbf{u}(x, y)$.



【475】* 计算 $\oiint_{\Sigma} 2xz dydz + yz dzdx - z^2 dxdy$, 其中 Σ 是由曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 所围成的立体的表面外侧.

【476】* 计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} (x^3 + az^2) dydz + (y^3 + ax^2) dzdx + (z^3 + ay^2) dxdy,$$

其中 Σ 为上半球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧.

【477】* 计算曲面积分 $\oiint_{\Sigma} \frac{xydydz + yzdzdx + zdx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$, 其中 Σ 是曲面 $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$ 的外侧.

【478】* 判断级数

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} + \cdots$$

的敛散性.

【479】* 设 a 为实数, 研究 a 的情况使级数

$$1 - \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4^a} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6^a} + \cdots$$

收敛.

【480】* 判断级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(e^n + e^{-n})}$$

是绝对收敛、条件收敛还是发散.

【481】* 设

$$a_n = \int_0^1 x^2 (1-x)^n dx,$$

讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性, 并且当其收敛时求和.

【482】* 已知 $a_1 = 1$, 对于 $n = 1, 2, \cdots$, 设曲线 $y = \frac{1}{x^2}$ 上点 $(a_n, \frac{1}{a_n^2})$ 处的切线与 x 轴交点的横坐标是 a_{n+1} .

(1) 求 $a_n, n = 2, 3, \cdots$;

(2) 设 S_n 是以 $(a_n, 0), (a_n, \frac{1}{a_n^2})$ 和 $(a_{n+1}, 0)$ 为顶点的三角形的面积, 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 的和 S .

【483】* (1) 验证函数

$$y(x) = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots + \frac{x^{3n}}{(3n)!} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

满足微分方程 $y'' + y' + y = e^x$.

(2) 利用(1)的结果求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数.



【484】* 设 $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n+5}{n(n-1)} x^n$.

(1) 求 $f(x)$ 的初等函数表达式;

(2) 求数项级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(3n+5)}{n(n-1)}$ 的和.

【485】* 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} (2x)^{2n}$ 的收敛区域及和函数.

【486】* 将函数 $y = \ln(1-x-2x^2)$ 展成 x 的幂级数, 并指出其收敛区域.

【487】* 试把 $\frac{d}{dx} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)$ 展为 x 的幂级数, 并证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1.$$

【488】* 求函数 $G(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\cos x - 1}{x} \right)$ 关于 x 的幂级数展开式, 并利用此展开式求出级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{(2n)!} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{2n}$$

的和.

【489】* 利用 $f(x) = \arctan x$ 的幂级数展开式求出 π 的无穷级数表达式.

【490】* 将 $f(x) = \pi^2 - x^2$, $0 < x \leq \pi$ 展开成以 2π 为周期的余弦级数.

【491】求微分方程 $y' = \frac{y}{2x} + \frac{1}{2y} \tan \frac{y^2}{x}$ 的通解.

【492】求微分方程 $y' = \frac{x+y+1}{x-y-3}$ 的通解.

【493】求微分方程 $(x \cos y + \sin 2y) \frac{dy}{dx} = 1$ 满足条件 $y|_{x=0} = 0$ 的特解.

【494】设函数 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上连续, 若由曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = 1$, $x = t$ ($t > 1$) 与 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所成的旋转体体积为

$$v(t) = \frac{\pi}{3} [t^2 f(t) - f(1)],$$

试求 $y = f(x)$ 所满足的微分方程, 并求该微分方程满足条件 $y|_{x=2} = \frac{2}{9}$ 的解.

【495】设微分方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的一切解都在 $x \rightarrow +\infty$ 时趋于零, 问 p 、 q 应具有什么性质.

【496】求微分方程 $y'' - 3y' + 2y = x^2 - x + 2$ 的通解.

【497】求微分方程 $y'' - 2y' - e^{2x} = 0$ 满足条件 $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ 的解.

【498】求微分方程

$$y'' - 3y' - 4y = (10x - 7)e^{-x} + 34 \sin x$$

的通解.

【499】某质量为 m 的物体由高空静止状态开始垂直下落, 下落过程中所受空气阻力



与下落速度成正比, 比例系数为 k . (1) 求下落距离 x 与时间 t 的关系 $x=x(t)$; (2) 求下落速度 v 与时间 t 的关系 $v=v(t)$.

【500】做某项汽车试验, 当时速达到 v_0 公里时开始滑行. 已知汽车质量为 m (kg), 滑行时所受阻力与汽车速度成正比, 比例系数为 k , (1) 求速度关于时间的关系式 $v=v(t)$; (2) 求滑行距离关于速度的关系式 $x=x(v)$; (3) 求滑行距离关于时间的关系式 $x=x(t)$; (4) 求最大滑行距离.

线性代数

【501】计算 n 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

【502】计算 n 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & 1+a_n^2 \end{vmatrix}$.

【503】计算 n 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}$.

【504】计算 $n+1$ 阶行列式

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

【505】计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \beta & \alpha+\beta & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta & \alpha+\beta \end{vmatrix}.$$

【506】计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 + 1 & x_2 + 1 & x_3 + 1 & \cdots & x_n + 1 \\ x_1^2 + x_1 & x_2^2 + x_2 & x_3^2 + x_3 & \cdots & x_n^2 + x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} + x_1^{n-2} & x_2^{n-1} + x_2^{n-2} & x_3^{n-1} + x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-1} + x_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

【507】解方程

$$f(x) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 + x \\ a_1 & a_2 & a_3 + x & a_4 \\ a_1 & a_2 + x & a_3 & a_4 \\ a_1 + x & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 0.$$

【508】设

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3-x & 5-3x^2 & 3x^2-1 \\ 2x^2-1 & 3x^5-1 & 7x^8-1 \end{vmatrix}.$$

证明: 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使 $f'(\xi) = 0$.

【509】设 A, B 是 n 阶方阵, 已知 $|B| \neq 0$, $A-E$ 可逆, 且 $(A-E)^{-1} = (B-E)^T$, 求证 A 可逆.

【510】若 A, B 是 n 阶方阵, 且 $E+AB$ 可逆, 则 $E+BA$ 也可逆, 且 $(E+BA)^{-1} = E - B(E+AB)^{-1}A$.

【511】设 B 为可逆矩阵, A 是与 B 同阶的方阵, 且满足 $A^2 + AB + B^2 = O$, 证明 A 和 $A+B$ 都是可逆矩阵.

【512】设 $A^2 + 2A - 3E = O$, 证明 $A+4E$ 可逆, 并求出 $(A+4E)^{-1}$.

【513】设 n 阶方阵 A, B 满足 $A+B=AB$.

(1) 证明 $A-E$ 为可逆矩阵, 并求出 $(A-E)^{-1}$;

(2) 证明 $AB=BA$.

【514】设 A, B, C 为 n 阶方阵, 试证分块矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix} A & C \\ A & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B-C|.$$

【515】设 A, B 为 n 阶方阵, 试证

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B| \cdot |A-B|.$$

【516】设 A 为 $n \times m$ 矩阵, B 为 $m \times s$ 矩阵, 证明

$$r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}.$$

【517】设 A 为主对角线元素均为零的四阶实对称可逆矩阵,

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L \end{bmatrix} \quad (K > 0, L > 0).$$



(2) 当 $E+AB$ 可逆时, 证明 $(E+AB)^{-1}A$ 为对称矩阵.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

【519】 设 A 为 n 阶矩阵, 且 $r(A)=n-1$, 证明: 存在常数 k , 使得 $(A^*)^2=kA^*$.

一, 试确定参数 a .

【522】 设 $\alpha_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})^T$ ($i=1, 2, \dots, r, r < n$) 是 n 维实向量, 且 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 无关. 已知 $\beta = (b_1, \dots, b_n)^T$ 是线性方程组

[illegible]

【523】 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 讨论向量组 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \dots, \alpha_m + \alpha_1$ 线性相关性.

【525】设向量组(Ⅰ): $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的秩为 r ($r > 1$), 证明向量组(Ⅱ): $\beta_1 = \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_m, \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_3 + \dots + \alpha_m, \dots, \beta_m = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{m-1}$ 的秩也为 r .

【527】 设齐次线性方程组

[illegible]

(1) 线性方程组仅有零解?

(2) 线性方程组有非零解? 在有非零解时, 求出方程组的基础解系.



【528】设 n 阶方阵 A 的行列式 $|A|=0$, 且有一个代数余子式 $A_{ij} \neq 0$, 试证明齐次线性方程组 $Ax=0$ 的所有解为

$$k(A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in})^T,$$

其中 k 为任意常数.

【529】设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系, 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 满足

$$\beta_i = \sum_{j=1}^r a_{ij} \alpha_j \quad (i=1, 2, \dots, r).$$

证明: 如果系数矩阵 $A=(a_{ij})_{r \times r}$ 的行列 $|A| \neq 0$, 则 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 也是 $Ax=0$ 的基础解系.

【530】证明线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$
 对任何的 b_1, \dots, b_n 都有解的充要条件是

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

【531】设 A 为 n 阶实矩阵, 满足

$$AA^T = E, \quad |A| < 0,$$

求 A^* 的一个特征值.

【532】设三阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, 对应于 λ_1 的特征向量为 $\alpha_1 = (0, 1, 1)^T$, 求属于特征值 $\lambda_2 = \lambda_3$ 的特征向量及 A .

【533】设 A 为三阶实对称矩阵, $\lambda_1 = 8, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$ 是其特征值, 已知对应 $\lambda_1 = 8$ 的特征向量为 $\alpha = (1, k, 1)^T$, 对应 $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ 的一个特征向量为 $\alpha_2 = (-1, 1, 0)^T$, 试求参数 k 及 $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ 的另一个特征向量和矩阵 A .

【534】设三阶实对称矩阵 A 的三个特征值分别是 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$, 且 λ_1, λ_2 对应的特征向量分别是 $\alpha_1 = (1, a+1, 2)^T, \alpha_2 = (a-1, -a, 1)^T$. A 的伴随矩阵 A^* 有特征值 λ_0 , λ_0 所对应的特征向量是 $\beta_0 = (2, -5a, 2a+1)^T$.

(1) 求 a 及 λ_0 之值;

(2) 求矩阵 A .

【535】设 λ_1, λ_2 为 n 阶矩阵 A 的特征值, 且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ξ_1, ξ_2 分别是 A 的属于 λ_1, λ_2 的特征向量, 证明: $\xi_1 + \xi_2$ 不是 A 的特征向量.

【536】设 A 与 B 是 n 阶方阵, 证明 AB 与 BA 有相同的特征值.

【537】设 A, B 都是 n 阶方阵, $\varphi(\lambda)$ 是 B 的特征多项式, 证明: $\varphi(A)$ 非奇异的充要条件是 A 和 B 没有公共的特征值.

【538】设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2 + 2A + 3E = O$, 证明: A 无实特征值.

【539】设 A 为正交矩阵, 试证:

(1) 如果 A 有实特征值, 则实特征值只能是 ± 1 ;



(2) 如果 α 是 A 的属于实特征值的特征向量, 则 α 同时是 A^T 的特征向量.

【540】设 n 阶矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 证明:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} a_{ji}.$$

【541】判断矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 2 \end{bmatrix}$$

是否相似, 若相似, 求出可逆矩阵 C , 使得 $B = C^{-1}AC$.

【542】设二阶矩阵 A 的行列式 $|A| < 0$, 证明: A 可以相似于一个对角矩阵.

【543】若 $bc > 0$, 则二阶实矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 与对角阵相似.

【544】设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 - 3A + 2E = O$, 证明: A 相似于一个对角矩阵.

【545】设 A 是 n 阶实对称的幂等矩阵 ($A^2 = A$), 且秩 $(A) = r$ ($0 < r \leq n$).

(1) 证明 $A \sim \begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$, E_r 是 r 阶单位阵.

(2) 计算 $|A - 2E|$.

【546】设 A 为可逆矩阵, 且 $A \sim B$, 证明 $A^* \sim B^*$.

【547】化下面的二次型为标准型

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2.$$

【548】若 A 是正定矩阵, 证明: 存在正定矩阵 B , 使 $A = B^2$.

【549】设 A, B 分别为 m, n 阶正定矩阵, 证明分块矩阵

$$C = \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$$

也是正定矩阵.

【550】设 A 为 $m \times n$ 实矩阵, E 为 n 阶单位矩阵, 已知矩阵 $B = \lambda E + A^T A$, 试证: 当 $\lambda > 0$ 时, 矩阵 B 为正定矩阵.

概率论与数理统计*

【551】设两个箱内装有同种零件, 第一箱装 50 件, 有 10 件一等品, 第二箱装 30 件, 有 18 件一等品. 先从两箱中任选一箱, 再从此箱中先后不放回地任取两个零件, 求: (1) 先取出的零件是一等品的概率 p ; (2) 在先取出的是二等品的条件下, 后取出的仍是一等品的条件概率 q .

【552】市场上有三箱某种产品, 其中一箱是甲厂生产的, 共 100 只, 次品率为 10%, 其余两箱是乙厂生产的, 每箱 150 只, 次品率 20%.

(1) 现任取一箱, 任取一个产品, 求此产品是合格品的概率;

(2) 将三箱产品开箱混放, 任取一个产品, 求此产品是合格品的概率;

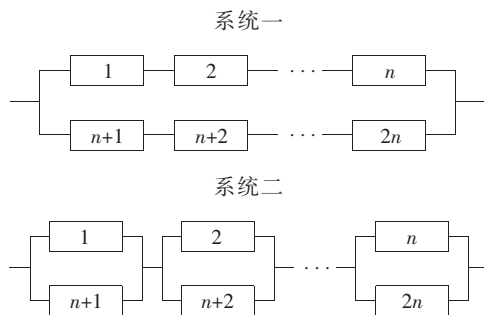
(3) 在混放的产品中任取一个, 取到了合格品, 求此产品为甲厂产品的概率.

【553】一批产品共有 50 件, 其中含次品 0 件、1 件、2 件是等可能的. 现从中随机逐件抽出 5 件产品进行检查(取后不放回), 在抽取过程中, 如发现次品, 则停止抽查, 而认为这批产品是不合格的; 若抽出 5 件后未发现次品, 则认为这批产品是合格品. 求抽查进行 5 次后方能确定这批产品是否为合格品的概率.

【554】每箱产品有 10 件, 其次品数从 0 到 2 是等可能的. 开箱检验时, 从中任取一件, 如果检验为次品, 则认为该箱产品不合格而拒收. 由于检验误差, 假设一件正品被误判为次品的概率为 2%, 一件次品被漏查误判为正品的概率为 10%, 求检验一箱产品能通过验收的概率.

【555】甲、乙两校分别组织了篮、排、足球运动队各一支进行对抗赛, 每类球队各赛一次, 设甲校胜乙校各队的概率依次为 0.4, 0.8, 0.4 (规定没有赛平情况). 若约定获胜次数多的为获胜学校, 求哪个学校获胜的概率较大?

【556】构成系统的每个元件能正常工作的概率为 p ($0 < p < 1$, p 又称为元件的可靠性), 假设各元件能否正常工作是相互独立的, 计算下面各系统的可靠性:



【557】某种仪器上装有大、中、小三个不同功率的灯泡, 已知当三个灯泡完好时, 仪器发生故障的概率仅为 1%, 当烧坏一个灯泡时, 仪器发生故障的概率为 25%, 当烧坏两个灯泡及三个灯泡时, 仪器发生故障的概率分别为 65% 与 90%. 设每个灯泡被烧坏与否互不影响, 且它们被烧坏的概率分别为 0.1, 0.2, 0.3, 求仪器发生故障的概率.

【558】设 $0 < P(A) < 1$, $0 < P(B) < 1$, $P(A|B) + P(\bar{A}|\bar{B}) = 1$, 证明: A 与 B 相互独立.

【559】某地抽样调查结果表明, 考生的外语成绩(百分制)近似服从正态分布, 平均成绩为 72 分, 96 分以上考生占考生总数的 2.3%, 试求考生的外语成绩在 60~84 分之间的概率.

[附表]

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$\Phi(x)$	0.500	0.692	0.841	0.933	0.977	0.994	0.999

表中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数.

【560】在电源电压不超过 200 伏, 在 200~240 伏和超过 240 伏三种情形下, 某种电子元件损坏的概率分别为 0.1, 0.001 和 0.2, 假设电源电压 X 服从正态分布



$N(220, 25^2)$, 试求:

- (1) 该电子元件损坏的概率 α ;
- (2) 该电子元件损坏时, 电源电压在 200~240 伏的概率 β .

[附表]

x	0.10	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00	1.20	1.40
$\Phi(x)$	0.530	0.579	0.655	0.726	0.788	0.841	0.885	0.919

表中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数.

【561】假设测量的随机误差 $X \sim N(0, 10^2)$, 试求在 100 次独立重复测量中, 至少有三次测量误差的绝对值大于 19.6 的概率 α , 并利用泊松分布求出 α 的近似值. (要求小数点后取两位有效数字)

[附表]

λ	1	2	3	4	5	6	7	...
$e^{-\lambda}$	0.368	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	...

【562】假设一电路装有三个同种电气元件, 其工作状态相互独立, 且无故障工作时间都服从参数为 λ ($\lambda > 0$) 的指数分布, 当三个元件都无故障时, 电路正常工作, 否则整个电路不能正常工作, 试求整个电路正常工作的时间 T 的概率分布.

【563】设钢管内径 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 规定内径在 98 到 102 之间的为合格品; 超过 102 的为废品, 不足 98 的是次品. 已知该批产品的次品率为 15.9%, 内径超过 101 的产品在总产品中占 2.28%, 求整批产品的合格率.

【564】假设随机变量 X 服从参数为 2 的指数分布, 证明: $Y = 1 - e^{-2X}$ 在区间 $(0, 1)$ 上服从均匀分布.

【565】设随机变量 X 在 $(0, 2\pi)$ 内服从均匀分布, 求随机变量 $Y = \cos X$ 的分布函数 $f_Y(y)$.

【566】在半径为 R , 中心在原点的圆周上任抛一点, 求该点横坐标 X 的密度函数 $f_X(x)$.

【567】设 X 分别为在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $[0, \pi]$ 及 $[0, 2\pi]$ 上服从均匀分布的随机变量, 求随机变量 $Y = \sin X$ 分别在三种情况下的密度函数.

【568】设随机变量 X 在 $(0, 1)$ 上服从均匀分布, 求随机变量 $Y = X^{\ln X}$ 的概率密度函数.

【569】设 A, B 为两个随机事件, 且 $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B|A) = \frac{1}{3}$, $P(A|B) = \frac{1}{2}$, 令

$$X = \begin{cases} 1, & A \text{ 发生;} \\ 0, & A \text{ 不发生;} \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 1, & B \text{ 发生;} \\ 0, & B \text{ 不发生;} \end{cases}$$

求: (1) 二维随机变量 (X, Y) 的概率分布; (2) X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY} ; (3) $Z = X^2 + Y^2$ 的概率分布.

【570】假设随机变量 X_1 与 X_2 相互独立, X_i 服从参数为 i, p ($0 < p < 1$) 的二项分

布, $i=1, 2$. 令随机变量

$$Y_1 = \begin{cases} 0, & X_2 + X_1 = 1; \\ 1, & X_2 + X_1 \neq 1, \end{cases} \quad Y_2 = \begin{cases} 0, & X_2 - X_1 = 2; \\ 1, & X_2 - X_1 \neq 2, \end{cases}$$

试确定 p 的值, 使 Y_1 与 Y_2 的协方差达到最小.

【571】一个正三棱锥的四个面上分别标有数字 1, 2, 3, 4. 连续抛掷两次, 以底面上数字作为掷出的数字, 记 X, Y 分别表示两次掷出数字的最大值与最小值. 计算 $X+Y$ 与 $X-Y$ 的协方差矩阵

$$\begin{bmatrix} D(X+Y) & \text{cov}(X+Y, X-Y) \\ \text{cov}(X+Y, X-Y) & D(X-Y) \end{bmatrix}$$

的逆矩阵.

【572】一电子仪器由两个部件构成, 以 X 和 Y 分别表示两个部件的寿命(单位: 千小时), 已知 X 和 Y 的联合分布函数为

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-0.5x} - e^{-0.5y} + e^{-0.5(x+y)}, & \text{若 } x \geq 0, y \geq 0; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(1) 问 X 和 Y 是否独立? (2) 求两个部件的寿命都超过 100 小时的概率 α .

【573】一商店经销某种商品, 每周进货的数量 X 与顾客对该种商品的需求量 Y 是相互独立的随机变量, 且都服从区间 $[10, 20]$ 上的均匀分布. 商店每售出一单位商品可得利润 1000 元; 若需求量超过了进货量, 商店可从其他商店调剂供应, 这时每单位商品获利润为 500 元. 试计算此商店经销该种商品每周所得利润的期望值.

【574】假设二维随机变量 (X, Y) 在矩形区域

$$G = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$$

上服从均匀分布. 记

$$U = \begin{cases} 0, & X \leq Y; \\ 1, & X > Y, \end{cases} \quad V = \begin{cases} 0, & X \leq 2Y; \\ 1, & X > 2Y, \end{cases}$$

(1) 求 U 和 V 的联合分布;

(2) 求 U 和 V 的相关系数 r .

【575】设随机变量 X 在区间 $(0, 1)$ 上服从均匀分布, 在 $X=x$ ($0 < x < 1$) 的条件下, 随机变量 Y 在区间 $(0, x)$ 上服从均匀分布, 求

(1) 随机变量 X 和 Y 的联合概率密度;

(2) Y 的概率密度;

(3) 概率 $P\{X+Y > 1\}$.

【576】设连续型随机变量 X 服从参数 $\lambda=1$ 的指数分布, $Y_1=2e^{-X}-X$, $Y_2=e^{-X}+\frac{X}{2}$.

(1) 判断 Y_1 和 Y_2 是否独立;

(2) 求 Y_1 与 Y_2 协方差矩阵

$$\begin{bmatrix} DY_1 & \text{cov}(Y_1, Y_2) \\ \text{cov}(Y_1, Y_2) & DY_2 \end{bmatrix}$$



特征值的和.

【577】设 X 与 Y 相互独立, 均服从 $(0, 1)$ 上的均匀分布, 试求方程 $t^2 + Xt + Y = 0$ 有实根的概率.

【578】设随机变量 X, Y 的联合密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + \frac{1}{3}xy, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

试求: (1) (X, Y) 的分布函数; (2) (X, Y) 的边缘分布密度; (3) (X, Y) 的条件密度;

(4) 概率 $P\{X+Y>1\}$, $P\{Y>X\}$ 及 $P\{Y<\frac{1}{2} \mid X<\frac{1}{2}\}$.

【579】设随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & |y| < x, 0 < x < 1; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

试求: (1) 条件密度 $f(x|y)$, $f(y|x)$; (2) $P\{X>\frac{1}{2} \mid Y>0\}$.

【580】设 X 的密度为

$$f_1(x) = \begin{cases} 4xe^{-2x}, & \text{若 } x > 0; \\ 0, & \text{若 } x \leq 0, \end{cases}$$

而随机变量 Y 在区间 $(0, X)$ 上均匀分布, 试求 (1) X 和 Y 的联合密度 $f(x, y)$; (2) Y 的概率密度 $f_2(y)$.

【581】已知二维正态随机向量 (X, Y) 的期望向量 μ 和协方差矩阵 Σ :

$$\mu = \begin{bmatrix} 26 \\ -12 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 196 & -91 \\ -91 & 169 \end{bmatrix},$$

求联合密度函数 $f(x, y)$.

【582】设随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布, 其密度

$$f(x, y) = c \exp\{-2x^2 - y^2 - 8x + 4y - 13\},$$

求常数 c , X 和 Y 的数学期望和方差.

【583】设二维随机变量 (X, Y) 的密度函数为

$$f(x, y) = \frac{1}{2}[\varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y)],$$

其中 $\varphi_1(x, y)$ 和 $\varphi_2(x, y)$ 都是二维正态密度函数, 且它们对应的二维随机变量的相关系数分别为 $\frac{1}{3}$ 和 $-\frac{1}{3}$, 它们的边缘密度函数所对应的随机变量的数学期望都是零, 方差都是 1.

(1) 求随机变量 X 和 Y 的密度函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(y)$ 及 X 和 Y 的相关系数 ρ (可以直接利用二维正态密度的性质);

(2) 问 X 和 Y 是否独立? 为什么?

【584】两台同样的自动记录仪, 每台无故障工作的时间服从参数为 5 的指数分布. 首先开动其中一台, 当其发生故障时停用而另一台自动开动. 试求两台记录仪无故障工

作的总时间 T 的概率密度 $f(t)$ 、数学期望和方差.

【585】设二维随机变量 (X, Y) 在矩形区域

$$G = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$$

上服从均匀分布, 试求边长为 X 和 Y 的矩形面积 s 的概率密度 $f(s)$.

【586】设随机变量 X 和 Y 的联合分布在以点 $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ 为顶点的三角形区域上服从均匀分布, 试求随机变量 $U = X + Y$ 的方差.

【587】设随机变量 X 和 Y 的联合分布是正方形

$$G = \{(x, y) | 1 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 3\}$$

上的均匀分布, 试求随机变量 $U = |X - Y|$ 的概率密度 $p_1(u)$ 及随机变量 $V = |X + Y|$ 的概率密度 $p_2(\mu)$.

【588】二维连续型随机向量 (X, Y) 服从区域 D 上的均匀分布, $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$. 令 $Z = \min\{X, Y\}$, 求 Z 的期望 EZ 与方差 DZ .

【589】设系统 L 由两个相互独立的子系统 L_1, L_2 联接而成, 联接的方式分别为 (1) 串联; (2) 并联; (3) 备用 (当系统 L_1 损坏时, 系统 L_2 开始工作). 设 L_1, L_2 的寿命分别为 X, Y , 已知它们的概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \beta e^{-\beta y}, & y > 0; \\ 0, & y \leq 0, \end{cases}$$

其中 $\alpha > 0, \beta > 0$, 且 $\alpha \neq \beta$. 试分别就以上三种联接方式写出 L 的寿命 Z 的概率密度.

【590】设随机变量 X, Y 的联合密度函数

$$f(x, y) = \begin{cases} 6x^2y, & \text{若 } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1; \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

求随机变量 $Z = X/Y$ 的密度函数 $f(z)$.

【591】设某种商品一周的需求量 X 是一个随机变量, 其密度函数为

$$p_1(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & \text{若 } x > 0; \\ 0, & \text{若 } x \leq 0. \end{cases}$$

假设每周对该商品的需要是相互独立的. (1) 以 U_k 表示 k 周的需要量, 求 U_2 和 U_3 的密度函数 $p_2(\mu)$ 和 $p_3(\mu)$; (2) 以 $X_{(3)}$ 表示三周中各周需要量的最大值, 求 $X_{(3)}$ 的密度函数 $p_{(3)}(x)$.

【592】设 $X \sim N(0, \sigma^2)$, $Y \sim N(0, \sigma^2)$, 且 X 与 Y 相互独立, 求 $E(\sqrt{X^2 + Y^2})$, $D(\sqrt{X^2 + Y^2})$.

【593】设 $X \sim N(a, \sigma^2)$, $Y \sim N(a, \sigma^2)$, 且 X 与 Y 相互独立, 求 $E[\max\{X, Y\}]$ 及 $E[\min\{X, Y\}]$.

【594】设随机变量 X 与 Y 独立, 其中 X 的概率分布为

$$X \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix},$$

而 Y 的概率密度为 $f(y)$, 求随机变量 $U = X + Y$ 的概率密度 $g(u)$.



【595】设随机变量 X 服从参数 $\lambda=1$ 的指数分布, Y 服从区间 $[-2, 2]$ 上的均匀分布, X 与 Y 独立, 且

$$Z = \begin{cases} a, & \text{当 } |Y| \leq 1 \text{ 时;} \\ 2a, & \text{当 } |Y| > 1 \text{ 时;} \end{cases}$$

其中 $a>0$, 为常数. 求随机变量 $U=X/Z$ 的概率密度 $g(u)$.

【596】一生产线生产的产品成箱包装, 每箱的重量是随机的, 假设每箱平均重 50 千克, 标准差为 5 千克. 若用最大载重量为 5 吨的汽车承运, 试利用中心极限定理说明每辆车最多可以装多少箱, 才能保障不超载的概率大于 0.977. ($\Phi(2)=0.977$, 其中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数.)

【597】保险公司为 50 个集体投保人提供医疗保险, 假设他们医疗花费相互独立, 且花费(单位: 百元)服从相同的分布率 $\begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 1.5 & 3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.1 \end{bmatrix}$. 当花费超过一百元时, 保险公司应支付超付百元的部分; 当花费不超过百元时, 由患者自己负担费用. 如果以总支付费 X 的期望值 EX 作为预期的总支付费, 那么保险公司应收取总保险费为 $(1+\theta)EX$, 其中 θ 为相对附加保费. 为使公司获利的概率超过 95%, 附加保费 θ 至少应为多少? ($\Phi(1.41)=0.92$, $\Phi(1.65)=0.95$)

【598】设某种器件使用寿命(单位: 小时)服从参数为 λ 的指数分布, 其平均使用寿命为 20 小时. 在使用中, 当一个器件损坏后立即更换另一个新的器件, 如此继续下去. 已知每个器件进价为 a 元. 试求在年计划中应为此器件作多少预算, 才可以有 95% 的把握保证一年够用(假定一年按 2000 个工作小时计算).

【599】某保险公司多年的统计资料表明: 在索赔户中被盗索赔户占 20%. 以 X 表示在随意抽查的 100 个索赔户中因被盗向保险公司索赔的户数, 利用棣莫弗—拉普拉斯中心极限定理, 求被盗索赔户不少于 14 户, 且不多于 30 户的概率的近似值.

[附表] $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
$\Phi(x)$	0.500	0.692	0.841	0.933	0.977	0.994

【600】设总体 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2(x-\theta)}, & x > \theta; \\ 0, & x \leq \theta, \end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 是未知参数. 从总体 X 中抽取简单随机样本 X_1, X_2, \dots, X_n , 记 $\hat{\theta}=\min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$.

(1) 求总体 X 的分布函数 $F(x)$; (2) 求统计量 $\hat{\theta}$ 的分布函数 $F_{\hat{\theta}}(x)$; (3) 如果用 $\hat{\theta}$ 作为 θ 的估计量, 讨论它是否具有无偏性.



第二部分

阅卷人点拨600题习题详解







::::: 选 择 题 :::::

高等数学

【1】(C).

分析 极限

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln\left[3 + \frac{f(x)}{x^2}\right]}{x^k} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln\left[1 + \left(2 + \frac{f(x)}{x^2}\right)\right]}{x^k} \xrightarrow{\text{等价代换}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 + \frac{f(x)}{x^2}}{x^k} = k \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[2 + \frac{f(x)}{x^2}\right] &= 0 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^2} &= -2.\end{aligned}$$

【2】(D).

分析 不要相互比较, 这样会很麻烦, 应该逐个考察关于 x 的阶数.

(A) 当 $x \rightarrow 0$ 时, x^2 项大, 所以, $x^2 + x^4$ 是 x 的 2 阶无穷小.

(B) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt{1 + \sin x} - 1 \sim \frac{1}{2} \sin x \sim \frac{1}{2} x$, 所以, $\sqrt{1 + \sin x} - 1$ 是 x 的同阶无穷小.

$$(C) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^{k+1}} \xrightarrow{\text{洛必达法则}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{(k+1)x^k} = -\frac{1}{2(k+1)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^k},$$

故当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{\sin x}{x} - 1$ 为 x 的 2 阶无穷小.

$$\begin{aligned}(D) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^k} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^k (\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 + \sin x})} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot (1 - \cos x)}{x^k \cos x} \xrightarrow{\text{无穷小代换}} \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{1}{2} x^2}{x^k},\end{aligned}$$

故当 $x \rightarrow 0$ 时 $\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}$ 为 x 的 3 阶无穷小.

【3】(C).

分析 方法一 排除法.

令 $u(x) = \frac{2}{x}$, $v(x) = \frac{1}{x}$, 当 $x \rightarrow 0$ 时可排除(A); 令 $u(x) = v(x) = \frac{1}{x}$, 当 $x \rightarrow 0$ 时可

排除(B); 令 $u(x) = \frac{1}{x}$, $v(x) = -\frac{1}{x}$, 当 $x \rightarrow 0$ 时可排除(D).



方法二 直接用反证法证明(C)成立: 两式相加得 $u(x) = \frac{1}{2}[f(x) + g(x)]$, 因为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 已经存在, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 也存在, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)$ 存在, 矛盾.

【4】(D).

分析 方法一 排除法: 设 $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$, 当 $x \rightarrow 0$ 时为无界变量, 不是无穷大. 令 $g(x) = x$, 当 $x \rightarrow 0$ 时为无穷小, 可排除(A). 设 $x \rightarrow 0$ 时, 令 $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{1}{x}$ 可排除(B)、(C).

方法二 反证法. 设 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)g(x)$ 是无穷大, 而 $f(x)$ 不是无穷大, 所以 $g(x)$ 必为无穷大, 矛盾.

【5】(C).

分析 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = 1$, 存在水平渐近线 $y = 1$.

函数 $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ 的间断点为 $x = \pm 1$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = \infty$, 存在铅直渐近线 $x = 1$. 但是

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{2},$$

$x = -1$ 不是铅直渐近线.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{x(x^2 - 1)} = 0$, 不存在斜渐近线.

【6】(C).

分析

$$f(x) - g(x) = \begin{cases} 1 - x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ -1, & x = 0. \end{cases}$$

极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) - g(x)] = 1 \neq -1,$$

所以, $f(x) - g(x)$ 在点 $x = 0$ 处间断.

$$\max\{f(x), g(x)\} = 1, \quad x \in (-1, 1),$$

$$\min\{f(x), g(x)\} = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \in (-1, 1), x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

$$f(x) + g(x) = \begin{cases} 1 + x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

都在 $x = 0$ 处连续.

【7】(D).

分析 当 $n \rightarrow \infty$ 时数列的极限与数列前几项的大小无关, 可排除(A)、(B).

取 $a_n = \frac{1}{n^2}$, $c_n = n$, 可排除(C).

【8】(D).

分析 当有 $f(0)=0$ 及 $f'(0)$ 存在的条件时, 讨论极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 一般都归结为导数

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}.$$

由 $f(x)$ 是奇函数得 $f(0)=0$, 于是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0).$$

【9】(B).

分析 函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$ 是以 x 为自变量的函数, 但是, 在 $n \rightarrow \infty$ 求极限时, x 则被看成一个常数(参数), 根据 x 的不同取值求出极限, 极限完成后 x 又恢复变量的本来身份.

因为分式中有 x^{2n} , 所以应该把 $x=-1$ 和 $x=1$ 作为分段点将函数变成分段函数, 然后讨论函数的间断点.

当 $|x| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = 0$, 所以 $f(x) = 1+x$.

当 $|x| > 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}} = 0$.

又 $f(1)=1$, $f(-1)=0$, 所以

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}} = \begin{cases} 0, & x \leq -1; \\ 1+x, & -1 < x < 1; \\ 1, & x = 1; \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

由此可知 $x=1$ 为间断点.

【10】(B).

分析 方法一. 若 $f(x) + \sin x$ 在点 x_0 处连续, 则 $f(x) = [f(x) + \sin x] - \sin x$ 在点 x_0 处也连续, 与已知矛盾.

方法二. 排除法. 设 $f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处间断, $f(x) \sin x = 0$

在 $x=0$ 处连续. 若设 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0; \\ -1, & x < 0, \end{cases}$ $f(x)$ 在点 $x=0$ 处间断, 但 $f^2(x) = 1$,

$|f(x)| = 1$ 在 $x=0$ 处都连续. 故可排除(A), (C), (D).

【11】(B).

分析

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{1-\cos x} \sin t^2 dt}{\frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6}} \xrightarrow{\text{洛必达法则}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \sin(1-\cos x)^2}{x^4 + x^5} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1-\cos x)^2}{x^4 + x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-\cos x)^2}{x^3 + x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{4}x^4}{x^3 + x^4} = 0. \end{aligned}$$



【12】(A).

分析 方法一 由 $\ln(1-bx) \sim -bx$ ($x \rightarrow 0$) 得

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{-bx^3} \xrightarrow{\text{洛必达法则}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{-3bx^2} \\ &\Rightarrow a = 1 \text{ (否则 } I = \infty) \\ &\Rightarrow I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{-3bx^2} = -\frac{1}{6b} = 1 \Rightarrow b = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

方法二 由泰勒公式

$$\begin{aligned} \sin x &= ax - \frac{1}{6}a^3x^3 + o(x^3) \quad (x \rightarrow 0) \Rightarrow \\ I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-a)x + \frac{1}{6}a^3x^3 + o(x^3)}{-bx^3} = 1 \\ &\Rightarrow a = 1, -\frac{1}{6b} = 1 \\ &\Rightarrow a = 1, b = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

【13】(C).

分析 即求 a, b 使得 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{\text{洛必达法则}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3ax^2 + b}{(e^{\sin^2 x} - 1)\cos x},$$

当 $b \neq 0$ 时该极限为 ∞ , 于是, $b = 0$, 从而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3ax^2 + b}{(e^{\sin^2 x} - 1)\cos x} \xrightarrow{\text{无穷小代换}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3ax^2}{\sin^2 x} = 3a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{3}.$$

【14】(D).

分析 先考察 $f(x)$ 的等价无穷小, 从而化简计算过程.

$$f(x) = \ln \frac{1+x^2}{1+\sin^2 x} = \ln \left(1 + \frac{x^2 - \sin^2 x}{1 + \sin^2 x} \right) \sim \frac{x^2 - \sin^2 x}{1 + \sin^2 x} \sim x^2 - \sin^2 x \quad (x \rightarrow 0).$$

方法一 用洛必达法则.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^n} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^{n-1}} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(n-1)x^{n-2}} \\ &\xrightarrow{\text{当 } n=4 \text{ 时}} 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

因此, $n=4$.

方法二 用泰勒公式.

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3), \\ \sin^2 x &= \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \right)^2 = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) \\ &\Rightarrow f(x) \sim x^2 - \sin^2 x = x^2 - \left[x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) \right] = \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) \Rightarrow n = 4. \end{aligned}$$



【15】(C).

分析 因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2)}{x^2} = 1$, 所以 $f(0)=0$. 从而有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2) - f(0)}{x^2 - 0} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = f'_+(0).$$

【16】(C).

分析 当 $x \neq 0$ 时, $\sin \frac{1}{x^2}$ 是有界变量, $\sqrt{|x|}$ 是无穷小量, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{|x|} \sin \frac{1}{x^2} = 0,$$

且 $f(0)=0$, 所以, 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

又 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{|x|} \sin \frac{1}{x^2} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \frac{1}{x^2}}{\sqrt{x}}$ 不存在, 所以, 函数在 $x=0$ 处不可导.

【17】(A).

分析 $\varphi(1)=0 \Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^3 - 1| \varphi(x)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + x + 1) \varphi(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x^3 - 1| \varphi(x)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + x + 1) \varphi(x) = 0,$$

即 $f'_+(1) = f'_-(1) = 0$, 所以, $f'(1) = 0$.

设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 因为 $f(1)=0$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^3 - 1| \varphi(x)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + x + 1) \varphi(x) = 3\varphi(1),$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x^3 - 1| \varphi(x)}{x - 1} = - \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + x + 1) \varphi(x) = -3\varphi(1).$$

由 $f'_+(1) = f'_-(1) \Rightarrow \varphi(1) = -\varphi(1) \Rightarrow \varphi(1) = 0$.

【18】(D).

分析 因为函数 $f(x)$ 周期为 4, 曲线在点 $(5, f(5))$ 处的切线斜率与曲线在点 $(1, f(1))$ 处的切线斜率相等, 根据导数的几何意义, 曲线在点 $(1, f(1))$ 处的切线斜率即为函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处的导数.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-x)}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-x) - f(1)}{-x} = \frac{1}{2} f'(1) = -1,$$

即 $f'(1) = -2$.

【19】(D).

分析 虽然不是讨论分段函数在分段点处的导数, 但是 $f(x)$ 只满足不等式, 若要讨论它的导数, 也只能用定义完成. 首先, 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) = 0$, 由夹逼定理得

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \Rightarrow f(0) = 0,$$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

再讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导. 由于 $\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| \leq \frac{1 - \cos x}{|x|}$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{|x|} =$



0, 由夹逼定理得

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0,$$

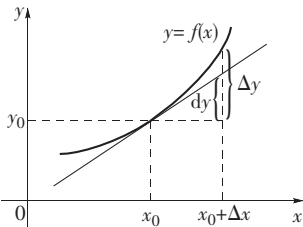
即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

【20】(A).

分析 由 $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$ 知, 曲线单调递增且上凹, 当 $\Delta x > 0$ 时, 可画出图形(如右图).

由微分 dy 的几何意义及函数增量的几何意义可从图形中得到正确答案为(A).

如果将条件改为 $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$, $\Delta x > 0$ 或 $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$, $\Delta x > 0$, 同理可通过画图得出正确答案.



第 20 题图

【21】(B).

分析 考虑 $f(x) = e^{-x}$ 与 $g(x) = -e^{-x}$, 显然 $f(x) > g(x)$, 但 $f'(x) = -e^{-x}$, $g'(x) = e^{-x}$, $f'(x) < g'(x)$, (1) 不正确. 将 $f(x)$ 与 $g(x)$ 交换可说明(2)不正确.

【22】(A).

分析 因两曲线相切于点 $(2, \frac{1}{2})$, 故相交于该点. 将 $x=2$, $y=\frac{1}{2}$ 代入 $y=ax^2+b$ 中得 $\frac{1}{2} = 4a+b$, 又因为相切于该点, 故切线斜率相等, 即导数相等, 所以 $-\frac{1}{x^2} = 2ax$, 将 $x=2$ 代入得 $a = -\frac{1}{16}$, 故 $b = \frac{3}{4}$.

【23】(D).

分析 方法一 用排除法. 设 $f(x) = x^3$ 可排除(A). 设 $f(x) = x^2$ 可排除(B). 设 $f(x) = x$ 可排除(C).

方法二 反证法. 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq \infty$, 由拉格朗日中值定理,

$$f(x+1) - f(x) = f'(\xi) \quad (x < \xi < x+1),$$

于是

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(\xi) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) \neq \infty.$$

【24】(B).

分析 用排除法. 函数 $f(x) = x$ 在 $x=0$ 处可导, 但 $|f(x)| = |x|$ 在 $x=0$ 处不可导, 排除(A). 函数 $f(x) = x^2$ 在 $x=0$ 处可导, $|f(x)| = |x^2|$ 在 $x=0$ 处也可导, 排除(C), (D).

【25】(B).

分析 方法一 排除法. 设 $f(x) = \frac{\sin x^2}{x}$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 且 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有界, $f'(x) = 2\cos x^2 - \frac{\sin x^2}{x^2}$ 在 $(0, +\infty)$ 内存在, 但 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 不存在, 可排除(A).

设 $f(x) = \sin x$ 可排除(C). 设 $f(x) = \cos \sqrt{x}$ 可排除(D).



方法二 证明(B)成立. 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$, 由拉格朗日中值定理,

$$f(x+1) - f(x) = f'(\xi) \quad (x < \xi < x+1),$$

于是

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(\xi) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = (a - a) = 0.$$

【26】(B).

分析 由 $f'(x)$ 在 $x=a$ 处连续及 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{x-a} = -1$ 知

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} f'(x) = 0.$$

又

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{x-a} = -1 < 0,$$

知在 $x=a$ 的某个邻域内, 当 $x < a$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x > a$ 时, $f'(x) < 0$.

【27】(D).

分析 方法一 用排除法. 因为 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f'(a) > 0$, $f'(b) < 0$, 由导数邻域内的保号性 \Rightarrow 在 $x > a$ 的某个邻域内 $f(x)$ 单调递增, 在 $x < b$ 的某个邻域内 $f(x)$ 单调递减, 所以(A), (B)为正确结论.

因为 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f'(a) > 0$, $f'(b) < 0$, 由闭区间上连续函数的零值定理可知(C)为正确结论. 故应选(D).

方法二 直接举出(D)的反例. $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$.

【28】(A).

分析 因为 $dy = f'(x_0)\Delta x$, $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$, 所以, 只要 $f'(x_0) \neq 0$, 总有

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{dy} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)}{f'(x_0)\Delta x} = 1 + 0 = 1,$$

所以, 是等价无穷小. 故选(A).

【29】(D).

分析 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(0) = 0 = f(0),$$

所以, $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 又

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{g(x)}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x)}{2x} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x) - g'(0)}{x - 0} = \frac{1}{2} g''(0). \end{aligned}$$

当 $x \neq 0$ 时,

$$f'(x) = \frac{xg'(x) - g(x)}{x^2},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xg'(x) - g(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^2}$$



$$=g''(0)-\frac{1}{2}g''(0)=\frac{1}{2}g''(0)=f'(0),$$

所以,导函数连续.

【30】(C).

分析 首先将极限函数写成分段函数,

$$f(x)=\begin{cases} 1, & |x|\leq 1; \\ x^2, & |x|>1. \end{cases}$$

由 $f(x)$ 的表达式即可看出, $x=1$ 与 $x=-1$ 是不可导的点.

【31】(A).

分析 方法一 用导数定义.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)}{x} \\ &= \frac{e^x - 1 \sim x}{x} (-1)(-2) \cdots [-(n-1)] = (-1)^{n-1} (n-1)!. \end{aligned}$$

方法二 用乘积的求导法则. 含因子 $e^x - 1$ 的项在 $x=0$ 处为 0, 故只留下了一项. 于是

$$\begin{aligned} f'(0) &= [e^x(e^{2x} - 2) \cdots (e^{2x} - 2)] \Big|_{x=0} \\ &= (-1)(-2) \cdots [-(n-1)] = (-1)^{n-1} (n-1)!. \end{aligned}$$

【32】(B).

分析 因为 $f(0)=0$, 所以

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \text{ 存在} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x}.$$

对于(A), 因为 $1 - \cosh > 0$, 所以

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(1 - \cosh) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - \cosh) - f(0)}{1 - \cosh - 0} \cdot \frac{1 - \cosh}{h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - \cosh) - f(0)}{1 - \cosh - 0} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cosh}{h^2} = \frac{1}{2} f'_+(0), \end{aligned}$$

即 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(1 - \cosh)$ 存在只能保证右导数存在, 不能保证导数存在, 因此 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(1 - \cosh)$ 存在是 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导的必要条件.

对于(C),

$$\begin{aligned} f'(0) \text{ 存在} &\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(h - \sinh) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h - \sinh) - f(0)}{h - \sinh - 0} \cdot \frac{h - \sinh}{h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h - \sinh) - f(0)}{h - \sinh - 0} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - \sinh}{h^2} = f'(0) \cdot 0 = 0 \Rightarrow (C) \text{ 成立}. \end{aligned}$$

但是, 因为 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - \sinh}{h^2} = 0$, 所以只需 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h - \sinh) - f(0)}{h - \sinh - 0}$ 有界, 而无须

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h - \sinh) - f(0)}{h - \sinh - 0}$ 存在, 就有 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(h - \sinh) = 0$, 因此, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(h - \sinh)$ 存在是 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导的必要条件.



对于(D),

$$\begin{aligned} f'(0) \text{ 存在} &\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(2h) - f(h)] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[2 \frac{f(2h)}{2h} - \frac{f(h)}{h} \right] = f'(0) \Rightarrow \text{(D) 成立.} \end{aligned}$$

但是,

$$\text{(D) 成立} \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} [f(2h) - f(h)] = 0,$$

但 $f(h)$ 在 $h=0$ 处不一定连续, 例如, $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 满足(D), 但 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续, 所以 $f'(0)$ 不存在.

对于(B),

$$\begin{aligned} &\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f(1-e^h) \quad (\text{令 } x = 1-e^h) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\ln(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(1-x)} = -f'(0), \end{aligned}$$

因此, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f(1-e^h)$ 存在 $\Leftrightarrow f'(0)$ 存在.

【33】(C).

分析 点 $(a, 0)$ 是曲线 $y = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 拐点的充要条件是 $y''(a)=0$, 且 $x < a$ 与 $x > a$ 时, $y''(x)$ 改变符号.

由乘积的求导法则, $y''(x)$ 的表达式中, 每一项都有因式 $(x-3)$, 所以, $y''(3)=0$, 且 $x < 3$ 与 $x > 3$ 时, $y''(x)$ 改变符号.

【34】(D).

分析 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1-\cos x} = 2$, 所以必存在 $\delta > 0$, 使 $x \in (-\delta, \delta)$ 时 $\frac{f(x)}{1-\cos x} > 0$, 而 $1-\cos x > 0$, 故 $f(x) > 0$. 又因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1-\cos x} = 2$, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$, 于是当 $x \in (-\delta, \delta)$ 时 $f(x) > f(0) = 0$, 即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值.

【35】(B).

分析 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{|x|} = 1 \Rightarrow f''(0) = 0$. 又因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{|x|} = 1 > 0$, 故存在 $\delta > 0$, 使 $x \in (-\delta, \delta)$ 时 $\frac{f''(x)}{|x|} > 0$, 即 $f''(x) > 0$, 故 $f'(x)$ 单调增加. 于是, 当 $x > 0$ 时, $f'(x) > f'(0) = 0$; 当 $x < 0$ 时, $f'(x) < f'(0) = 0$, 故 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

【36】(D).

分析 由 $f'''(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{x - x_0} > 0 \Rightarrow$ 存在 $\delta > 0$, 使 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 时 $\frac{f''(x)}{x - x_0} > 0$, 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时 $f''(x) < 0$, 当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时 $f''(x) > 0$, 故 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

【37】(A).



分析 由极值的定义, 必存在 $\delta_1 > 0$, 当 $x \in (-\delta_1, \delta_1)$ 时 $f(x) > f(x_0)$, 存在 $\delta_2 > 0$, 当 $x \in (-\delta_2, \delta_2)$ 时 $g(x) > g(x_0)$. 取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 时, $f(x) + g(x) > f(x_0) + g(x_0)$. 即 $F(x)$ 在 x_0 点必取得极小值, 故选(A).

【38】(C).

分析 令 $\varphi(x) = f(x)g(x)$, 则

$$\varphi'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

$$\varphi''(x) = f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x),$$

故 $\varphi'(x_0) = 0$, x_0 是 $f(x)g(x)$ 的驻点. 又由 $\varphi''(x_0) = 2f'(x_0)g'(x_0) > 0$ 可知 $\varphi(x) = f(x)g(x)$ 在 x_0 点取得极小值.

【39】(D).

分析 涉及 $x=0$ 点的各阶导数, 可考虑用泰勒公式. 因为

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0)x^{n+1} + o(x^{n+1}) \\ &= f(0) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0)x^{n+1} + o(x^{n+1}), \end{aligned}$$

所以, 当 $|x|$ 很小时, $f(x) - f(0)$ 与 $\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0)x^{n+1}$ 同号, 而 $f^{(n+1)}(0) > 0$, 当 n 为偶数时, $\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0)x^{n+1}$ 在 $x=0$ 两侧异号, $f(0)$ 不是极值点; 当 n 为奇数时, 在 $x=0$ 两侧均有 $\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0)x^{n+1} > 0$, 即 $f(x) > f(0)$, 所以, $x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点.

【40】(C).

分析 由 $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e} = 0 \Rightarrow x = e$. 当 $0 < x < e$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调增加; 当 $e < x < +\infty$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调减少. 故 $f(x)$ 在 $x=e$ 处取得极大值 $f(e) = k >$

0. 又 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, 由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. 故 $f(x)$ 在 $(0, e)$ 及 $(e, +\infty)$ 内各有一个零点.

【41】(D).

分析 因奇函数的导函数是偶函数, 但是偶函数积分后要加一个常数 C , 当 $C=0$ 时的原函数为奇函数, 而 $C \neq 0$ 时为非奇非偶函数.

【42】(A).

分析 用排除法. $f(x) = x^2$ 是偶函数, 但是 $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$ 当 $C \neq 0$ 时不是奇函数, 排除(B). $f(x) = 1 + \cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数, 但是 $F(x) = x + \sin x + C$ 不是周期函数, 排除(C). $f(x) = x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调增加, 但是 $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$ 在



$(-\infty, +\infty)$ 内不单调, 排除(D).

【43】(C).

分析 因为 $f(x)$ 是以 l 为周期的周期函数, 所以

$$\int_{a+kl}^{a+(k+1)l} f(x) dx = \int_{kl}^{(k+1)l} f(x) dx = \int_0^l f(x) dx,$$

故此积分与 a 及 k 都无关.

【44】(D).

分析 因 $\frac{\sin x}{1+x^2} \cos^6 x$ 是奇函数, 所以,

$$M=0,$$

$$N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x dx = 0 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x dx > 0,$$

$$P = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^3 x dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x dx = 0 - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x dx < 0,$$

所以 $P < M < N$.

【45】(B).

分析 按题意, 这三个反常积分收敛, 为比较它们的大小, 只需比较被积函数的大小. 显然, $\sin x < \cos x < \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \left(x \in \left(0, \frac{\pi}{4} \right) \right)$, 因为 $\ln t$ 在 $(0, +\infty)$ 单调上升, 所以

$$\begin{aligned} \ln \sin x &< \ln \cos x < \ln \cot x \quad \left(x \in \left(0, \frac{\pi}{4} \right) \right) \\ \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin x dx &< \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cot x dx. \end{aligned}$$

【46】(D).

分析 先比较 I_1 与 I_2 : 由 $I_2 - I_1 = \int_{\pi}^{2\pi} e^{x^2} \sin x dx < 0 \Rightarrow I_1 > I_2$.

再比较 I_2 与 I_3 : 由 $I_3 - I_2 = \int_{2\pi}^{3\pi} e^{x^2} \sin x dx > 0 \Rightarrow I_2 < I_3$.

还需比较 I_1 与 I_3 : 由

$$\begin{aligned} I_3 - I_1 &= \int_{\pi}^{3\pi} e^{x^2} \sin x dx = \int_{\pi}^{2\pi} e^{x^2} \sin x dx + \int_{2\pi}^{3\pi} e^{x^2} \sin x dx \\ &= \int_{2\pi}^{3\pi} e^{(t-\pi)^2} \sin(t-\pi) dt + \int_{2\pi}^{3\pi} e^{x^2} \sin x dx \\ &= \int_{2\pi}^{3\pi} [e^{x^2} - e^{(x-\pi)^2}] \sin x dx > 0 \\ &\Rightarrow I_3 > I_1. \end{aligned}$$

【47】(A).

分析 由极坐标方程表示曲线的弧长公式得

$$\int_0^{\pi} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\theta = \int_0^{\pi} \sqrt{(ae^{\theta})^2 + (abe^{\theta})^2} d\theta = \int_0^{\pi} ae^{\theta} \sqrt{1+b^2} d\theta.$$



若将曲线方程写成参数方程形式

$$\begin{cases} x = r \cos \theta = ae^{i\theta} \cos \theta, \\ y = r \sin \theta = ae^{i\theta} \sin \theta, \end{cases}$$

则可用参数方程的弧长公式计算.

【48】(C).

分析 设闸门的高为 h , 宽为 a , 由题设及水压力的计算公式得

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\int_0^{\frac{h}{2}} \rho g a x dx}{\int_{\frac{h}{2}}^h \rho g a x dx} = \frac{1}{3}.$$

【49】(A).

分析 由题意, 细杆左端点坐标为 $(-l, 0)$, 质点所在处坐标为 $(a, 0)$, 由引力公式得

$$F = \int_{-l}^0 \frac{km\mu dx}{(a-x)^2}.$$

【50】* (C).

分析 直线 L 的方向向量 $\tau = (2, 1, 1)$, 平面 Π 的法向量 $n = (1, -1, 2)$, 设直线与平面的夹角为 α , 则

$$\sin \alpha = \frac{|\tau \cdot n|}{|\tau| \cdot |n|} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}.$$

【51】* (C).

分析 直线 L 的方向向量为

$$\tau = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -10 \end{vmatrix} = -7(4i - 2j + k),$$

平面 Π 的法向量 $n = (4, -2, 1)$, 所以 $\tau \parallel n$, 即直线 L 垂直于平面 Π .

【52】* (C).

分析 直线 L_1 与直线 L_2 的方向向量分别为

$$\tau_1 = (2, 3, 4), \quad \tau_2 = (1, 1, 2),$$

显然既不平行也不垂直. 直线 L_1 与直线 L_2 分别过点 $M_1(0, -3, 0)$ 和 $M_2(1, -2, 2)$. 混合积

$$(\tau_1, \tau_2, \overrightarrow{M_1M_2}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

\Rightarrow 直线 L_1 与直线 L_2 共面

\Rightarrow 直线 L_1 与直线 L_2 相交但不垂直.

【53】* (B).

分析 连接直线 L_1 上点 $M_1(1, -1, 0)$ 与直线 L_2 上点 $M_2(2, -1, 1)$ 的向量为 $\overrightarrow{M_1M_2} = (1, 0, 1)$, 所以



$$d = \frac{|\overrightarrow{M_1 M_2} \times \boldsymbol{\tau}|}{|\boldsymbol{\tau}|} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

【54】(A).

分析 令 $y=x$, 则

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3}{x^4 + x^2} = 0;$$

令 $y=x^2$, 则

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^4}{x^4 + x^2} = 1,$$

所以极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2 y}{x^4 + y^2}$ 不存在.

事实上, 点 (x, y) 沿任何直线 $y=kx$ 趋于 $(0, 0)$ 极限都存在, 即

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=kx}} \frac{2x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2kx^3}{x^4 + k^2 x^2} = 0,$$

但是, 极限仍是不存在的.

【55】(C).

分析 令 $y=kx$, 则极限

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^2}{(1+k)^2 x^2} = \frac{k}{1+k^2}$$

因 k 而异, 极限不存在, 从而也不连续.

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0-0}{\Delta x} = 0,$$

同理,

$$f'_y(0, 0) = 0.$$

【56】(B).

分析

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0-0}{\Delta x} = 0,$$

同理,

$$f'_y(0, 0) = 0.$$

但是

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0) - [f'_x(0, 0)\Delta x + f'_y(0, 0)\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \\ &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta x \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \end{aligned}$$

不存在(令 $\Delta y=k\Delta x$, 则极限因 k 而异), 所以 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处两个偏导数存在但不可微.

【57】(A).

分析 由 $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ 两边对 y 积分得



$$f'_y(x, y) = 2y + \varphi_1(x),$$

将 $f'_y(x, 1) = x + 1$ 代入得 $\varphi_1(x) = x - 1$, 于是

$$f'_y(x, y) = 2y + x - 1,$$

两边再对 y 积分得

$$f(x, y) = y^2 + xy - y + \varphi_2(x),$$

将 $f(x, 1) = x + 2$ 代入该式可得 $\varphi_2(x) = 2$, 故 $f(x, y) = y^2 + xy - y + 2$.

【58】* (D).

分析 按定义求点 $(0, 0)$ 处沿任意方向的方向导数: 设 l 的方向余弦为 $(\cos\alpha, \cos\beta)$, 则

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(0,0)} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t\cos\alpha, t\cos\beta) - f(0, 0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{t^2 \cos^2\alpha + t^2 \cos^2\beta}}{t} \\ &= 1, \end{aligned}$$

即 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在点 $(0, 0)$ 处沿任意方向的方向导数存在.

也可用排除法. 函数 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在点 $(0, 0)$ 处连续是显然的, 排除(A). 又 $f(x, 0) = \sqrt{x^2} = |x|$ 在点 $(0, 0)$ 处不可导, 故 $f'_x(0, 0)$ 不存在, 同理, $f'_y(0, 0)$ 也不存在, 排除(B), (C).

这个题目说明, 即使沿任意方向的方向导数存在, 偏导数也不一定存在. 从几何上说, 函数 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ 是一个锥面, $(0, 0)$ 处是尖点, 不存在切线, 即偏导数不存在, 但是从 $(0, 0)$ 点向外任何方向都是光滑的, 沿任意方向的方向导数都存在.

【59】* (B).

分析 曲线 $x=t, y=-t^2, z=t^3$ 在点 $t=t_0$ 处的切向量为 $\tau = (1, -2t_0, 3t_0^2)$, 平面 $x+2y+z=4$ 的法向量为 $n = (1, 2, 1)$, 由题设知 $\tau \perp n$, 即

$$1 - 4t_0 + 3t_0^2 = 0,$$

解得 $t_0 = 1$ 或 $t_0 = \frac{1}{3}$, 所以, 满足题意的切线有两条.

【60】* (D).

分析 曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ 在点 $(1, -1, 0)$ 处的法向量为 $n_1 = (2, -2, 0)$, 平面 $x+y+z=0$ 的法向量为 $n_2 = (1, 1, 1)$, 于是, 曲线 $S: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2, \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 在点 $(1, -1, 0)$ 处的切向量为

$$\tau = n_1 \times n_2 = (-2, -2, 4),$$

故所求切线方程为 $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-2}$.

【61】* (B).

分析 曲面 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = 4$ 上任一点 $P(x, y, z)$ 处的法向量为



$(\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}, \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}, \frac{2}{3}z^{-\frac{1}{3}})$, 在点 $P(x, y, z)$ 处的切平面方程为

$$x^{-\frac{1}{3}}(X-x) + y^{-\frac{1}{3}}(Y-y) + z^{-\frac{1}{3}}(Z-z) = 0.$$

令 $Y=Z=0 \Rightarrow X=4x^{\frac{1}{3}}$, 令 $X=Z=0 \Rightarrow Y=4y^{\frac{1}{3}}$, 令 $X=Y=0 \Rightarrow Z=4z^{\frac{1}{3}}$, 于是

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 16(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}}) = 64.$$

【62】(B).

分析 令

$$B = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad A = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad C = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

由于 $B^2 - AC > 0$, 函数 $u(x, y)$ 不存在无条件极值, 所以, D 的内部没有极值, 故最大值与最小值都不会在 D 的内部出现. 但是 $u(x, y)$ 连续, 所以, 在平面有界闭区域 D 上必有最大值与最小值, 故最大值点和最小值点必定都在 D 的边界上.

【63】(C).

分析 因为 $f(x, y)$ 连续, 所以 $\iint_D f(u, v) du dv$ 存在, 其值为一常数, 且

$$\iint_D f(u, v) du dv = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

等式两边同时在区域 D 上作二重积分得

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D xy dx dy + \iint_D f(u, v) du dv \iint_D dx dy,$$

即

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} xy dy + \iint_D f(u, v) du dv \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy,$$

即

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \frac{1}{12} + \frac{1}{3} \iint_D f(u, v) du dv,$$

于是

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \frac{1}{8},$$

即 $f(x, y) = xy + \frac{1}{8}$.

【64】(A).

分析 由于 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$, 所以

$$(x^2 + y^2)^2 \leq x^2 + y^2 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1,$$

由 $\cos x$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 单调减少可得

$$\cos(x^2 + y^2)^2 \geq \cos(x^2 + y^2) \geq \cos \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0,$$

因此有 $c > b > a$.

【65】(B).



分析 由二重积分中值定理: $\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) \sigma$, 其中 $(\xi, \eta) \in D$, σ 为 D 的面积, $\sigma = \pi a^2$. 于是有

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\pi a^2} \iint_D f(x, y) d\sigma &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\pi a^2} f(\xi, \eta) \pi a^2 = \lim_{a \rightarrow 0} f(\xi, \eta) \\ &= f(0, 0) \quad (\text{因为 } f(x, y) \text{ 连续}). \end{aligned}$$

【66】(C).

分析 因为 D 关于 x, y 轴都对称, 故

$$\iint_D y dx dy = 0, \quad \iint_D |x| dx dy = 4 \iint_{D_1} x dx dy,$$

其中 $D_1 = \{(x, y) | x+y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$. 于是

$$\iint_D (|x| + y) dx dy = 4 \iint_{D_1} x dx dy = 4 \int_0^1 x dx \int_0^{1-x} dy = \frac{2}{3}.$$

【67】(A).

分析 设 D_1 由 $y=1, y=x, x=0$ 所围; D_2 由 $y=x, y=-x, x=-1$ 所围; D_3 由 $y=-x, y=x, y=1$ 所围.

因 D_3 关于 y 轴对称, $f(x, y) = xy$ 是 x 的奇函数, 故

$$\iint_{D_3} xy dx dy = 0.$$

因 D_2 关于 x 轴对称, $f(x, y) = xy$ 是 y 的奇函数, 故

$$\iint_{D_2} xy dx dy = 0.$$

于是

$$\iint_D xy dx dy = \iint_{D_3} xy dx dy + \iint_{D_2} xy dx dy = 0.$$

同理,

$$\iint_{D_2} \cos x \sin y dx dy = 0.$$

因 D_3 关于 y 轴对称, $g(x, y) = \cos x \sin y$ 是关于 x 的偶函数, 故

$$\iint_{D_3} \cos x \sin y dx dy = 2 \iint_{D_1} \cos x \sin y dx dy.$$

【68】* (A).

分析 由 Ω 的边界平面方程可知 $-2 \leq x+y+z \leq -1$, 于是 $1 \leq (x+y+z)^2 \leq 4$, $1 \leq x+y+z+3 \leq 2$, $0 \leq \ln(x+y+z+3) < 1$, 于是 $I_1 < I_2$.

【69】* (C).

分析 由对称性得

$$\oiint_{\Sigma} x^2 dy dz = \oiint_{\Sigma} y^2 dx dz = \oiint_{\Sigma} z^2 dx dy.$$



于是

$$\oiint_{\Sigma} x^2 dydz = \frac{1}{3} \left[\oiint_{\Sigma} x^2 dydz + \oiint_{\Sigma} y^2 dx dz + \oiint_{\Sigma} z^2 dx dy \right],$$

由高斯公式得

$$\oiint_{\Sigma} x^2 dydz = \frac{1}{3} \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} (2x+2y+2z) dV = 0.$$

(由积分区域的对称性及被积函数的奇偶性)

同理,

$$\oiint_{\Sigma} y^2 dydz = 0, \quad \oiint_{\Sigma} y dydz = 0.$$

但

$$\oiint_{\Sigma} x dydz = \frac{4}{3}\pi.$$

【70】(C).

分析 设

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

积分区域 D 的极坐标表示是: $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$, 这是圆心在圆点, 半径为 1 的圆的 $\frac{1}{8}$. 这是直角坐标系中的 y 型区域, 转换成先 x 后 y 的积分顺序.

注意 $y=x$ 与 $x^2+y^2=1$ 在第一象限的交点是 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, 于是

$$D: 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, y \leq x \leq \sqrt{1-y^2},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$$

【71】* (B).

分析 由曲线积分与路径无关的充要条件得

$$\frac{\partial}{\partial x} [-f(x)\cos y] = \frac{\partial}{\partial y} [f(x) - e^x] \sin y,$$

即

$$-f'(x)\cos y = [f(x) - e^x] \sin y,$$

即

$$f'(x) + f(x) = e^x,$$

解此微分方程得

$$f(x) = e^{-\int dx} \left[\int e^x \cdot e^{\int dx} dx + C \right] = e^{-x} \left(\frac{1}{2} e^{2x} + C \right).$$

由



$$f(0) = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = e^{-x} \left(\frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}).$$

【72】(A).

分析 由 $y=1+\sqrt{1-x^2} \Rightarrow x^2+(y-1)^2=1 (y \geq 1)$, 所以, 积分区域 D 是圆 $x^2+(y-1)^2 \leq 1$ 的右半圆在直线 $y=x$ 上方的部分, 于是, 其极坐标形式为

$$D = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 2\sin\theta, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\},$$

即(A)为正确选项.

【73】* (A).

分析

$$\oiint_{\Sigma} (2x+3y+z)ds = 2\oiint_{\Sigma} xds + 3\oiint_{\Sigma} yds + \oiint_{\Sigma} zds,$$

其中

$$\bar{x} = \frac{1}{S} \oiint_{\Sigma} xds, \quad \bar{y} = \frac{1}{S} \oiint_{\Sigma} yds, \quad \bar{z} = \frac{1}{S} \oiint_{\Sigma} zds$$

是球面 $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=1$ 的形心坐标公式, 而球面的形心在球心 $(1, 0, -1)$ 处, 故

$$\oiint_{\Sigma} (2x+3y+z)ds = (2\bar{x}+3\bar{y}+\bar{z})S = (2+0-1)4\pi = 4\pi.$$

【74】* (A).

分析 设 $P = \frac{x-y}{x^2+y^2}$, $Q = \frac{x+y}{x^2+y^2}$, 则

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2-2xy-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

故曲线积分与路径无关. 使用路径无关选路法, 令 $L_1: y = \sqrt{\pi^2-x^2}$, 则

$$\begin{aligned} \int_L \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2+y^2} &= \int_{L_1} \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2+y^2} \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ [x - \sqrt{\pi^2-x^2}] + [x + \sqrt{\pi^2-x^2}] \left[-\frac{x}{\sqrt{\pi^2-x^2}} \right] \right\} dx \\ &= -\pi. \end{aligned}$$

【75】(D).

分析 因为 D 具有轮换对称性, 所以

$$\iint_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)+f(y)}} dx dy = \iint_D \frac{a\sqrt{f(y)}+b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)+f(x)}} dx dy,$$

故原式

$$\frac{1}{2} \iint_D \frac{(a+b)[\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}]}{\sqrt{f(x)+f(y)}} dx dy = \frac{a+b}{2} \iint_D dx dy = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{2^2\pi}{4} = \frac{a+b}{2}\pi.$$

【76】(C).

分析 由 $r=2\sin\theta \Rightarrow r^2=2r\sin\theta \Rightarrow x^2+y^2=2y$, 又 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, 所以, 积分区域 D 是圆心为 $(0, 1)$, 半径为 1 的圆的右半圆, 所以, D 的直角坐标形式为

$$D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq \sqrt{2y-y^2}, 0 \leq y \leq 2\}.$$

【77】(C).

分析 由 $r=a\cos\theta$ 得 $r^2=ar\cos\theta$, 即 $x^2+y^2=ax$, 这是积分区域的边界曲线, 又 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, 所以, 积分区域为整个圆面, 故积分区域为

$$D: x^2+y^2 \leq ax \quad (x > 0).$$

【78】(C).

分析 区域 $D_1: 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1$ 由直线 $x=0, y=x, y=1$ 围成, 区域 $D_2: 1 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq 2-y$ 由直线 $x=0, x+y=2, y=1$ 围成, 所以积分区域 $D=D_1 \cup D_2$ 是由直线 $x=0, y=x, x+y=2$ 围成的. 故原积分形式可写成

$$\int_0^1 dx \int_x^{2-x} f(x, y) dy.$$

【79】(D).

分析 积分区域 D 是由 $y=0, y=\ln x, x=e$ 三条线围成的, 即由 $x=e, y=0, x=e^y$ 三条线围成的, 所以, 交换积分顺序为 $\int_0^1 dy \int_y^e f(x, y) dx$.

【80】(B).

分析 非齐次线性微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的通解由两部分和组成: (1) 非齐次线性微分方程本身的特解; (2) 非齐次线性微分方程对应的齐次线性微分方程 $y'+P(x)y=0$ 的通解.

$y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 都可以作为方程本身的特解, 而 $y_1(x)-y_2(x)$ 则是齐次线性微分方程 $y'+P(x)y=0$ 的特解, $C[y_1(x)-y_2(x)]$ 就是齐次线性微分方程 $y'+P(x)y=0$ 的通解, 所以, 应选(B).

【81】(A).

分析 因 $f'(x_0)=0$, 所以 x_0 为 $f(x)$ 的驻点, 将 $f'(x_0)=0$ 代入原式得

$$y''(x_0) = -4y(x_0) < 0,$$

故函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点取得极大值.

【82】(B).

分析 由题设得微分方程 $y' = -\frac{x}{y}$. 解得 $x^2+y^2=c$.

【83】(C).

分析 由题设得微分方程 $y' = -\frac{2x}{y}$. 解得 $x^2+\frac{y^2}{2}=c$.

【84】(C).

分析 方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$$



是二阶线性非齐次方程, $x-x^2$ 与 $x-e^x$ 为其对应的齐次方程的两个线性无关的解, 所以

$$y = C_1(x-x^2) + C_2(x-e^x) + x$$

为原方程的通解.

如果答案改成

$$y = C_1(x^2-x) + C_2(x^2-e^x) + x^2$$

或

$$y = C_1(e^x-x^2) + C_2(e^x-x) + e^x$$

也是对的.

【85】(C).

分析 方程 $y''-2y'=0$ 的特征方程为 $r^2-2r=0$, $r_1=0$, $r_2=2$, 所以, 非齐次方程 $y''-2y'=xe^{2x}$ 的特解形式为 $y=x(ax+b)e^{2x}$.

【86】(C).

分析 方程 $y''-3y'+2y=0$ 的特征方程为 $r^2-3r+2=0$, $r_1=1$, $r_2=2$, 所以, 方程

$$y''-3y'+2y = e^x + 1 + \cos 2x$$

的特解形式为

$$y = axe^x + b + A\cos 2x + B\sin 2x.$$

【87】(D).

分析 从通解的结构知, 三阶线性常系数齐次方程相应的三个特征根是: $1, \pm 2i$ ($i=\sqrt{-1}$), 对应的特征方程是

$$(r-1)(r+2i)(r-2i) = (r-1)(r^2+4) = r^3-r^2+4r-4=0,$$

从而可知微分方程是

$$y'''-y''+4y'-4y=0.$$

【88】(A).

分析 设 $u=tx$, 则

$$\int_0^1 f(tx)dt = \frac{1}{x} \int_0^x f(u)du,$$

于是, 原方程变为

$$\frac{1}{x} \int_0^x f(u)du = nf(x),$$

即

$$\int_0^x f(u)du = nx f(x),$$

两边求导数, 得

$$f'(x) = \frac{1-n}{nx} f(x),$$

解得 $f(x) = Cx^{\frac{1-n}{n}}$.

【89】* (D).



分析 因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1}$ 也收敛, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1})$ 是前面两个级数对应项相加而成的级数, 由级数的性质知, 此级数必收敛.

也可用排除法: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}$ 可排除(A). 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ 可排除(B). 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ 可排除(C).

【90】* (B).

分析 因为“若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1000}$ 收敛”是级数的性质, 所以②是正确命题, 因此, (C)、(D)非正确答案.

对于①, 容易举出反例: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ 发散, 但

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n}) = (1-1) + (1-1) + \cdots = 0$$

收敛. 所以, 应选(B).

【91】* (B).

分析 因级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 都为正项级数, 且收敛, 又

$$\sqrt{a_n^2 \cdot b_n^2} = |a_n b_n| \leq \frac{a_n^2 + b_n^2}{2},$$

由比较判别法得 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ 收敛, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 绝对收敛.

【92】* (A).

分析 因级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n^2}$ 收敛, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos n\alpha}{n^2} - \frac{1}{n} \right)$ 必发散.

【93】* (D).

分析 当 $a=0$ 时, $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{\sqrt{n}}$ 为交错级数, 当 $n \geq 3$ 时满足莱布尼兹定理, 所以收敛.

当 $a=1$ 时, $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n n \sin \frac{\pi}{\sqrt{n}}$ 的一般项 $n \sin \frac{\pi}{\sqrt{n}}$ 不趋于零, 发散. 所以, 敛散性与 a 有关.

【94】* (C).

分析 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2}{a_n} = 0 \Rightarrow$ 存在 N , 当 $n > N$ 时, $a_n^2 \leq a_n$,

由比较判别法, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 必收敛.

【95】* (D).



分析 方法一 用排除法. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛(满足莱布尼兹定理), 但是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ 发散,}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ 发散,}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \text{ 发散,}$$

所以, (A), (B), (C) 非正确答案.

方法二

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} \right),$$

其中 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$ 都收敛, 所以, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ 收敛.

【96】* (C).

分析 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n}} = 1 > 0 \Rightarrow n$ 充分大时 $\frac{1}{u_n} > 0, u_n > 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{u_n} = 0$. 所考察级数为

交错级数, 但不能保证 $\frac{1}{u_n}$ 的单调性, 不满足莱布尼兹定理的条件, 于是按定义考察部分和

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \left(\frac{1}{u_k} + \frac{1}{u_{k+1}} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{1}{u_k} + \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{1}{u_{k+1}} \\ &= - \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{1}{u_k} + \sum_{l=2}^{n+1} (-1)^l \frac{1}{u_l} \\ &= \frac{1}{u_1} + \frac{(-1)^{n+1}}{u_{n+1}} \rightarrow \frac{1}{u_1} \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

知原级数收敛.

再考察取绝对值后的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \right)$, 注意 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}}}{\frac{1}{n}} = 2$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发

散, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \right)$ 发散.

【97】* (A).

分析 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$, 所以, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{3}{\sqrt{5}}$; 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛



半径为 $\frac{1}{3}$, 所以, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = 3$, 于是,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_{n+1}^2}{b_{n+1}^2}}{\frac{a_n^2}{b_n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}^2}{b_{n+1}^2} \cdot \frac{b_n^2}{a_n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right)^2 \cdot \left(\frac{b_n}{b_{n+1}} \right)^2 = \frac{1}{5},$$

从而可得幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{b_n^2} x^n$ 的收敛半径为 5.

【98】* (B).

分析 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-a)^n}{n}$ 的收敛半径为 1, 由题设条件可知 $x=0$ 为其收敛区间的右端点, 所以 $a=-1$.

【99】* (D).

分析 由于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x=2$ 处条件收敛, 则 $x=2$ 为其收敛区间的端点, 而级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 收敛区间的中心为 $x=1$, 所以该幂级数的收敛半径为 1, 收敛区间为 $(0, 2)$ (按定义, 收敛区间为开区间). 由于 $x=0$ 点敛散性无法确定, 所以, 收敛区域无法确定.

【100】* (A).

分析 只有④是正确的.

①不正确, 如 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} (-x^n)$ 收敛半径都是 1, 但 $\sum_{n=0}^{\infty} (1-1)x^n$ 的收敛半径为 ∞ .

②和③都不正确, 如 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{2} \cdot x^n$ 收敛半径是 1, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ 都不存在.

对于命题④, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 收敛半径为 R . 对于 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ 则有 $0 < x^2 < R$ 时收敛, 即 $-\sqrt{R} < x < \sqrt{R}$ 时收敛.

线性代数

【101】(D).

分析 因为

$$(3\mathbf{A}^*)^{-1} = \frac{1}{3} (\mathbf{A} |\mathbf{A}^{-1}|)^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A} = \mathbf{A},$$

所以

$$|4\mathbf{A} - (3\mathbf{A}^*)^{-1}| = |4\mathbf{A} - \mathbf{A}| = |3\mathbf{A}| = 27|\mathbf{A}| = 9.$$

【102】(A).