考研数学高等数学强化讲义

主讲：张宇

张宇：新东方在线名师，博士，全国著名考研数学辅导专家，教育部“国家精品课程建设骨干教师”，全国畅销书《高等数学 18 讲》、《考研数学题源探析经典 1000 题》作者，高等教育出版社《全国硕士研究生入学统一考试数学考试参考书（大纲解析）》编者之一，2007 年斯洛文尼亚全球可持续发展大会受邀专家（发表 15 分钟主旨演讲）. 首创“题源教学法”，对考研数学的知识结构和体系有全新的解读，对考研数学的命题与复习思路有极强的把握和预测能力，让学生轻松高效夺取高分.

目　录

第一讲 极限

核心考点概述

1. 定义与性质
2. 函数极限的计算
3. 数列极限的计算
4. 应用：无穷小比阶；连续与间断

内容展开

极限的定义与性质

1. 定义

1）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

（$x\to x_0$，$x\to x_0^+$，$x\to x_0^-$，$x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$）

2）$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当$n>N$时，恒有$|x_n-a|<\varepsilon$.

考点有三：

①极限运算的过程性　　$x\to 0$

若$\lim\limits_{x\to 0} f(x)\exists$，则$f(x)$在$x\to 0$中处处有定义；

若$f(x)$在$x\to 0$中有无定义点，则$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$不$\exists$.

如$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x\cos\frac{1}{x})}{x\cos\frac{1}{x}}$

②$\varepsilon-\delta$，$\varepsilon-N$的考法

③取ε，证明$f(x)$，x_n的范围.

2．性质

①唯一性　　若$\lim\limits_{x\to\bullet} f(x)=A\exists$，则$A$唯一.

【例】已知$I=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}+k[x]\right)$存在，求$I$，$k$.

②局部有界性

若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\exists$，则$\exists M>0$，$\delta>0$，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时，$|f(x)|<M$.

【例】设$f(x)=\dfrac{(x^3-1)\sin x}{(x^2+1)|x|}$，讨论其在定义域上的有界性.

③局部保号性

若$\lim\limits_{x\to\bullet} f(x)=A>0$（或<），则在$x\to\bullet$中，$f(x)>0$（或<）.　　脱帽

推论：若$x\to\bullet$中，$f(x)\geq 0$（或≤），若$\lim\limits_{x\to\bullet} f(x)\exists$，则$\lim\limits_{x\to\bullet} f(x)\geq 0$（或≤）.　　戴帽

【例】设$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}=-1$，则$f(x)$在$x=x_0$处（　）

（A）取极大值　　（B）取极小值　　（C）不取极值　　（D）不确定

函数极限的计算

综述：（1）化简先行

（2）判别类型（七种未定式）

（3）使用工具（洛必达法则、泰勒公式）

（4）注意事项

【例】求下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{x^2}$

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$

（3）$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}$

（4）$\lim\limits_{x\to 1^-}\ln x\cdot\ln(1-x)$

【注】重要公式：$\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\alpha}\ln^{\beta} x=0$（$\alpha>0$，$\beta>0$）

（5）$\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt{4x^2+x}\ln(2+\dfrac{1}{x})-2\ln 2\cdot x]$

（6）$\lim\limits_{x\to 0^+}(2x-\tan x^2)^{\sin x}$

（7）$\lim\limits_{x\to \pi^-}(\pi-x+\sin x)^{\sin x}$

（8）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{(1+\dfrac{1}{x})^{x^2}}$

（9）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+f(x)}{x^2\sin^2 x}=1$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x+f(x)}{x^2\sin^2 x}$.

数列极限的计算

1．通项已知且易于连续化，用**归结原则**

【例】求下列极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})^{\sqrt{n}}$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n+\sin n}}$

2．通项已知但不易连续化，用**夹逼准则**

【例】（Ⅰ）证明：当 $x>0$ 时，$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

（Ⅱ）设 $x_n=(1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{2}{n^2})\cdots(1+\frac{n}{n^2})$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

3．对通项由递推公式给出的，用**单调有界准则**

【例】（Ⅰ）设 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$，求 $f(x)$ 的最小值；

（Ⅱ）设 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限.

极限的应用：无穷小比阶，判别连续与间断

【例 1】设 $p(x)=a+bx+cx^2+dx^3$，当 $x\to 0$ 时，若 $p(x)-\tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小量，求 $p(x)$.

【例 2】若 $\int_0^{x-\ln(1+x)}\dfrac{\sin t^2}{t}dt$ 与 cx^k 为等价无穷小量，求 c， k.

【例 3】 $f(x)=\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点有_____个.

【例 4】设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(x^2-4)}{\sin\pi x}, & x<0,\\ \dfrac{x(x^2-1)}{x-1}, & x\geq 0\end{cases}$

求其间断点并判别类型.

第二讲 一元函数微积分学

核心考点概述

1．概念
2．计算
3．应用
4．证明

一、概念

综述：导数、微分、不定积分、定积分、变限积分、反常积分

1．导数

【注】 $f(x)$ 在 x_0 点处可导

$\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 x_0 点处导数存在

$\Leftrightarrow$ $f'(x_0)$ 存在

命题角度：
（1）具体型（易）
（2）半抽象半具体型（中）
（3）抽象型（难）

【例 1】设 $F(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$，求 $F'(x)$.

【例 2】设 $\delta>0$， $f(x)$ 在 $[-\delta,\delta]$ 上有定义， $f(0)=1$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x)+2xf(x)}{x^2}=0$，

证明： $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，并求 $f'(0)$.

【例 3】设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$∃，能否推出 $f'(0)$ 存在？

【例 4】设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}$∃，能否推出 $f'(0)$ 存在？

【例 5】设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(ax)-f(x)}{x}=b$，$a$，$b$ 为常数，$|a|>1$，证明：$f'(0)=\dfrac{b}{a-1}$.

2．微分　　$y=f(x)$

① $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$　　真实增量

② $A\Delta x$　　线性增量

③ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y-A\Delta x}{\Delta x}=0\Rightarrow y=f(x)$ 在 x_0 处可微

故一点可导 $\Leftrightarrow$ 一点可微

考点：$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$

$$dy=A\Delta x=y'(x_0)\Delta x=Adx$$

【例】设 $f(u)$ 可导，$y=f(x^2)$，当 x 在 $x=-1$ 处取 $\Delta x=-0.1$ 时，Δy 的线性主部为 0.1，则 $f'(1)=$__________.

3．不定积分

①定义：$\forall x \in I$，都有 $F'(x) = f(x)$，则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 I 上的一个原函数.

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

否则：$\exists x_0 \in I$，使得 $F'(x_0) \neq f(x_0)$，则 $F(x)$ 不是 $f(x)$ 在 I 上的原函数.

②原函数存在定理

1）连续；2）跳跃；3）可去；4）无穷；5）振荡.

1）连续函数必有原函数（考过证明）

设 $f(x)$ 在 I 上连续，证明 $F(x) = \int_a^x f(t)dt\ (a, x \in I)$ 必可导，且 $F'(x) = f(x)$，$\forall x \in I$.

2）含跳跃间断点的函数在此区间必没有原函数.

3）、4）同 2）

5）只具体计算，不抽象证明

【例 1】$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

【例 2】$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 是否有原函数？

4．定积分

【例】在$[-1,2]$上，判断以下函数是否存在原函数和定积分？

① $f(x)=\begin{cases} 2, & x>0 \\ 1, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$

② $f(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

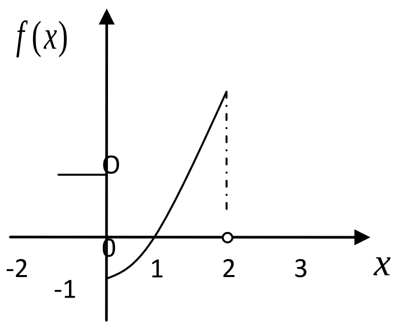
③ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

④ $f(x)=\begin{cases} 2x\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

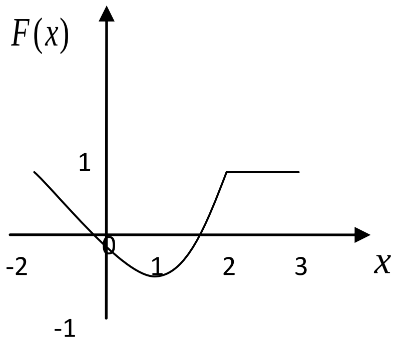
【注】① $f(x)$ 连续$\Rightarrow F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 可导； $f(x)$ 可积$\Rightarrow F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 连续.

$\Rightarrow F(x)=\int_a^x f(t)dt$ “天生”就连续！

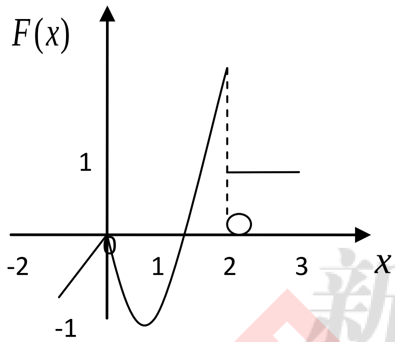
【例】设函数 $y=f(x)$ 在区间$[-1,3]$上的图形为：



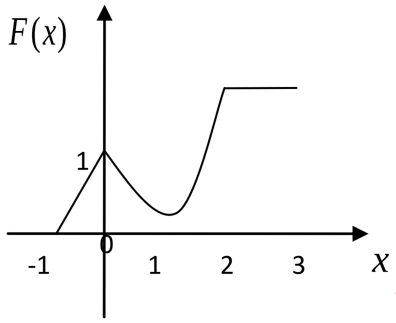
则函数 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 的图形为（　　）



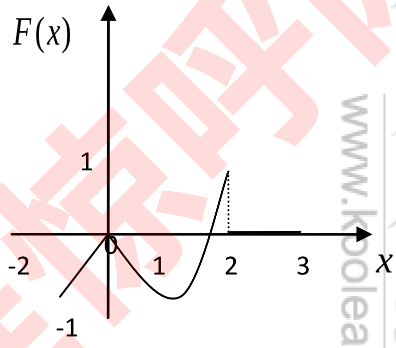
（A）



（B）



（C）



（D）

②关于奇偶、周期、有界、单调

（1）奇偶性

1）若可导函数 $f(x)$ 是奇函数，则 $f'(x)$__________.

2）若可导函数 $f(x)$ 是偶函数，则 $f'(x)$__________.

3）若可积函数 $f(x)$ 是奇函数，则 $F(x)=\begin{cases}\int_0^x f(t)dt \\ \int_a^x f(t)dt(a\neq 0)\end{cases}$

4）若可积函数 $f(x)$ 是偶函数，则 $F(x)=\begin{cases}\int_0^x f(t)dt \\ \int_a^x f(t)dt(a\neq 0)\end{cases}$

【例 1】设 $f(x)$ 是奇函数，除 $x=0$ 外处处连续， $x=0$ 为其第一类间断点，则

$F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 是（　　）

（A）连续的奇函数　　　　（B）连续的偶函数

（C） $x=0$ 为间断点的奇函数　　　　（D） $x=0$ 为间断点的偶函数

【例 2】设 $f(x)$ 是连续的奇函数，$a\neq 0$，则下列函数中一定是 y 的偶函数的个数为______.

① $\int_a^y dx\int_0^x f(u)du$；② $\int_0^y dx\int_a^x f(u)du$；③ $\int_0^y dx\int_a^x x^2 f(u)du$；④ $\int_a^y dx\int_a^x xf(u)du$

（2）周期性

1）若可导函数 $f(x)$ 以 T 为周期，则其导数 $f'(x)$ 也是以 T 为周期的.

2）若可积函数 $f(x)$ 以 T 为周期，则 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 以 T 为周期的充要条件是

$\int_0^T f(x)dx=0$.

【定理】若可积函数 $f(x)$ 以 T 为周期，则 $\int_0^T f(x)dx=\int_a^{a+T} f(x)dx$， $\forall a$.

（3）有界性

【例】设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导，则（　）

（A） $f(x)$ 在 $(X,+\infty)$ 内有界，则 $f'(x)$ 在 $(X,+\infty)$ 内有界

（B） $f'(x)$ 在 $(X,+\infty)$ 内有界，则 $f(x)$ 在 $(X,+\infty)$ 内有界

（C） $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内有界，则 $f'(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内有界

（D） $f'(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内有界，则 $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内有界

③关于定积分的精确定义

【例 1】 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n+1}{n^2+1}+\frac{n+2}{n^2+4}+\frac{n+3}{n^2+9}+\cdots+\frac{n+n}{n^2+n^2})$

【例 2】求 $\lim\limits_{n\to\infty}(b^{\frac{1}{n}}-1)\sum\limits_{i=0}^{n-1}b^{\frac{i}{n}}\sin b^{\frac{2i+1}{2n}}$， $b>1$.

5．变限积分 $\int_a^x f(t)dt$， $\int_x^b f(t)dt$， $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt$

1）属于定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 范畴

2）求导公式

$$(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt)'=f[\varphi_2(x)]\cdot\varphi_2'(x)-f[\varphi_1(x)]\cdot\varphi_1'(x)$$

【例】设 $f(x)$ 是连续函数，则 $\left(\int_0^x tf(x^2-t^2)dt\right)_x' =$______.

6．反常积分

①定义 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

$\int_a^b f(x)dx$，a 为瑕点

②判别依据

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx\begin{cases}p>1\Rightarrow 收敛\\ p\le 1\Rightarrow 发散\end{cases}$$

$$\int_0^1\frac{1}{x^p}dx\begin{cases}p<1\Rightarrow 收敛\\ p\ge 1\Rightarrow 发散\end{cases}$$

【例 1】设 $\alpha>0$，讨论 $\int_0^1\frac{\ln x}{x^\alpha}dx$ 的敛散性.

【例 2】设 $k>0$，讨论 $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^k}$ 的敛散性.

二、**计算**

1．求导

综述：一般题——求导规则、符号写法

高阶题——泰勒公式、莱布尼兹公式

【例 1】设 $f(x)=\begin{cases}x^\alpha\sin\dfrac{1}{x^\beta}, & \beta>0,\ x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，讨论 α，β 满足何种关系时，$f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

【例 2】设 $y=f(x)$ 由 $y^3+xy^2+x^2y+6=0$ 确定，求 $f(x)$ 的极值.

【例 3】设 $y=x^3\sin x$，求 $y^{(6)}(0)$.

【例 4】设 $y=\dfrac{1}{2x+3}$，求 $y^{(n)}(0)$.

【例 5】设 $y=\dfrac{x^n}{1-x}+x\cos^2 x$，求 $y^{(n)}(n\geq 2)$.

2．求积分

综述：凑微分法、换元法、分部积分法、有理函数积分法

【例 1】 $\int \sqrt{\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}}dx$

【例 2】 $\int \dfrac{dx}{(2x+1)\sqrt{3+4x-4x^2}}$

【例 3】 $I=\int \ln(1+\sqrt{\dfrac{1+x}{x}})dx \ (x>0)$

【例 4】 $I=\int \sqrt{\dfrac{e^x-1}{e^x+1}}dx$

【例 5】 $I=\int_3^{+\infty} \dfrac{dx}{(x-1)^4\sqrt{x^2-2x}}$

三、应用

1．几何应用（主体）

（1）导数（极值点、最值点、拐点、单调性、凹凸性、渐近线——性态）

1^0 极值点与单调性

1）判别极值的“一阶”充分条件

①$x\in(x_0-\delta,x_0)$，$f'(x)<0$；$x\in(x_0,x_0+\delta)$，$f'(x)>0 \Rightarrow x_0$ 为极小值点；

②$x\in(x_0-\delta,x_0)$，$f'(x)>0$；$x\in(x_0,x_0+\delta)$，$f'(x)<0 \Rightarrow x_0$ 为极大值点.

【例】已知 $y=y(x)$ 满足 $x^2+y^2y'=1-y'$，$y(2)=0$，求 $y(x)$ 的极值.

2）判别极值的“高阶”充分条件

设 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导，且 $\begin{cases} f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0, \\ f^{(n)}(x_0)\neq 0 \end{cases}$

当 n 为偶数时，若 $\begin{cases} f^{(n)}(x_0)>0 \Rightarrow x_0\text{极小值点} \\ f^{(n)}(x_0)<0 \Rightarrow x_0\text{极大值点} \end{cases}$

【例】设 $y=y(x)$ 满足 $y^{(4)}-3y''+5y=e^{\cos x}$，其中 $y(2)=y'(2)=y''(2)=y'''(2)=0$，讨论 y 在 $x=2$ 的性态.

2^0 拐点与凹凸性

1）判别拐点的“二阶”充分条件

设 $f(x)$ 在 x_0 点的左右邻域内 $f''(x)$ 变号 $\Rightarrow (x_0,f(x_0))$ 为曲线上的拐点.

2）判别拐点的“更高阶”充分条件

设 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导，且 $\begin{cases} f''(x_0)=f'''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0, \\ f^{(n)}(x_0)\neq 0 \end{cases}$

当 n 为奇数时，$(x_0,f(x_0))$ 为拐点.

【例 1】 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的一个拐点为（ ）

（A）$(1,0)$ （B）$(2,0)$ （C）$(3,0)$ （D）$(4,0)$

【例 2】设 $f(x)$ 二阶可导，$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$，则在 $[0,1]$ 上，（ ）

（A） $f'(x)\geq 0$ 时， $f(x)\geq g(x)$

（B） $f'(x)\geq 0$ 时， $f(x)\leq g(x)$

（C） $f''(x)\geq 0$ 时， $f(x)\geq g(x)$

（D） $f''(x)\geq 0$ 时， $f(x)\leq g(x)$

3^0 渐近线——求解程序

1）找 $y(x)$ 的无定义点或定义区间的端点 x_0.

若 $\lim\limits_{x\to x_0} y(x)=\infty$（或 $x\to x_0^+$、 $x\to x_0^-$），则 $x=x_0$ 为铅直渐近线；反之亦反.

2）若 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y(x)=A(\exists)$，则 $y=A$ 为水平渐近线；

若 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y(x)=\infty$，则转向 3）

3）若 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{y(x)}{x}=a\ (\exists,\neq 0)$， $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[y(x)-ax]=b(\exists)$，则 $y=ax+b$ 为斜渐近线.

【例】曲线 $y=\sqrt{4x^2+x}\ln(2+\frac{1}{x})$ 的渐近线有______条.

4^0 最值点

1）在 $[a,b]$ 上，

①令 $f'(x)=0\Rightarrow x_0$ 为驻点；

② $f'(x)$ 不存在 $\Rightarrow x_1$ 不可导点；

③端点 a， b.

$\Rightarrow f(x_0)$、$f(x_1)$、$f(a)$、$f(b)$，比较大小

$\Rightarrow M,m$

2）在 (a,b) 上，①②同上，

③ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$， $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$

【例】求 $f(x)=e^{-x^2}\sin x^2$ 的值域.

（2）积分（测度）

1^0 平面图形的面积

①在直角坐标系下：$S=\int_a^b|y_1(x)-y_2(x)|dx$

②在极坐标系下：$S=\int_\alpha^\beta\frac{1}{2}|r_1^2(\theta)-r_2^2(\theta)|d\theta$

2^0 旋转体的体积

绕 x 轴旋转 $V_x=\int_a^b\pi f^2(x)dx$

绕 y 轴旋转 $V_y = 2\pi\int_a^b x|f(x)|dx$

3^0 平均值 $\bar{y} = \dfrac{\int_a^b y(x)dx}{b-a}$

4^0 弧长 $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$

①直角坐标系下，$S = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$

②极坐标系下，$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2}\,d\theta$

③参数方程下，$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[\phi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt$，其中$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$

5^0 旋转体的侧面积 $S = \int_a^b 2\pi|f(x)|\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$

注：4^0、5^0 均为数一、二考查内容，数三不要求

【例】设曲线 $y = e^{-\frac{1}{2}x}\sqrt{\sin x}$ 在 $x \ge 0$ 部分与 x 轴所围平面区域记为 D，求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积 V .

2．物理应用（数一、二）

综述：① $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$；②静水压力；③抽水做功；④质点引力

【例】一椭圆形钢板正好垂直浸没于水（相对密度 $\rho = 1$ ）中，其短轴垂直于水面，长轴长和短轴长分别为 $2a$ ， $2b$.求钢板一侧所受的静水压力.

2．经济应用（数三）

综述：①边际；②弹性；③积分

【例】设某产品的总成本函数为 $C(x)=100+3x+\frac{1}{2}x^2$，而需求函数为 $p=\frac{100}{\sqrt{x}}$， x 为产量（假定等于需求量）， p 为价格.求（Ⅰ）边际成本；（Ⅱ）边际收益；（Ⅲ）边际利润；（Ⅳ）收益的价格弹性.

四、逻辑（证明）

中值定理“ξ”

不等式证明

方程的根（等式证明）

1．中值定理：研究对象的复杂化、区间的复杂化

【例 1】设 $f(x)$ 在 $[-a,a](a>0)$ 上二阶导数连续， $f(0)=0$.

（Ⅰ）写出 $f(x)$ 的带拉格朗日余项的一阶麦克劳林公式；

（Ⅱ）证明：存在 $\eta\in[-a,a]$，使得 $f''(\eta)=\frac{3\int_{-a}^{a}f(x)dx}{a^3}$.

【例 2】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可导，$f(0)=0$，$f(1)=1$.

证明：存在不同的 ξ_1，ξ_2，$\xi_3 \in (0,1)$，使得 $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)+f'(\xi_3)=3$.

2．方程根

1）存在性：零点定理 $f(a)\cdot f(b)<0 \Rightarrow \xi(\quad)\ni$

2）唯一性：

单调性 $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)\nearrow$；$f'(x)<0 \Rightarrow f(x)\searrow$

罗尔原话：若 $f^{(n)}(x)=0$ 至多有 k 个根，则 $f^{(n-1)}(x)=0$ 至多有 $k+1$ 个根.

【例】证明 $\ln x - e^x + \int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx = 0$ 有且仅有两个根.

3．不等式

【例 4】设 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)\nearrow$，$0 \le g(x) \le 1$.

证明：（Ⅰ）$0 \le \int_a^x g(t)dt \le x-a$，$x \in [a,b]$；

（Ⅱ）$\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx$.