考研数学高等数学强化讲义

主讲：张宇

张宇：新东方在线名师，博士，全国著名考研数学辅导专家，教育部"国家精品课程建设骨干教师"，全国畅销书《高等数学 18 讲》、《考研数学题源探析经典 1000 题》作者，高等教育出版社《全国硕士研究生入学统一考试数学考试参考书（大纲解析）》编者之一，2007 年斯洛文尼亚全球可持续发展大会受邀专家（发表 15 分钟主旨演讲）．首创"题源教学法"，对考研数学的知识结构和体系有全新的解读，对考研数学的命题与复习思路有极强的把握和预测能力，让学生轻松高效夺取高分．

目　录

第一讲　极限……1

第一讲 极限

核心考点概述

1．定义与性质

2．函数极限的计算

3．数列极限的计算

4．应用：无穷小比阶；连续与间断

内容展开

极限的定义与性质

1．定义

1）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

（$x\to x_0$，$x\to x_0^+$，$x\to x_0^-$，$x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$）

2）$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当$n>N$时，恒有$|x_n-a|<\varepsilon$.

考点有三：

①极限运算的过程性　$x\to 0$

若$\lim\limits_{x\to 0} f(x)\ \exists$，则$f(x)$在$x\to 0$中处处有定义；

若$f(x)$在$x\to 0$中有无定义点，则$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$不$\exists$.

如$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x\cos\frac{1}{x})}{x\cos\frac{1}{x}}$

②$\varepsilon-\delta$，$\varepsilon-N$的考法

③取ε，证明$f(x)$，x_n的范围.

2．性质

①唯一性　　若 $\lim\limits_{x\to\bullet} f(x)=A\exists$，则 A 唯一.

【例】已知 $I=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}+k[x]\right)$ 存在，求 I， k.

②局部有界性

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\exists$，则 $\exists M>0$， $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)|<M$.

【例】设 $f(x)=\dfrac{(x^3-1)\sin x}{(x^2+1)|x|}$，讨论其在定义域上的有界性.

③局部保号性

若 $\lim\limits_{x\to\bullet} f(x)=A>0$（或<），则在 $x\to\bullet$ 中， $f(x)>0$（或<）.　　脱帽

推论：若 $x\to\bullet$ 中， $f(x)\ge 0$（或≤），若 $\lim\limits_{x\to\bullet} f(x)\exists$，则 $\lim\limits_{x\to\bullet} f(x)\ge 0$（或≤）.　　戴帽

【例】设 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}=-1$，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处（　）

（A）取极大值　　（B）取极小值　　（C）不取极值　　（D）不确定

函数极限的计算

综述：（1）化简先行

（2）判别类型（七种未定式）

（3）使用工具（洛必达法则、泰勒公式）

（4）注意事项

【例】求下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{x^2}$

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$

（3）$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}$

（4）$\lim\limits_{x\to 1^-}\ln x\cdot\ln(1-x)$

【注】重要公式：$\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\alpha}\ln^{\beta}x=0$（$\alpha>0$，$\beta>0$）

（5）$\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt{4x^2+x}\ln(2+\frac{1}{x})-2\ln 2\cdot x]$

（6）$\lim\limits_{x\to 0^+}(2x-\tan x^2)^{\sin x}$

（7）$\lim\limits_{x\to \pi^-}(\pi-x+\sin x)^{\sin x}$

（8）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{(1+\frac{1}{x})^{x^2}}$

（9）若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+f(x)}{x^2\sin^2 x}=1$，求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x+f(x)}{x^2\sin^2 x}$.

数列极限的计算

1．通项已知且易于连续化，用**归结原则**

【例】求下列极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})^{\sqrt{n}}$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n+\sin n}}$

2．通项已知但不易连续化，用**夹逼准则**

【例】（Ⅰ）证明：当$x>0$时，$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

（Ⅱ）设$x_n=(1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{2}{n^2})\cdots(1+\frac{n}{n^2})$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

3．对通项由递推公式给出的，用**单调有界准则**

【例】（Ⅰ）设 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$，求 $f(x)$ 的最小值；

（Ⅱ）设 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限.

极限的应用：无穷小比阶，判别连续与间断

【例 1】设 $p(x)=a+bx+cx^2+dx^3$，当 $x\to 0$ 时，若 $p(x)-\tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小量，求 $p(x)$.

【例 2】若 $\int_0^{x-\ln(1+x)}\dfrac{\sin t^2}{t}dt$ 与 cx^k 为等价无穷小量，求 c， k.

【例 3】 $f(x)=\dfrac{|x|^{x}-1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点有_____个.

【例 4】设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(x^2-4)}{\sin\pi x}, & x<0,\\ \dfrac{x(x^2-1)}{x-1}, & x\geq 0\end{cases}$

求其间断点并判别类型.